



ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA
DE PONTES E ESTRUTURAS

1.º SEMINÁRIO NACIONAL
DE PONTES E ESTRUTURAS

BOLETIM N.º 1

OUTUBRO
1963



“RESISTÊNCIA AO ESFÔRÇO CORTANTE NO CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO”

Fernando Luiz Lobo B. Carneiro

1. Introdução

1.1 — A chamada “*teoria da treliça*” de *Mörsch* foi uma das concepções mais fecundas na história do concreto armado. Há mais de meio século tem sido a base do dimensionamento das armaduras transversais — estribos e ferros inclinados — das vigas de concreto armado, e está muito longe de ser abandonada ou considerada superada. As pesquisas modernas sugerem apenas modificações ou complementações da teoria de *Mörsch*, mantendo no entanto o seu aspecto fundamental: a *analogia entre a viga de concreto armado, depois de fissurada, e a treliça*. A armadura principal de tração e a zona de compressão constituem respectivamente os banzos tracionado e comprimido dessa treliça. As “bielas” de concreto, limitadas pelas fissuras inclinadas, são as diagonais comprimidas. A armadura transversal, constituída de estribos ou barras dobradas, faz o papel de montantes ou diagonais tracionadas.

A teoria da treliça de *Mörsch* não tem campo de aplicação limitado ao estágio II; pode ser mantida, e até mesmo com maiores fundamentos, no estágio III, permitindo o cálculo da armadura transversal na ruptura. É de fato, desde a sua origem, uma *teoria de ruptura*.

1.2 — As pesquisas modernas demonstram no entanto que em geral a teoria clássica de *Mörsch*, conduz a uma armadura transversal superior à necessária, errando assim a favor de segurança.



Foram então propostas várias correções ou generalizações da teoria clássica da treliça, a fim de eliminar, tanto quanto possível, aquele erro, e possibilitar armaduras transversais mais econômicas. Entre as principais correções propostas para a teoria de *Mörsch* citemos:

a) a consideração de que uma parte do esforço cortante é suportada pela zona de compressão, que fica deste modo solicitada por um estado múltiplo de tensões.

b) a consideração de bielas de concreto com inclinação inferior à de 45° , admitida por *Mörsch*.

c) a consideração da rigidez à flexão das bielas de concreto, supostas engastadas na zona de compressão, e que trabalham, nesse caso, à flexão composta.

1.3 — Si por um lado a teoria de treliça de *Mörsch* continua sendo a base do cálculo da armadura transversal, o mesmo não se dá, no entanto, com a teoria de *Mörsch* relativa ao cálculo do esforço cortante capaz de produzir a primeira “fissura de cisalhamento”, e portanto, do esforço cortante que pode ser suportado por uma viga *sem armadura transversal*.

As experiências modernas demonstram que o *cálculo da tensão principal de tração no estágio II*, ao nível da linha neutra, — tomada por *Mörsch* como critério de ruptura por esforço cortante quando não há armadura transversal —, *não tem sentido*. O erro cometido, ao contrário do primeiro, é contra a segurança. Vigas sem armadura transversal, dimensionadas de acordo com essa teoria clássica de *Mörsch*, podem romper sob a ação do esforço cortante antes de ser atingida a carga de ruptura por flexão. As pesquisas modernas demonstram que nas vigas sem armadura transversal é em geral a *zona de compressão*, solicitada por *estado múltiplo de tensão*, que resiste ao esforço cortante: trata-se de resistência a *ação combinada do esforço cortante e do momento fletor*.

1.4 — Com o objetivo de contribuir para a atualização do problema da resistência ao esforço cortante, nas normas brasileiras, proponho-me abrir os debates deste Seminário abordando as seguintes questões, nas partes 2ª, 3ª, 4ª e 5ª desta palestra:

- a resistência ao esforço cortante de vigas *sem armadura transversal*, que é em geral *inferior* à resistência prevista pela teoria clássica;



- a teoria clássica da *treliça de Mörsch estendida à ruptura*, e a possibilidade de ser *elevado* o “*limite superior*” da “*tensão de cisalhamento*” admissível, correspondente ao *esmagamento das bielas comprimidas*;
- as correções propostas para a teoria clássica da *treliça de Mörsch*, e a possibilidade de ser *reduzida a armadura transversal* necessária para resistir ao esforço cortante.
- a importância da *ancoragem* das barras da armadura de tração e dos estribos na *eficiência da armadura transversal*.

Procuraremos sempre abordar cada questão tanto em relação ao *concreto armado* comum como em relação ao *concreto protendido*.

2. Vigas sem armadura transversal

2.1 — De acordo com a teoria clássica a ruptura por esforço cortante se dá quando a tensão principal de tração σ_I na altura da linha neutra atinge a resistência à tração simples do concreto, sendo

$$\sigma_I = \tau = \frac{Q}{b_0 z} \quad (1.^\circ)$$

com z calculado no estágio II ($z \cong 0,875 h$).

Teríamos assim como condição de ruptura

$$\sigma_{I_r} = \frac{Q_R}{b_0 z} = \sigma_T \quad \text{ou} \quad \frac{Q_R}{b_0 h} \cong 0,87 \sigma_T \quad (2.^\circ)$$

2.2 — Experiências modernas, realizadas com vigas sem armadura transversal, demonstraram que esse critério é errôneo e contra a segurança. A ruptura por esforço cortante pode dar-se com (ref. 1, pg. 73):

$$\frac{Q_R}{b_0 h} = 0,54 \quad \text{a} \quad 0,57 \sqrt{\sigma_R} \cong 0,45 \sigma_T \quad (1.^\circ)$$

isto é, com Q_R igual a apenas 50% do valor dado pela teoria clássica.

Como exemplo, citemos os resultados obtidos por Feldman e Morrow (ref. 1, pg. 23 e 24) e Leonhardt (ref. 2, pg. 122), para

$$\frac{M}{Q h} \cong 6:$$



$$\text{Feldman} \quad \frac{Q_R}{b_0 h} = 0,65 \sigma_T$$

$$\text{Morrow} \quad \frac{Q_R}{b_0 h} = 0,50 \sigma_T$$

$$\text{Leonhardt} \quad \frac{Q_R}{b_0 h} = 0,57 \sigma_T$$

O “Comité Européen du Béton (ref. 6 R 4,22-7) adota como “contribuição do concreto na resistência ao esforço cortante”:

$$\frac{Q_R}{b_0 h} = 0,5 \sqrt{\sigma_R} \cong 0,4 \sigma_T \quad (2.^\circ)$$

Para referir os dados citados à resistência à tração simples σ_T adotamos as seguinte fórmulas aproximadas: (v. ref. 18, 10, e 7):

$$\sigma_T = 0,53 \sigma_R^{2/3} \cong 1,25 \sqrt{\sigma_R} \cong 2,8 \sqrt[3]{\sigma_R} \quad (3.^\circ)$$

O critério clássico $\sigma_{I_r} = \sigma_T$ só seria aplicável às vigas de concreto protendido, nas zonas em que, mesmo na ruptura da peça, não existem fissuras pre-formadas devidas à flexão, sendo σ_{I_r} calculado no estágio *I*.

2.3 — Por outro lado, essas mesmas experiências mostram a grande influência do fator

$$\frac{M}{Q h}$$

que é proporcional à relação

$$\frac{M/z}{Q} = \frac{N_c}{Q},$$

entre a *resultante* N_c das *tensões de compressão no concreto e o esforço cortante* Q .

Nas vigas simplesmente apoiadas, com duas cargas simétricas, temos

$$\frac{M}{Q h} = \frac{a}{h}$$

sendo a a distância de cada fôrça ao apoio mais próximo.



Em geral, nas proximidades dos apoios,

$$\frac{M}{Qh} \cong \frac{x}{h}$$

sendo x a distância da seção considerada ao apoio.

Nas vigas com momento negativo sobre o apoio (vigas contínuas ou vigas simplesmente apoiadas com balanços), a região de momentos negativos pode ser assimilada ao primeiro caso, tomando-se a igual à distância do ponto de momento nulo ao apoio.

Para valores de $\frac{M}{Qh}$ inferiores a 3, isto é, quando, $a/h < 3$, ou, de um modo geral, nas seções vizinhas dos apoios, a resistência ao esforço cortante aumenta. Esse efeito, que é em geral atribuído às tensões normais σ_y , verticais, oriundas da “perturbação local” nas vizinhanças das cargas concentradas, é chamado por Paduart “efeito de pinça”. A resistência ao esforço cortante na vizinhança do apoio é também freqüentemente chamada “resistência ao córte”, em contraposição à “resistência ao cizalhamento” (“scherfestigkeit” versus “shubfestigkeit”) (v. *Langendonck*, ref. 14).

2.4 — Para pequenos valores de $\frac{M}{Qh}$ a resistência da peça não se esgota ao surgir a 1ª fissura “de cizalhamento”, isto é, a 1ª fissura provocada pelas tensões principais de tração devida ao esforço cortante. Após o aparecimento dessa 1ª fissura, a *zona de compressão da viga* continua resistindo ao esforço cortante, o que permite aumentar a carga até a ruptura final desde que a armadura principal de tração seja suficiente e bem ancorada.

Por outro lado, freqüentemente as chamadas “fissuras de cizalhamento”, inclinadas, surgem como *prolongamento das fissuras de flexão pré-existent*s. Neste caso era também a *zona de compressão da viga* que resistia ao esforço cortante, na seção fissurada por flexão.

A figura 1 dá uma idéia do andamento de $\frac{Q_R}{b_0h}$, referido à resistência à tração simples do concreto σ_T , com a relação $\frac{M}{Qh}$, segundo as experiências (ref. 1, 2, 3). Supõe-se que a *armadura de tração é suficiente para impedir a ruptura por flexão, antes da ruptura por esforço cortante*.

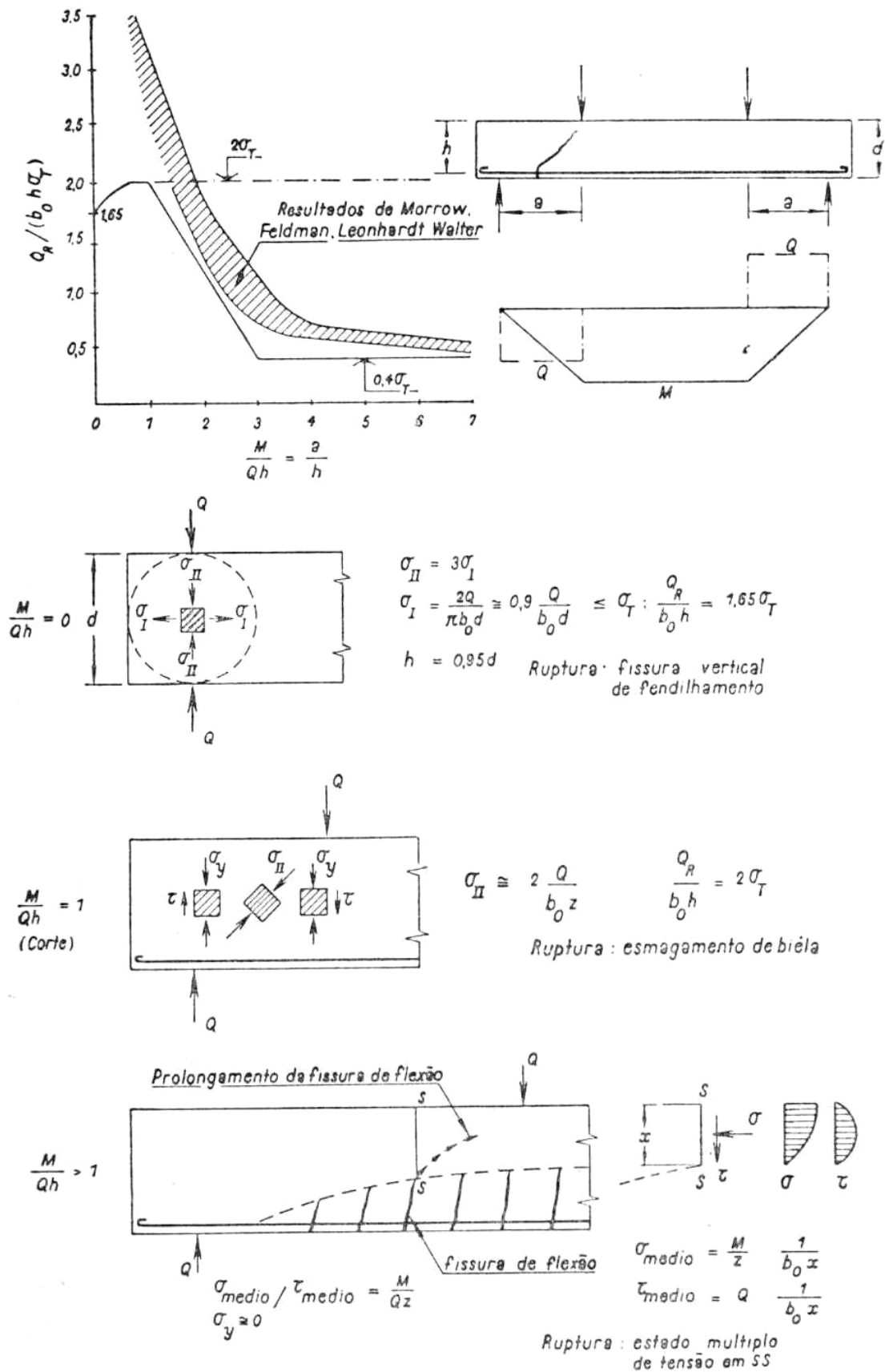


Fig. 1



2.5 — Os ensaios evidenciam portanto que a ruptura se dá, na zona de compressão, sob a ação de um *estado múltiplo de tensões*: *tensões normais* σ , devidas ao momento fletor, e *tensões tangenciais* τ , oriundas do esforço cortante. As *tensões normais* são proporcionais a $N_c = \frac{M}{z}$, e as *tensões tangenciais* proporcionais a Q .

