



Flambagem das barras das armaduras de pilares

Ensaio de Emil Moersch (1902)

Esfuerzos de compresión axiales

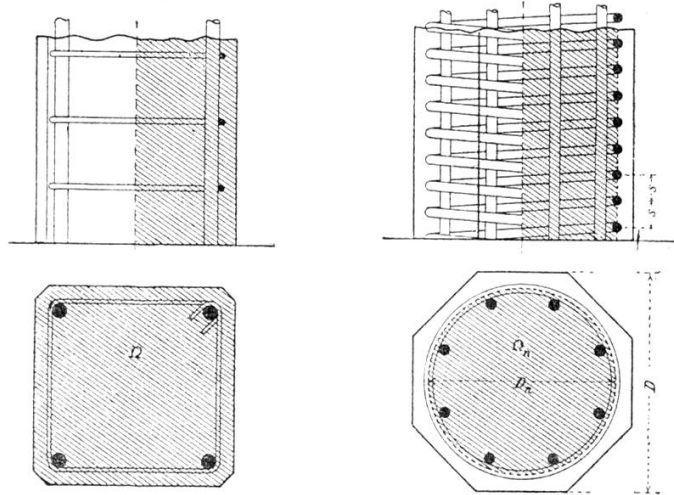
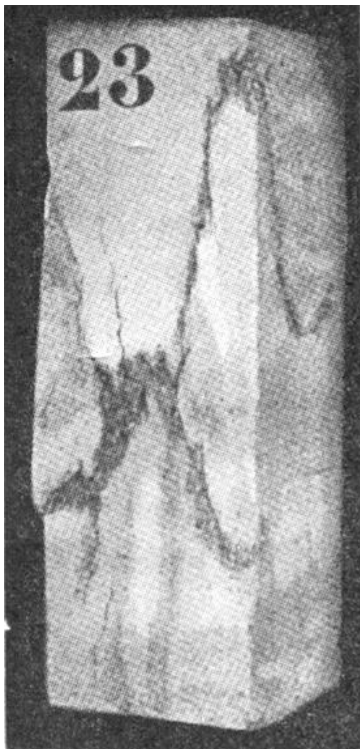


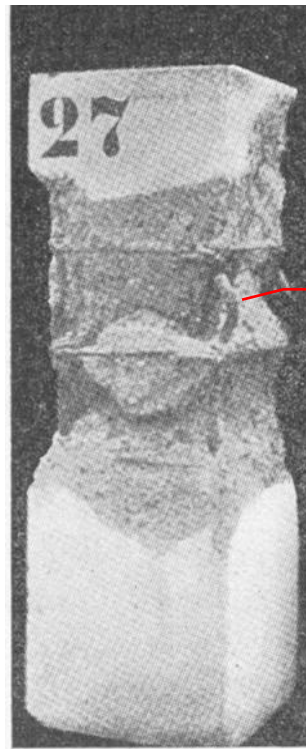
Fig. 120. — Pilar ordinario de hormigón armado

Fig. 121. — Pilar de hormigón zunchado



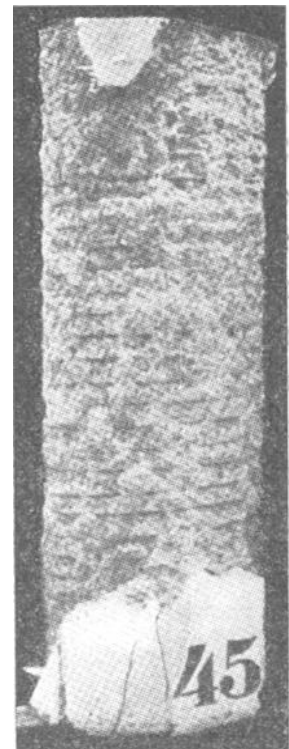
Ruptura de Prisma de concreto
sem armadura

Ruptura em forma de cunhas



Ruptura de um pilar
comum de concreto
armado

* A barra de aço,
comprimida, flamba
entre os estribos.



Ruptura de um pilar de
concreto cintado

O concreto do cobrimento
rompe e o núcleo permanece
íntegro.



Critério adotado por Emil Moersch para fixar o espaçamento máximo entre os estribos de Pilares.

Para que as armaduras possam ser consideradas na resistência de um pilar, é necessário que não ocorra a flambagem das barras. Os estribos reduzem o comprimento de flambagem das barras, aumentando a capacidade de carga.

