



**Bielas** - *Aplicação da teoria da plasticidade ao concreto.*  
Prof. Fernando.L.Lobo B.Carneiro

Prof. Eduardo C. S. Thomaz

Notas de aula

1 / 79



**COPPE**  
COORDENAÇÃO  
DOS PROGRAMAS  
PÓS-GRADUADOS  
DE ENGENHARIA

# APLICAÇÕES DA TEORIA DA PLASTICIDADE AO CONCRETO

FERNANDO LUIZ LOBO B. CARNEIRO

Publicação n.º 1.68

RIO DE JANEIRO

MARÇO DE 1968



APLICAÇÕES DA TEORIA DA PLASTICIDADE AO CONCRETO

FERNANDO LUIZ LOBO B. CARNEIRO

ERRATA

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
12	30	$\sigma_o = 0,75 \sigma_{br}^i$	$\sigma_o' = 0,75 \sigma_{br}^i$
15	7	2 k c	2 K c
15	16	$\frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{\sigma_o}$	$\frac{1}{2} \frac{\sigma_o^i}{\sigma_o}$
16	25	$\kappa = 5$	$\kappa^2 = 5$
19	12	$(\frac{\sigma_i + \sigma_j}{2})^2$	$(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2})^2$
19	24	$\sigma_1=0, \sigma_2=0 \text{ e } \sigma_3=0$	$\sigma_1=\sigma_o, \sigma_2=\sigma_o \text{ e } \sigma_3=\sigma_o$
21	13	$\sigma_o^i$	$-\sigma_o^i$
22	25	nível	nível zero
25	25	$\frac{\sigma}{\gamma}$	$\frac{\sigma^p}{\gamma^p}$
25	26	$\frac{\sigma_o}{\epsilon^p \gamma}$	$\frac{\sigma_o^p}{\epsilon^p}$
54	12	concretos	concretos correntes, e de 50 % para concretos



APLICAÇÕES DA TEORIA DA PLASTICIDADE AO CONCRETO

Fernando Luiz Lobo B. Carneiro(\*)

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho são estudadas algumas aplicações da teoria da plasticidade ao concreto, partindo-se de uma dupla condição de plastificação ("yeld condition") representada por uma envoltória de Mohr simplificada que abrange tanto os casos de ruptura por deslizamento como os de ruptura por separação.

Os princípios e métodos gerais da teoria da plasticidade, inclusive a lei de fluência ("flow rule") baseada no conceito de potencial plástico generalizado são aplicados ao concreto como si tratasse de meio contínuo homogêneo e isótropo perfeitamente plástico. O problema prático abordado é o de corpos prismáticos solicitados por carregamentos parciais em faces opostas, e o da compressão diametral de cilindros.

Na realidade o concreto é um material heterogêneo, e o estado de tensões existente, mesmo no caso de solicitações simples, é bastante complicado. No ensaio de compressão simples de um prisma, por exemplo, em lugar de isostáticas de compressão paralelas ao eixo do prisma temos isostáticas que se encurvam e concentram ao aproximar-se de um grão de agregado com módulo de elasticidade maior que o da pasta como que por ele atraídas. Em consequência surgem tensões transversais secundárias de tração, e as tensões principais de compressão não são mais uniformemente distribuídas na seção transversal.



UNIVERSIDADE DO BRASIL

8

Apesar disso, o confronto dos resultados da aplicação da teoria da plasticidade ao concreto com alguns dados experimentais tende a demonstrar que a aproximação obtida é bastante satisfatória. Aliás experiências recentes como as de J.J. Trott (ref. 17) e de B.P. Hughes e G.P. Chapman (ref. 18, 19), utilizando novas técnicas experimentais, demonstraram que o concreto apresenta, ao contrário do que se supunha, apreciável plasticidade à tração. Novas pesquisas experimentais são no entanto necessárias para confirmar as conclusões deste trabalho. É provável que o comportamento real do concreto se situe entre os resultados da aplicação da teoria da elasticidade e os da aplicação da teoria da plasticidade.

---

(\*) Professor titular, Coordenação de Programas Pós graduados de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro; chefe de pesquisas, Instituto Nacional de Tecnologia (Brasil), engenheiro civil.



## 2. CONDIÇÕES DE PLASTIFICAÇÃO

2.1 - O concreto, quando solicitado por esforços combinados, isto é, em estados múltiplos de tensão, apresenta dois tipos de ruptura distintos (ref. 2, 3, 4, 5):

- a) ruptura por separação ("cleavage failure"; "trennbruch").
- b) ruptura por deslizamento ("sliding failure", "gleit - bruch")

Veremos que, no caso (b), o deslizamento é sempre associado a uma dilatação normal à superfície de ruptura, mas este fenômeno é completamente distinto do da ruptura por separação. Na ruptura por deslizamento verifica-se desagregação do material numa região relativamente extensa, ao passo que a ruptura por separação se dá ao longo de superfície bastante nítida ("clean").

2.2 - Na ruptura por separação a direção da normal à superfície de ruptura coincide com a direção da maior tensão principal de tração. Essa ruptura se dá de acordo com a hipótese da maior tensão principal, geralmente atribuída a Lamé e a Rankine. A ruptura é determinada pela maior tensão principal de tração; a coexistência de uma outra tensão principal de compressão não exerce influência significativa, desde que esta tensão não ultrapasse, em valor absoluto, cerca de 3 a 5 vezes aquela tensão de tração (ref. 1, 2, 3).

2.3 - A ruptura por deslizamento pode ser satisfatoriamente explicada pela hipótese de Coulomb-Pohr, adotada em mecânica dos solos. A normal à superfície de deslizamento forma um ângulo de cerca de  $65^\circ$  com a direção da tensão de compressão de maior valor absoluto. O erro cometido ao desprezar-se a influência da tensão principal intermediária é na maioria dos casos de importância secundária, especialmente quando se estudam problemas do estado plano de deformação. Neste caso a tensão principal intermediária tem a direção do eixo das deformações nulas, e as superfícies de ruptura são forçosamente superfícies cilíndricas de geratriz paralela a esse eixo (ou planos paralelos-



10

a esse eixo).

Neste trabalho são considerados apenas os casos de estado plano de deformação.

2.4 - A ruptura do concreto é portanto interpretada de modo bastante satisfatório por um duplo critério, resultante da combinação da hipótese da maior tensão principal (Lamé-Pankine) com a hipótese de Coulomb. Esse duplo critério pode ser representado por uma envoltória de Mohr aberta para o lado dos  $\sigma$  negativos, e que corte verticalmente o eixo dos  $\sigma$  positivos num ponto cuja abscissa tem valor igual ao da resistência à tração simples. Essa envoltória deve além disso ter, nesse ponto, diâmetro de curvatura igual a 4 a 6 vezes esse valor. Os círculos de Mohr correspondentes a estações de tensão em que as tensões principais extremas são uma tensão principal de tração e uma tensão principal de compressão de valor absoluto no máximo igual a 3 a 5 vezes o daquela tensão, tangenciarão a envoltória no ponto em que esta corta o eixo dos  $\sigma$ , isto é, quando a tensão principal de tração for igual à resistência à tração simples. Quando a tensão principal de compressão tiver valor absoluto superior a 3 a 5 vezes a tensão principal de tração (ou quando a tensão principal de menor valor absoluto for nula ou também de compressão), o contacto se dará ao longo da envoltória, e não mais no ponto em que esta corta o eixo dos  $\sigma$ . No primeiro caso, a ruptura é determinada apenas pela maior tensão principal de tração; no segundo caso prevalece a hipótese de Coulomb-Mohr.



2 5 - Uma envoltória de Mohr simplificada muito conveniente para a aplicação da teoria da plasticidade ao concreto é constituída simplesmente por - um arco de círculo prolongado por duas tangentes que representam o critério de Coulomb (coesão + atrito interno). Introduzindo-se ainda, como simplificação suplementar, a hipótese de que o arco de círculo abrange toda a parte da envoltória situada do lado dos  $\sigma$  positivos, prevalecendo as duas retas de Coulomb do lados dos  $\sigma$  negativos, obtém-se a envoltória de

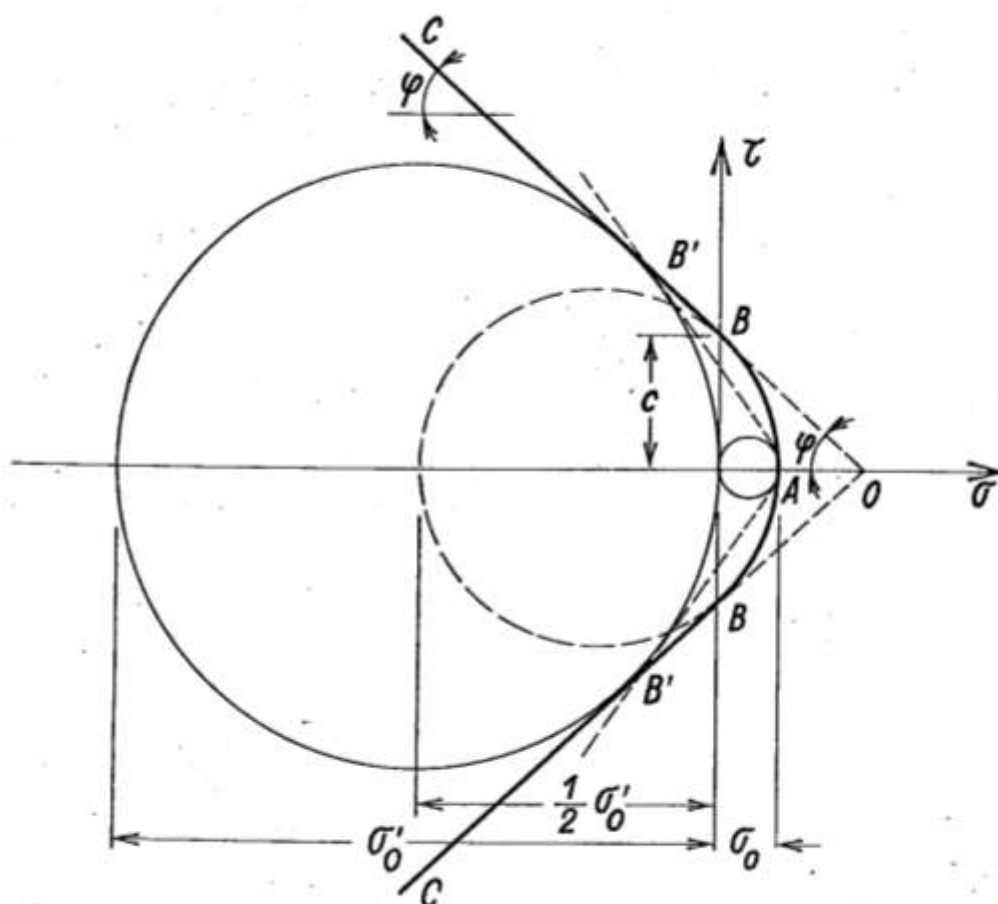


Fig.1

***Envoltória de Mohr simplificada (concreto).***

$\sigma_0$  = resistênci a à tração simples =  $\sigma_{br}$  (CEB)

$\sigma'_0$  = resistênci a "verdadeira" à compressão simples =  $0,75 \times \sigma_{br}$  (CEB)



12

Mohr da Figura 1, na qual se baseia desde 1960 a Norma Brasileira para **Cálculo e Execução de Obras de Concreto Armado (NB-1)** e que foi adotada em 1965 no projeto da Norma Internacional do Comitê Misto FIP-CEB, itens R 4,321 e CR 4,32 (Bulletin du Comité Européen du Béton n° 54) (ref. 6, 7). Como a envoltória real, do lado dos  $\sigma$  negativos, é encurvada, tendendo a tornar-se paralela ao eixo dos  $\sigma$  para valores muito elevados de tensões principais de compressão, a envoltória aproximada só deve ser usada quando uma das tensões principais for de tração, ou, no caso de estados de compressão tri-axial, quando a tensão principal de compressão de menor valor absoluto não ultrapasse cerca de 0,25 ou 0,30 da resistência à compressão simples, isto é, quando a tensão principal de compressão de maior valor absoluto não ultrapasse 2 a 2,5 vezes a resistência à compressão simples. Os problemas tratados neste trabalho satisfazem em geral a essa restrição. É esse também o caso dos pilares cintados dimensionados pelos critérios usuais das normas de cálculo, como os da Norma Brasileira NB-1.