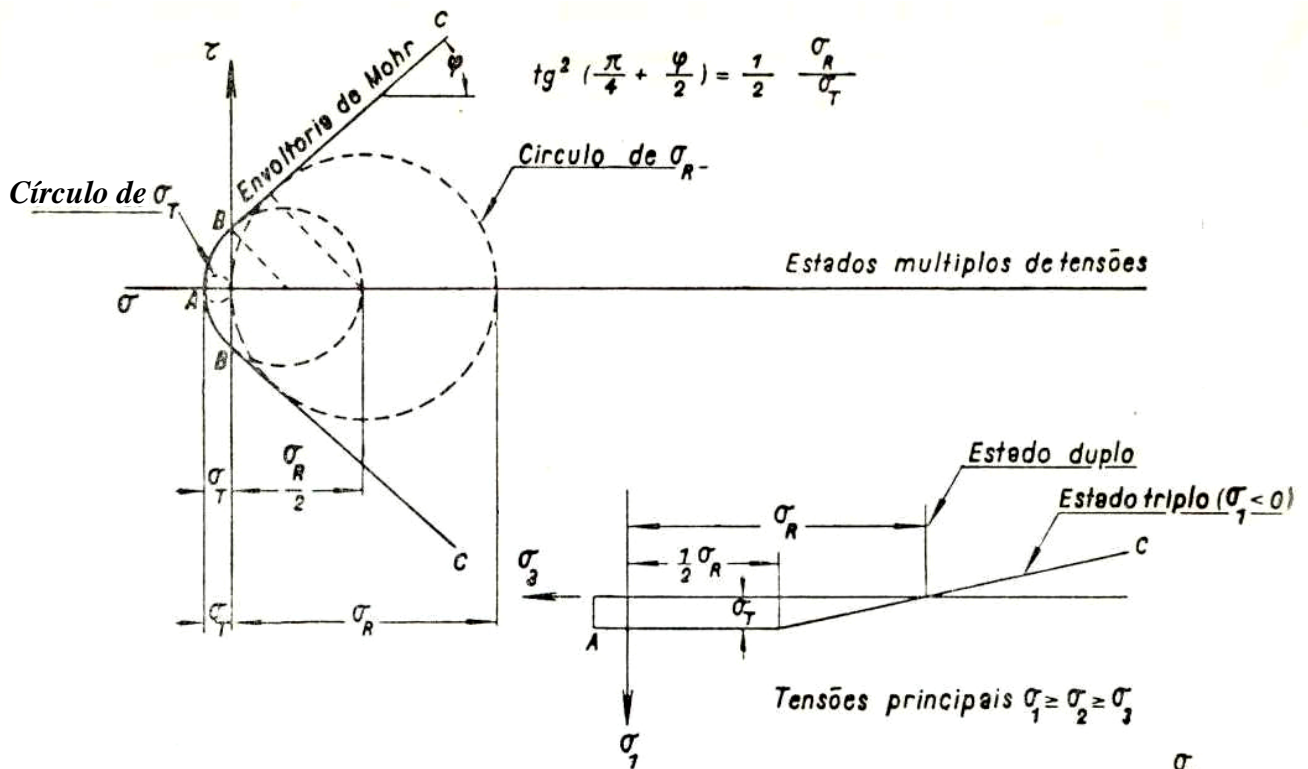
Umás e outras se distribuem ao longo da zona de compressão segundo leis ainda mal estudadas. *Paez, Walther, Bay e Guralnick* elaboraram teorias sôbre a resistência ao esforço cortante baseadas na existência dêsse estado múltiplo de tensões. Não se pode falar de “*resistência ao esforço cortante*”, e sim de “*resistência à ação combinada do esforço cortante e do momento fletor*”.

A figura 2 apresenta o critério de ruptura do concreto solicitado por estados múltiplos de tensão, constante da NB-1, generalizado para qualquer relação $\frac{\sigma_R}{\sigma_T}$. Esse critério foi por nós pro-

posto em 1947 (ref. 10, item 3), tendo como base trabalhos de Moersch, Gehler, A. Léon, e o regulamento da “Chambre Syndicale des Constructeurs en Ciment Armé de France” e posteriormente adotado pela Comissão de Normas Estruturais da A. B. N. T. (ref. 11). É baseado numa envoltoria de Mohr simplificada, composta de um arco de círculo e duas retas.

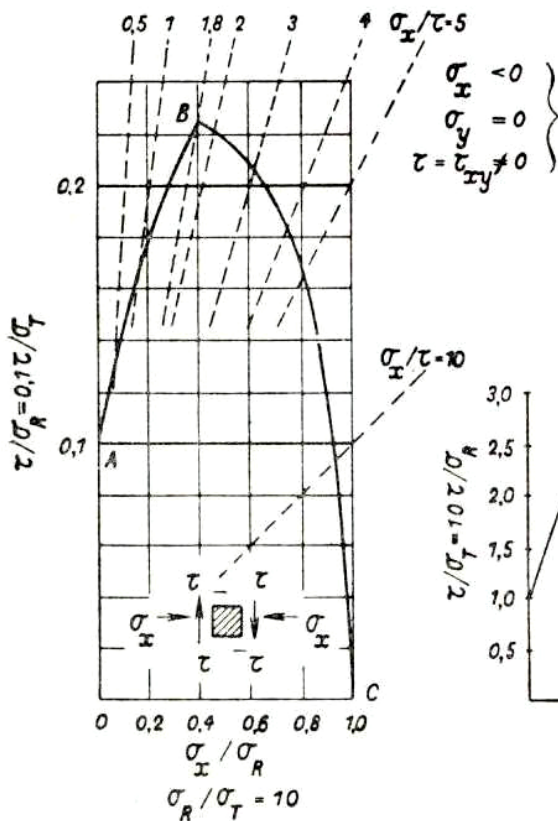
Pode se deduzir dêsse critério de ruptura, num estado de tensões semelhante ao que existe na zona de compressão da viga, o valor da tensão tangencial τ_R correspondente à ruptura, em função da relação $\frac{\sigma}{\tau}$. A *tensão tangencial* τ é *proporcional a* Q , e a *relação* $\frac{\sigma}{\tau}$ *proporcional* $\frac{M}{Qh}$. O andamento da curva é semelhante ao da fig. 1. (v. também ref. 4, 16, 17 e 15).

2.6 — Por outro lado, a *área da zona de compressão* exerce também influência decisiva, pois quanto mais reduzida ela fôr, menor será a resistência ao esforço cortante. A altura da zona de compressão é diretamente influenciada pela *taxa de armadura principal de tração*, especialmente quando esta é superior a que seria estritamente necessária para resistir ao momento fletor na seção considerada. Um *excesso de armadura de tração*, em relação a êsse mínimo, impede que as fissuras de flexão se abram muito e se prolonguem em direção à zona de compressão, reduzindo-a. Esse ex-



Ruptura por tração \rightarrow dominio A-B ($|\sigma_3| \leq \frac{1}{2} \sigma_R$) : $\sigma_1 \leq \sigma_T$

Ruptura por deslis. \rightarrow dominio B-C ($|\sigma_3| \geq \frac{1}{2} \sigma_R$) : $|\sigma_3| \leq \sigma_R - \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_R}{\sigma_T} \right) \sigma_1$



$$AB: \left(\frac{\tau}{\sigma_T} \right)^2 \leq - \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_T} \right) \frac{\sigma_x}{\sigma_R} + 1$$

$$BC: \left(\frac{\tau}{\sigma_R} \right)^2 \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_R}{\sigma_T} \right)^2} - \frac{\frac{1}{2} \frac{\sigma_R}{\sigma_T} - 1}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_R}{\sigma_T} \right)^2} \frac{\sigma_x}{\sigma_R} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\sigma_R}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_R} \right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_R}{\sigma_T} \right)^2}$$

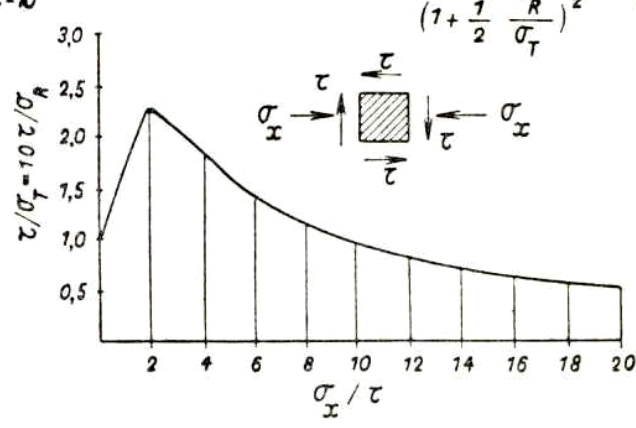


Fig. 2



cesso de armadura de tração existe sempre que, na região de esforço cortante máximo, a cobertura do diagrama de momentos é feita com folga, e principalmente nos casos em que toda a armadura de tração existente na seção de momento máximo é prolongada até o apoio. (ref. 1, 3, 4, 5).

2.7 — Uma teoria que procure interpretar os resultados experimentais deve necessariamente levar em conta *tanto* o fator $\frac{M}{Qh}$ como a taxa da armadura de tração. É o caso da fórmula apresentada pelo “*Joint ACI-ASCE Committee 326 (U. S.)*” (ref. 1, pg. 42).

Laranjeiras, em sua tese (ref. 1, pg. 65), apresenta-a da seguinte maneira:

$$\frac{(Q)_x}{b_0h} \leq 0,505 \sqrt{\sigma_R} + 176 \left(\frac{Q}{M} \right)_x \cdot h \mu \leq 0,80 \sqrt{\sigma_R} \quad (1.^\circ)$$

$(Q)_x$, $\left(\frac{Q}{M} \right)_x$ e μ são respectivamente o esforço cortante na seção da abscissa x , a relação entre esforço cortante e momento fletor nessa mesma seção, e a taxa de armadura aí existente. Podemos substituir nessa fórmula $0,505 \sqrt{\sigma_R}$ por $0,4 \sigma_T$ e $0,80 \sqrt{\sigma_R}$ por $0,64 \sigma_T$.

$$\frac{(Q)_x}{b_0h} \leq 0,4 \sigma_T + 176 \left(\frac{Q}{M} \right)_x h \mu \leq 0,67 \sigma_T \quad (2.^\circ)$$

Dados os diagramas de momentos e de cortantes, trata-se de pesquisar qual a seção de ruptura por esforço cortante, usando essa condição. No caso de vigas simplesmente apoiadas com 2 forças simétricas, sendo Q constante, e supondo-se μ também constante é claro, a seção mais perigosa é a de maior momento, isto é, a seção sob uma das forças; ao estudar a ruptura por esforço cortante, com fissura inclinada, devemos no entanto considerar a seção correspondente ao início da fissura, na face tracionada, isto é, aproximadamente a seção distando h da força. $(Q)_x$ será o cortante máximo, e $(M)_x$ será o momento máximo M_{max} multiplicado pelo coeficiente redutor $\frac{a/h}{a/h - 1}$.