Fórmula de Euler para a carga de **flambagem elástica** de uma barra comprimida.

$$P = A \times \sigma = \frac{\pi^2 \times E \times I}{(L_{\text{flambagem}})^2}; \quad \text{Para uma barra circular: } A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad I = \frac{\pi d^4}{64};$$

d = diâmetro das barras longitudinais da armadura do pilar

- Moersch introduziu um coeficiente de segurança = 5,0

$$\sigma_{\text{aço}} = \frac{\pi^2 \times (E_{\text{aço}}) \times \left(\frac{I}{A} = \frac{d^2}{16}\right)}{(S_{\text{coef.de segurança}} = 5,0) \times (L_{\text{flambagem}})^2}$$

- Moersch considerou o comprimento de flambagem das barras da armadura do pilar como sendo igual ao espaçamento entre os estribos. (Obs.: O comprimento de flambagem das barras da armadura do pilar é menor que o espaçamento entre os estribos. Essa hipótese de Moersch, é, pois, conservadora.)

$$\text{espaçamento entre estribos} = L_{\text{flambagem}} = d \times \sqrt{\frac{\pi^2 \times E_{\text{aço}}}{(S_{\text{coef.de segurança}} = 5,0) \times 16 \times \sigma_{\text{aço}}}}$$

$$\text{espaçamento entre estribos} = L_{\text{flambagem}} = d \times \sqrt{\frac{\pi^2 \times E_{\text{aço}}}{80 \times \sigma_{\text{aço}}}} \approx d \times \sqrt{\frac{10 \times E_{\text{aço}}}{80 \times \sigma_{\text{aço}}}}$$

Essa é a fórmula do livro de Emil Moersch de 1908 (ver página 8)

$$e = \text{espaçamento entre estribos} \leq d \times \sqrt{\frac{10 \times E_{\text{aço}}}{80 \times \sigma_{\text{aço}}}}$$

Com E aço = 210 GPa obtemos :

σ na barra de aço (MPa)	espaçamento / diâmetro da barra (e/d)
40	25.4
60	20.8
80	18.0
100	16.1
120	14.7
140	13.6
160	12.7
180	12.0
200	11.4 ≈ 12

Tensões no aço CA50

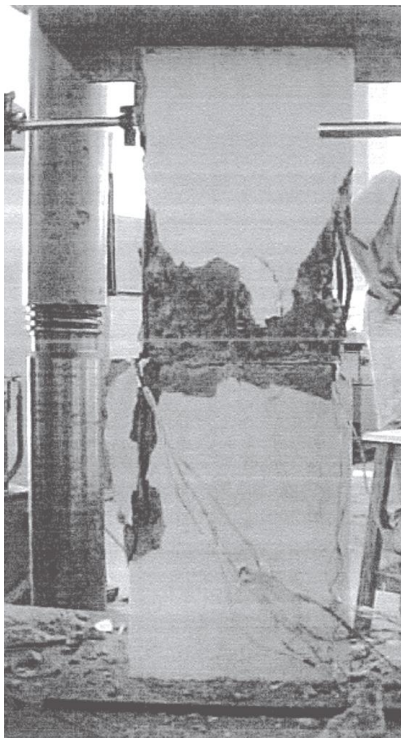
Exemplo do livro do Moersch (ver pag.8)

A NBR 6118 recomenda e=12 d para o aço CA50

- A tensão nas barras de aço CA50 pode atingir, em serviço, valores como 200 MPa, devido aos efeitos da retração e da fluência do concreto comprimido do pilar. O valor de e ≤ 12d da NBR.6118 é justificado.



Outros exemplos de flambagem das barras da armadura de pilares.



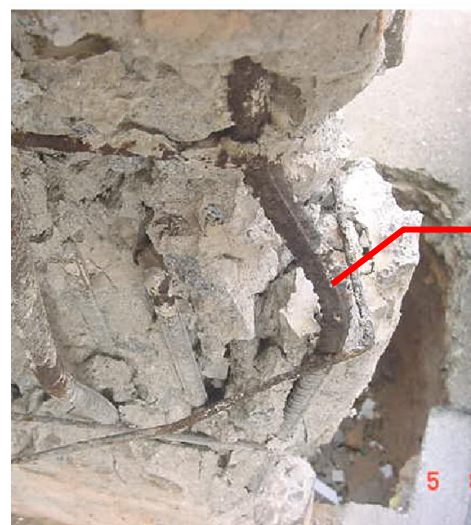
Exemplo 1 : Ensaios de Laboratório

Eng. Carlos Eduardo Pereira

Pilares de Concreto : Análise do comportamento do estribo suplementar

Tese de Mestrado - UNICAMP - Campinas 2001

www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000219012



A barra de aço,
flamba entre
os estribos.