2.6 - Essa envoltória de Mohr simplificada é a representação geométrica das duas seguintes condições de plastificação ("yield conditions").

$$\text{a) max. } \sigma = \sigma_0 \quad (1)$$

$$\text{para } \sigma \geq 0$$

$$\text{b) max. } |\tau| + \sigma \operatorname{tg} \phi = c \quad (2)$$

$$\text{para } \sigma \leq 0$$

sendo:  $\sigma_0 =$  resistência à tração simples (\*)

$$c = \text{coesão}$$

$$\phi = \text{ângulo de atrito interno}$$

(a tensão normal  $\sigma$  é considerada negativa quando de compressão).

(\*) Atenção:  $\sigma_0$  não é a tensão octaédrica;  $\sigma_0$  e  $\sigma'_0$  são respectivamente, a resistência à tração simples e a resistência à compressão simples "verdadeira" (valor absoluto) do material. Adotando as notações do C.E.B. tem-se:  $\sigma_0 = \sigma_{br}$ ,  $\sigma'_0 = 0,75 \sigma'_{br}$

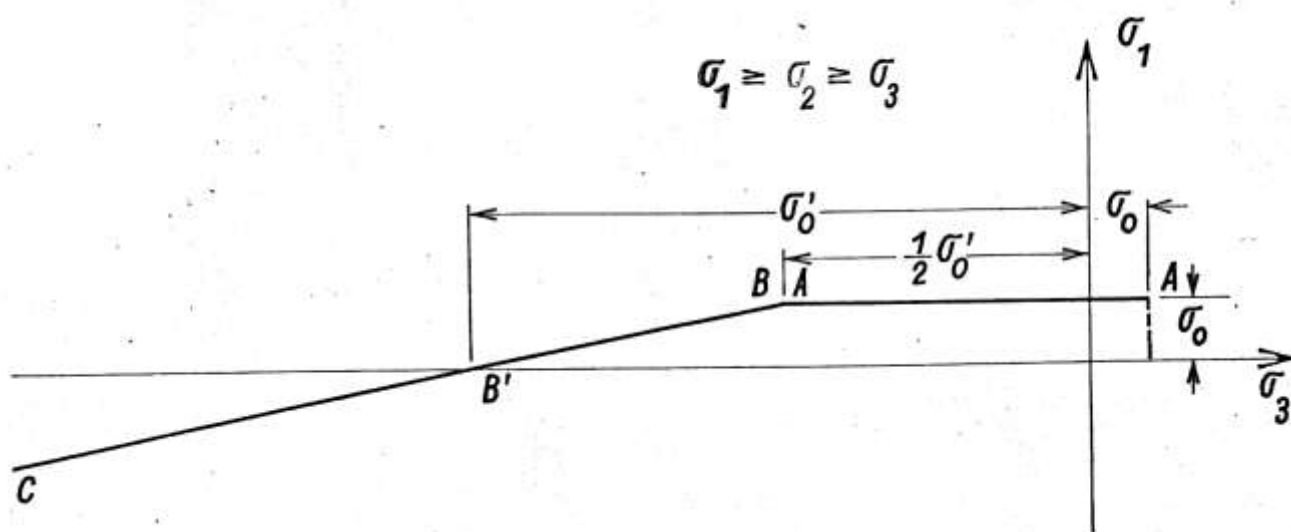


Fig. 2

### **Condições de plastificação em função das tensões principais.**

A condição (a) corresponde ao ponto A da envoltória, e a condição (b) à região BC. O arco de círculo AB representa a transição entre as duas condições de plastificação.

É fácil demonstrar que a envoltória de Mohr simplificada implicará ainda nas seguintes relações:

$$c = \sigma_0 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (3) \quad K = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (4)$$

$$c = K \sigma_0 \quad (5) \quad \sigma_0 = 2 K c = 2 K^2 \sigma_0 \quad (6)$$

sendo  $\sigma'_0$  o valor absoluto da resistência à compressão simples (a tensão de ruptura na compressão simples é:  $-\sigma'_0$ ). Para reduzir as discrepâncias entre o comportamento do material real concreto e do material-idealizado considerado neste trabalho, deve-se no entanto considerar a resistência à compressão verdadeira do concreto (ref. 16), tomando para  $\sigma'_0$  a fração 0,75 da resistência à compressão determinada em cilindros normais (ref. 14, 15, 16, 21).



A constante  $K$  pode ser obtida pela expressão

$$K^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} \quad (7)$$

deduzindo-se então os valores de  $\phi$  e de  $c$  correspondentes.

$$C = \frac{\sigma_0'}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{\sigma_0'}{4,0} \quad \text{se } \phi = 37 \text{ graus}$$

2. 7 - Nas condições (a) ou (b) as tensões  $\sigma$  e  $\tau$  correspondem ao ponto de contacto, com a envoltória, do círculo de Mohr representativo do estado de tensão. No caso da condição (a) o ponto de contacto corresponde a uma faceta normal à direção da maior tensão principal de tração (ruptura por separação, Figura 3 a e b); e no caso da condição (b), a uma faceta cuja normal forma o ângulo  $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$  com a direção da tensão principal de compressão de maior valor absoluto (ruptura por deslizamento, Figura 3 d). A transição corresponde ao contacto ao longo de todo o arco do círculo AB (Figura 3); neste caso a superfície de ruptura pode ter qualquer direção intermediária entre as dos casos de ruptura por separação ou por deslizamento.



16

A envoltória de Mohr simplificada pode ser considerada como representação geométrica ("yield locus") das duas condições de plastificação si tomarmos como variáveis:

a) no caso da condição (a), a maior tensão principal de tração.

b) no caso da condição (b), as tensões normal e tangencial - na faceta paralela à direção da tensão principal intermediária e cuja normal forma um ângulo de  $(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$  com a direção da tensão principal de compressão de maior valor absoluto.

2.8 - As condições de plastificação (a) e (b) podem ser também expressas em função das duas tensões principais extremas  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  ( com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ). Basta substituir  $\sigma$  e  $\tau$  por suas expressões em função de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Após algumas transformações obtém-se:

$$a) \sigma_1 = \sigma'_0 \quad (8)$$

$$\text{para } -\sigma_3 \leq \frac{\sigma'_0}{2} = K^2 \sigma_0$$



$$b) \sigma_3 = -\sigma'_0 + K^2 \sigma_1 \quad (9)$$

$$\text{para } \sigma_1 \leq \sigma_0$$

A figura 2 corresponde a esse modo de exprimir as condições (a) e (b), que, para o concreto, é mais cômodo que a envoltória de Mohr. O trecho AB corresponde ao ponto A da envoltória, isto é, à condição (a), e o trecho BC à região BC da envoltória, isto é, à condição (b). O arco de círculo AB da envoltória corresponde ao vértice que, na Figura 2, corresponde à transição das condições (a) e (b). As condições (8) e (9) são as adotadas no projeto da Norma Internacional do Comitê FIP-CEB.

Quando  $\sigma'_0 = \frac{\sigma_0}{10}$  tem-se  $K^2 = 5$  e:

$$a) \sigma_1 = \sigma_0 \quad (10)$$

$$b) \sigma_3 = -\sigma'_0 + 5 \sigma_1 \quad (11)$$

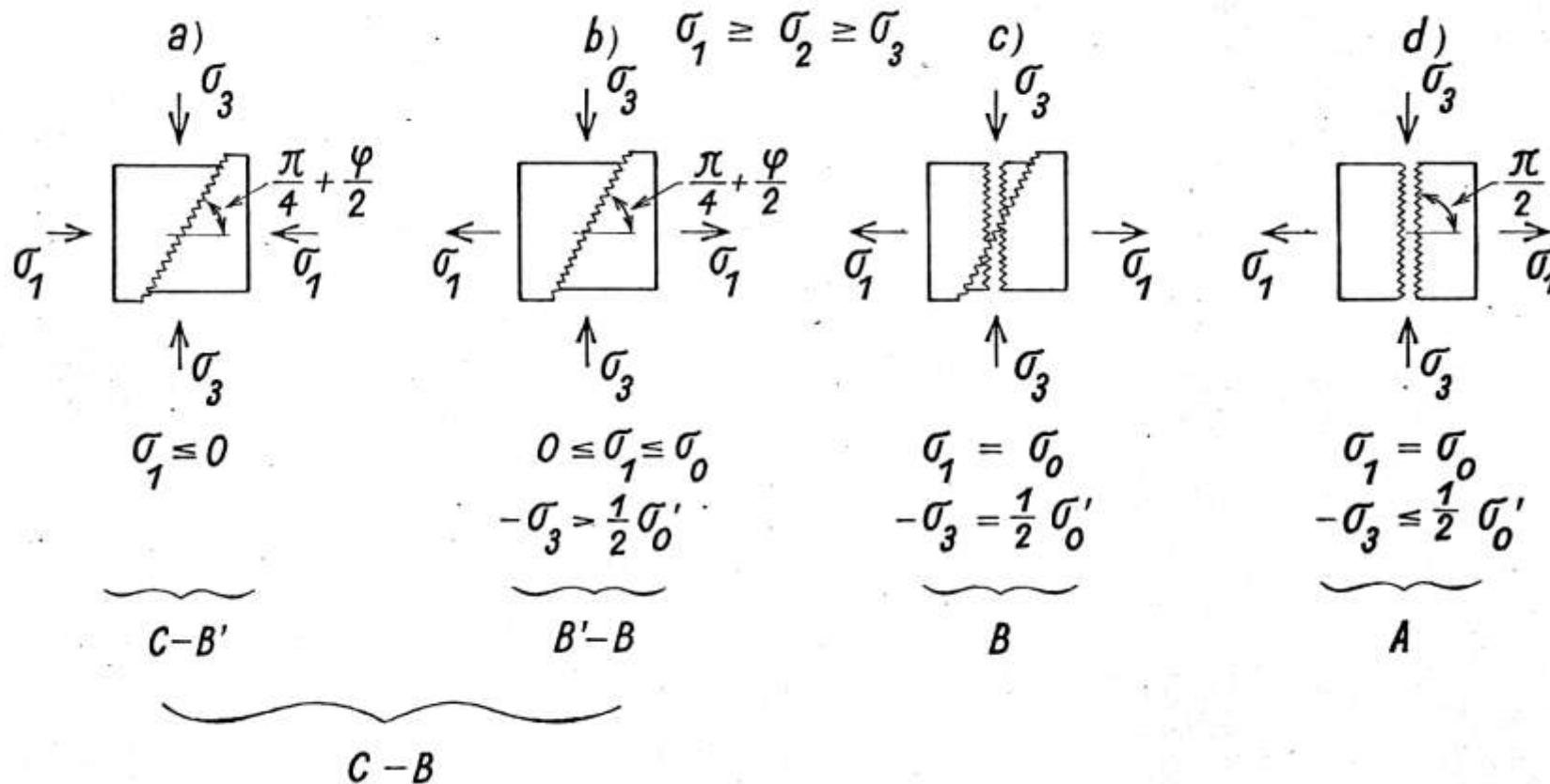


Fig.3

**Tipos de Ruptura.**



Estas condições são as da Norma Brasileira NB-1.