No caso de viga simplesmente apoiada, com carga distribuída, a seção crítica corresponde a $x = 0,11 l$; o esforço cortante é 0,78



do cortante máximo, e o momento 0,39 do momento máximo, portanto $\left(\frac{M}{Q}\right)_x = 0,125 l$ e $(Q)_x = 0,78 Q_{\max}$ (ref. 1, pág. 74).

Partindo da fórmula apresentada e das considerações anteriores, *Laranjeiras* (ref. 1, pg. 73 e 81) conclui que a *condição de ruptura por força cortante das vigas sem armadura transversal* pode ser simplificada, estabelecendo-se simplesmente um valor limite de $\frac{Q_{\max}}{b_0 h}$ que não deve ser ultrapassado para que a ruptura se dê sempre por flexão (Q_{\max} é o esforço cortante máximo).

Os valores obtidos são os seguintes:

σ_c	Maximo admissível de $\frac{Q_{\max}}{b_0 h}$	
	viga simplesmente apoiada com 2 cargas concentradas simétricas	viga simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída
2.400	$0,570 \sqrt{\sigma_R}$	$0,850 \sqrt{\sigma_R}$
3.000	$0,554 \sqrt{\sigma_R}$	$0,792 \sqrt{\sigma_R}$
4.000	$0,541 \sqrt{\sigma_R}$	$0,752 \sqrt{\sigma_R}$
5.000	$0,534 \sqrt{\sigma_R}$	$0,724 \sqrt{\sigma_R}$

Em média poderíamos tomar os seguintes valores:

$$\text{viga simplesmente apoiada com 2 cargas concentradas simétricas} \quad \frac{Q_{\max}}{b_0 h} \leq 0,56 \sqrt{\sigma_R} = 0,45 \sigma_T \quad (3.^\circ)$$

$$\text{viga simplesmente apoiada como carga uniformemente distribuída} \quad \frac{Q_{\max}}{b_0 h} \leq 0,80 \sqrt{\sigma_R} = 0,64 \sigma_T \quad (4.^\circ)$$

Os limites *mais altos* para o caso de carga *uniformemente distribuída* só se aplicam na hipótese de ser a *taxa de armadura de tração* μ *constante ao longo da viga*. Às vigas com momentos negativos sôbre os apoios aplicam-se os valores da 1ª coluna.

2.8 — A fórmula 27, 1ª ou 2ª, pode ser escrita de outra maneira.



Chamemos $\mu_{nec.}$ a taxa de armadura estritamente necessária para resistir ao momento fletor M existente na seção considerada, e M_R o momento fletor a que a viga poderia resistir com a taxa de armadura μ realmente existente nessa seção. Lembremos que, *como aliás se admite em tôda esta palestra*, o momento fletor M é o que existe *na ocasião da ruptura* da peça, e *não deve ser confundido* com o momento fletor em serviço \bar{M} : ($M = \nu \bar{M}$).

Temos, para seção retangular:

$$\mu_{nec.} (b_0 h) = \frac{M}{\sigma_e z}; \quad M_R = \mu (b_0 h) \sigma_e Z$$

O “braço de alavanca” z correspondente a μ é inferior ao que se teria com $\mu_{nec.}$, pois $\mu > \mu_{nec.}$. Adotemos um valor intermediário $z = 0,8 h$:

$$\left(\frac{Q}{M} \right) h \mu = \frac{Q}{b_0 h} \frac{1}{0,8 \sigma_e} \frac{\mu}{\mu_{nec.}} = \frac{Q}{b_0 h} \frac{1}{0,8 \sigma_e} \frac{M_R}{M} \quad (1.^\circ)$$

Substituindo em 2.7, 1ª, temos

$$\frac{Q}{b_0 h} \leq 0,505 \sqrt{\sigma_R} + \frac{Q}{b_0 h} \frac{176}{0,8 \sigma_e} \frac{\mu}{\mu_{nec.}} \quad (2.^\circ)$$

$$\frac{Q}{b_0 h} \leq \frac{0,505 \sqrt{\sigma_R}}{1 - \frac{176}{0,8 \sigma_e} \frac{\mu}{\mu_{nec.}}} = \frac{0,505 \sqrt{\sigma_R}}{1 - k \frac{\mu}{\mu_{nec.}}} = \frac{0,4 \sigma_T}{1 - k \frac{\mu}{\mu_{nec.}}} \quad (3.^\circ)$$

A constante $k = \frac{176}{0,8 \sigma_e}$ varia de 0,092, para $\sigma_e = 2400 \text{ kg/cm}^2$, a 0,044, para $\sigma_e = 5000 \text{ kg/cm}^2$.

A hipótese mais desfavorável é a de $\mu = \mu_{nec.}$, isto é, armadura de tração distribuída segundo o diagrama de momentos. Para esta hipótese teríamos $0,56 \sqrt{\sigma_R}$ para $\sigma_e = 2400 \text{ kg/cm}^2$ e $0,53 \sqrt{\sigma_R}$ para $\sigma_e = 4000 \text{ kg/cm}^2$. Na realidade μ será sempre um pouco superior a $\mu_{nec.}$, pois o diagrama de momentos deve ser coberto com uma certa folga.

No caso de vigas simplesmente apoiadas, com carga uniformemente distribuída e *armadura uniforme* de taxa μ , a *seção crítica*



dista 0,11 do apoio, com $M = 0,39 M_{moz.}$ e $Q = 0,78 Q_{moz.}$. Nessa seção $\frac{\mu}{\mu_{nee.}} = \frac{M_{moz.}}{M} = 2,56$, e portanto

$$\frac{Q}{b_0 h} \leq \frac{0,78 Q_{moz.}}{b_0 h} = \frac{0,505 \sqrt{\sigma_R}}{1 - k \cdot 2,56} \quad (4.^\circ)$$

Os valores encontrados para $\frac{Q_{moz.}}{b_0 h}$ são $0,86 \sqrt{\sigma_R}$ para $\sigma_e = 2.400 \text{ kg/cm}^2$, e $0,73 \sqrt{\sigma_R}$ para $\sigma_e = 6.000 \text{ kg/cm}^2$, praticamente iguais aos de *Laranjeiras*.

2.9— A fórmula 2,8, 3.º, em virtude do pequeno valor que tem usualmente o coeficiente $k \cdot \frac{\mu}{\mu_{nee.}}$, pode ainda ser escrita

$$\frac{Q_R}{b_0 h} = 0,505 \sqrt{\sigma_R} \left(1 + k \frac{\mu}{\mu_{nee.}} \right) \quad (1.^\circ)$$

Essa é a forma da condição constante das “Recommendations Pratiques” do Comité Européen du Béton”, segundo a resolução de Monaco de 1961 (ref. 5 e ref. 7, R 4, 22-7), baseada em estudos estatísticos de *Torroja*.

A fórmula do C. E. B. para a “contribuição da zona de compressão à resistência ao esforço cortante”, é a seguinte

$$\frac{Q_R}{b_0 h} = 0,45 \sqrt{\sigma_R} \left(1 + 0,1 \frac{\mu}{\mu_{nee.}} \right) \quad (2.^\circ)$$

que podemos também escrever

$$\frac{Q_R}{b_0 h} = 0,36 \sigma_T \left(1 + 0,1 \frac{\mu}{\mu_{nee.}} \right) \quad (3.^\circ)$$

A constante k de 2.9, 1ª, é tomada igual a 0,1, *independentemente do aço*, e o coeficiente de $\sqrt{\sigma_R}$, ou de σ_T , é reduzido de 10% em relação ao valor citado anteriormente.

Além disso a armadura $\mu_{nee.}$ é tomada como *aquela que seria necessária para resistir ao momento $M + 1,5 Q h$, e não simplesmente ao momento M* , existente na seção cuja resistência ao esforço cortante se quer determinar.



Na hipótese mais desfavorável, em que $\mu = \mu_{nec.}$, teremos

$$\frac{Q_R}{b_0 h} \leq 0,5 \sqrt{\sigma_R} = 0,4 \sigma_T \quad (4.º)$$

que é o *valor recomendado pelo C. E. B. para uso corrente*. Este valor é ligeiramente inferior ao menor dos valores sugeridos por *Laranjeiras*, e baseados na fórmula 2.7, 1ª. Para carga un. distr. com μ constante, a seção crítica continua sendo a 0,111, obtendo-se pelo menos 1,3. ($0,4 \sigma_T$).

Na resolução de Mônaco consta ainda uma limitação da relação

$$\frac{\mu}{\mu_{nec.}}, \text{ que nunca deverá ser tomada superior 6.}$$

Para que se possa considerar a zona de compressão como participando da resistência ao esforço cortante, o C. E. B. exige portanto que a cobertura do diagrama de momentos se faça pelo menos com uma “folga” equivalente a um *deslocamento dêsse diagrama*, em cada seção transversal, *de $1,5 \times h$, na direção mais desfavorável; nos apoios de vigas simplesmente apoiadas e nos pontos de momento nulo deverá haver armadura para resistir pelo menos ao momento $1,5 Q h$, convenientemente ancorada. (Fig. 3). Não se admitem vigas sem estribos*, devendo haver uma *armadura transversal mínima*, não calculada, com (v. 3.4 para o significado das notações)

$$\frac{S_{tr}}{b_0 t} \cdot \frac{\sigma_{e.tr.}}{\sigma_R} = \mu_{tr.} \cdot \frac{\sigma_{e,tr.}}{\sigma_R} \geq 0,02$$

Nas *lajes* concretadas sem descontinuidade, com espessura inferior a 25 cm, *pode ser dispensada esta última exigência*.

2.10 — Quanto ao “efeito de pinça”, o próprio *Paduart*, como relator do problema no C. E. B., concordou em considerá-lo de modo simplificado, desprezando, para o cálculo do esforço cortante, as cargas situadas a uma distância do apoio inferior a $0,75 h$, desde que essas cargas sejam aplicadas na face superior da viga, comprimindo-a em direção ao apoio. Si no entanto a carga é transmitida por uma viga transversal, deve ser considerada. As cargas “penduradas” na viga, isto é, aplicadas na sua face inferior, além de serem também consideradas no cálculo do esforço cortante, exigem estribos especiais, capazes de transferi-las à parte superior da viga. Os *balanços curtos* (ref. 13) e vigas muito curtas, com



$\frac{a}{h} = \frac{M}{Qh} \leq 1$, podem ser armados sem armadura transversal, mas neste caso as cargas aplicadas na face superior devem ser consideradas para o cálculo da resistência da “biela comprimida”, com

$$\frac{Q_R}{b_0 h} = 5 (0,5 \sqrt{\sigma_R}) \cong 2 \sigma_T \cong 0,20 \sigma_R \quad (2.^\circ)$$

(vide 3.9, 4.º, e fig. 1).

Nos *balanços muito curtos*, e vigas com $\frac{a}{h} = \frac{M}{Qh} \leq 0,5$, deve ainda ser considerado o perigo de fissuração análogo ao que existe num *cilindro sob compressão diametral*, num pêndulo de concreto, ou num *bloco de apoio*. Neste caso é preciso que

$$\frac{Q_R}{b_0 d} \leq \frac{\pi}{2} \sigma_T \quad \text{ou} \quad \frac{Q_R}{b_0 h} \leq 1,65 \sigma_T \quad (2.^\circ)$$

(tomando-se $h = 0,95 d$) (v. ref. 18, 10 e 13 e Fig. 1).

Em lugar de armadura transversal vertical ou de barras dobradas, devem ser dispostos estribos horizontais capazes de resistir a um esforço total igual a $\frac{1}{2} Q_R$. (ref. 13)

2.11 — A norma brasileira NB-1, em sua edição de 1960, reduziu apreciavelmente o valor limite de $\bar{\tau} = \frac{\bar{Q}}{b_0 z}$, ou de $\bar{\sigma}_I$, para que a peça possa resistir ao esforço cortante sem armadura transversal calculada (apenas, no caso de vigas, os estribos construtivos mínimos). Além disso a NB-1 de 1960 obrigou a calcular o z , neste caso, no estágio I, isto é, $z \cong 0,75 h$.