Exemplo 2 : Obra de recuperação de pilar de um edificio

a cargo do Eng. Marcos Carnaúba

marcarnauba@gmail.com



Outros exemplos de flambagem das barras da armadura de pilares.



(a)

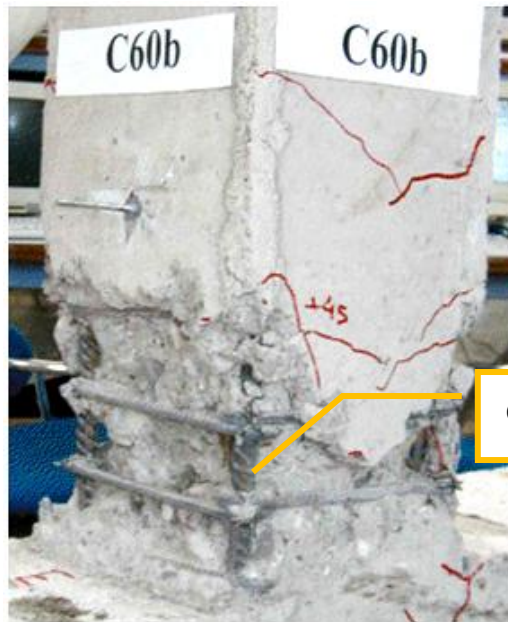


(b)

e = espaçamento entre estribos ; ϕ = diâmetro do ferro longitudinal



(c)



(d)

Exemplo 3 : Ensaios de Laboratório

EXPERIMENTAL STUDY OF THE EFFECT OF REINFORCEMENT STABILITY ON THE CAPACITY OF REINFORCED CONCRETE COLUMNS



Outros exemplos de flambagem das barras da armadura de pilares.



Exemplo 4 : Ensaio de Laboratório

Effect of Stirrups on Behavior of Normal and High Strength Concrete Columns

J. Němeček, P. Padevět, Z. Bittnar

Acta Polytechnica Vol. 44 No.5–6/2004

<http://ctn.cvut.cz/ap/download.php?id=429>



CONCRETE-STEEL CONSTRUCTION

(DER EISENBETONBAU)

BY

PROFESSOR EMIL MORSCH

Of the Zurich Polytechnic, Zurich, Switzerland

AUTHORIZED TRANSLATION FROM THE

THIRD (1908) GERMAN EDITION, REVISED AND ENLARGED

BY

E. P. GOODRICH

Consulting Engineer

NEW YORK

THE ENGINEERING NEWS PUBLISHING COMPANY

LONDON: ARCHIBALD CONSTABLE AND COMPANY, LTD.

1909



356

CONCRETE-STEEL CONSTRUCTION

One round rod 1 cm. in diameter with an area of 0.79 cm² in the upper part of the section, is sufficient for the negative moment of -15,625. Then

$$x = \frac{15 \times 0.79}{35} \left[\sqrt{1 + \frac{2 \times 35 \times 37.5}{15 \times 0.79}} - 1 \right] = 4.71 \text{ cm.},$$

$$\sigma_e = \frac{15,625}{0.79 \times 35.93} = 550 \text{ kg/cm}^2.$$

If it is desired to ascertain in this case, and for 0.4l of the first span, what is the tensile stress in the concrete, there follows,

$$x = \frac{\frac{35 \times 40^2}{2} + \frac{115 \times 10^2}{2} + 15 \times 14.14 \times 35}{35 \times 40 + 115 \times 10 + 15 \times 14.14} = 14.9 \text{ cm.},$$

$$y = 14.9 - 5 + \frac{10^2}{6(29.8 - 10)} = 10.74 \text{ cm.}$$

Then, according to equation (33a),

$$275,000 = \frac{\sigma_{bd}}{14.9} \left[\frac{150}{2} \times 10 \times 10.74(29.8 - 10) + \frac{35}{5}(4.9^3 + 25.1^3) + 15 \times 14.14 \times 20.1^2 \right].$$

$$275,000 = 29,000 \sigma_{bd};$$

$$\sigma_{bd} = \frac{275,000}{29,000} = 9.5 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{bs} = \frac{25.1}{14.9} \times 9.5 = 16 \text{ kg/cm}^2.$$

Exemplo de cálculo.