2.9 - Para ter maior generalidade, seria necessário exprimir as condições de plastificação em função das componentes do tensor das tensões, considerando eixos cartesianos que não coincidam necessariamente com os das tensões principais, e admitindo a possibilidade de que as tensões principais extremas possam ser duas quaisquer, sem a condição prévia -  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Tem-se assim 3 funções correspondentes à condição (a) e 6 correspondentes à condição (b). Essas funções igualadas a 0, fornecem as condições de plastificação no caso mais geral (quando têm valor negativo o regime é ainda elástico):

$$a) \phi_{ij}^a = \left( \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \right) + \left| \left( \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \right) + \tau_{ij} \right|^2 - \sigma_0 = 0 \quad (12)$$

$$b) \phi_{ij}^b = \left( \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \right) \text{sen } \phi + \left| \left( \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \right) + \tau_{ij} \right|^2 - c \text{cos } \phi = 0 \quad (13)$$

(i, j = x, y, z; i ≠ j)



Si os eixos cartesianos tiverem as direções das três tensões principais, teremos:

$$a) \phi_i^a = \sigma_i - \sigma_0 = 0 \quad (14)$$

$$b) \phi_{ij}^b = -\sigma_i + K^2 \sigma_j - \sigma_0 = 0 \quad (15)$$

$$(i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$$

Essas seis condições são representadas, no espaço das três tensões principais, por uma pirâmide de base hexagonal não regular com troncamentos, cujo eixo forme ângulos iguais com os três eixos principais, e aberta para o lado dos  $\sigma$  negativos. Essa pirâmide é limitada, de lado dos  $\sigma$  positivos, por 3 planos cujas equações são respectivamente  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = \sqrt{0}$  e  $\sigma_3 = \sqrt{0}$ , e que correspondem ao critério da maior tensão principal de tração.





UNIVERSIDADE DO BRASIL

20

Nos casos considerados neste trabalho, que são todos de estado plano de tensão, a tensão principal intermediária é sempre a que tem direção paralela à direção das deformações nulas, tensão esta que não influi na ruptura e que portanto não aparece nas equações de equilíbrio ou de conservação de energia. A representação plana das Figuras 1 ou 2 é portanto suficiente.

2.10 - É interessante mostrar os resultados da aplicação das condições de plastificação (a) e (b) a alguns casos de estados múltiplos de tensão (sempre com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ )

1) tração simples

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 ; \sigma_1 > 0$$

condição de plastificação:  $\sigma_1 = \sigma_0$

(ruptura por separação)



2) torção ou cisalhamento simples:

$$\sigma_3 = -\sigma_1; |\sigma_3| = |\sigma_1| = \max|\tau|$$

$$\text{condição de plastificação: } \sigma_1 = \sigma_0$$

(ruptura por separação)

3) cilindro sollicitado por compressão diametral, estado de  
tensão no centro do círculo, calculado pela teoria elástica:

$$\sigma_3 = -3\sigma_1$$

$$\text{condição de plastificação: } \sigma_1 = \sigma_0$$

(ruptura por separação)

4) corte ("schorfestigkeit") - transição da condição (a) para  
a condição (b):

$$\sigma_3 = -K^2 \sigma_1$$

$$\text{condição de plastificação: } \sigma_1 = 0, \sigma_3 = -\frac{1}{2} \sigma_0'$$



UNIVERSIDADE DO BRASIL

21

(ruptura por separação ou por deslizamento, Figura 3c; as tensões na faceta cuja normal forma o ângulo  $(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$  com a direção de  $\sigma_3$  são  $\sigma = 0$  e  $\tau = c$ ).

5) compressão bi-axial: (estado plano de tensão com duas tensões principais de compressão, sendo  $\sigma_1$  tensão principal nula):

$$\sigma_1 = 0, \sigma_3 \leq \sigma_2 < 0$$

condição de plastificação:  $\sigma_3 = -\sigma'_0$

(ruptura por deslizamento segundo plano paralelo a  $\sigma_2$ , formando ângulo de  $(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$  com a direção das tensões principais nulas).

6) compressão tri-axial: (inclui o caso de estado plano de deformação quando as duas tensões principais extremas são de compressão):

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 < 0$$

condição de plastificação:  $\sigma_3 = -\sigma'_0 + K^2 \sigma_1$

(ruptura por deslizamento segundo plano paralelo à direção de  $\sigma_1$  e formando ângulo igual a  $(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$  com a direção de  $\sigma_1$ ).



A condição de ruptura pode também escrever-se, neste caso:

$$(\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 < 0)$$

$$|\sigma_3| = \sigma'_0 + K^2 |\sigma_1|$$

Quando

$$\sigma'_0 = \frac{\sigma_0}{10} \text{ tem-se } K^2 = 5 \text{ e:}$$

$$|\sigma_3| = \sigma_0 + 5 |\sigma_1|$$

Esta condição é a origem da fórmula de cálculo de pilares cintados de vários normas, inclusive a Norma Brasileira NB-1. No cálculo de  $\sigma_1$  admite-se que a armadura de cintamento está em escoamento na ocasião da ruptura de pilar.



UNIVERSIDADE DO BRASIL

### 3 - RELAÇÕES ENTRE DEFORMAÇÕES E TENSÕES EM REGIME ELÁSTICO - DISSIPACÃO DE ENERGIA INTERNA

3.1 - Como relação entre as deformações e as tensões em regime plástico, adota-se neste trabalho a lei de fluência ("flow rule") derivada do conceito de potencial plástico (ref. 9, 10, 11, 12, 13).

Seja  $\phi(\sigma_{ij})$  a função que exprime a condição de plastificação ("yield condition"), quando igual a 0. Essa função é expressa de tal modo que apresente valores negativos em regime elástico. As variáveis são "esforços generalizados", por exemplo, as componentes  $\sigma_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ , do tensor das tensões ( $\sigma_{11} = \sigma_x$ , etc...;  $\sigma_{12} = \tau_{xy}$ , etc...). A cada "esforço generalizado" está associada uma "deformação generalizada", que no exemplo citado são as componentes  $\epsilon_{ij}$  do tensor das deformações ( $\epsilon_{11} = \epsilon_x$ , etc...;  $\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$ , etc...).

A lei de fluência consiste em que a deformação plástica generalizada (ou a velocidade de deformação plástica) é proporcional à derivada da função  $\phi$  em relação ao esforço generalizado correspondente:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{d \epsilon_{ij}^p}{d t} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (16)$$

sendo  $\lambda$  um fator de proporcionalidade positivo.



sendo  $\lambda$  um fator de proporcionalidade positivo.

A representação geométrica ("yield locus") da condição de plastificação no espaço dos esforços generalizados é uma superfície convexa (ou uma curva, no caso de só intervirem na condição de plastificação - dois esforços generalizados), cuja equação é

$$\phi(\sigma_{ij}) = 0 \quad (17)$$

e que contém em seu interior a origem dos eixos coordenados.

Essa superfície tem os característicos de superfícies de nível da função potencial ( $-\phi$ ), da qual derivam, segundo (16), as deformações generalizadas. Si representamos as velocidades de deformação plástica - por vetores tendo origem no ponto  $\sigma_{ij}$  da superfície (ou curva)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

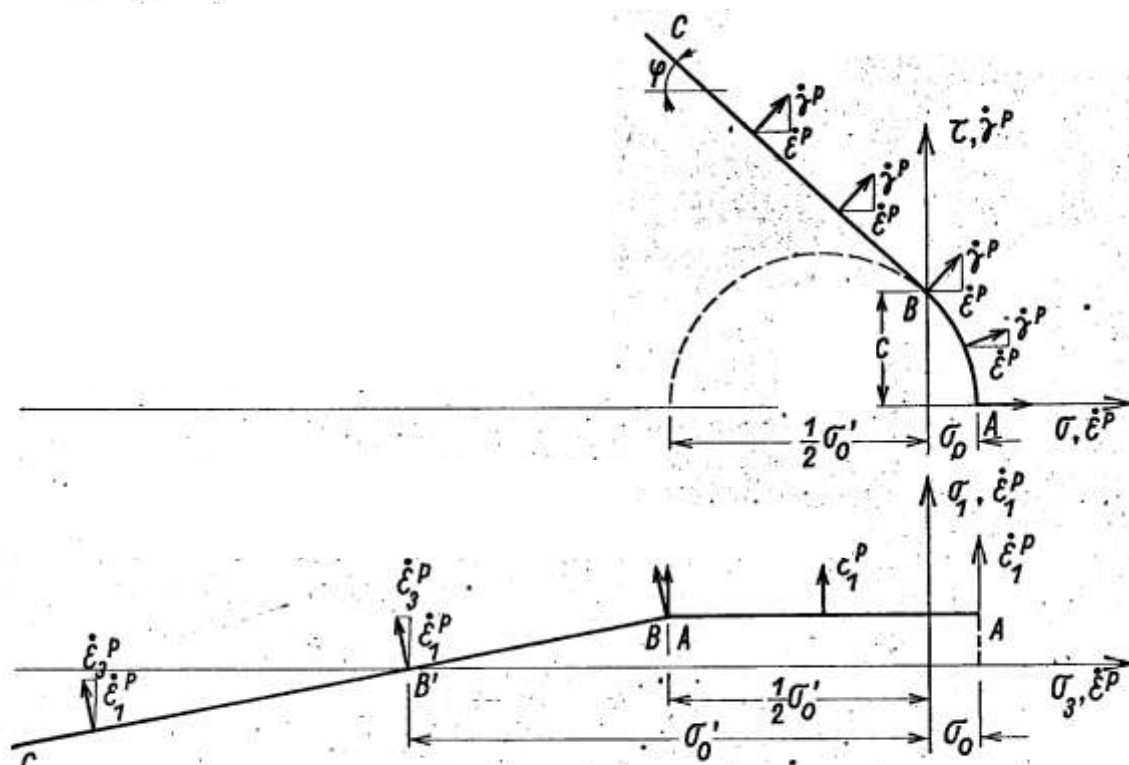


Fig. 4



*Fig.4 - Aplicações da teoria do potencial plástico generalizado ( lei de fluência )*