Temos, pela NB-1/1960, multiplicando o valor admissível pelo *coeficiente de segurança* $v = 1,65$ com que a peça é calculada à flexão:

$$\frac{Q_R}{b_0 z} \leq 1,65 \cdot \begin{cases} \frac{\sigma_R}{25} \\ 8 \text{ kg/cm}^2 \end{cases} \quad (1.^\circ)$$

ou

$$\frac{Q_R}{b_0 h} \leq 1,65 \cdot 0,75 \cdot \begin{cases} \frac{\sigma_R}{25} = 0,05 \sigma_R \\ 8 \text{ kg/cm}^2 = 10 \text{ kg/cm}^2 \end{cases} \quad (2.^\circ)$$



Esse limite da NB-1/1960, apesar da redução havida, ainda é superior ao 2.9 (4.º), que é $0,4 \sigma_T$, pois para $\sigma_T = 0,11$ a $0,09 \sigma_R$ teríamos $0,05 \sigma_R = 0,45$ a $0,55 \sigma_T$, em média $0,5 \sigma_T$. Deveria portanto ser a NB-1 modificada neste ponto, adotando-se como *limite de* $\frac{Q_R}{b_0 h}$ *na ruptura*, $0,4 \sigma_T$, ou como limite de $\frac{\bar{Q}}{b_0 z}$, em serviço e com $z = 0,75 h$, 80% do limite do texto atual. Quanto ao 2.º limite, absoluto, de 8 kg/cm² em serviço, poderia, em nossa opinião, ser suprimido.

2.12 — A aplicação dos resultados anteriormente expostos ao *concreto protendido* exige maiores estudos e mais pesquisas experimentais. Com o intuito de abrir o debate da questão, passamos a apresentar algumas sugestões, que poderiam ser adotadas em caráter provisório.

Inicialmente somos levados a só admitir o critério da *tensão principal* σ_I quando não há possibilidade de surgirem, para as cargas de ruptura, fissuras de flexão, antes da chamada “fissura de cisalhamento”, na região cuja resistência ao esforço cortante se quer verificar. A condição da PNB-116.

$$\sigma_{I_r} \leq \sigma_T \quad (1.º)$$

só seria válida quando fôsse satisfeita, na ruptura da peça, em *tôda a altura da seção transversal* cuja resistência ao esforço cortante se quer verificar, *inclusive na borda tracionada*. Esse cálculo deve ser feito *no estádio I*, com as *cargas multiplicadas pelo coeficiente de segurança*, e a *fôrça de protensão sem coeficiente de segurança*.

Não sendo satisfeitas as condições anteriores, isto é, havendo possibilidade de fissura de flexão, o cálculo acima indicado não teria sentido. A condição 2.12, 1ª, deve ser então *substituída* pela condição 2.9 (2ª ou 3ª), sendo a viga de concreto protendido considerada como se fôsse de concreto armado comum, e os cabos de protensão como armadura de tração. O limite de 2.9 (2ª ou 3ª) pode no entanto ser aumentado de 50%, segundo uma observação de *Walther* (ref. 16, pg. 271).

No caso de viga com *carga uniformemente distribuída* com cabos de protensão retos, isto é, com μ constante, teríamos portanto



que substituir a condição 2.12 (1^a) pelo seguinte:

$$\frac{Q_R}{b_0 h} \leq 1,3 \times 1,6 \times 0,5 \sqrt{\sigma_R} = \sqrt{\sigma_R} \quad (2.)$$

ou

$$\frac{Q_R}{b_0 h} \leq 1,3 \times 1,5 \times 0,4 \sigma_T = 0,8 \sigma_T \quad (3.º)$$

sendo Q_R o *esfôrço cortante* calculado em função das *cargas multiplicadas pelo coeficiente de segurança*.

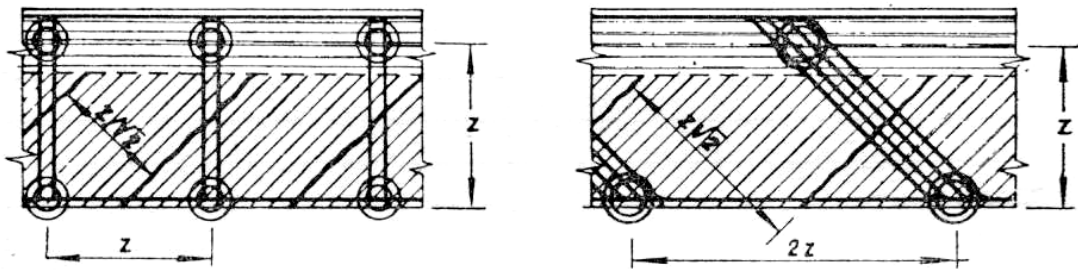
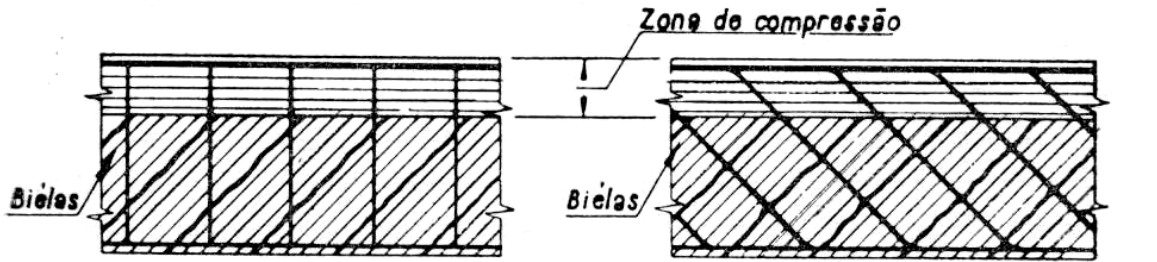
Não sendo também satisfeita esta última condição, deve haver armadura transversal.

As vigas de concreto protendido com cabos inclinados, e aquelas em que houver armadura suplementar transversal, devem ser calculadas como vigas com armadura transversal, como indicaremos na continuação desta palestra.

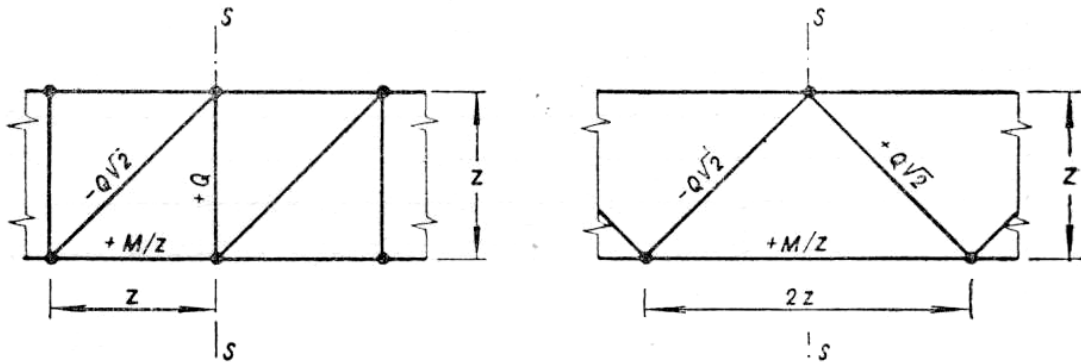
3. Vigas com armadura transversal

3.1 — A teoria clássica de Mörsch sôbre a resistência das vigas com armadura transversal aos esforços cortantes *despreza qualquer contribuição da zona de compressão* para essa resistência, e admite que a inclinação das chamadas “fissuras de cisalhamento” é sempre *normal à tensão principal de tração σ_I calculada no estágio II*. Nas vigas de concreto armado comum solicitadas à flexão simples essa inclinação é portanto admitida como de 45° ($\lambda = 1$). A viga é assimilada a uma *treliça*, cujas *diagonais comprimidas* (“bielas”) são paralelas a essas fissuras. Os *estribos* ou *barras inclinadas* que constituem a *armadura transversal* são os *montantes* ou *diagonais traçionadas da treliça*, e os *banzos*, *traçionado* e *comprimido*, são respectivamente a *armadura principal de tração* e a *zona de compressão* da viga. Todos os elementos da treliça são supostos *sem rigidez*, ou *articulados nas extremidades* (nós) (v. fig. 3).

3.2 — A *ruptura por esfôrço cortante* nessa treliça ideal, pode dar-se: a) pelo *escoamento da armadura transversal*; b) pelo *esmagamento das bielas comprimidas de concreto*. Da mesma forma que na *ruptura por flexão*, quando a armadura principal de tração é excessiva, o concreto da zona de compressão pode ser esmagado antes que essa armadura escoe, também na *ruptura por esfôrço cortante*, quando a *armadura transversal é excessiva*, o concreto das

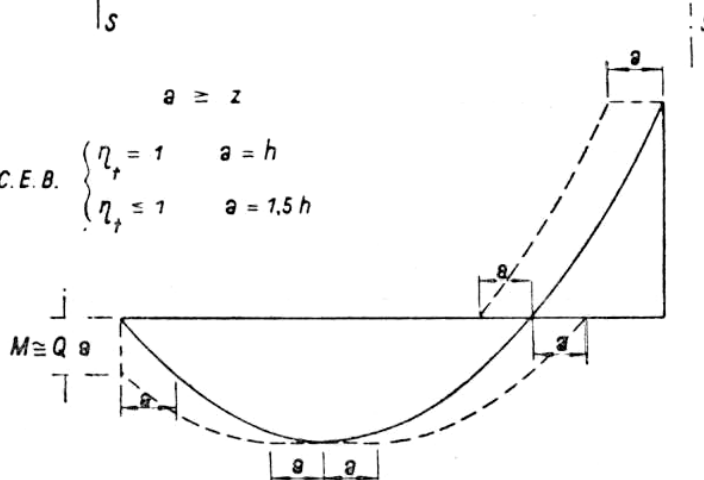


Treliça de Mörsch



$$a \geq z$$

$$C.E.B. \begin{cases} \eta_r = 1 & a = h \\ \eta_r \leq 1 & a = 1,5h \end{cases}$$



Deslocamento do diagrama de momentos

Fig. 3



diagonais comprimidas (*bielas*) pode ser *esmagado antes* que a *capacidade de resistência da armadura transversal tenha sido totalmente aproveitada*.

3.3 — O *limite superior da tensão de cisalhamento admissível*, quando há armadura transversal, que consta das normas tradicionais, e que havia sido estabelecido empiricamente, para impedir que a “desagregação” da alma das vigas perturbasse o funcionamento da treliça ideal de Mörsch, *é hoje relacionado com o segundo tipo de ruptura*, 3.2 — (b). Não é ele estabelecido para impedir o aparecimento das chamadas “fissuras de cisalhamento” em serviço, ou para impedir que sua abertura seja exagerada; *ao contrário*, esse limite é fixado *para impedir que o tipo de ruptura* 3.2 — (b), — *esmagamento das bielas comprimidas* — *se dê antes do escoamento da armadura transversal*, isto é, antes que a capacidade de resistência desta última tenha sido totalmente aproveitada. A limitação da fissuração não tem relação com esse limite superior de τ , e pode ser conseguida por meio da redução do diâmetro e do espaçamento das barras da armadura transversal, e do aumento de sua aderência ao concreto.

3.4 — No caso de *armadura transversal constituída por estribos verticais* ($\alpha = 90^\circ$), a distância horizontal entre dois nós sucessivos da treliça de Mörsch (comprimento dos painéis) é igual ao *braço de alavanca* z . Os estribos distribuídos ao longo do comprimento z de um painel são supostos concentrados num *montante vertical*. A “biela comprimida”, cuja largura total, medida normalmente ao eixo, seria igual a $z/\sqrt{2}$, é suposta sem rigidez à flexão, ou articulada nos nós. (fig. 3).

Sejam $S_{tr.}$ a área da seção transversal *total* de cada estribo (área da seção transversal da barra utilizada vezes o número de pernas de cada estribo); e t o seu espaçamento longitudinal.