The determination of the shearing and adhesive stresses is made as in the last example.

8. A reinforced concrete column 30×30 cm. in section, with 4 round rods of 16 cm² area, is centrally loaded with 30,000 kg. The induced stresses in concrete and steel are to be calculated.

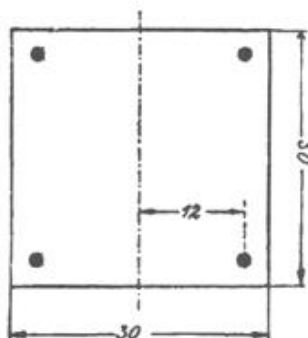


FIG. 14.

According to equations (43) to (45) there will result

$$30,000 = \sigma_b(30 \times 30 + 15 \times 16);$$

$$\sigma_b = \frac{30,000}{1140} = 26.3 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_c = 15 \times 26.3 = 395 \text{ kg/cm}^2.$$

9. The same column is to be investigated for buckling; conditioned on its height being 4 m.

In Euler's formula

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{s^2},$$



APPENDIX

357

$E = \frac{2,100,000}{15} = 140,000$ is the value assumed for concrete and $s =$ the factor of safety = 10.

$$J = \frac{30^4}{12} + 15 \times 4 \times 4.0 \times 12^2 = 102,060,$$

so that

$$P = \frac{10 \times 140,000 \times 102,060}{10 \times 160,000} = 89,303 \text{ kg.}$$

Since, in the problem, P is only 30,000 kg., no risk is experienced of the buckling of the column. In order that no buckling should occur in the reinforcement, the condition must exist that

Coefficiente de Segurança = 5,0

$$\frac{\pi^2 EJ}{5l^2} = Fk.$$

The stress k of the steel has been found to approximate 395 kg/cm². Since, for round rods

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{and} \quad J = \frac{\pi d^4}{64},$$

it follows that

$$\frac{J}{F} = \frac{d^2}{16},$$

and the permissible length of rod to prevent buckling is

$$l = d \sqrt{\frac{10 \times 2,100,000}{80 \times 395}} = 25.8d.$$

Espaçamento entre estribos
Ver dedução na pág. 02

In order to avoid a buckling of the rods, they are to be connected by ties at distances not exceeding $25.8 \times 2.26 = 58$ cm. According to Sec. 15, No. 6, the extreme tie spacing should not be greater than 30 cm.

- Os estribos, além de pouco espaçados, devem ser bem “fechados”, com ganchos grandes e bem ancorados no interior do concreto do pilar.
- As barras dos estribos não devem ter um diâmetro pequeno.
- Usar um diâmetro \approx metade da bitola da armadura longitudinal.
Exemplo : Barra 20mm , Estribo 10mm



Mais tarde, **Emil Moersch** formulou a **flambagem inelástica** das barras dos pilares, com tensões de compressão elevadas e pequenos índices de esbeltez.

Tradução para o espanhol da edição de 1932

— 154 —

Si está dada la carga de una columna, admitiendo una sección transversal de hierro F que debe estar comprendida entre 0,8 y 3 % de Ω , la sección transversal necesaria de hormigón será

$$\Omega = \frac{P}{35} - 15 F.$$

Dadas las dimensiones del pilar, se calculan entonces los coeficientes de trabajo por las fórmulas

$$\sigma_h = \frac{\Omega + 15 F}{P} \quad \text{y} \quad \sigma_f = 15 \cdot \sigma_h.$$

cercos =
estribos
pandeo =
flambagem

Se acostumbra, en general, en los cálculos estáticos, tomar para Ω la sección transversal completa de la columna sin deducir la sección transversal de los hierros longitudinales, lo que en rigor se traduce en un aumento del coeficiente n en 1 ó del límite de aplastamiento hasta 2 688 Kg/cm². La inexactitud ocasionada por ello no tiene importancia en la práctica, pues la armadura tan sólo representa algunas centésimas y el límite de aplastamiento es de por sí variable.

Los cercos tienen la finalidad de asegurar los hierros longitudinales contra un pandeo prematuro. Con una carga pequeña el hormigón que lo rodea ofrece una protección contra el pandeo de los hierros, pero cuando en escalones elevados de carga el hormigón se encuentra próximo a su estado de rotura no puede ya ofrecer mucha resistencia lateral contra el pandeo. Por esta razón, los hierros de las columnas deberán estar colocados lo más rectilíneos posible y protegidos contra el pandeo por una distribución suficientemente espesa de los cercos, de manera que puedan ser utilizados, en lo posible, hasta el límite de aplastamiento.

