

Prof. Telemaco van Langendonck publicou livros sobre charneiras plásticas em lajes :

- Charneiras Plásticas em Lajes de Edifícios - ABCP - 1966
- Charneiras Plásticas em Lajes Retangulares de Pontes - ABCP- 1965
- Lajes Poligonais Uniformemente Carregadas - ABCP - 1968
- Teoria Elementar das Charneiras Plásticas - Vol I - ABCP - 1970
- Teoria Elementar das Charneiras Plásticas - Vol II - ABCP - 1971
- Lajes em Forma de **T** ou **L** - ABCP - 1972

# CHARNEIRAS PLÁSTICAS EM LAJES DE EDIFÍCIOS

TELEMACO VAN LANGENDONCK

## 1. Objetivo

Pretende-se, neste trabalho, apresentar fórmulas e tabelas para o cálculo das lajes de edifícios em regime elasto-plástico. Já são muitos os artigos de autores brasileiros<sup>(1)</sup> dedicados ao dimensionamento das lajes de edifícios pelo método das charneiras plásticas; não é demais, entretanto, apresentar-se mais uma variante de aplicação dêsse método, pois com isso se amplia o campo de escolha do calculista, o qual poderá eleger, em cada caso, o processo que mais lhe convier.

---

(1) Como sejam, por exemplo, em ordem cronológica inversa:

Mario Franco — “Cálculo rápido de lajes retangulares contínuas em regime de ruptura”, Engenharia, n. 259, Jan. 1965, p. 6/11.

Aderson Moreira da Rocha — “Cálculo prático das lajes contínuas pelo método de ruptura”, Estrutura, n. 51, 1963, p. 243/274. (C)

Samuel Chamecki — “Cálculo das lajes no regime de ruptura”, Enciclopédia Técnica Universal, vol. VI, Editora Globo, Pôrto Alegre, 1962, p. 53/166.

Italo Federico — “Critério econômico de cálculo, no regime de ruptura” Estrutura, n. 45, 1962, p. 353/372.

Décio Leal de Zagottis — “Cálculo de lajes contínuas pelo método das linhas de ruptura”, Estrutura, n. 44, 1962, p. 251/278. (B)

Jayme Ferreira da Silva e Paulo de Souza — “Lajes retangulares de concreto armado”, Estrutura, 1962, n. 43, p. 120/170.

Samuel Chamecki — “Influência da disposição das barras no dimensionamento econômico das lajes armadas em cruz”. Estrutura, n. 36, 1961, p. 367/383.

Ivo Wolff — “Dimensionamento de lajes contínuas de concreto armado pelo método das linhas de ruptura”, Estrutura, n. 30, 1960, p. 273/310. (A)

Aderson Moreira da Rocha — “Cálculo das lajes contínuas no regime de ruptura”. Estrutura, n. 19, 1959, p. 179/201.

Samuel Chamecki — “Cálculo, no regime de ruptura, das lajes de concreto armadas em cruz”, Editôra Guaira, Curitiba, 1948.

Libânio Miranda Pinheiro - "Charneiras Plásticas em Lajes com Forma de T"  
Estudo Experimental - São Carlos - 1980

[http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/1981ME\\_LibanioMirandaPinheiro.pdf](http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/1981ME_LibanioMirandaPinheiro.pdf)

**Obs. :** Os ensaios feitos por Libânio Miranda Pinheiro - "Charneiras Plásticas em Lajes com Forma de T - Estudo Experimental " em 1980 , confirmam a configuração de ruptura de lajes em forma de T. Ver figuras abaixo.

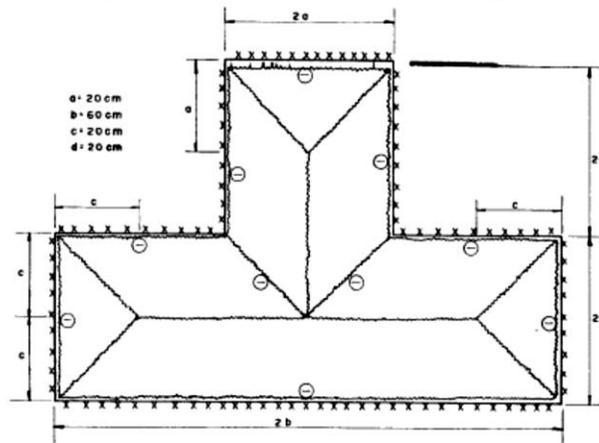
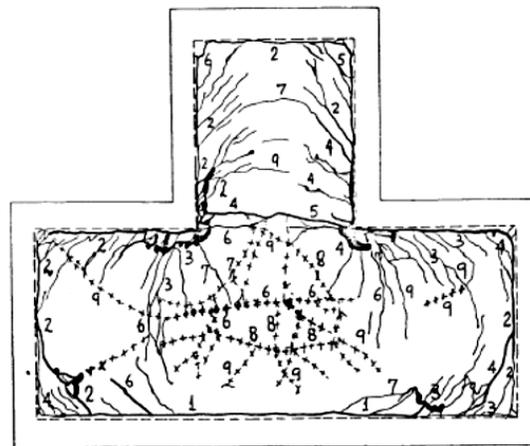
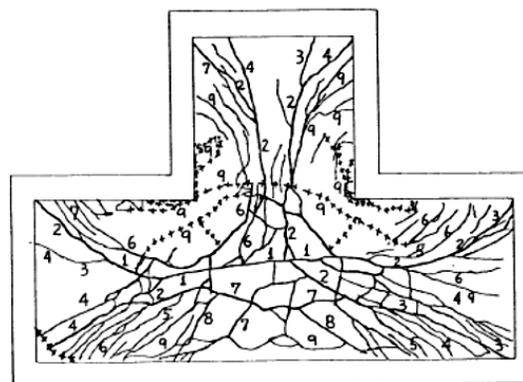