A área total da seção transversal do *montante* da treliça ideal será

$$S_{tr.} \cdot \frac{z}{t} \quad (1.^\circ)$$

Podemos também definir

$$\mu_{tr.} = \frac{S_{tr.}}{b_0 t} \quad (2.^\circ)$$



como *taxa* (geométrica) *de armadura transversal*, constituída por estribos, referida a área da projeção horizontal da alma da viga.

Neste caso, a área da seção transversal do montante da treliça ideal será

$$S_{tr.} \cdot \frac{z}{t} = \mu_{tr.} \cdot b_0 z$$

Por outro lado, o *esfôrço no montante*, de acôrdo com a teoria das treliças, será igual ao *esfôrço cortante* Q , e o *esfôrço na diagonal comprimida* $Q \sqrt{2}$.

Temos, em consequência, chamando $\tau = \frac{Q}{b_0 z}$:

(τ , neste caso, é puramente convencional — e não uma tensão de cisalhamento).

a) tensão na *armadura transversal* (estribos verticais)

$$\sigma_{f \text{ tr.}} = \frac{Q}{z} \frac{1}{S_{tr.}/t} = \frac{Q}{\mu_{tr.} \cdot b_0 z} = \frac{\tau}{\mu_{tr.}} \quad (3.^\circ)$$

b) tensão média na *biela comprimida de concreto*

$$\sigma_b = \frac{Q \sqrt{2}}{b_0 z / \sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{Q}{b_0 z} = 2\tau \quad (4.^\circ)$$

As condições correspondentes à ruptura seriam:

a) ruptura tipo 3.2 — (a)

$$\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = \mu_{tr.} \cdot \sigma_{etr.} \quad (5.^\circ)$$

sendo $\sigma_{e \text{ tr.}}$ o *limite de escoamento do aço dos estribos*.

b) ruptura tipo 3.2 — (b)

$$\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = \frac{1}{2} \sigma_{R(b)} \quad (6.^\circ)$$

sendo $\sigma_{R(b)}$ a resistência à *compressão equivalente* do concreto das bielas. Esta *resistência à compressão equivalente* é inferior à *resistência à compressão* σ_R do concreto da viga, em virtude do complexo estado de tensões existente nas bielas comprimidas, e da trajetória irregular das fissuras inclinadas que as delimitam.



3.5 — No caso de *armadura transversal constituída por barras inclinadas de 45°* ($\alpha = 45^\circ$), a distância horizontal entre dois nós sucessivos da treliça de Mörsch (comprimento dos painéis) é igual ao *dôbro do braço de alavanca z* . As barras inclinadas distribuídas ao longo de comprimento $2z$ de um painel são supostas concentradas numa *diagonal tracionada*. A “biela comprimida”, cuja largura total, medida normalmente ao seu eixo, seria agora igual a $2z/\sqrt{2} = z\sqrt{2}$, e suposta sem rigidez, ou articulada nos nós (v. fig. 3).

Sejam $S_{t(45^\circ)}$ a área da seção transversal de cada barra inclinada; e t o seu *espaçamento longitudinal*, medido no eixo da viga.

A área total da seção transversal da *diagonal* da treliça ideal será

$$S_{t(45^\circ)} \cdot \frac{2z}{t} = \mu_{t(45^\circ)} b_0 \cdot 2z \quad (1.^\circ)$$

com

$$\mu_{t(45^\circ)} = \frac{S_{t(45^\circ)}}{b_0 t} \quad (2.^\circ)$$

Por outro lado, o esforço na diagonal tracionada, de acôrdo com a teoria das treliças, será igual a $Q\sqrt{2}$ (igual, em valor absoluto, ao esforço na diagonal comprimida).

Temos, em conseqüência

- a) tensão na *armadura transversal* (barras inclinadas a 45°)

$$\sigma_{f\ tr.} = \frac{Q\sqrt{2}}{2z} \frac{1}{S_{t(45^\circ)}/t} = \frac{Q}{z} \frac{1}{\sqrt{2} S_{t(45^\circ)}/t} = \frac{\tau}{\mu_{t(45^\circ)} \sqrt{2}} \quad (3.^\circ)$$

- b) tensão na *biela comprimida de concreto*

$$\sigma_b = \frac{Q\sqrt{2}}{b_0 z \sqrt{2}} = \frac{Q}{b_0 z} = \tau \quad (4.^\circ)$$

A *tensão de compressão* na biela comprimida é reduzida à *metade*, quando se empregam barras inclinadas em lugar de estribos; e portanto o *limite superior* de τ_r deve ser maior, neste caso.

As condições correspondentes à ruptura seriam:



a) ruptura tipo 3.2 — (a)

$$\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = (\mu_{t(45^\circ)} \cdot \sqrt{2}) \cdot \sigma_{e.tr.} \quad (5.^\circ)$$

b) ruptura tipo 3.2 — (b)

$$\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = \sigma_{R(b)} \quad (6.^\circ)$$

3.6 — No caso de *armadura transversal constituída por estribos inclinados ou barras inclinadas com inclinação diferente de 45°*, sendo α o ângulo da barra ou estribo com o eixo da peça ($30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) é fácil demonstrar (“regra das costuras” de Robinson, ref. 6, pg. 16 e ref. 7, C R 4,21) que basta substituir nas fórmulas 3.4 — (3ª) e (5ª) μ_{tr} . por:

$$\mu_{t(\alpha)} (\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha) \quad (1.^\circ)$$

No caso particular de $\alpha = 45^\circ$ recaímos nas fórmulas 3.5 — (3ª) e (5ª).

Quanto à tensão de compressão na biela, teremos:

$$\sigma_b = \frac{2 \text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha} \tau \quad (2.^\circ)$$

e portanto

$$\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = \frac{\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha}{2 \text{sen } \alpha} \cdot \sigma_{R(b)} \quad (3.^\circ)$$

Para $\alpha = 60^\circ$, por exemplo:

$$\mu_{t(60^\circ)} (\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha) = 1,37 \mu_{t(60^\circ)} \quad (4.^\circ)$$

e

$$\sigma_b = 1,26 \tau \quad (5.^\circ)$$

$$\sigma_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = 0,79 \sigma_{R(b)} = 1,58 \left(\frac{1}{2} \sigma_{R(b)} \right) \quad (6.^\circ)$$

3.7 — A experiência confirmou com excelente concordância a fórmula 3.4 — (4ª), que dá a *tensão média nas bielas*, quando a armadura transversal é constituída por estribos verticais (ref. 2, pg. 135/138, item 6.4 do trabalho de Leonhardt e Walther). No caso de armadura transversal inclinada, os valores experimentais



são um pouco superiores aos dados por 3.5 — (4ª) ou 3.6 — (4ª), sendo mais prudente adotar-se, em lugar de 3.5 — (4ª), ref. 2, pg. 141/142)

$$\sigma_b = 1,5 \frac{Q}{b_0 z} = 1,5 \tau \quad (1.^\circ)$$

da qual se deduz

$$\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} \leq 0,67 \sigma_{R(b)} = 1,5 \left(\frac{1}{2} \sigma_{R(b)} \right) \quad (2.^\circ)$$

e, em lugar de 3.6 (4ª)

$$\sigma_b = 1,6 \frac{Q}{b_0 z} = 1,6 \tau \quad (3.^\circ)$$

$$\tau_r = \frac{Q}{b_0 z} = 0,6 \sigma_{R(b)} = 1,3 \left(\frac{1}{2} \sigma_{R(b)} \right) \quad (4.^\circ)$$

3.8 — As fórmulas correspondentes ao tipo de ruptura 3.2 — (1) correspondem ao *método clássico de dimensionamento da armadura transversal*, podendo-se no entanto fazer o cálculo *na ruptura*, com braço de alavanca z calculado no estágio III (ou tomando simplesmente $z = 0,9 h$, como recomenda o “Comité Européen du Béton”).

3.9 — As fórmulas 3.4 — (6ª) e 3.7 — (2ª) e (4ª) justificariam um aumento do “limite superior” de $\tau_r = \frac{Q}{b_0 z}$ constante das normais tradicionais. As experiências demonstram (v. por ex. ref. 2, pg. 137) que a *resistência à compressão equivalente* $\sigma_{R(b)}$, do concreto das bielas pode reduzir-se até quase 50% de σ_R .

Adotando-se $\sigma_{R(b)} = 0,5 \sigma_R$, teríamos:

a) armadura transversal constituída por estribos:

$$\max. \tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = \frac{1}{2} \times 0,5 \sigma_R = 0,25 \sigma_R \quad (1.^\circ)$$

b) armadura transversal constituída por estribos e barras inclinadas, por estribos oblíquos:

$$\max. \tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} \cong 1,4 (0,25 \sigma_R) = 0,35 \sigma_R \quad (2.^\circ)$$



A norma brasileira *NB-1*, em sua edição de 1960, elevou bastante o limite superior de τ_r com relação às normas anteriores.

Segundo a atual *NB-1* temos

$$\max. \bar{\tau} = \frac{Q}{b_0 z} = \begin{cases} \frac{\sigma_R}{7,5} \\ 25 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

Como o cálculo à flexão, pelo método da ruptura, é feito multiplicando-se as cargas de serviço pelo coeficiente de segurança $\nu = 1,65$, a condição para evitar ruptura prematura por esforço cortante, do tipo 3.2 — b (*esmagamento das bielas*), antes de dar-se a ruptura por flexão, será segundo a *NB-1*:

$$\max. \tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = \begin{cases} 1,65 \frac{\sigma_R}{7,5} = \frac{\sigma_R}{4,5} = 0,22 \sigma_R \\ 1,65 \times 25 \text{ kg/cm}^2 = 42 \text{ kg/cm}^2 \end{cases} \quad (3.^\circ)$$

Vemos que essa condição é bem próxima de 3.9 — (1^a), aplicável ao caso de armadura transversal constituída somente por estribos verticais. No caso de *estribos e barras inclinadas*, ou de *estribos inclinados*, o limite $\max. \tau_r = 0,22 \sigma_R$ poderia ser *umentado de 40%*. Quanto ao segundo limite superior, absoluto, $1,65 \times 25 \text{ kg/cm}^2$, poderia ser suprimido, em nossa opinião.

O “Comité Européen du Béton” permite êsse acréscimo de 40% não só no caso de armadura transversal inclinada, como no caso de estribos verticais associados a barras longitudinais horizontais dispostos ao longo da alma, formando uma rede ortogonal de mesma taxa de armadura nas 2 direções.

Os limites recomendados pelo “Comité Européen du Béton” (ref. 7, F 4 ,22-8) são os seguintes, referidos a $\frac{Q}{b_0 h}$ e a $0,5 \sqrt{\sigma_R}$ (e que relacionamos também com $\sigma_T \cong 1,25 \sqrt{\sigma_R}$):

a) vigas retangulares com estribos verticais

$$\frac{Q_R}{b_0 h} \leq 5 (0,5 \sqrt{\sigma_R}) \cong 2,0 \sigma_T \quad (4.^\circ)$$

b) vigas em *T*, com $b \geq 3 b_0$, com estribos verticais

$$\frac{Q_R}{b_0 h} \leq 6 (0,5 \sqrt{\sigma_R}) \cong 2,4 \sigma_T \quad (5.^\circ)$$



c) vigas retangulares com estribos e barras inclinadas

$$\frac{Q_R}{b_0 h} \leq 7 (0,5 \sqrt{\sigma_R}) \cong 2,8 \sigma_T \quad (6.^\circ)$$

d) vigas em T , com $b \geq 3 b_0$, com estribos e barras inclinadas

$$\frac{Q}{b_0 h} \leq 8,4 (0,5 \sqrt{\sigma_R}) \cong 3,4 \sigma_T \quad (7.^\circ)$$

Os limites do C.E.B. referem-se à relação $\frac{Q_R}{b_0 h}$. Admitindo-se que $z \cong 0,9 h$, êsses limites devem ser *acrescidos de 10%* quando se utiliza a relação $\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z}$.