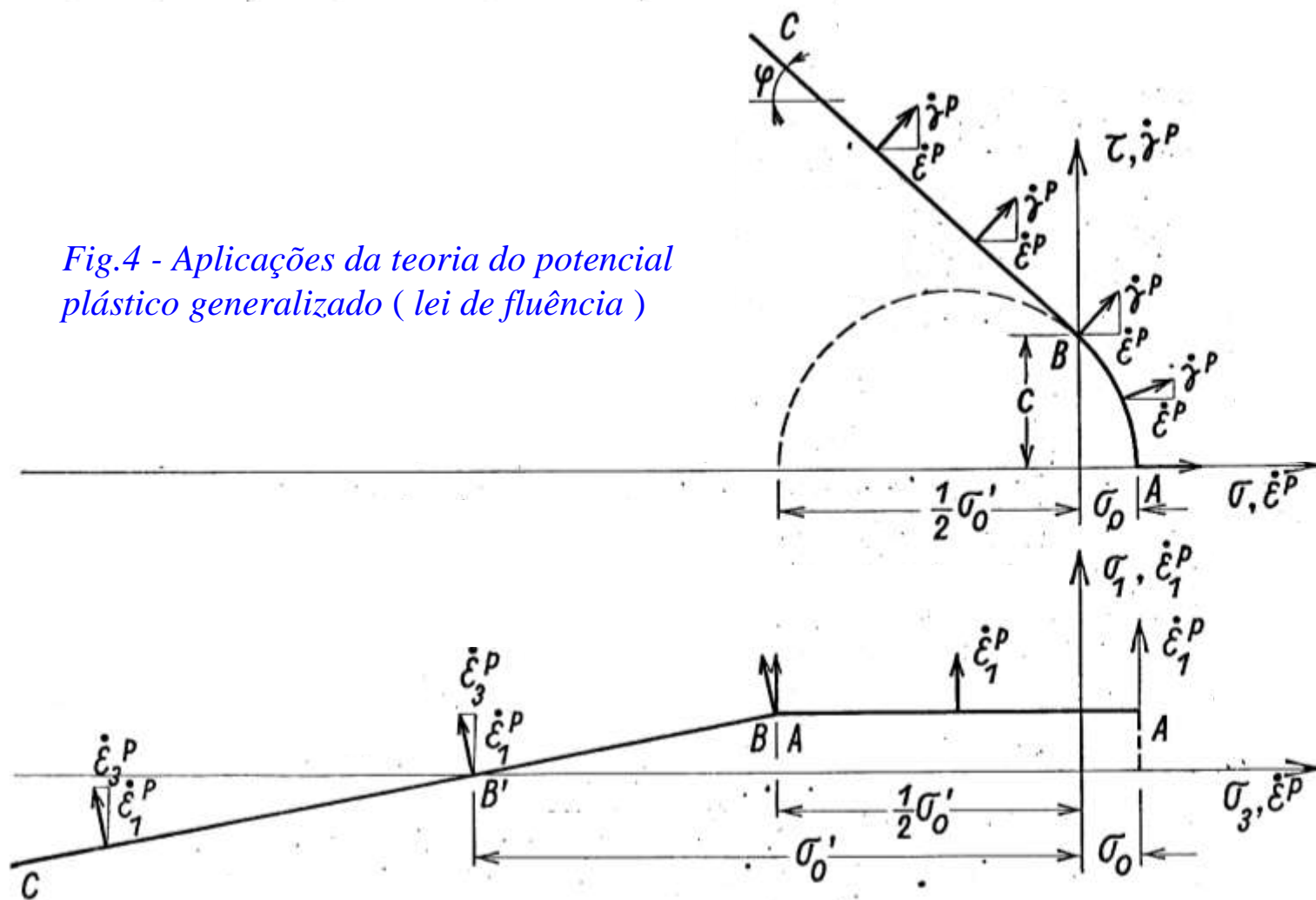


Fig. 4 (ampliada)



fazendo coincidir os eixos dos  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  com os eixos dos  $\sigma_{ij}$  correspondentes, é fácil verificar que tais vetores são normais a essa superfície convexa (ou curva), dirigidas para o seu exterior.

Quando existem várias condições de plastificação, representadas por funções  $\phi$  diferentes, adota-se o conceito de potencial plástico generalizado, devido a Koiter. Numa aresta (ou vértice) correspondente à transição de uma condição de plasticidade para outra, a normal generalizada pode ter qualquer direção compreendida entre as duas normais limites dessas duas funções.

3.2 - As figuras 1 e 2 mostram claramente como aplicar a lei de fluência baseada no conceito de potencial plástico generalizado às condições de plastificação adotadas neste trabalho.

Sempre que prevalece a condição (a), a velocidade de deformação plástica tem a direção e o sentido da maior tensão principal de tração, sendo nulas as deformações transversais a essa tensão:

$$\dot{\epsilon}_1^p = \lambda$$

$$\dot{\epsilon}_3^p = 0$$





UNIVERSIDADE DO BRASIL

Quando prevalece a condição (b), pode-se verificar na Figura 1 que a velocidade de deformação plástica tem uma componente tangencial à superfície de ruptura, que é a distorção  $\dot{\gamma}^p$ ; e uma componente normal a essa superfície e de sentido oposto ao da tensão normal de compressão. Esta componente normal  $\dot{\epsilon}^p$  é portanto um alongamento, e significa que o deslramento segundo a superfície de ruptura é acompanhado de uma dilação do material, na direção normal a essa superfície:

$$\begin{aligned} \left| \dot{\gamma}^p \right| &= \lambda \\ \dot{\epsilon}^p &= \lambda \operatorname{tg} \phi = \left| \dot{\gamma}^p \right| \operatorname{tg} \phi \end{aligned} \quad (19)$$

Essa propriedade, - ruptura por deslramento acompanhada de aumento de volume de material -, é denominada dilatância.



UNIVERSIDADE DO BRASIL

26

Tomando como esforços generalizados as tensões principais extremas  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , é fácil verificar, na figura 4, que a velocidade de deformação plástica tem uma componente  $\dot{\epsilon}_3^p$  com o sentido dos  $\sigma_3$  negativos, e que portanto é um encurtamento, e uma componente  $\dot{\epsilon}_1^p$ , muito maior em valor absoluto, com o sentido dos  $\sigma_1$  positivos, e que portanto é um alongamento:

$$\dot{\epsilon}_3^p = -\lambda$$

$$\dot{\epsilon}_1^p = K^2 \lambda = -K^2 \dot{\epsilon}_3^p$$

O fato de ser o alongamento  $\dot{\epsilon}_1^p$  igual a  $K^2$  vezes o valor absoluto do encurtamento  $\dot{\epsilon}_3^p$  confirma o fenômeno da dilatância.

3.3 - Muitos autores opõem restrições à validade da lei de fluência baseada no conceito de potencial plástico, por não ser confirmado experimentalmente, para certos terrenos coesivos, o fenômeno da dilatância. No entanto, no caso do concreto, (ref. 14, 15, 16) numerosas pesquisas, inclusive algumas experiências recentes muito cuidadosas, realizadas com a utilização de uma nova técnica experimental que possibilita o registro das deformações do concreto até a ruptura, comprovaram o fenômeno do aumento de volume, isto é, da dilatância, na fase final dos ensaios de compressão simples.



UNIVERSIDADE DO BRASIL

Tais ensaios, realizados por B.B. Hughes e G.P. Chapman, demonstraram também que o concreto apresenta uma plasticidade à tração que, em bora limitada, é da mesma ordem de grandeza que a plasticidade verificada nos ensaios de compressão (ref. 18, 19).

Parece portanto que a lei de fluência baseada no conceito de potencial plástico é capaz de explicar de modo razoavelmente satisfatório as relações entre as deformações do concreto e tensões em regime plástico.

Essa lei de fluência é instrumento valioso para a pesquisa dos limites superiores da carga de colapso.

3.4 - Um dos elementos indispensáveis para aplicação dos métodos da teoria da plasticidade é o valor da velocidade de dissipação da energia, ou potência dissipada durante uma deformação plástica-



No caso de ruptura por separação a velocidade de dissipação da energia interna, por unidade de volume, é dada por:

$$a) D = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1^p \quad (21)$$

No caso de ruptura por deslizamento é conveniente exprimir a potência dissipada em função das tensões de cisalhamento normal e xistentes na superfície de ruptura:

$$b) D = |\tau| |\dot{\gamma}^p| + \sigma \dot{\epsilon}^p$$

Substituindo  $\dot{\epsilon}^p$  por seu valor  $\dot{\gamma}^p \operatorname{tg} \phi$  dado em (19), e levando em conta a condição de plastificação (2), temos:

$$b) D = (|\tau| + \sigma \operatorname{tg} \phi) |\dot{\gamma}^p| = c |\dot{\gamma}^p|$$

A função de dissipação por unidade de volume,  $D$ , pode portanto ser calculada sem serem conhecidos os valores de  $\sigma$  e  $\tau$ , e depende apenas da coesão  $c$  e da velocidade de distorção  $\dot{\gamma}^p$ . Esta conclusão é da maior importância.



#### 4. CAMPOS DE VELOCIDADES CINEMATICAMENTE ADMISSIVEIS DESCONTÍNUOS

4.1 - Quando se deseja determinar um limite superior da carga de colapso por meio do teorema do limite superior, é em geral útil considerar mecanismos de ruptura, ou campos de velocidades cinemáticamente admissíveis, em que o corpo é dividido em partes que se movem como corpos - rígidos, separadas por camadas de transição de pequena espessura e, nas quais se concentram as deformações plásticas. Essas camadas são idealmente consideradas como superfícies de descontinuidade. No caso de estados planos de deformação, os traços das superfícies de descontinuidade no plano normal à direção das deformações nulas são chamadas linhas de descontinuidade.

Temos assim campos de velocidades cinemáticamente admissíveis descontínuos (ref. 8,9,12,13)

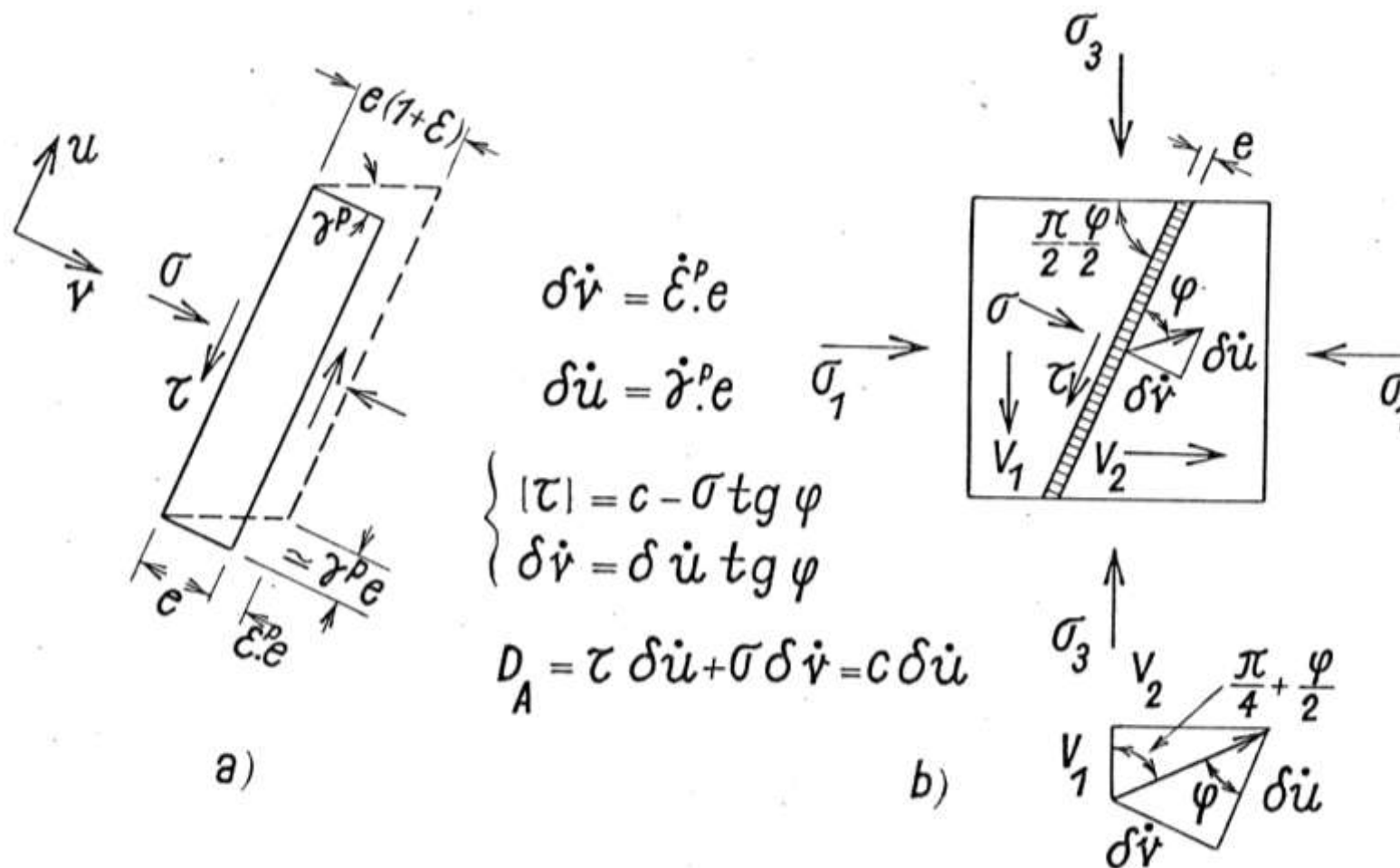


Fig. 5

*Velocidade de dissipação da energia interna . Mecanismo de ruptura da compressão simples.*



A diferença entre as velocidades de duas partes contíguas é igual à variação de velocidade total, verificada no interior da camada de transição. Em lugar da função de dissipação por unidade - de volume  $D$ , é conveniente adotar a função  $D_A$ , que representa a velocidade de dissipação de energia interna por unidade de área da superfície de ruptura.