FIGURA 2.10 - Configuração possível do modelo com forma de T



VISTA DA FACE SUPERIOR

— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.12- Configuração de ruína da laje S2L3

Ver o link : [http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/1981ME\\_LibanioMirandaPinheiro.pdf](http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/1981ME_LibanioMirandaPinheiro.pdf)

**Comentário :** A teoria das charneiras plásticas em lajes permite colocar as armaduras onde elas tenham maior eficiência, tanto no estado limite de ruptura como na redução das aberturas de fissuras.

O presente estudo limita-se a considerar as lajes retangulares<sup>2</sup> engastadas em vigas em todo seu contôrno<sup>3</sup> e solicitadas por cargas uniformemente distribuídas em tôda sua extensão, como se sói admitir no caso de lajes de edificios<sup>4</sup>. Para garantir o referido engastamento, que as torna mais econômicas, basta prolongar a armadura superior além da viga de apoio (ou para dentro desta, se ela estiver na borda do pavimento) de comprimento igual ao exigido para ancoragem das barras.

## 2. Hipóteses de cálculo

Serão admitidas no cálculo das lajes tôdas as hipóteses em que se baseia o método das charneiras plásticas, suposto já conhecido. Admitir-se-á ainda serem tôdas as lajes engastadas na viga de contôrno, como se disse no § 1, o que permite dimensionar cada uma delas separadamente das demais. A armadura superior junto às bordas em contato de duas lajes adjacentes pode ser formada pelas mesmas barras de aço, se forem iguais; se forem desiguais, as barras em excesso da armadura maior, que se prolonguem sôbre a outra laje, podem ser interrompidas depois de atingirem o necessário comprimento de ancoragem (veja-se a nota<sup>7</sup>, *in fine*). A armadura necessária para resistir ao momento negativo será, por sua vez, estendida até a posição determinada pela condição de poder, a parte da laje sôbre a qual ela não se prolonga, funcionar como laje livremente apoiada.

---

(2) Não seria possível em trabalho como êste tratar de todos os formatos usuais de lajes, por isso só se consideram as lajes retangulares que são as mais comuns. Fácil entretanto será estender os conceitos aqui expendidos aos outros casos. Veja-se, por exemplo, quanto às respectivas configurações de ruína: Telemaco van Langendonck -- "Lajes poligonais uniformemente carregadas". (no prelo)

(3) Para lajes retangulares com um lado engastado e os outros três livres, ou com dois lados opostos engastados e os outros dois livres, uma das soluções em regime elasto-plástico, para cargas uniformemente distribuídas, coincide com a do regime elástico: podem ser tratadas como se fôssem vigas em balanço ou engastadas nas extremidades.

(4) Havendo parede de pêso pequeno em relação à carga total da laje, de modo que praticamente não se altere a configuração de ruína desta, pode-se fazer o cálculo distribuindo aquele pêso por tôda a laje, mas multiplicando-o por 1,5 se a parede fôr paralela ao lado menor ou, em caso contrário, por:

$$3 \frac{2b - a}{3b - a}.$$

Para o cálculo das lajes retangulares usar-se-á a fórmula simplificada das charneiras bisetoras dos ângulos<sup>5</sup> (veja-se notação no § 3):

$$m + m' = \frac{3b/\sqrt{\lambda} - a}{b/\sqrt{\lambda} + a} \frac{qa^2}{24} = \frac{3k - 1}{k + 1} \frac{qa^2}{24} = K \frac{qa^2}{24}. \quad (2.1)$$

Na pesquisa da armadura mais econômica, procurar-se-á tornar mínima a expressão<sup>6</sup>

$$\Omega = \Sigma (\kappa + \lambda) (m + m') S_i \quad (2.2)$$

onde a somatória se estende a tôdas as regiões da laje. Cada uma destas, de área  $S_i$ , é caracterizada por ter a mesma armadura ( $\lambda$  e  $m + m'$  constantes). O coeficiente  $\kappa$ , que representa a razão (menor que 1) das armaduras necessárias para resistirem ao mesmo momento fletor com as alturas úteis da laje nas duas direções paralelas aos seus lados, será tomada, nas aplicações numéricas, igual a 0,9. Como se põe a armadura correspondente ao maior dos momentos  $m$  e  $km$  (ou  $m'$  e  $km'$ ) mais perto da face mais próxima da laje e se toma  $\lambda \leq 1$ , tem-se o consumo de aço, suposto proporcional a  $(m + m')$ , também proporcional a  $(\kappa + \lambda)$ , donde poder representar-se com a fórmula dada a grandeza característica do consumo de aço na laje.

### 3. Notações

São as seguintes as notações usadas neste trabalho (veja-se também a fig. 1):

$a, b$  = comprimentos dos lados da laje retangular<sup>7</sup>, com  
 $b \geq a$ .