Se creía antes que con una distancia entre los cercos igual al grueso de la columna se adquiría desde luego la resistencia cúbica del hormigón, pues entonces se había suprimido su dilatación transversal a distancias iguales como en los cubos bajo la presión de la prensa. Los ensayos no han confirmado esta apreciación, pues en los cubos de prueba los esfuerzos de rozamiento que existen en las superficies de presión impiden la dilatación transversal de una manera mucho más eficaz que un cerco que lo rodee, que puede doblarse hacia fuera en su tramo recto sin presentar para ello gran resistencia. En los apoyos de hormigón armado, con cercos a las distancias usuales, se presentan por esta razón también en los ensayos superficies de fractura oblicuas análogas y fracturas de forma piramidal como en los prismas de hormigón solo.

El cálculo de la distancia entre los cercos como longitud para la flexión lateral de los hierros longitudinales conduce a grandes distancias totalmente inadmisibles si se utiliza la fórmula de la flexión lateral de *Euler*. Con la fatiga de 2 520 Kg/cm² a que está sometido el hierro bajo la carga máxima, la fuerza que corresponde a un hierro redondo de grueso d es

$$P_f = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 2\,520$$



— 155 —

y si para este esfuerzo debe existir una seguridad sencilla contra la flexión lateral, para una longitud l igual a la distancia entre los cercos, se tendrá

$$P_f = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 2520 = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot E \cdot I^1)$$

de donde la longitud será

$$l = \pi \sqrt{\frac{E I}{\frac{\pi}{4} d^2 \cdot 2520}} = 3,14 \sqrt{\frac{2\,160\,000 \cdot \frac{\pi}{64} d}{\frac{\pi}{4} d^2 \cdot 2520}} = 23 d.$$

Esta distancia sobrepasa en mucho la longitud usual. El cálculo según la fórmula de *Euler* tampoco es ya exacto, pues la relación $l:i$ que en este caso será $23 d : \frac{d}{4} = 92$, es menor que 110 y por esta razón debe aplicarse la fórmula de la flexión lateral de *Tetmajer*, que es $\sigma_k = 3\,200 - 12 \cdot \frac{l}{i}$. Como $\sigma_k = \sigma_s = 2\,520 \text{ Kg/cm}^2$, obtendremos, pues,

$$l = \frac{3\,200 - 2\,520}{12} \cdot i = \frac{680}{12} \cdot \frac{d}{4} = \approx 14 d.$$

La distancia máxima de $12 d$ indicada en el Reglamento que corresponde a la medida adoptada ya antes en construcciones cuidadosamente ejecutadas, asegura, pues, incluso desde el punto de vista teórico, una resistencia suficiente de los hierros longitudinales a la flexión lateral.