Tomando-se $\sigma_R = 187 \text{ kg/cm}^2$ (máximo σ_R considerado na NB-1 para fins de fixação do limite superior de τ_r), temos $\sigma_T \cong 0,09 \sigma_R$. Podemos então exprimir os limites (a), (b), (c) e (d) do C.E.B. em função de τ_r e de σ_R :

	vigas retangulares	vigas em T com $b \geq 3 b_0$
estr. vert.:	(a): max. $\tau_r = 0,20 \sigma_R$	(b): max. $\tau_r = 0,24 \sigma_R$
		(8.º)
estr. e bar- ras inclin.	(c): max. $\tau_r = 0,28 \sigma_R$	(d): max. $\tau_r = 0,34 \sigma_R$

O 1.º limite, (a), é quase igual ao da NB-1, dado em 3-9-3.º.

Leonhardt e Walther (ref. 2, pg. 152 e 153) sugerem como "valores admissíveis de max. $\bar{\tau}$, em serviço" correspondentes aos limites (b) e (d), os valores $0,14 \sigma_R$ e $0,18 \sigma_R$, respectivamente. Multiplicando-os pelo coeficiente de segurança das normas alemãs ($v \cong 1,75$) temos $0,24 \sigma_R$ e $0,32 \sigma_R$, números êsses bastante próximos dos do C.E.B., 3.9, 8.º.

3.10 — Para o cálculo *na ruptura* da resistência ao esforço cortante de *vigas de concreto protendido* com armadura transversal, seríamos levados a recomendar os mesmos limites superiores do C.E.B., expressos em função de σ_T . Como no entanto a ruptura do tipo 3.2-b (esmagamento das bielas), é mais ligada a σ_R que a σ_T poderíamos adotar os limites dados acima, em função de σ_R . (3.9, 8.º)

Castier (ref. 12), em sua sugestão à PN-B - 116, sugere max. $\tau_r = \frac{\sigma_R}{4,5} = 0,22 \sigma_R$ para as seções retangulares e max. $\tau_r =$



$= \frac{\sigma_R}{4,0} = 0,25 \sigma_R$ para as seções em T em que a mesa de compressão seja suficiente para que a viga possa resistir à flexão sem contribuição da alma. A essa sugestão de *Castier* poder-se-ia adicionar o acréscimo de 40%, nos casos em que a armadura transversal fôsse constituída por estribos verticais e barras inclinadas. Os *números indicados por Castier, e mais os acréscimos sugeridos, são praticamente iguais aos limites do C. E . B., expressos em função de σ_R em 3.9, 8ª.*

3.11 — O “Comité Européen du Béton” também permite o acréscimo de 40% no caso de se combinarem os estribos verticais, calculados como foi indicado, com barras longitudinais (horizontais), dispostas ao longo da alma, constituindo uma rêde ortogonal com a mesma taxa de armadura nas duas direções.

3.12 — O cálculo *na ruptura* da resistência das vigas de *concreto protendido* ao esforço cortante poderia ser feito segundo a *teoria clássica da treliça de Mörsch*, sem considerar-se a protensão, isto é, *como se se tratasse de concreto armado comum*. Os *cabos inclinados* seriam simplesmente considerados como *armadura transversal*, ao lado dos *estribos verticais* e, eventualmente, das *barras dobradas da armadura suplementar* (cada tipo de armadura transversal com o seu *limite de escoamento, real ou convencional*). Este cálculo poderá no entanto ser feito em condições mais favoráveis, como exporemos na parte 4 dêste trabalho.

4. Teorias modernas sôbre o cálculo da armadura transversal.

4.1 — Tôdas as pesquisas experimentais sôbre a resistência ao esforço cortante têm demonstrado que a *teoria clássica da treliça de Mörsch* conduz a uma *armadura transversal* um pouco *exagerada*, e que êste efeito é tanto mais sensível quanto menor a relação

$\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z}$ isto é , quanto mais fraca é a armadura transversal

exigida por aquela teoria. Nas peças em que a relação $\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z}$ se aproxima do limite superior max. τ_r correspondente ao esmagamento das bielas os resultados experimentais se aproximam da teoria da treliça de *Mörsch*.



Designemos por η_t a relação entre a armadura transversal efetivamente necessária e a armadura transversal exigida pela teoria de Mörsch:

$$\eta_t = \frac{\text{armadura transversal efetivamente necessária}}{\text{armadura transversal calculada pela teoria de Mörsch}} \leq 1 \quad (1.^\circ)$$

Essa relação, a que *Leonhardt* e *Walther* denominam “*grau de garantia*” da *armadura transversal* em relação ao *esfôrço cortante*, tomando como *referência a treliça de Mörsch* (“*schubsicherungsgrad*”)

é uma função crescente de $\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z}$ ou de $\frac{Q_R}{b_0 h}$, aproximando-se de 1 quando τ atinge o *limite superior* $\max.\tau_r$ correspondente ao *esmagamento das bielas*, estabelecido para o caso de *armadura transversal constituída por estribos verticais* (item 3.3, item 3.9, 1ª, 4ª, 5ª, 8ª — *a* e *b*).

Para facilitar as comparações, utilizaremos daqui por diante essa relação η_t .

Examinemos agora, sucintamente, algumas das múltiplas teorias disponíveis sôbre o assunto.

4.2 — Segundo a teoria da *contribuição de zona de compressão para a resistência ao esfôrço cortante*, adotada, com o caráter de teoria simplificada, pelo “Comité Européen du Béton” (ref. 5 e ref. 7, R 4,22), a resistência ao esfôrço cortante Q_R é igual à *somá de duas parcelas*, sendo Q_c a parcela correspondente à *contribuição da zona de compressão*, e Q_a a parcela correspondente à *armadura transversal*.

$$Q_R = Q_c + Q_a \quad (2.^\circ)$$

A *parcela* Q_a é calculada pela teoria clássica da treliça de Mörsch. A *parcela* Q_c é considerada como igual à *resistência da viga ao esfôrço cortante no caso de não haver armadura transversal* (v. 2ª parte dêste trabalho).

Critério idêntico foi adotado pelo “Joint ACI-ASCE Comitee 326”, nos Estados Unidos.

Essa teoria “*aditiva*” é semelhante à do cálculo à ruptura de pilares com carga axial, e pode ser fundamentada como passamos a expor. Quando Q cresce desde 0 até à ruptura há uma fase inicial em que uma parcela do esfôrço cortante é suportada pela armadura transversal e outra pela zona de compressão; o cálculo dessas



duas parcelas envolveria *problema hiperestático interno*, com as correspondente *condições de compatibilidade*. Ao ser atingido o *escoamento da armadura transversal*, a parcela Q_a não cresce mais, e qualquer *nôvo acréscimo* de Q é transferido à *zona de compressão*. Quando Q_c atingir um valor igual à *resistência da zona de compressão ao esforço cortante*, dá-se a ruptura. A teoria, como se vê, é um tanto simplista, mas não é distituída de lógica.

A parcela Q_c , segundo o C.E.B., seria calculada pela fórmula 2.9, 2ª e 3ª, ou, nos casos correntes, pela 2.9, 4ª.

$$Q_e = b_0 h \cdot 0,5 \sqrt{\sigma_R} = b_0 h \cdot 0,4 \sigma_T \quad (2.º)$$

Em seguida teríamos Q_a com diferença entre Q_R e Q_c , sendo a armadura transversal calculada para a *teoria clássica* em função de $Q_a < Q_R$.

O coeficiente η_t de *Leonhardt e Walther* seria, quando se adota o método simplificado do C.E.B.

$$\eta_t = \frac{Q_a}{Q_R} = \frac{Q_R - Q_c}{Q_R} = \frac{\frac{Q_R}{b_0 h} - 0,5 \sqrt{\sigma_R}}{\frac{Q_R}{b_0 h}} = \frac{\frac{Q_R}{b_0 h} - 0,4 \sigma_T}{\frac{Q_R}{b_0 h}} \quad (3.º)$$

considerando que

$$\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = \frac{1}{0,9} \frac{Q_R}{b_0 h} : \eta_t = \frac{\tau_r - 0,45 \sigma_T}{\tau_r} \quad (4.º)$$

No caso de $\frac{Q_R}{b_0 h}$ alcançar os valores (a), (b), (c) e (d), dados em 3.9, 4.º, 5.º, 6.º, 7.º, isto é, quando τ_r alcançar êsses valores multiplicados por $\frac{1}{0,9}$, teríamos η_t igual, respectivamente, a $\frac{4}{5} = 0,80$,

$\frac{5}{6} = 0,83$, $\frac{6}{7} = 0,86$ e $\frac{7,4}{8,4} = 0,88$. Quando $\frac{Q_R}{b_0 h}$ fôr igual apenas $0,5 \sqrt{\sigma_R} = 0,4 \sigma_T$, ou $\tau_r = 0,45 \sigma_T$, teremos $\eta_t = 0$, e deverá ser colocada apenas a armadura mínima (estribos) com $\mu_{tr} = 0,02 \frac{\sigma_R}{\sigma_{e tr}}$.

4.3 — Outra teoria é a que admite que a *inclinação das chamadas fissuras de cisalhamento* é inferior a 45° , isto é, que $\lambda \geq 1$, sendo



$$\lambda = \frac{(\text{projeção horizontal da fissura})}{(\text{braço da alavanca})} = \frac{c'}{z} \quad (1.^\circ)$$

Teríamos assim uma *teoria de treliça*, diferindo da de *Mörsch* pela *inclinação das bielas de compressão*, que não é mais suposta de 45° (A.L.L., Baker sugere também uma treliça múltipla com bielas de várias inclinações).

Esta teoria é até certo ponto comprovada pela experiência embora haja controvérsias a respeito. É por exemplo a *teoria de Chambaud*. O valor de λ é tanto maior quanto menor a armadura transversal, isto é, quanto menor a relação $\frac{Q_R}{b_0 h}$ ou $\frac{Q_R}{b_0 z} = \tau_r$.

A relação η_t de *Leonhardt — Walther* seria, adotando-se esta teoria, no caso de armadura transversal constituído por estribos verticais:

$$\eta_t = \frac{1}{\lambda} \quad (2.^\circ)$$

Isso é fácil de deduzir-se, considerando-se que o comprimento do painel da treliça é $c' = \lambda z$, em lugar de z , como na treliça de *Mörsch*.

Como se admite que λ varia inversamente com $\frac{Q_R}{b_0 h}$ ou com $\frac{Q_R}{b_0 z} = \tau_r$, fica satisfeita a condição geral dada em 4.1.

Há diversas fórmulas para o cálculo de λ , sendo mais conhecidas a de *Chambaud* e a da *norma soviética Ny TU 123-55*.

No caso de barras inclinadas a 45° teríamos como comprimento do painel da treliça $c' + z = (\lambda + 1) z$, em vez de $2 z$, e

$$\eta_{t(45^\circ)} = \frac{2}{(\lambda + 1)} \quad (4.^\circ)$$

Para valores altos de $\frac{Q_R}{b_0 h}$ ou de $\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z}$ isto é, para vigas com forte armadura transversal, η_t se aproxima de 1, e recaímos na treliça clássica de *Mörsch*.

Castier (ref. 12), em sua sugestão à A. B. N. T. sobre a P-NB-116, propõe que se tome

$$1/\lambda = \frac{\tau_r}{\max. \tau_r} \quad (4.^\circ)$$



e portanto, no caso de estribos

$$\eta_t = \frac{\tau_r}{\max. \tau_r} \quad (5.^\circ)$$

A taxa (geométrica) de armadura transversal (estribos verticais) estritamente necessária será dada por (v. 3.4, 5ª)

$$\mu_{tr.} \sigma_{e.tr.} = \frac{Q_R}{b_0 z} \eta_t = \tau_r \cdot \eta_t = \frac{\tau_r^2}{\max. \tau_r} \quad (6.^\circ)$$

fórmula esta bem semelhante à da norma soviética Ny TU - 123-55, como veremos mais adiante.

4.4 — Examinemos agora a teoria baseada na consideração de *bielas com rigidez à flexão supostas engastadas na zona de compressão*. Trata-se de um aperfeiçoamento da *teoria da treliça de Mörsch*, considerando-se o banzo comprimido e a diagonal comprimida como ligados monoliticamente e dotados de rigidez à flexão. Os montantes ou diagonais tracionados continuam sendo supostos sem rigidez, ou articulados nas extremidades (ref. 4, pg. 14 a 17).