---

(5) Para cantos retangulares de lajes engastadas uniformemente carregadas não há praticamente influência de possível bifurcação da charneira.

(6) Nessa expressão desprezam-se os trechos das barras da armadura que servem para a ancoragem, pois seu volume pode ser suposto variável linearmente com o volume total da armadura, para tôdas as soluções com barras de mesmo diâmetro. Também se pressupõe, com 2.2, como soi fazer-se, a proporcionalidade entre a secção da armadura de tração e o momento fletor, para dada altura útil da secção.

(7) Medidos sôbre o plano vertical médio das vigas de apoio. Quando a largura desta fôr maior que a espessura  $d$  da laje, pode fazer-se essa medida sôbre os planos verticais que se afastam da face interna da viga de  $0,5 d$ . A partir desses planos é que se mede o comprimento de ancoragem das barras de armadura.

$a_0, b_0$  = comprimentos dos lados (paralelos respectivamente a  $a$  e a  $b$ ) do retângulo que ocupa o centro da laje, caracterizado por não ter armadura superior<sup>8</sup>.

$a', b'$  = largura das faixas ocupadas pela armadura superior, tais que  $a = a_0 + 2a', b = b_0 + 2b'$ .

$a_r, b_r$  = lados reduzidos (só usados no fim do § 4).

$$\alpha = \frac{a_0}{a}.$$

$$\beta = \frac{b_0}{b}.$$

$m$  = momento fletor positivo de plastificação, por unidade de comprimento, das secções da laje paralelas aos lados de comprimento  $b$ .

$m'$  = idem, negativo.

$\lambda m$  = momento fletor positivo de plastificação<sup>9</sup>, por unidade de comprimento, das secções de laje paralelas aos lados de comprimento  $a$ .

$\lambda m'$  = idem, negativo.

$q$  = carga uniformemente distribuída sôbre tôda a laje, já multiplicada pelo coeficiente de segurança.

$$k = \frac{b}{a \sqrt{\lambda}} \text{ (não menor que a unidade).}$$

$$k_0 = \frac{b_0}{a_0 \sqrt{\lambda}} \text{ (não menor que a unidade).}$$

$$K = \frac{3k - 1}{k + 1}.$$

$\kappa, \Omega, S_i$  = grandezas definidas no § 2.

$$\chi = \frac{b^2}{a^2 \kappa}.$$

---

(8) Não se considera, nessas medidas, o prolongamento das barras da armadura, necessário à sua ancoragem.

(9) O fator  $\lambda$  é o chamado "coeficiente de ortotropia".

#### 4. Fórmulas gerais

Aplicando 2.1 à laje da fig. 1, obtém-se, considerando-a na sua totalidade e, depois, só na parte sem armadura superior:

$$m + m' = \frac{3k - 1}{k + 1} \frac{qa^2}{24}, \quad m = \frac{3k_0 - 1}{k_0 + 1} \frac{qa^2_0}{24} \quad (4.1)$$

donde, por subtração, com as notações do § 3:

$$m' = \left( \frac{3k - 1}{k + 1} - \frac{3k_0 - 1}{k_0 + 1} \alpha^2 \right) \frac{qa^2}{24}. \quad (4.2)$$

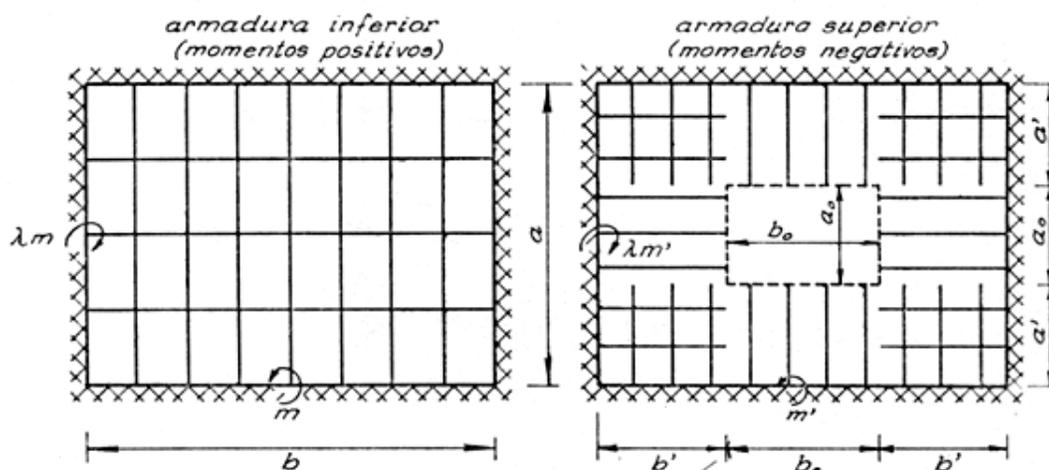


Fig. 1

As 4.1 e 4.2 fornecem os valores de  $m$  e  $m'$  necessários ao dimensionamento da laje. Mas, nessas fórmulas, há ainda três parâmetros arbitrários:  $k = b/a \sqrt{\lambda}$  (porquanto, se  $a$  e  $b$  são dados,  $\lambda$  não o é),  $\lambda_0 = k \beta/\alpha$  e  $\alpha$ ; os quais se podem substituir por  $\lambda$ ,  $b_0$  e  $a_0$ . Significa isso que são de livre escolha os lados  $a_0$  e  $b_0$  do retângulo central sem armadura superior e o índice de ortotropia  $\lambda$ , com o qual se determina a armadura normal aos lados de comprimento  $a$ . A escolha dessas grandezas pode ser feita visando à solução mais econômica, isto é, ao mínimo de  $\Omega$  de 2.2:

$$\Omega = (\kappa + \lambda) [(m + m')(ab - a_0b_0) + ma_0b_0]. \quad (4.3)$$

Solução satisfatória obtém-se fazendo  $k_0=1$  e pondo

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3k-1}{k+1}} = \frac{\sqrt{K}}{2}, \quad a_0 = \alpha a \quad (4.4)$$

a que corresponde

$$\beta = \frac{k_0\alpha}{k} = \frac{\alpha}{k} = \frac{a_0\sqrt{\lambda}}{b}, \quad b_0 = \beta b = a_0 \sqrt{\lambda}. \quad (4.5)$$

Achados assim  $a_0$  e  $b_0$ , volta-se a 4.3 e deriva-se em relação a  $\lambda$ , lembrando que  $m$ ,  $m'$ ,  $a_0$  e  $b_0$  são, através de  $k$ , função de  $\lambda$ . Essa derivada se anula para

$$\frac{91k^3 + k^2 + 9k + 3}{96k^4 + 15k^3 + 13k^2 - 11k - 9} k^2 = \frac{b^2}{\kappa a^2} = \chi, \quad (4.6)$$

equação cuja solução, já expressa em função de  $K$ , é muito próxima de

$$K \cong \frac{20}{9} [\sqrt{(\chi - 0,5)(\chi + 3,2)} - \chi] \quad (4.7)$$

lembrando-se que, por definição

$$K = \frac{3k-1}{k+1}, \quad k = \frac{1+K}{3-K}, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{b}{\kappa a}. \quad (4.8)$$

Levados êsses valores a 4.1 e 4.2 obtêm-se finalmente:

$$m = \frac{K}{4} \frac{qa^2}{24}, \quad m' = \frac{3K}{4} \frac{qa^2}{24} = 3m. \quad (4.9)$$

Todos os resultados da solução achada estão reunidos na Tabela anexa<sup>10</sup>.

Há ainda a verificar a possibilidade de não se prolongar a armadura superior ao longo de tôda a faixa que lhe é paralela ao longo dos

---

(10) Como se disse, calculada para  $\kappa = 0,9$ . Se se quiser usar outro valor de  $\kappa$ , basta que se entre na primeira coluna da Tabela com  $a/b$  multiplicado por  $\sqrt{\kappa/0,9}$  e que se multiplique  $\lambda m$  e  $\lambda m'$  por  $\kappa/0,9$ .

Tabela para o dimensionamento de lajes retangulares — Carga uniformemente distribuída  $q$

Notações da fig. 1 ( $b \geq a$ )

A armadura mais próxima da face é a paralela ao lado  $a$  (veja-se a nota <sup>10</sup>)

$\frac{a}{b}$	$\frac{m =}{10000} \times$	$\frac{\lambda_m =}{10000} \times$	$\frac{m' =}{10000} \times$	$\frac{\lambda_{m'} =}{10000} \times$	$\frac{a' =}{1000} \times$	$\frac{b' =}{1000} \times$
0,25	292	13	875	39	82	478
0,30	283	18	850	53	88	469
0,35	274	23	823	69	94	459
0,40	264	28	792	85	102	448
0,45	253	34	760	102	110	436
0,50	242	40	727	119	119	423
0,55	231	45	692	136	128	409
0,60	219	51	657	153	138	395
0,62	214	53	643	159	142	389
0,64	209	55	628	166	146	383
0,66	205	57	614	172	150	377
0,68	200	60	599	179	154	371
0,70	195	62	584	185	158	365
0,72	190	64	569	191	162	359
0,74	185	66	555	198	167	353
0,76	180	68	540	204	171	346
0,78	175	70	525	210	176	340
0,80	170	72	510	216	181	334
0,82	165	74	495	222	186	327
0,84	160	76	480	227	191	320
0,86	155	78	464	233	196	314
0,88	150	79	449	238	201	307
0,90	145	81	434	244	206	301
0,92	139	83	418	249	211	294
0,94	134	85	403	254	217	288
0,96	129	86	387	259	222	281
0,98	124	88	372	265	228	275
1,00	119	90	356	270	233	268
1,05*	104	94	313	281	250	250

(\*) Só para interpolação, se se quiser usar  $\kappa > 0,9$  (nota <sup>10</sup>).

lados da laje, isto é, de se poder usar a armadura como está representada na fig. 1 e não como a da fig. 2. Até aqui o cálculo foi feito

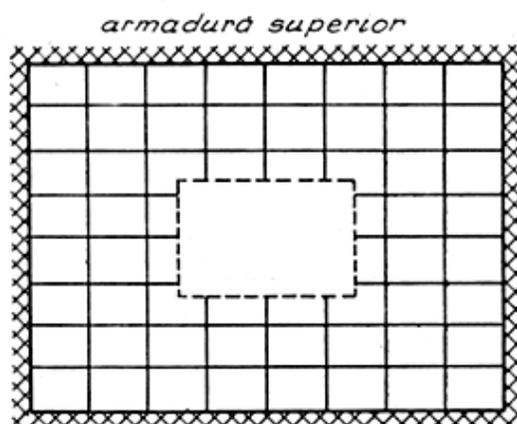


Fig. 2

prevendo-se a distribuição desta última figura. Para mostrar que é possível a supressão daquela armadura nos trechos referidos<sup>11</sup>, basta verificar-se se a solução adotada (4.4 + 4.5 + 4.8 + 4.9) por si só já impede a configuração de ruína das figs. 3a e 3b. É o que se mostra a seguir.