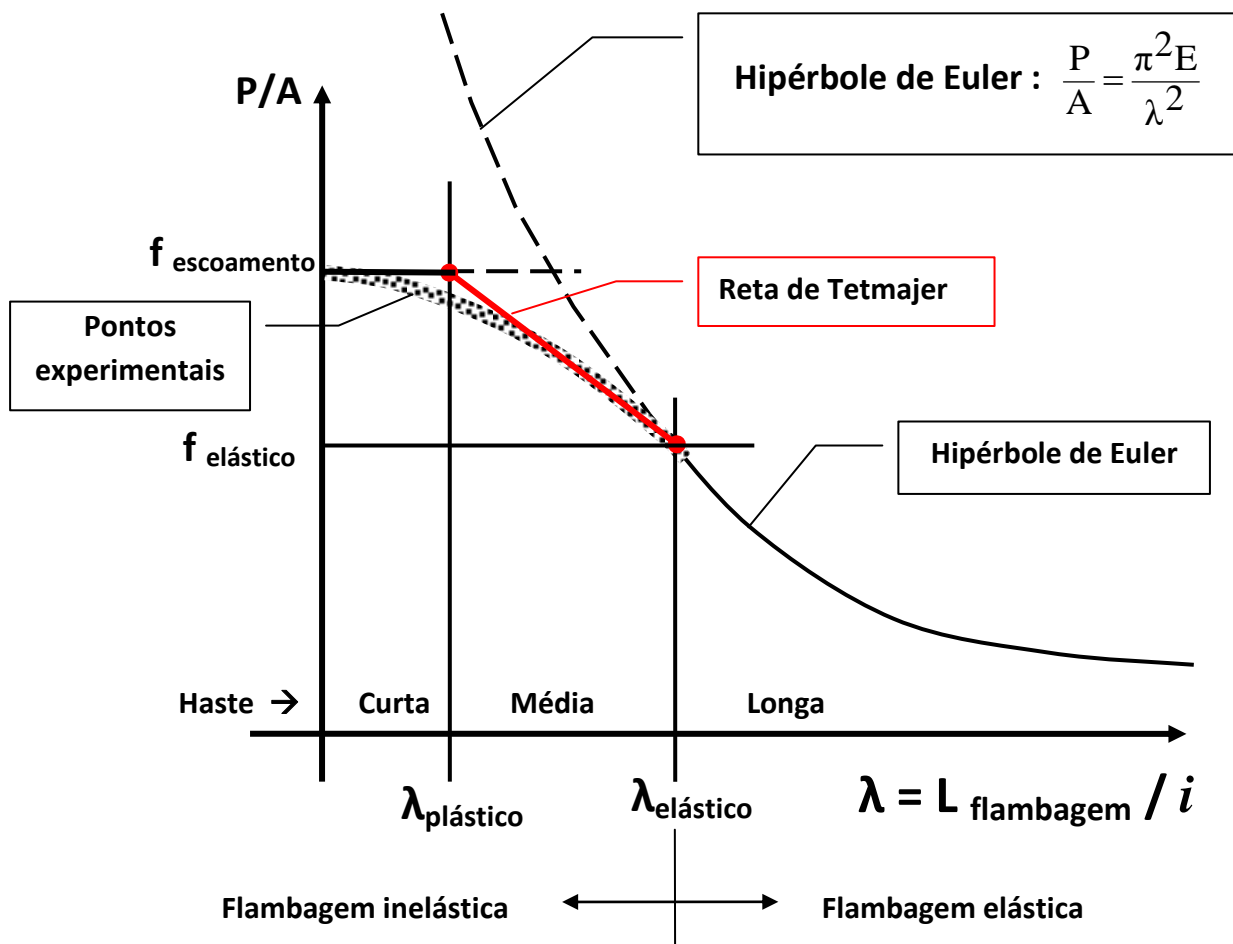
O espaçamento de **12 d** entre os estribos das barras longitudinais dos pilares é baseado no cálculo da *flambagem inelástica* dessas barras, usando a formulação de Tetmajer. (Ver anexo 1)



Anexo 1 – Flambagem inelástica – Formulação de Tetmajer (1902)