Designem-se por  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  os deslocamentos respectivamente tangencial e normal à superfície de ruptura (Figura 4).

No caso de ruptura por separação tem-se:

$$a) \quad \delta \dot{u} = 0 \quad (24)$$

$$\delta \dot{v} = \epsilon_1^p \cdot e \quad (25)$$

$$D_A = \sigma_1 \delta \dot{v} \quad (26)$$



UNIVERSIDADE DO BRASIL

No caso de ruptura por deslissamento tem-se:

$$b) \delta \dot{u} = |\dot{\gamma}^p| \cdot e \quad (27)$$

$$\delta \dot{v} = \dot{\epsilon}^p \cdot e = \delta \dot{u} \operatorname{tg} \phi \quad (28)$$

$$D_A = c \cdot \delta \dot{u} \quad (29)$$

4.2 - Nos casos de estado planos de deformação é fácil concluir, do que acaba de ser mostrado, que as linhas de descontinuidade só podem ser linhas retas (movimentos de translação das regiões contíguas, como corpos rígidos) ou espirais logarítmicas (movimento de rotação de uma região em relação à outra). Neste trabalho só serão consideradas linhas de descontinuidade retas.

4.3 - A Figura 4 mostra com clareza essas relações. No caso de ruptura por deslissamento tanto o vetor velocidade de deformação (componentes  $\dot{\gamma}^p$  e  $\dot{\epsilon}^p$ ) como o vetor variação de velocidade (componentes -





$\delta\dot{u}$  e  $\delta\dot{v}$ ), formam o ângulo  $\phi$  com a superfície de deslizamento, o que corresponde ao fenômeno da dilatância.

4.4 - Aplicaremos os resultados anteriores ao cálculo da carga de colapso de um prisma sollicitado à compressão simples. O mecanismo de ruptura é muito simples: uma só superfície de deslizamento, cuja normal forma o ângulo  $(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$  com o eixo do prisma, isto é, com a direção da tensão principal de compressão  $\sigma_3$ . Podemos imaginar que uma das partes se move verticalmente com a velocidade  $V_1$  paralela ao eixo do prisma.

A variação de velocidade ao longo da camada de transição,  $\vec{\delta\dot{v}}$ , forma o ângulo  $\phi$  com a superfície de deslizamento, do que se deduz (Figura 4):

$$V_2 = V_1 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = K V_1 \quad (30)$$



A componente de  $\delta \vec{v}$  na direção da superfície de deslizamento é

$$\delta \dot{u} = V_1 \frac{\cos \phi}{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)} = V_1 \cdot 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (31)$$

e a área da superfície de deslizamento, por unidade de área da seção transversal do prisma, é:

$$\frac{1}{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)}$$

Temos portanto

$$D_A = c \cdot \delta u \left( \frac{1}{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)} \right) = 2c \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) V_I \quad (32)$$

Por outro lado a potência das forças exteriores de compressão, uniformemente distribuídas, aplicadas nos tôpos do prisma, é, por unidade de área da seção transversal do prisma:

$$- \sigma_3 V_1$$

Igualando a potência das forças exteriores à velocidade de dissipação de energia interna temos:

$$- \sigma_3 V_1 = D_A = 2 c \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) V_1 \quad (33)$$

ou

$$- \sigma_3 = 2 c \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = 2 k c \quad (34)$$

que é a conhecida expressão da resistência à compressão simples em função da coesão e do ângulo de atrito interno:

$$\sigma'_0 = 2 K c \quad (35)$$



Si o prisma fôr solicitado em estado de compressão tri-axial sendo  $\sigma_1$  a tensão principal transversal de compressão (negativa) de menor valor absoluto, é necessário acrescentar ao primeiro membro de equação (33) uma parcela que represente a potência das forças exteriores aplicadas lateralmente. A área lateral em que são aplicadas, uniformemente, essas forças, é a projeção vertical da superfície de deslizamento. Tem-se assim, para um prisma de seção transversal igual à unidade, uma projeção vertical da superfície de deslizamento igual a  $1 \times \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$ . Por outro lado, a velocidade  $V$  tem sentido contrário ao de  $\sigma_1$ , e portanto a potência das forças laterais é negativa. Obtém-se assim;

$$- \sigma_3 V_1 + \sigma_1 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) V_2 = D_A \quad (36)$$

ou

$$\begin{aligned} - \sigma_3 V_1 + \sigma_1 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) V_1 &= 2 c \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) V_1 \\ - \sigma_3 &= \sigma'_0 - \sigma_1 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = \sigma'_0 - K^2 \sigma_1 \end{aligned} \quad (37)$$

expressão esta que coincide com a condição de plastificação para ruptura por deslizamento (9).



## 5. CAMPOS DE TENSÕES ESTATICAMENTE ADMISSÍVEIS DESCONTÍNUOS

5.1 - Quando se deseja determinar um limite inferior da carga de colapso plástico, por meio do teorema do limite inferior, é muitas vezes útil considerar campos de tensões estáticamente admissíveis descontinuos. O corpo é dividido em regiões separadas por superfícies de descontinuidade (ou linhas de descontinuidade, no caso do estado plano de deformação). Essas superfícies de descontinuidade não são superfícies de ruptura, como no caso dos campos de velocidades cinematicamente admissíveis descontinuos. Em cada região supõe-se existir um campo de tensões uniforme, definido por tensões principais que têm o mesmo valor absoluto, direção e sentido em toda a região. Ao longo de uma superfície (ou linha) de descontinuidade devem ser satisfeitas as condições do equilíbrio (v. Figura 8) As tensões normais de direção normal à superfície de descontinuidade, e as tensões tangenciais a ela paralelas, têm que ser iguais nas duas regiões contiguas. As



UNIVERSIDADE DO BRASIL

tensões normais de direção paralela superfície de descontinuidade podem no entanto ser diferentes. Isso seria inadmissível fisicamente, mas não infringe as condições da estática, sendo portanto "estaticamente - admissível" (reg.. 8,9,12,13).

Com as definições e notações correspondentes à figura 8, deve-se ter portanto, designando por  $x$  a direção da linha de descontinuidade que separa as regiões I e II, e por  $y$  a direção a ela normal:

$$\sigma_{x,I} = \sigma_{x,II} \quad (39)$$

$$\tau_{xy,I} = \tau_{xy,II} \quad (40)$$

podendo ser

$$\sigma_{y,I} \neq \sigma_{y,II} \quad (41)$$

As condições de equilíbrio (39) e (40), expressas em função das tensões principais nas regiões I e II, são facilmente obtidas com o auxílio, por exemplo, da representação gráfica de Mohr. Chamando de  $\alpha_I$  e  $\alpha_{II}$  os ângulos da linha de descontinuidade com as direções das tensões principais de menor valor algébrico  $\sigma_{3,I}$  e  $\sigma_{3,II}$ , respectivamente nas regiões I e II, tem-se:



$$\begin{aligned} & (\sigma_{1,I} + \sigma_{3,I}) - (\sigma_{1,I} - \sigma_{3,I}) \cos 2\alpha_I \\ & = (\sigma_{1,II} + \sigma_{3,II}) - (\sigma_{1,II} - \sigma_{3,II}) \cos 2\alpha_{II} \end{aligned} \quad (42)$$

$$(\sigma_{1,I} - \sigma_{3,I}) \sin 2\alpha_I = (\sigma_{1,II} - \sigma_{3,II}) \sin 2\alpha_{II} \quad (43)$$

5.2 - Além dessas equações de equilíbrio; as condições de plastificação ("yield conditions") devem ser respeitadas no interior de cada região em que é dividido o corpo. Essas regiões estarão sempre ou em regime elástico ou em regime plástico; no primeiro caso as condições de plastificação fornecem inequações, e no segundo caso tais inequações se transformam em equações.

Para obter o maior valor do limite inferior da carga de colapso plástico deve-se procurar uma configuração de superfícies ( ou linhas) de descontinuidade tal que o maior número possível de regiões em que é subdividido o corpo se encontram em regime plástico.

5.3 - No caso de estado planos de deformação em que se considerem linhas de descontinuidade retas, temos em cada linha de descontinuidade um par de equações de equilíbrio e em cada região a inequação (ou as inequações) correspondente à condição (ou às condições) de plastificação.



UNIVERSIDADE DO BRASIL

5.4 - Para que duas regiões vizinhas se encontrem em regime plástico é preciso que os ângulos das direções principais, em cada uma delas, com a linha de descontinuidade, satisfaçam a certas condições. Neste trabalho será frequentemente utilizada a condição deduzida por R.T. Shield-  
(ref. 13)

$$\cos(\alpha_I + \alpha_{II}) = \sin\phi \times \cos(\alpha_I - \alpha_{II}) \dots\dots\dots(44)$$

Essa condição corresponde a colapso por deslissamento, isto é, do tipo b, ou Coulomb, nas duas regiões contíguas. No caso de serem previamente conhecidas as direções principais na região I e na região II, em consequência de considerações de simetria ou de condições de contorno, a equação (44) determinará a direção que deve ter a linha de descontinuidade para que sejam satisfeitas as condições de plastificação de tipo b(Coulomb) simultaneamente nas duas regiões. Neste caso os ângulos  $\alpha_I$  e  $\alpha_{II}$  ficam determinados, e as condições (42) e (43) constituirão um sistema de equações lineares em que as incógnitas são as tensões principais.



UNIVERSIDADE DO BRASIL

6. BLOCO COM CARREGAMENTO PARCIAL EM DUAS FACES OPOSTAS - LIMITE SUPERIOR DA CARGA DE COLAPSO.

6.1 - O problema tratado a seguir é o de um bloco com carregamento parcial em duas faces opostas, em estado plano de deformações. O carregamento é uniformemente distribuído ao longo de faixas com largura  $b_0$ , sendo  $P$  a força resultante por unidade de comprimento da espessura do bloco. A altura do bloco é  $d$ , e sua largura  $b$  pode variar de  $b_0$  a  $\infty$ . Uma característica fundamental do problema tratado é que existem tensões transversais de tração na região central do bloco, que podem dar lugar a uma ruptura do tipo (a), isto é, a uma ruptura por separação determinada pela tensão principal de tração ("fendage", "splitting failure", "spaltbruch").