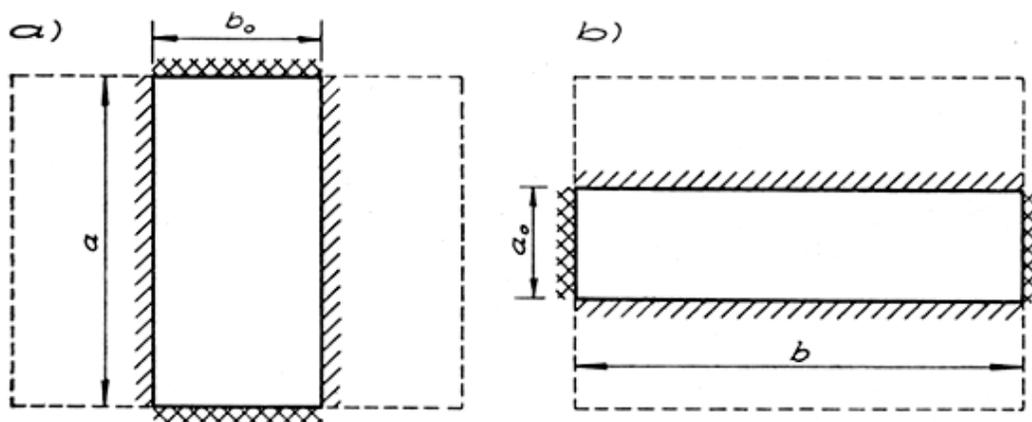


Fig. 3

Na fig. 3a representa-se uma laje livremente apoiada ao longo dos lados de comprimento  $a$  e engastada nos lados de comprimento

(11) A influência de tal supressão sobre o valor de  $\lambda$  que torna mínimo o índice de custo  $\Omega$  não pode ser considerada, pois levaria a um aumento da razão  $m'/m = 3,0$  que não é admissível, pois esse número já é um limite superior que não convém seja ultrapassado, para evitar-se fissuração exagerada.

$b_0$ . Para seu cálculo usam-se os conhecidos lados reduzidos (com  $m' = 3m$  e  $b_0 = a_0 \sqrt{\lambda}$ ):

$$\left\{ a_r = \frac{a}{\sqrt{1 + m'/m}} = \frac{a}{2} = 0,5a, \quad b_r = \frac{b_0}{\sqrt{\lambda}} = a_0 = \alpha a \right.$$

com  $\alpha$  de 4.4 maior que  $1/2$ , isto é,  $b_r > a_r$ . Daí a carga de ruína  $q_r$ :

$$\begin{aligned} q_r &= \frac{24}{a_r^2} \frac{3b_r - a_r}{b_r + a_r} (m + m') = \\ &= \frac{96}{a^2} \frac{3\alpha - 0,5}{\alpha + 0,5} (m + m') > 96 \frac{m + m'}{a^2} \end{aligned}$$

e, de 4.9 e 4.4 ( $m + m' = K qa^2/24 = \alpha^2 qa^2/6$ )

$$q_r > 16 \alpha^2 q > 4q > q.$$

Do mesmo modo, para a laje da fig. 3b, se tem:

$$a_r = a_0, \quad b_r = \frac{b}{\sqrt{\lambda} \sqrt{1 + m'/m}} = \frac{a_0}{2\beta}$$

com  $\beta$  de 4.5 menor que  $1/2$ , isto é,  $b_r > a_r$ . Daí,

$$q_r = \frac{24}{a_0^2} \times \frac{3/(2\beta) - 1}{1/(2\beta) + 1} (m + m') > 24 \frac{m + m'}{a_0^2}$$

e, com  $m + m' = \alpha^2 qa^2/6 = qa_0^2/6$ :

$$q_r > 4q > q,$$

como se queria demonstrar.

## 5. Exemplo 1.º

Como primeiro exemplo vai considerar-se uma das lajes do pavimento que serve de exemplo para o livro de Löser<sup>12</sup>. Tem ela as dimensões  $a = 4,8$  m,  $b = 6,0$  m e deve ser calculada para  $q = 1100$  kg/m<sup>2</sup>.

(12) Benno Löser — "Bemessungsverfahren", W. Ernst e Sohn, Berlim, 1951, p. 287.