Reta de Tetmajer para flambagem inelástica

para pequena esbeltez $\left(\lambda = \frac{l \text{ flambagem}}{i} \right)$

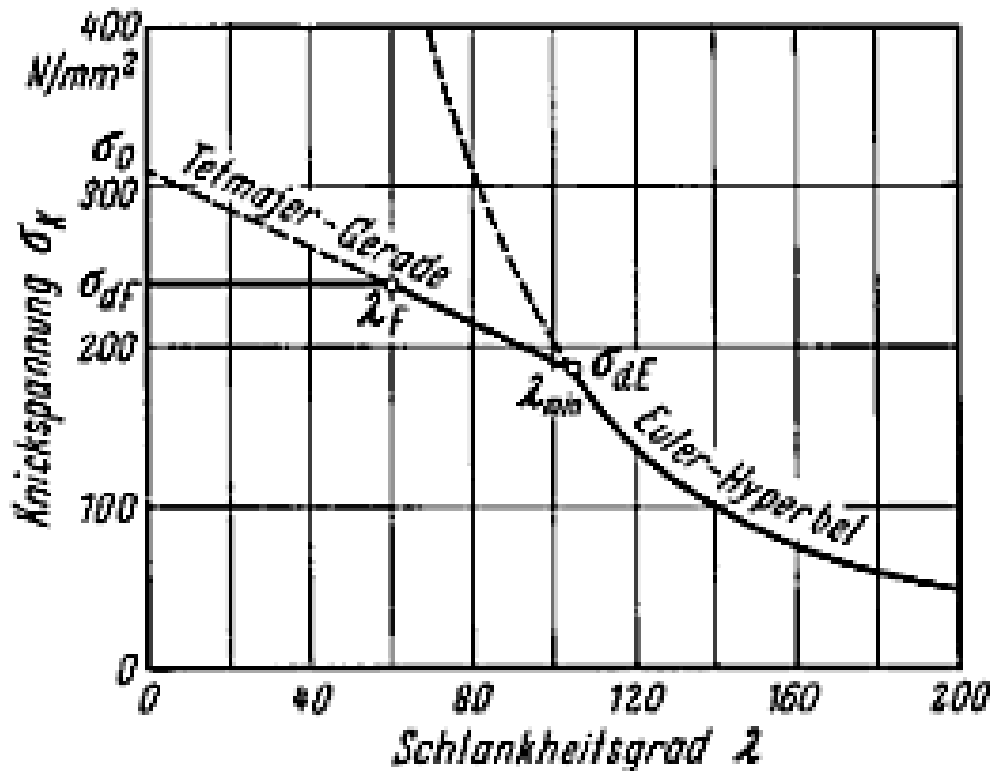


Para o aço usado por Moersch nas barras das armaduras dos pilares :

$$\lambda_{\text{elástico}} = 110 ; \quad \text{Reta : } f = a + b \lambda = 3200 - 12 \lambda \quad (\text{kgf/cm}^2)$$



Exemplo de Reta de Tetmajer para um **Aço Doce Comum**.



$$f_{\text{escoamento}} = 2400 \text{ kgf/cm}^2 ; \lambda_{\text{plástico}} = 60$$

$$f_{\text{Euler}} = 1880 \text{ kgf/cm}^2 ; \lambda_{\text{elástico}} = 105$$

$$f_{\text{Tetmajer}} = a + b \lambda = 3093 - 11,55 \lambda$$

Para o aço usado por Moersch nas barras das armaduras dos pilares :
 $\lambda_{\text{elástico}} = 110$; **tensão $f = a + b \lambda = 3200 - 12 \lambda$ (kgf/cm^2)** que é
muito semelhante à equação de Tetmajer, acima, para o **aço doce**.

A recomendação atual é igual à do início do concreto armado em 1902 :

- Nos pilares, usar barras longitudinais de grande diâmetro.
- Bem “amarradas” pelos estribos.
- Estribos pouco espaçados.



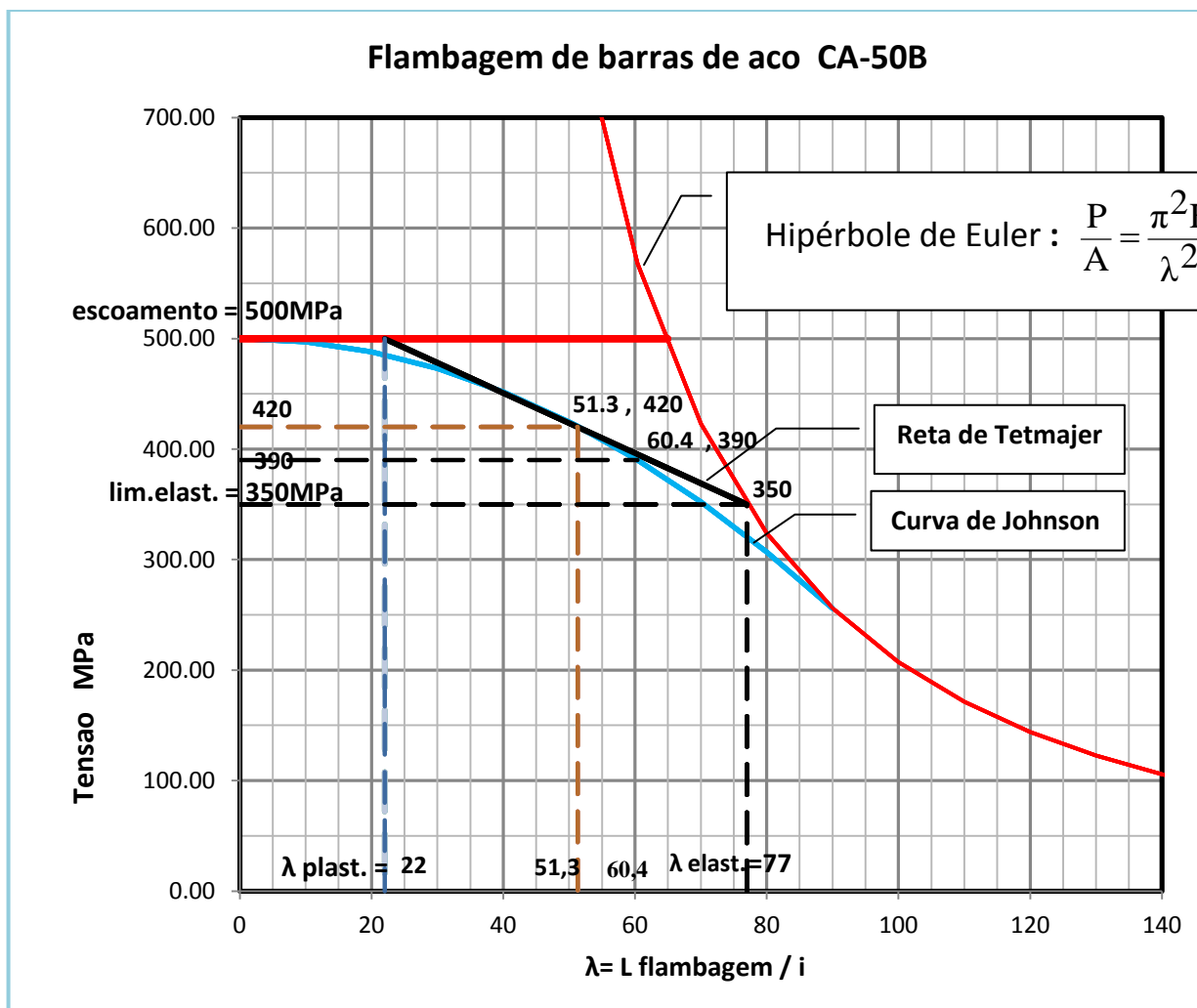
Anexo 2 – Aço atualmente usado CA50B .