A marcha de cálculo seguida é análoga à descrita em ref. 8, 9, 12 e 13. Em ref. 8 e 9 são tratados vários casos de estados planos por meio da consideração de campos de velocidades ou campos de tensões descontínuos, para materiais com  $\phi = 0$  (condição de plastificação de Tresca). Em ref. 12 e 13 esse método é estendido a materiais -





com  $\phi \neq 0$  (condição de plastificação de Coulomb). A única originalidade do presente trabalho, além da que correspondem ao exemplo escolhido, reside na consideração da dupla condição de plastificação descrita em 2, da qual decorre possibilidade de uma ruptura por separação na região central do bloco, além de deslizamentos de tipo Coulomb que foram o único tipo de ruptura considerando em reg, 12 e 13.

6.2 - Para determinação do limite superior  $P^+$  da carga de colapso - plástico, pelo método dos campos de velocidades cinematicamente admissíveis descontínuos, são possíveis 4 mecanismos, dois dos quais - estão representados na Figura 6. Esses 4 mecanismos são descritos a seguir.

+++



Mecanismo a (Figura 6): formam-se duas cunhas em estado de compressão tri-axial, sob as cargas parciais, que se deslocam verticalmente, uma em direção à outra, com as velocidades de translação  $\vec{V}_1$ , ao mesmo tempo que as duas partes restantes do corpo, situadas de um e outro lado do eixo vertical de simetria, se separam com as velocidades de translação  $\vec{V}_2$ , verificando-se ao longo desse eixo ruptura por separação (tipo a), e ao longo das linhas que delimitam as duas cunhas, ruptura por deslissamento (tipo b). As condições de simetria, evidentes, indicam que o eixo vertical de simetria é uma direção principal; as linhas de deslissamento referidas formam com esse eixo o ângulo  $(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})$ . Este mecanismo é o mais importante, e corresponde à ruptura designada como "tração indireta" ("fendage", "splitting failure", "spaltbruch");

Mecanismo b (Figura 6): forma-se uma única superfície plana de deslissamento, começando numa das extremidades da carga parcial, e dirigindo-se para a face lateral oposta. O ângulo da linha de deslissamento com o eixo vertical de simetria é  $(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})$ : As duas partes do bloco, por ela separadas se deslocam com as velocidades de translação  $\vec{V}_1$  e  $\vec{V}_2$ , indicadas na figura. Este mecanismo é semelhante ao da ruptura por compressão simples, com a única diferença de que a carga aplicada nos topos do bloco é parcial.



UNIVERSIDADE DO BRASIL

40

Mecanismo c: é um mecanismo semelhante ao anterior, tendo a superfície do deslizamento como diretriz uma espiral logarítmica. Uma das partes do bloco apresenta movimento de rotação tendo como centro de rotação o polo da espiral logarítmica. Este mecanismo é utilizado em mecânica dos solos para estudo da estabilidade de taludes, quando se adota o método dos campos de velocidades descontínuos.

Mecanismo d: corresponde a uma ruptura local, e só deve ser considerado quando a largura da faixa de contacto é tão pequena, em relação às dimensões do bloco, que este pode ser considerado como um semi-plano. A superfície de deslizamento tem como diretriz, como no mecanismo anterior, uma espiral logarítmica, mas esta não chega a atingir a face lateral do bloco, terminando na própria face sobre a qual atua a carga parcial. Este mecanismo é utilizado em mecânica dos solos para determinação do limite superior da capacidade de carga de fundações pelo método dos campos de velocidades descontínuos (ref. 29, 30).



UNIVERSIDADE DO BRASIL

6.3 - A Figura 6 mostra com clareza as relações que devem existir entre as velocidades  $\vec{V}_1$  e  $\vec{V}_2$  para que seja respeitada a lei de fluência ("flow rule"), tal como foi exposto em 3.e 4.: a variação de velocidade ( $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ ) deve formar o ângulo  $\phi$  com a linha de deslizamento, no caso de ruptura do tipo b (Coulomb), ou deve ser normal à linha de separação no caso de ruptura do tipo a (ruptura por tração).

Os mecanismos c e d não apresentam maior interesse para o presente estudo. O mecanismo c fornece valores um pouco inferiores - aos do mecanismo b, mas não muito diferentes, e o mecanismo d só prevaleceria, como é fácil de verificar, no caso de faixas de contacto muito estreitas (da ordem de, no máximo, 2% ou 3% da largura do bloco). Aliás, em lugar de considerar êsses dois últimos mecanismos, com campos de velocidades descontínuos, poderíamos simplesmente adotar as conhecidas fórmulas de Prandtl-Caquot, para capacidade de carga de fundações e para estabilidade de taludes sem peso, formulas essas que são deduzidas da consideração de campos de velocidades contínuos.



Limitar-nos-emos aos mecanismos a e b, sendo o mecanismo a o mais importante, pois, como veremos, o mecanismo b só prevalece no caso de blocos com largura bem menor que a altura.

6.4 - Para o mecanismo a temos, do mesmo modo que em 4.4 :

$$V_2 = K \cdot V_1 \quad (45)$$

As componentes das variações de velocidade

$$\delta \vec{V} = \vec{V}_2 - V$$

nas direções das quatro superfícies de deslizamento que delimitam as duas cunhas (Figura 6,a) são:

$$\delta \dot{u} = V_1 \cdot 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (46)$$

e a área de cada uma dessas quatro superfícies de deslizamento, por unidade de comprimento de espessura do bloco é

$$\left( \frac{b_0}{2 \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)} \right) \quad (47)$$

A área da superfície de separação, na região central em que se dá a ruptura por tração (Figura 6) é, por unidade de comprimento da espessura do bloco

$$(d - K b_0) \quad (48)$$



Temos então

1) potência da forças exteriores:  $2 P \dot{V}$  (49)

2) velocidade de dissipação de energia interna nas quatro superfícies de deslramento

$$c \cdot \delta \dot{u} \left( \frac{4 b_0}{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)} \right) \quad (50)$$

3) velocidade de dissipação de energia interna na superfície de separação:

$$\sigma_0 (d - K b_0) \cdot V_2 \quad (51)$$

Substituindo  $\delta \dot{u}$  e  $V_2$  por seus valores em função de  $V_1$  dados em (45) e (46), e levando em conta que, de acordo com (5),  $c = K \sigma_0$ , podemos escrever a equação de balanço energético:

$$2 P \dot{V} = 4 K^2 \sigma_0 b_0 \cdot V_1 + K \sigma_0 (d - K b_0) \cdot V_1 \quad (52)$$

da qual se deduz o valor dimensional de  $P \dot{V}$ :



UNIVERSIDADE DO BRASIL

mec. a

$$P^+ / (d \sigma_o) = K + K^2 b_o / d$$

(53)

A Figura 7 apresenta a distribuição de tensões ao longo do eixo vertical de simetria, correspondente ao mecanismo a

6.4 - Para o mecanismo b continuam válidas as expressões (45) e (46) mas a área da superfície de deslizamento é

$$\left( \frac{(b + b_o) / 2}{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)} \right) \quad (54)$$

Temos assim a equação de balanço energético :

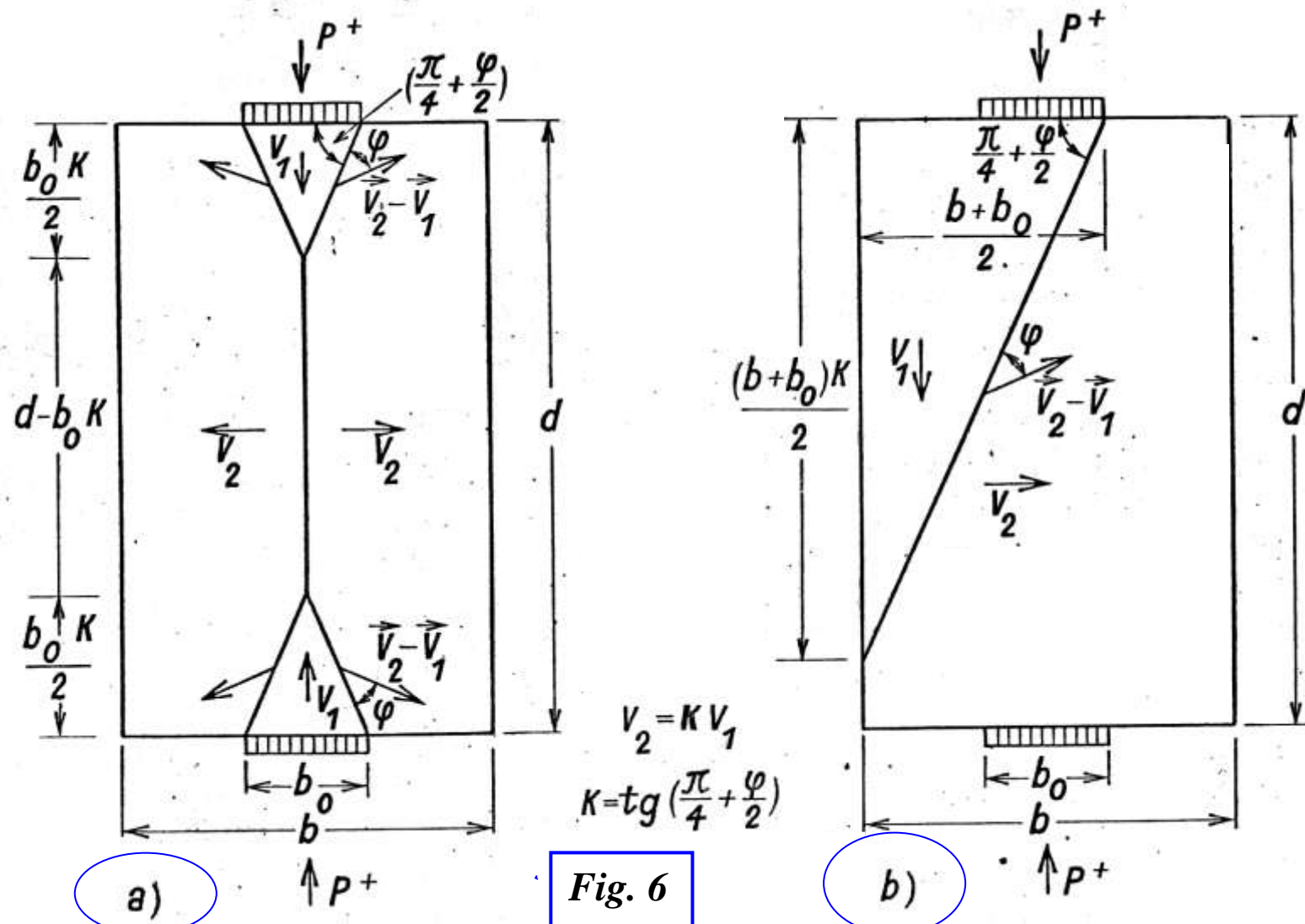
$$P^+ \cdot V_1 = K^2 \sigma_o (b + b_o) \cdot V_1 \quad (55)$$

da qual se deduz

mec. b

$$P^+ / (d \sigma_o) = K^2 \left( \frac{b + b_o}{d} \right)$$

(56)



**Fig. 6**

Bloco com carregamentos parciais em faces opostas. Campos de velocidades cinematicamente admissíveis. (Mecanismos de ruptura a e b). Limite superior da carga de colapso plástico.