É claro que nessa treliça as bielas comprimidas, trabalhando também à flexão, *aliviam os estribos* ou as diagonais tracionadas; e *aliviam-nos tanto mais, quanto maior for a rigidez dessas bielas* em relação à deformabilidade dos elementos tracionados. Nas vigas com armadura transversal forte, isto é, com alto $\frac{Q_R}{b_0 h}$ ou $\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z}$, esse alívio é menos importante que nas vigas com pequenos valores $\frac{Q_R}{b_0 h}$ ou de $\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z}$ em que a armadura transversal é fraca. Esta conclusão foi confirmada experimentalmente (ref. 2, pág. 137, item 6.5 do trabalho de *Leonhardt e Walther*). Para *uma mesma armadura transversal, a parcela Q_a de Q_R suportada pelos estribos é tanto maior quanto menor a espessura da alma b_0 , isto é, quanto maior for $\frac{Q_R}{b_0 h}$ ou $\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z}$.*

A teoria das bielas engastadas na zona de compressão conduz portanto a uma relação η_t crescente com $\frac{Q_R}{b_0 h}$ ou com $\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z}$.

4.5 — Para finalizar, examinemos a teoria da *norma soviética Ny TU - 123-55*. É uma combinação das teorias expostas em 4.2 e 4.3



A parcela Q_c , suportada pela zona de compressão, é suposta inversamente proporcional a $\lambda = \frac{c'}{z}$ isto é, quanto menos inclinadas forem as fissuras, menor a importância relativa de Q_c .

Levando em conta que a definição de σ_R , na norma soviética, é mais rigorosa que a da NB-1 e do C.E.B. (para um mesmo tipo de controle, ou para um mesmo coeficiente de variação, o "coeficiente de homogeneidade" da norma soviética é aproximadamente igual 0,8 do da NB-1 ou do C.E.B.) podemos escrever (item 79 de Ny TU 123-55) :

$$\begin{aligned}\frac{Q_c}{b_0 h} &= 0,15 \times (0,8 \sigma_R) \frac{h}{c'} = 0,12 \sigma_R \cdot \frac{h}{c'} = \\ &= 0,133 \sigma_R \frac{z}{c'} = \frac{0,133 \sigma_R}{\lambda}\end{aligned}\quad (1.^\circ)$$

Para $\lambda = 1$ (fissuras a 45°) teríamos

$$\frac{Q_c}{b_0 h} = 0,133 \sigma_R \quad \text{ou} \quad \frac{Q_c}{b_0 z} = 0,15 \sigma_R \quad (2.^\circ)$$

A inclinação $1/\lambda$ da fissura é obtida, por meio da condição de mínimo de $(Q_c + Q_a)$, sendo que, no cálculo de Q_a , o limite de escoamento dos estribos é afetado por um coeficiente de redução especial igual a 0,8. A condição de

$$\min. \frac{Q_R}{b_0 z} = \min. \frac{Q_c + Q_a}{b_0 z} = (0,15 \sigma_R) \cdot \frac{1}{\lambda} + \mu_{tr.} (0,8 \sigma_{e, tr.}) \cdot \lambda \quad (3.^\circ)$$

conduz a

$$\lambda = \frac{c'}{z} = \sqrt{\frac{0,188 \sigma_R}{\mu_{tr.} \cdot \sigma_{e, tr.}}}\quad (4.^\circ)$$

e, substituindo esse valor de λ em 4.4, 3.º:

$$\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = \frac{Q_c + Q_a}{b_0 z} = \sqrt{\mu_{tr.} \cdot \sigma_{e, tr.} \cdot 0,48 \sigma_R} \quad (5.^\circ)$$

ou

$$\mu_{tr.} \cdot \sigma_{e, tr.} = \frac{\tau_r^2}{0,48 \sigma_R} \quad (6.^\circ)$$

$$\eta_t = \frac{\mu_{tr.} \cdot \sigma_{e, tr.}}{\tau_r} = \frac{\tau_r}{0,48 \sigma_R} \quad (7.^\circ)$$



A norma soviética conduz a uma relação η_t igual à relação entre $\frac{Q_R}{b_0 z} = \tau_r$ e $0,48 \sigma_R$. É o mesmo valor sugerido por *Castier*, se adotássemos $\max. \tau_R = 0,48 \sigma_R$.

Para $\lambda = 1$ teríamos

$$\mu_{tr} \cdot \sigma_{o, tr} = 0,188 \sigma_R$$

e

$$\tau_r = \frac{Q_R}{b_0 z} = 0,30 \sigma_R, \text{ com } \eta_t = 0,625.$$

O critério do C.E.B., para $\tau_r = 0,30 \sigma_R$, importa em $\eta_t = 0,86$. O valor 0,625 da norma soviética é igual a apenas 73% desse valor. A norma soviética é mais audaciosa, mas por outro lado contém prescrições muito rigorosas sobre espaçamento de estribos.

4.6 — *Leonhardt* e *Walther* propuseram um fórmula empírica para η_t (ref. 2, pg. 153).

Para τ_r superior a $2/3$ do $\max. \tau_r$ correspondente a armadura transversal constituída por estribos verticais, $\eta_t = 1$; e para τ_r igual a $2/9$ daquela e $\max. \tau_r$, $\eta_t = 0,2$, variando linearmente no intervalo.

$$0,16 \leq \tau_r \leq 0,32 \sigma_R \quad : \quad \eta_t = 1 \quad (1.^\circ)$$

$$0,053 \leq \tau_r \leq 0,16 \sigma_R \quad : \quad \eta_t = 7,5 \frac{\tau_r}{\sigma_R} - 0,2 \quad (2.^\circ)$$

4.7 — Na fig. 4 estão representados os diversos critérios. Parece aceitável o do C.E.B., ou então o da norma soviética, modificado de modo semelhante ao da sugestão de *Castier*.

$$\text{Vigas retangulares} \quad : \quad \eta_t = \frac{\tau_r}{0,20 \sigma_R} \leq 1 \quad (3.^\circ)$$

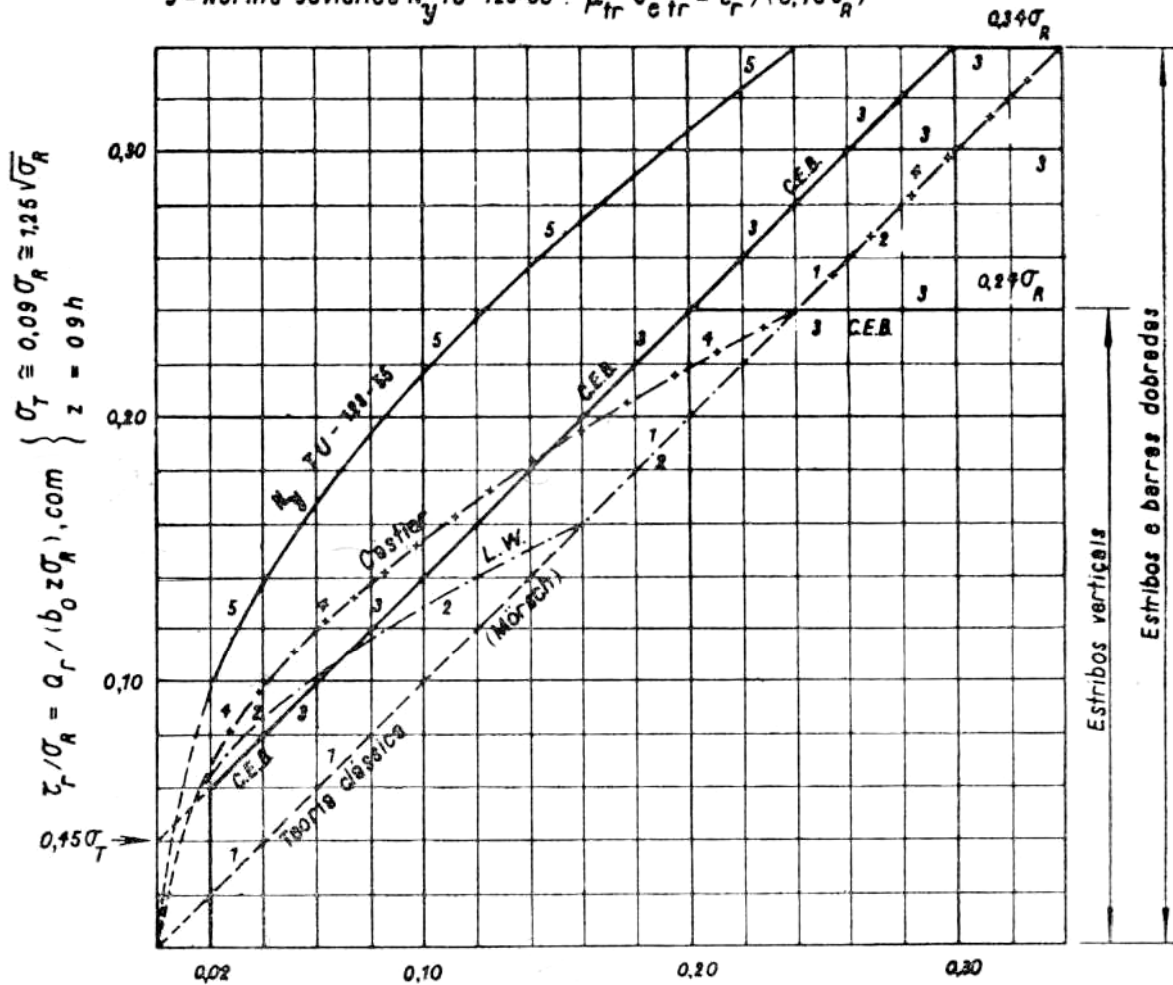
$$\text{Vigas em T com } b \geq 3 b_0 \quad : \quad \eta_t = \frac{\tau_r}{0,24 \sigma_R} \leq 1 \quad (4.^\circ)$$

A armadura transversal seria então calculada pela teoria clássica de Mörsch, e em seguida multiplicada pelo coeficiente redutor η_t .

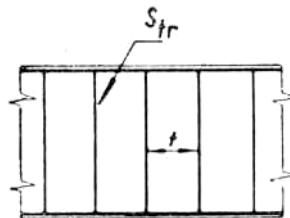
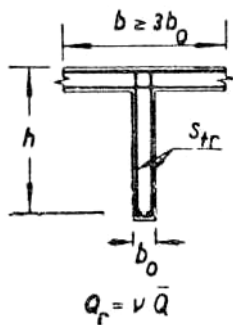
Esse cálculo se aplicaria também ao concreto protendido na ruptura, exatamente como se se tratasse de concreto armado comum.



- 1 - Teoria clássica (Morsch) : $\mu_{tr} \sigma_{e tr} = \tau_r$
- 2 - Leonhardt - Walther : $\mu_{tr} \sigma_{e tr} = \tau_r (7,5 \frac{\tau_r}{\sigma_R} - 0,2)$, até $\tau_r = 0,16 \sigma_R$
- 3 - Comité Européen du Béton : $\mu_{tr} \sigma_{e tr} = \tau_r - 0,46 \sigma_T$
- 4 - Sugestão Roger Castier modificado: $\mu_{tr} \sigma_{e tr} = \tau_r^2 / (0,24 \sigma_R)$, até $\tau_r = 0,24 \sigma_R$
- 5 - Norma soviética N_y TU-123-55 : $\mu_{tr} \sigma_{e tr} = \tau_r^2 / (0,48 \sigma_R)$

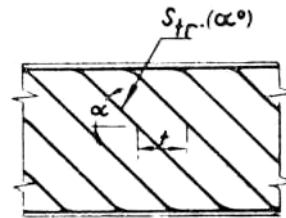


$$\mu_{tr} \cdot \sigma_{e, tr} / \sigma_R = \sum [S_{tr}(\alpha^\circ) \cdot (\text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha) / (b_0 t)] \cdot \sigma_{e, tr} / \sigma_R$$



$$\mu_{tr} = S_{tr} / (b_0 t)$$

$$z = 0,9h$$



$$\mu_{tr} = S_{tr}(\alpha^\circ) (\text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha) / (b_0 t)$$

$$\alpha^\circ = 45^\circ: \mu_{tr} = S_{tr}(45^\circ) \sqrt{2} / (b_0 t)$$

Fig. 4



- 1 - Teoria clássica (Mörsch) : $\eta_t = 1$
- 2 - Leonhardt - Walther : $\eta_t = 2,5 \tau_r / \sigma_R - 0,2 \leq 1$
- 3 - Comité Européen du Béton : $\eta_t = 1 - 0,45 \sigma_T / \tau_r \approx 1 - 0,04 \sigma_R / \tau_r$
- 4 - Sugestão Roger Castier modificado : $\eta_t = \tau_r / (0,24 \sigma_R) \leq 1$
- 5 - Norma soviética N_y TU-123 55 : $\eta_t = \tau_r / (0,48 \sigma_R)$