Flambagem inelástica – Formulação de Tetmajer (1902)

Diagrama de Tetmajer para o aço CA50B com $f_y=500\text{MPa}$

Segundo a NBR, o limite de proporcionalidade = 70% de 500MPa = 350 MPa

$$\lambda_{\text{elastico}} = \pi \times \sqrt{\frac{E_{\text{aco}}}{\sigma_{\text{proporcionalidade}}}} = \pi \times \sqrt{\frac{E_{\text{aco}}}{0,7 \times \sigma_{\text{escoamento}}}} = \pi \times \sqrt{\frac{210000 \text{ MPa}}{0,7 \times 500 \text{ MPa}}} = 77$$





A curva de Johnson é :

$$\sigma = \sigma_e - \frac{(\sigma_e)^2}{4\pi^2 \times E} \times \lambda^2, \text{ sendo } \sigma_e = 500 \text{ MPa a tensão de escoamento à compressão do aço.}$$

A equação da reta de Tetmajer para o aço CA50B é: $\sigma(\text{MPa}) = 560 - 2,727 \times \lambda$

Considerando que nos pilares o encurtamento do concreto na carga última =

$= \varepsilon_{\text{plastificacao}} = 2 \times 10^{-3}$, obtemos na curva Tensão \times Deformação do aço CA50B, para

$\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$, a tensão no aço $\sigma(\text{MPa}) = 390 \text{ MPa}$.

Na reta de Tetmajer : $\sigma(\text{MPa}) = 390 \text{ MPa} = 560 - 2,727 \times \lambda$ obtemos $\lambda = 63,3$;

Na curva de Johnson obtemos $\lambda = 60,4$

$$\text{Dai resulta } \lambda = 60,4 = \left(\frac{L}{i = d/4} \right)$$

e o espaçamento entre estribos : $L = (60,4 / 4) d = 15,1 d$

Se considerarmos, como usual, para o aço CA50A a tensão na armadura = 420 MPa

Teremos $\lambda = 51,3$

e o espaçamento entre estribos : $L = 51,3 / 4 d = 12,8 d$

Logo :

A recomendação da NBR6118 com $L < 12d$ satisfaz às condições de segurança à flambagem das barras dos pilares.



RESUMO



(ver pag.3)

A recomendação atual é igual à do início do concreto armado :

- Usar barras longitudinais de grande diâmetro.
- Bem “amarradas” pelos estribos.
- Estribos pouco espaçados.
 - Os estribos, além de pouco espaçados ($e < 12d$), devem ser bem “fechados”, com ganchos grandes e bem ancorados no interior do concreto do pilar.
 - As barras dos estribos não devem ter um diâmetro pequeno.
 - Usar um diâmetro \approx metade da bitola da armadura longitudinal.
Exemplo : Barra longitudinal 20mm , Estribo 10mm

+++