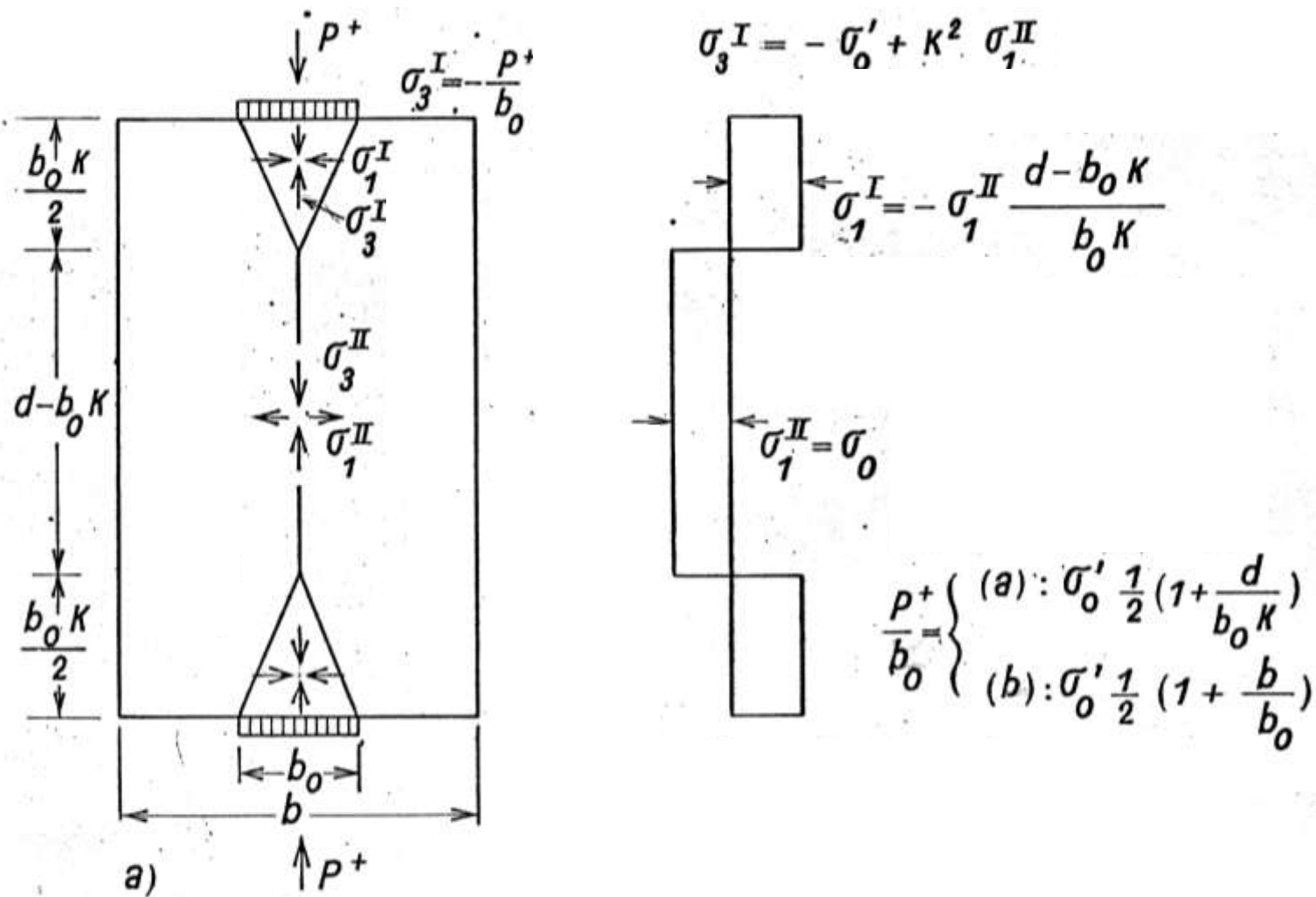


Fig. 7 Distribuição de tensões correspondente ao mecanismo de ruptura a da Fig. 6.



Como neste segundo mecanismo a ruptura é análoga à ruptura por compressão simples, é conveniente também exprimir  $P^+$  em função de  $\sigma'_0$  :

$$P^+ / (d \sigma'_0) = \frac{(b + b_0) / 2}{d} \quad (57)$$

Isso significa que no mecanismo b a carga  $P^+$  é igual à resistência global à compressão de um bloco cuja largura fosse  $(b + b_0) / 2$ , como aliás se poderia deduzir diretamente da simples inspeção da Figura 6,b.

6.5 - A fronteira entre os dois mecanismos a e b se dá para

$$b/d = 1/K$$

Para  $b/d > 1/K$  o mecanismo a fornece o menor valor do limite superior  $P^+$ ; para  $b/d < 1/K$  o mecanismo b prevalece. Quando  $b/d$  cresce de  $b_0/d$  até  $1/K$ , o limite superior  $P^+$  cresce linearmente desde o valor correspondente à resistência global à compressão simples de um prisma de largura  $b = b_0$  até o valor dado por (53); e daí por diante, isto é, para  $b > d/K$ , o limite superior  $P^+$  permanece constante e independe de  $b$ . Esta conclusão é de maior importância, e, como veremos, será corroborada por conclusão semelhante no cálculo do limite inferior: tanto para o limite superior  $P^+$  como para o limite inferior  $P^-$  da carga de colapso plástico, há um valor da relação  $b/d$  além do qual a largura  $b$  não influi na carga de colapso. Esse fato foi constatado experimentalmente por J. Bossi (ref. 22).



**7. BLOCO COM CARREGAMENTO PARCIAL EM DUAS FACES OPOSTAS - LIMITE INFERIOR DA CARGA DE COLAPSO.**

7.1 - Para determinar um limite inferior da carga de colapso pelo método dos campos de tensões estáticamente admissíveis descontínuos, supõe-se o bloco dividido nas regiões I, II, III (e simétricas) de acordo com a Figura 8. Na parte restante do bloco, externa a essas regiões, supõe-se existir um campo de tensões nulas, e portanto, na região II uma das tensões principais ( $\sigma_{3,II}$ , de compressão) será paralela à linha de descontinuidade mais externa, que separa essa região da região sem tensões, e a outra tensão principal ( $\sigma_{3,I}$ ) será nula. Essa região II comporta-se como uma "biela" solicitada à compressão simples. Na região I existem duas tensões principais de compressão ( $\sigma_{3,I}$  e  $\sigma_{1,I}$ ), e esta região comporta-se como uma cunha em estado de compressão tri-axial, pois a tensão principal normal ao plano de figura é a tensão intermediária, também de compressão. Na região III existe uma tensão principal ( $\sigma_{3,III}$ ) de compressão, sendo a outra tensão principal, dirigida transversalmente ( $\sigma_{1,III}$ ), de tração. As linhas de descontinuidade, como já foi explicado em 5.1, não são linhas de ruptura, e em particular as inclinações das linhas de descontinuidade que delimitam a região I são diferentes das inclinações das linhas de ruptura por deslizamento de mecanismo a estudar em 6. Tanto essas inclinações como a largura  $b_1$  (Figura 8) são arbitrárias, e devem ser escolhidas de modo a obter-se o maior valor possível para o limite inferior  $P^-$  da carga de colapso. De acordo com a



Figura 8 os ângulos das linhas de descontinuidade com as direções das tensões principais de menor valor algébrico, definidas em 5.1, são:

1) Região I - Região II

$$\alpha_{I} = \alpha \quad \alpha_{II} = \alpha + \chi \quad (58)$$

2) Região II - Região III

$$\alpha_{II} = \beta - \chi ; \quad \alpha_{III} = \beta \quad (59)$$

Os ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\chi$  são definidos na Figura 8

7.2 - Podemos escrever 2 pares de equação de equilíbrio semelhantes às (42) e (43) ao longo das linhas de descontinuidade que separam as regiões I-II e II-III, uma inequação de tipo  $b$  (Coulomb), correspondente à condição de plastificação na região I, duas inequações correspondentes à dupla condição de plastificação na região III, e mais uma inequação correspondente à região II, em estado de compressão simples.

Equações de equilíbrio ao longo das linhas de descontinuidade.

Regiões I-II:  $(\sigma_{1,I} + \sigma_{3,I}) - (\sigma_{1,I} - \sigma_{3,I}) \cos 2\alpha = \sigma_{3,II} + \sigma_{3,II} \cos 2(\alpha + \chi)$  (60)

$$(\sigma_{1,I} - \sigma_{3,I}) \sin 2\alpha = \sigma_{3,II} \sin 2(\alpha + \chi) \quad (61)$$

Regiões II e III:

$$(\sigma_{1,III} + \sigma_{3,III}) - (\sigma_{1,III} - \sigma_{3,III}) \cos 2\beta = \sigma_{3,II} + \sigma_{3,II} \cos 2(\beta - \chi) \quad (62)$$

$$(\sigma_{1,III} - \sigma_{3,III}) \sin 2\beta = \sigma_{3,II} \sin 2(\beta - \chi) \quad (62)$$



Condições de plastificação (inequações)

$$\text{Região I} : - \sigma_{3,I} \leq 2 K^2 \sigma_0 - K \sigma_{1,I} \quad (63)$$

$$\text{Região II} : - \sigma_{3,II} \leq 2 K^2 \sigma_0 \quad (64)$$

$$\text{Região III} : - \sigma_{3,III} \leq 2 K^2 \sigma_0 - K \sigma_{1,III} \quad (65)$$

$$\sigma_{1,III} \leq \sigma_0 \quad (66)$$

Além disso os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  estão ligados pela condição geométrica

$$\frac{b_0/d}{\text{tg}\alpha} + \frac{b_1/d}{\text{tg}\beta} = 1 \quad (67)$$

e o ângulo  $\chi$  é dado por

$$\text{tg } \chi = \frac{b_1}{d} - \frac{b_0}{d} \quad (68)$$

Como foi mostrado em 5.3, para que em duas regiões contíguas sejam atingidas simultaneamente duas condições de plastificação do tipo Coulomb é preciso que seja obedecida a condição de Shield. Temos assim:

Hipótese A (ruptura Coulomb simultânea nas regiões I e

$$\text{II}): \cos (2 \alpha + \chi) = \text{sen } \phi \cos \chi \quad (69)$$

Hipótese C (ruptura Coulomb simultânea nas regiões II e

$$\text{III}): \cos (2 \beta - \chi) = \text{sen } \phi \cos \chi \quad (70)$$



UNIVERSIDADE DO BRASIL

Com essa série de equações e inequações é possível determinar o valor máximo do limite inferior  $P^-$  da carga de colapso. A adoção de uma das hipóteses A ou C acima indicados elimina 2 inequações e dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ . O sistema de equações de equilíbrio passa a ser um sistema de equações lineares, ao qual devem ser adicionadas as inequações correspondentes à região III, no caso da hipótese A, ou a inequação correspondentes à região I e a 2a. inequação correspondente à região III, no caso da hipótese C. A tensão principal  $\sigma_3$ ,<sub>II</sub>, em ambas as hipóteses, é igual à resistência à compressão simples  $-\sigma'_0 = -2 K^2 \sigma_0$ .

O cálculo é laborioso, e foi realizado com o auxílio de um computador eletrônico (v. programa anexo). Chega-se à conclusão de que o maior limite inferior  $P^-$  cresce com  $b_1$  até um certo valor limite desse parametro, sendo esse valor limite função de  $b_0/d$ . Além desse valor-limite a carga  $P^-$  diminuiria, o que leva à seguinte conclusão: si a largura do bloco é inferior ao valor-limite de  $b_1$  deve-se tomar  $b_1 = b$ , e si é superior, deve-se tomar  $b_1$  igual ao referido valor-limite. Neste último caso, a carga  $P^-$  independe da largura  $b$  do bloco, como já havia sido afirmado em 6.5.