Com  $a/b = 0,8$  obtém-se imediatamente da tabela anexa (fig. 4)<sup>13</sup>:

$$m = 0,0170 \times 1100 \times 4,8^2 = 431 \text{ kgm/m} \quad (878)$$

$$\lambda m = 0,0072 \times 1100 \times 4,8^2 = 182 \text{ kgm/m} \quad (562)$$

$$m' = 0,0510 \times 1100 \times 4,8^2 = 1293 \text{ kgm/m} \quad (1500)$$

$$\lambda m' = 0,0216 \times 1100 \times 4,8^2 = 457 \text{ kgm/m} \quad (1020 \text{ e } 930)$$

$$a' = 0,181 \times 4,8 = 0,87 \text{ m}, \quad b' = 0,334 \times 6,0 = 2,00 \text{ m}.$$

Entre parênteses são dados os valores, também em kgm/m, dos momentos obtidos por Löser para o caso mais favorável, que é o das lajes centrais e que, como se vê, são todos maiores que os achados pelo método das charneiras plásticas.

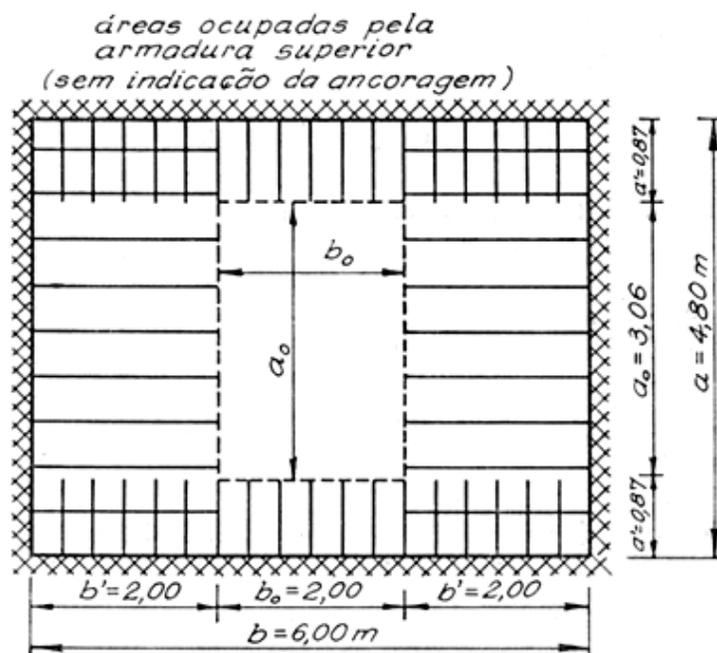


Fig. 4

Para completar o exemplo pode imaginar-se que se imponha de início: A) ou que deva ser a laje isótropa (isto é,  $\lambda = 1$ ), ou B) que se fixem os comprimentos  $a' = 0,2a$  e  $b' = 0,2b$ . Nesses casos não se usa mais a tabela, mas se empregam diretamente as fórmulas 4.1 e 4.2.

A) Se se deve ter  $\lambda = 1$ , faz-se  $k = b/a = 1,25$ , ficando livre a escolha de  $k_o$ , que se pode fazer igual a 1, como foi considerado

(13) Convém lembrar que no cálculo em regime de ruptura, o coeficiente de segurança deve ser aplicado antes do dimensionamento; assim, neste exemplo, se o  $q$  dado ainda não o foi, devem sê-lo os momentos fletores. Em compensação não se usam tensões admissíveis para os materiais, mas suas tensões de ruptura.

conveniente do ponto de vista econômico (donde, no caso, por ser  $\lambda = 1$ , ter-se  $b_0 = a_0$ ):

De 4.4 vem:

$$a_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2,75}{2,25}} a = \frac{\sqrt{11}}{6} \times 4,8 = 2,65 \text{ m} = b_0$$

$$a' = \frac{a - a_0}{2} = 1,075 \text{ m}, \quad b' = \frac{b - b_0}{2} = 1,675 \text{ m},$$

e de 4.1:

$$m + m' = \frac{3,75 - 1}{1,25 + 1} \frac{qa^2}{24} = \frac{11}{9} \frac{1100 \times 4,8^2}{24} = 1291 \text{ kgm/m}$$

$$\lambda m = m = \frac{q a_0^2}{24} = \frac{1100 \times 2,65^2}{24} = 322 \text{ kgm/m},$$

$$\lambda m' = m' = 969 \text{ kgm/m}.$$

B) Fixados  $a_0 = 2,88 \text{ m}$  e  $b_0 = 3,60 \text{ m}$ , com  $b_0/a_0 = b/a = 1,25$ , tem-se  $k = k_0 = 1,25/\sqrt{\lambda}$  e, de 4.1:

$$\frac{m + m'}{m} = \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{25}{9}, \quad \frac{m'}{m} = \frac{16}{9} = 1,778$$

$$m = \frac{3,75 - \sqrt{\lambda}}{1,25 + \sqrt{\lambda}} \frac{1100 \times 2,88^2}{24} = 380,16 \frac{15 - 4\sqrt{\lambda}}{5 + 4\sqrt{\lambda}} \text{ kgm/m}.$$