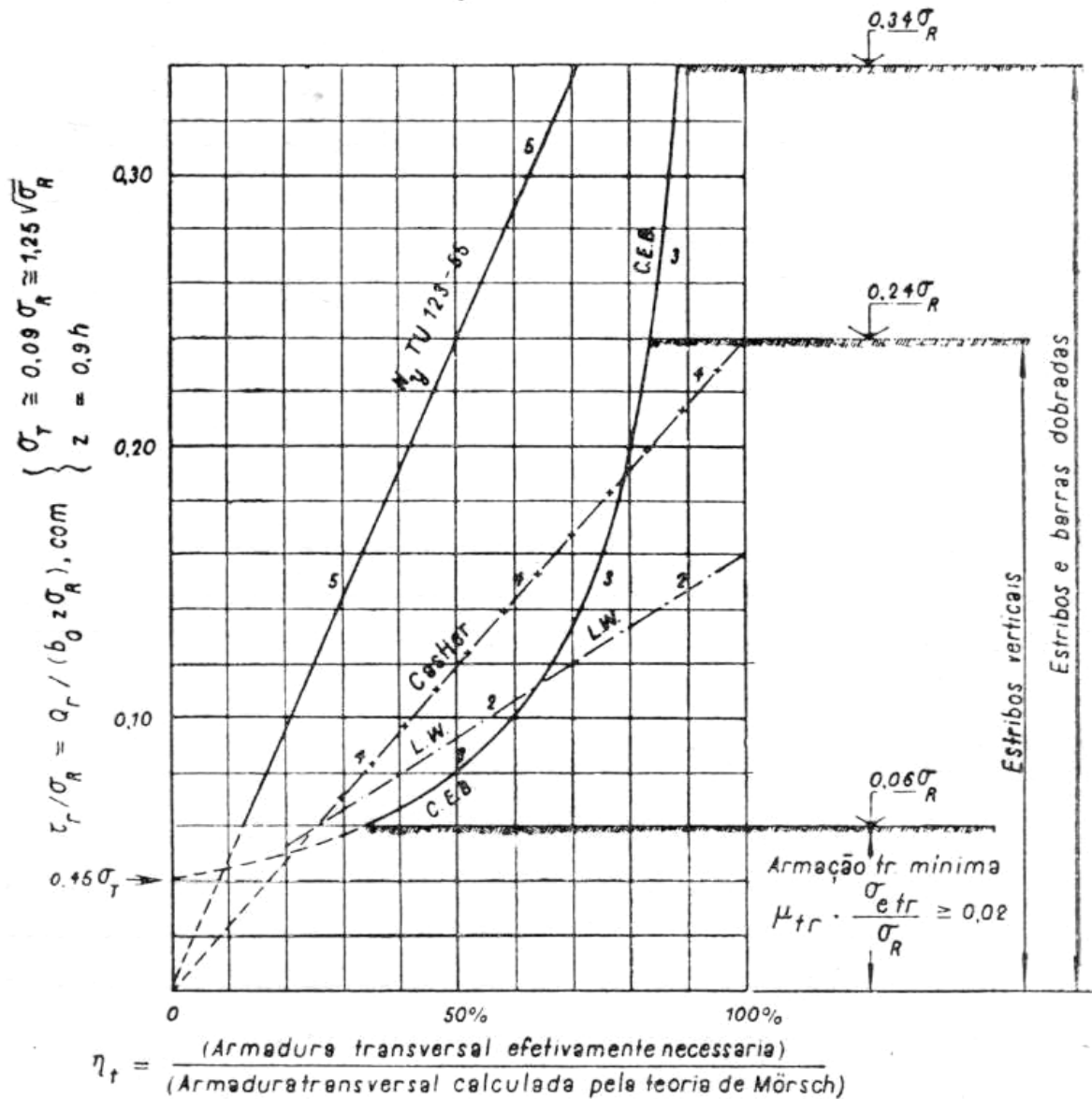


Fig. 5



Para que os *cabos de protensão inclinados* possam ser levados em conta nesse cálculo em seu *limite de escoamento*, é que é necessária a protensão. Tôdas as experiências de vigas de concreto armado comum têm sido feitas com limite de escoamento convencional inferior a 6.000 kg/cm^2 , o que corresponde a um *alongamento total de 0,5%*, aproximadamente, ao ser atingida aquela tensão. Na falta de maiores dados, convém então *limitar a tensão $\sigma_{e, tr}$ adotada no cálculo da resistência da armadura transversal*, quando constituída por barras de aço de resistência mais elevada, *ao valor correspondente a êsse alongamento de 0,5%*. No caso da *protensão*, deve-se somar a êste *alongamento máximo permissível o pré-alongamento*, devido à *protensão*. Devemos neste caso tomar então σ_{etr} igual ao *menor* dos dois valores seguintes: a) *limite de escoamento convencional*; b) *tensão correspondente a uma deformação igual ao pré-alongamento acrescido de 0,5%*. No caso usual de aços com $\sigma_e = 12.000 \text{ kg/cm}^2$, tensão inicial de protensão, após as perdas 9.000 kg/cm^2 , prevalece o *1º limite*, isto é, o *limite de escoamento* da armadura de protensão ($\sigma_{e, 0,2}$). Êste critério é muito mais simples que o critério proposto por *Walther* (ref. 16) baseado em *condições de compatibilidade* bastante complexas.

Novas pesquisas fornecerão provàvelmente em futuro próximo dados que permitam estabelecer uma teoria mais aprofundada, dentro do espírito de teoria de *Walther*.

5. Observações finais

5.1 — As experiências modernas demonstram a grande importância da *ancoragem* das barras da armadura principal de tração, das barras dobradas e dos estribos. Sòmente quando essa *ancoragem* estiver *efetivamente assegurada* poderá a armadura transversal desenvolver tôda a sua capacidade de resistência.

5.2 — A assimilação da viga a uma treliça ideal tem como conseqüência a constância da tensão na armadura ao longo de um painel. A armadura calculada para o momento fletor existente na seção correspondente ao nó superior deverá ser mantida constante até o nó inferior mais próximo, no sentido dos momentos decrescentes (supomos momentos positivos). Isso exige uma cobertura do diagrama de momentos com “folga” pelo menos igual a z , medida horizontalmente. O C. E. B. prescreve um deslocamento ou “folga”



de pelo menos h (ref. 7, R 4, 233), sendo que quando no cálculo da armadura transversal se considera a contribuição da zona de compressão, isto é, quando se adota $\eta_t \leq 1$, essa “folga” é aumentada para $1,5 h$ (ref. 7, R, 422-7).

5.3 — A ancoragem das barras da armadura de tração prolongada até o apoio deve ser assegurada na mesma base, isto é, considerando-se um esforço total de tração, na face do apoio, igual a Q ou $1,5 Q$, conforme o caso. *Leonhardt e Walther* (ref. 2, pg. 146, item 8.15) chamam a atenção de que um comprimento de ancoragem de 6 diâmetros a partir da face do apoio, que consta de algumas normas referentes a aço de alta aderência, é *absolutamente insuficiente*.

5.4 — Ao longo de cada “comprimento de ancoragem” da armadura de tração deve haver armadura transversal ou “armadura de costura” (ramos horizontais dos estribos, por exemplo) com área total pelo menos igual ao diâmetro da barra.

5.5 — Os estribos devem ser de preferência fechados, e, si abertos, munidos de ganchos eficientes. Os ramos horizontais superiores dos estribos fechados, além de exercerem um certo “efeito de cintamento” sobre o concreto da zona de compressão, constituem a “armadura de costura”, referida em 5.4, correspondente à ancoragem das barras inclinadas.

5.6 — No caso de elevados valores de τ_r , quando se utilizam barras inclinadas e estribos é recomendável usar estribos finos e pouco espaçados e calculados para resistir a pelo menos 40% e no máximo 60% do esforço cortante, cabendo às barras inclinadas resistir à parcela restante do esforço cortante.

5.7 — O espaçamento dos estribos e das barras dobradas, medido ao longo do eixo da peça, não deverá nunca ser superior a $0,85 h$. Podem ser também empregados estribos inclinados com $\alpha \cong 65^\circ$, desde que seu espaçamento seja no máximo $0,35 h$ (ref. 7); êsses estribos inclinados podem neste caso ser considerados, para fins de fixação do limite superiores max. τ_r , como equivalentes à combinação de estribos verticais e barras dobradas, referida em 5.6.

R E F E R Ê N C I A S

- 1 — Antonio Carlos Reis *Laranjeiras* — “A influência do esforço cortante sobre a segurança das vigas de concreto armado sob



- flexão simples”, tese de concurso, Escola Politécnica da Universidade da Bahia, 1961.
- 2 — Fritz *Leonhardt* e René *Walther* — “Überblick über neuere Schubversuche durchgeführt am Otto Graff Institut”, Stuttgart, 1962, Bulletin d’Information n° 37 du Comité Européen du Béton.
 - 3 — *Comité Européen du Béton*, Bulletin d’Information n° 25, 1960 (Rapport de A. *Paduart*).
 - 4 — *Comité Européen du Béton*, Bulletin d’Information n° 26, 1960 (Rapport de A. *Paduart*, communications de A. *Paez* e R. *Chambaud*).
 - 5 — *Comité Européen du Béton*, Bulletin d’Information n° 33, (resolution de Mônaco).
 - 6 — *Comité Européen du Béton*, Bulletin d’Information n° 37, 1962 (Rapport de J. R. *Robinson*).
 - 7 — *Comité Européen du Béton*, “Recommendations Pratiques 1ère edition, 1963.
 - 8 — Norma Ny — TV 123-5, U.R.S.S.
 - 9 — R. *Chambaud*, “La rupture par flexion et par effort tranchant dans les poutres en béton armé”, Annales de l’I.T.B.T.P., février 1957.
 - 10 — Fernando Luiz Lobo B. *Carneiro*, “Une nouvelle méthode pour la détermination de la résistance à la traction des bétons”, I.N.T. 1947 e Bulletin de la R.I.L.E.M. n° 13, 1953. (v. também *ref. 18*)
 - 11 — Telemaco van *Langendonck*, “A resistência do concreto a esforços combinados”, revista Engenharia n° 995, 1950.
 - 12 — Roger *Castier*, intervenção nos debates da 2ª reunião do 1º Seminário sôbre Concreto Protendido, D.T.E. de Estruturas do Clube de Engenharia, 1963, e sugestão enviada à A.B.N.T. sôbre o projeto de norma P-NB 116 (Cálculo e execução de obras de concreto protendido).
 - 13 — G. *Franz H. Niedenhof*, “Die Bewehrung von Konsolen und gedrungeenen Balken”, Beton und Stahlbetonbau, maio/1953.
 - 14 — Telemaco van *Langendonck*, “Concreto Armado”, vol. I e II.



- 15 — Sidney A. *Guralnick*, “*Strenght of Reinforced Concrete Beams*”, *Journal of the Structural Division, A.S.C.E. (U.S.A.)*, jan/1959.
- 16 — René *Walther*, “Über die Berechnung der Schubfähigkeit von Stahl und Spannbeton-balken-Schubtheorie”. *Beton und Stahlbau*, nov.. 1962).
- 17 — Hermann *Bay*, “Schub bruch und Biegemoment”, *Biegung und Querkraft*”, “Zur Schubtragfähigkeit bügelbewerten Balken”, *Beton und Stahlbetonbau*, abril 1962, dezembro 1962, out. 1960.
- 18 — Fernando Luiz Lobo B. *Carneiro*, “Um nôvo método para a determinação da resistência à tração dos concretos”, monografia apresentada à 5ª Reunião da Associação Brasileira de Normas Técnicas em setembro de 1943, (com resumo publicado na edição de 1943 da publicação “Dosagem de Concretos do mesmo autor, posteriormente desenvolvida em re. 10), setembro 1943.