Ainda resta a escolher o valor de  $\lambda$ ; se se procurar o mínimo de  $\Omega$  de 2.2, tem-se:

$$\Omega = (\kappa + \lambda) mab + 2\kappa m'a'b + 2\lambda m'ab' \quad (5.1)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \Omega &= mab \left( 0,9 + \lambda + 1,8 \times 0,2 \times \frac{16}{9} + 2 \times 0,2 \times \frac{16}{9} \lambda \right) = \\ &= 42,24 ab \frac{15 - 4\sqrt{\lambda}}{5 + 4\sqrt{\lambda}} (\lambda + 0,9) \times 15,4 \end{aligned}$$

cuja derivada em relação a  $\sqrt{\lambda}$  se anula para:

$$4(15 - 4\sqrt{\lambda})(\lambda + 0,9) = (5 + 4\sqrt{\lambda})(-3,6 + 30\sqrt{\lambda} - 12\lambda)$$

ou seja, quando

$$\sqrt{\lambda} = 0,508$$

donde

$$m = 701 \text{ kgm/m}, \quad m' = 1,778 m = 1246 \text{ kgm/m}$$

$$\lambda m = 0,2586 \times 701 = 181 \text{ kgm/m}, \quad \lambda m' = 0,2586 \times 1246 = 322 \text{ kgm/m}.$$

É interessante comparar, do ponto de vista econômico, as três soluções em regime elasto-plástico<sup>14</sup>. Usando 5.1, acha-se:

Solução da tabela:

$$(0,9 + 0,424) \times 431 \times 4,8 \times 6,0 + 1,8 \times 1293 \times 0,87 \times 6,0 + \\ + 0,848 \times 1293 \times 4,8 \times 2,00 = 39.110$$

Solução A:

$$1,9 \times 322 \times 4,8 \times 6,0 + 1,8 \times 969 \times 1,075 \times 6,0 + 2 \times 969 \times \\ \times 4,8 \times 1,675 = 44.950$$

Solução B:

$$1,159 \times 701 \times 4,8 \times 6,0 + 1,8 \times 1246 \times 0,96 \times 6,0 + 0,517 \times \\ \times 1246 \times 4,8 \times 1,20 = 40.030$$

## 6. Exemplo 2.º

Como segundo exemplo estudam-se as lajes L1 e L6 do exemplo apresentado nos trabalhos citados na nota<sup>1</sup> com as indicações (A), (B) e (C). A laje L6 é nesses artigos calculada como engastada em todos os lados e a laje L1 como livremente apoiada em dois lados adjacentes e engastada nos outros dois. Suas dimensões são iguais a  $a = 3,5$  metros e  $b = 4,5$  metros para a L6 e a  $a = b = 4$  metros para a L1; a carga de ambas é  $q = 500 \text{ kg/m}^2$ . No quadro que se dá mais adiante comparam-se os  $\Omega$  (fórmula<sup>15</sup> 5.1) dos oito casos, usando para  $a_0$  e  $b_0$  as dimensões da placa que só com armadura inferior tem a mesma carga de ruína da laje tóda (como uma das dimen-

---

(14) Para a solução em regime elástico, se se tomasse  $a'/a = b'/b = 0,2$ , achar-se-ia:

$$\Omega = (0,9 \times 878 + 562) \times 4,8 \times 6,0 + 1,8 \times 1500 \times 0,96 \times 6,0 + (930 + \\ + 1020) \times 4,8 \times 1,20 = 65.727$$

valor 68% maior que o da primeira solução em regime elasto-plástico.

(15) Escrita sob a forma seguinte, para levar em conta o fato de haver dois valores ( $m_1'$  e  $m_2'$ ) para  $m'$  e dois ( $\lambda m_1'$  e  $\lambda m_2'$ ) para  $\lambda m'$ :

$$\Omega = \kappa m a b + \lambda m a b + \kappa (m_1' + m_2') a' b + (\lambda m_1' + \lambda m_2') a b'.$$

sões  $a_0$  e  $b_0$  é arbitrária, usou-se a condição econômica  $k_0 = 1$ , donde  $a_0 = \sqrt{24m/q}$  e  $b_0 = \sqrt{24\lambda m/q}$ . Esse retângulo de lados  $a_0$  e  $b_0$  foi disposto no meio da laje L6 e junto aos apoios livres da laje L1. Ainda, para efeito de comparação, também se calculou o  $\Omega$  referente à laje L6 quando se põe  $a_0 = 0,6 a$  e  $b_0 = 0,6 b$ , como se costuma fazer freqüentemente na prática (designado este caso por L'6 no quadro).

Usando a tabela, para  $a/b = 1$  e  $a/b = 3,5/4,5 = 0,778$ , acham-se respectivamente:

#### L1

$$\begin{aligned} m &= 0,0119 \times 500 \times 16 = 95 \text{ kgm/m} \\ \lambda m &= 0,0090 \times 500 \times 16 = 72 \text{ kgm/m} \\ m' &= 0,0356 \times 500 \times 16 = 285 \text{ kgm/m} \\ \lambda m' &= 0,0270 \times 500 \times 16 = 216 \text{ kgm/m} \\ a' &= 0,233 \times 4 = 0,93 \text{ m} \\ b' &= 0,268 \times 4 = 1,07 \text{ m} \end{aligned}$$

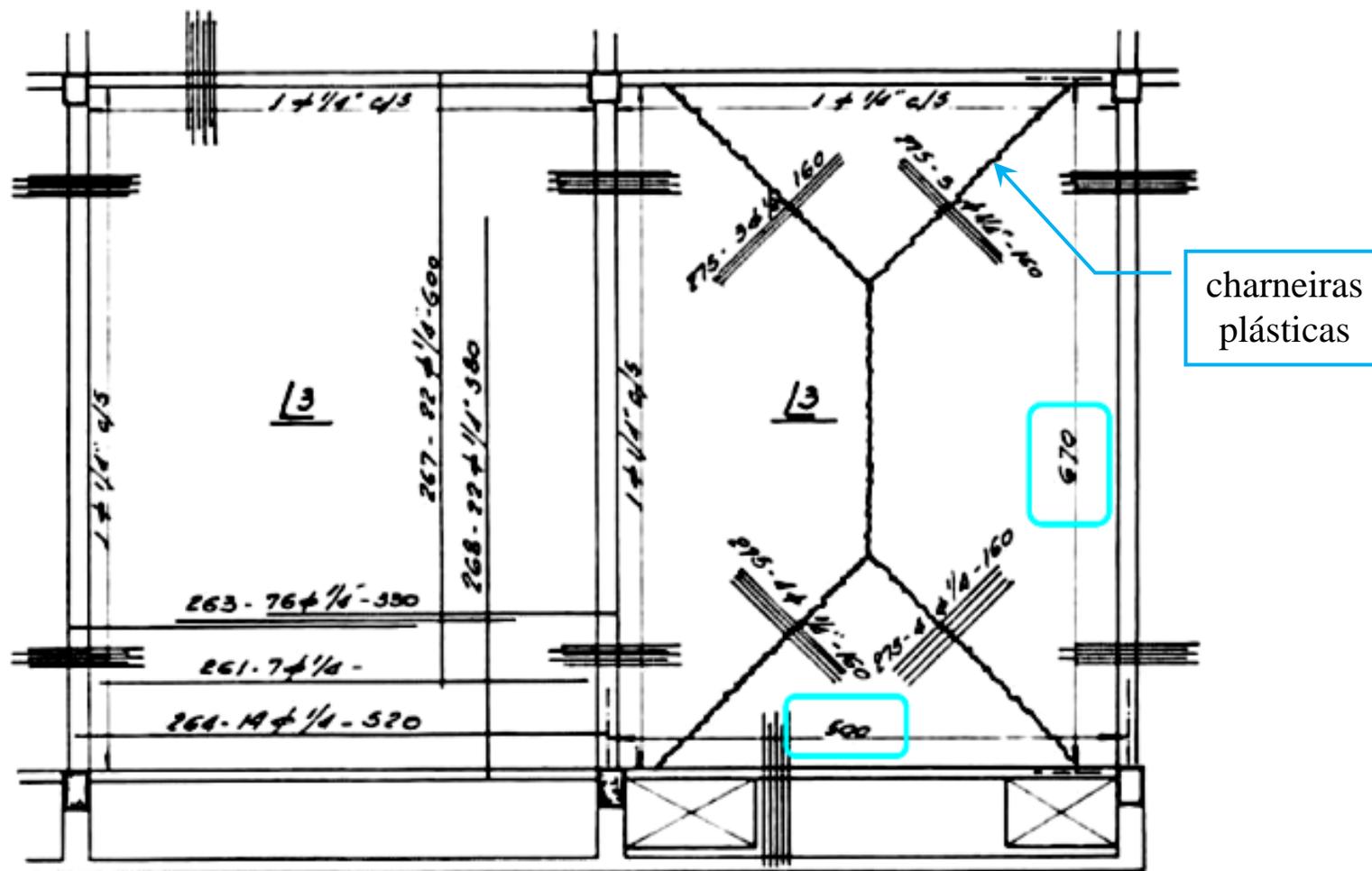
#### L6

$$\begin{aligned} m &= 0,0176 \times 500 \times 3,5^2 = 108 \text{ kgm/m} \\ \lambda m &= 0,0070 \times 500 \times 3,5^2 = 43 \text{ kgm/m} \\ m' &= 0,0527 \times 500 \times 3,5^2 = 323 \text{ kgm/m} \\ \lambda m' &= 0,0209 \times 500 \times 3,5^2 = 128 \text{ kgm/m} \\ a' &= 0,175 \times 3,5 = 0,61 \text{ m} \\ b' &= 0,341 \times 4,5 = 1,54 \text{ m} \end{aligned}$$

	Solução do texto		Solução A			Solução B			Solução C		
	L1	L6	L1	L6	L'6	L1	L6	L'6	L1	L6	L'6
$m =$	95	108	228	209		146	178		247	215	
$\lambda m =$	72	43	228	126		60	107		247	129	
$m_1' =$	285	323	160	147		241	125		173	162	
$m_2' =$	285	323	0	157		0	304		0	162	
$\lambda m_1' =$	216	128	160	154		241	170		173	117	
$\lambda m_2' =$	216	128	0	147		0	85		0	114	
$a' =$	93	61	69	17	70	135	29	70	56	15	70
$b' =$	107	154	69	102	90	230	112	90	56	101	90
$\Omega =$	6277	5184	7770	6231	6757	6451	5712	6228	8245	6093	6726

(momentos em kgm/m e comprimentos em cm)

Livro do Prof. A. C. Vasconcelos - "Emilio Henrique Baumgart suas realizações e recordes.  
Uma vida dedicada ao concreto armado" .



Armaduras projetadas nas lajes e sua comparação com as charneiras plásticas adotadas nos projetos atuais.

**Comentário de Eduardo Thomaz :** *No Edifício A Noite, construído em 1930, o Eng. Emilio Baumgart já colocava algumas armaduras adicionais nas charneiras plásticas, nos cantos das lajes. ( ver desenho acima )*