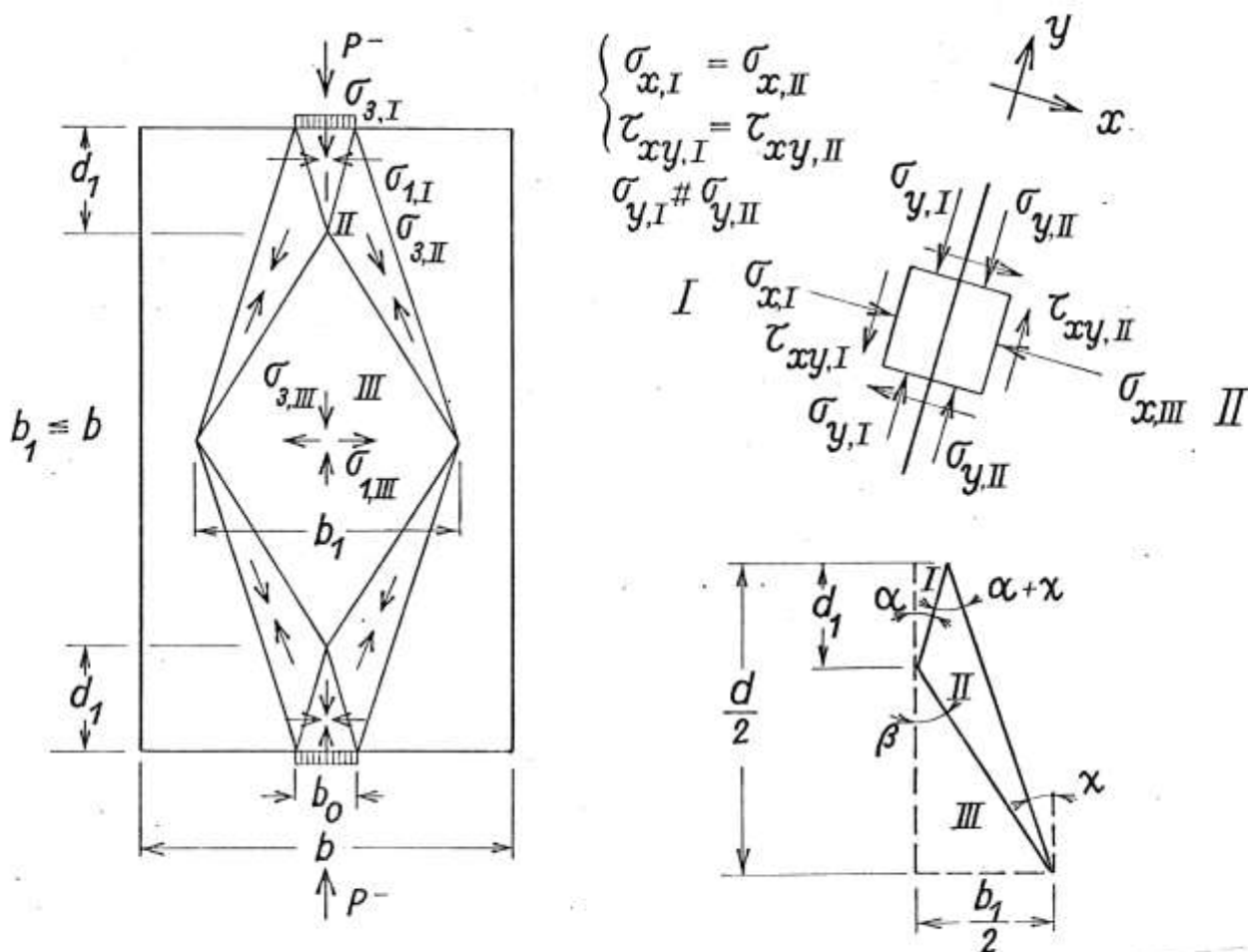


Fig.8

**Bloco com carregamentos parciais em faces opostas.  
 Campos de tensões estaticamente admissíveis.**

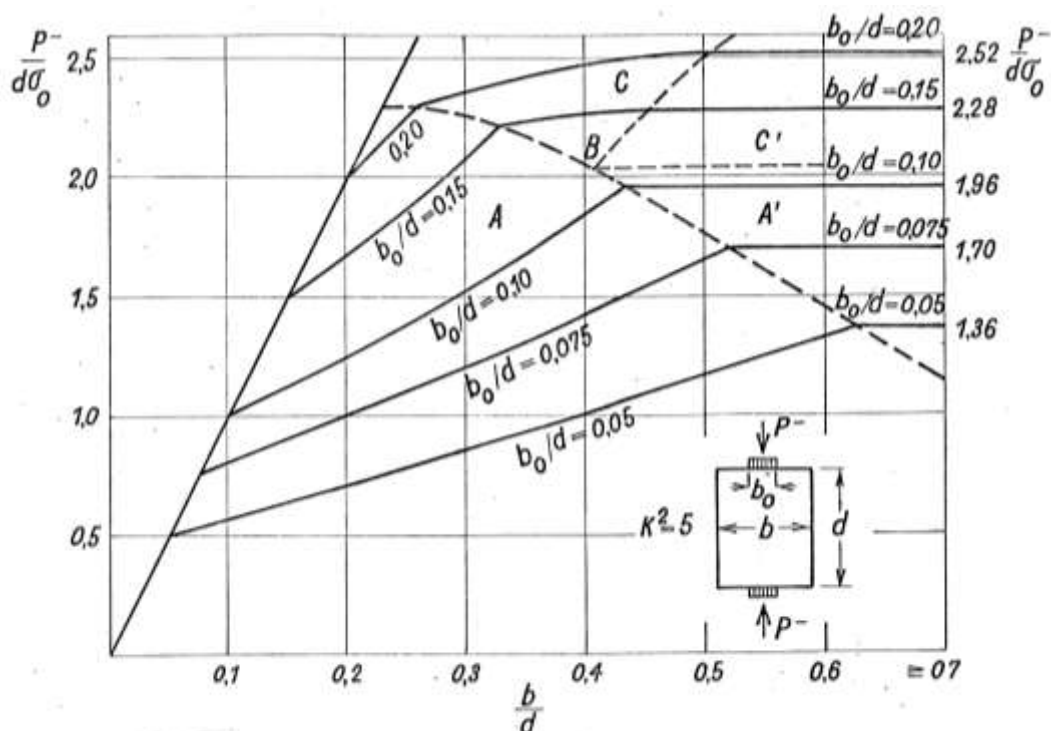


Fig. 9

### *Limite inferior da carga de colapso plástico.*

7.4 - A Figura 9 apresenta uma discussão completa dos resultados obtidos, para um concreto com  $K^2 = 5$ . Os domínios A e C do gráfico da Fig. 9 correspondem respectivamente à predominância das hipóteses A e C, definidas em 7.2. As regiões A' e C' correspondem a com largura  $b$  superior ao valor-limite de  $b_1$  que fornece o maior valor do limite inferior  $P^-$  da carga de colapso. O ponto B corresponde à interseção desses domínios, isto é, ao par de valores de  $b_0/d$  e  $b/d$  para o qual se verificam simultaneamente as hipóteses A e C, sendo atingidas as condições de plastificação simultaneamente nas regiões I, II e III. A carga  $P^-$  correspondente ao ponto B coincide necessariamente com o valor determinado por Shield em em ref. (13) para o trapezoide carregado ("loaded trapezoid").



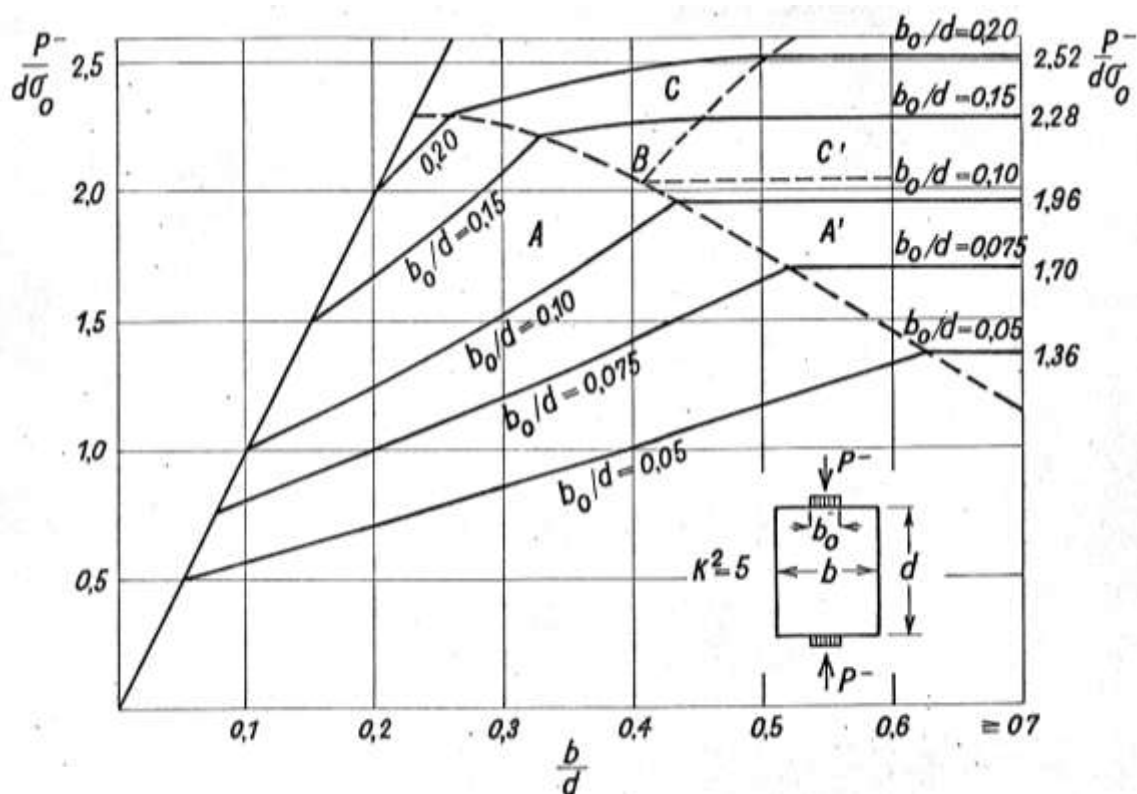


Fig. 9 (repetida)

### Limite inferior da carga de colapso plástico.

A ruptura por tração indireta ("fendage", "splitting - failure", "spalthbruch") só se dá no domínio A' a da Figura 9, pois no domínio C' a região III está na transição entre a ruptura b (Coulomb) e a ruptura a (separação). Isso leva à conclusão de que, pelo menos tanto quanto se pode deduzir ao cálculo do limite inferior da carga de colapso plástico pelo método dos campos de velocidades descontínuos, a largura máxima da faixa de contacto  $b_0$  deve ser a definida pelo ponto B (isto é,  $b_0/d \leq 0,11$ , no caso do concreto com  $K^2 = 5$ ). Por outro lado, esta largura não deve ser muito pequena, afim de evitar-se a ruptura local referida em 6.2 (mecanismo d).



UNIVERSIDADE DO BRASIL

54

7.5 - O quadro anexo resume alguns resultados, para concretos com  $K^2$  variando de 3 a 5, e  $b_0/d = 0,10$  e  $1/6$ .

Os valores  $K^2 = 3, 4$  e  $5$  correspondem respectivamente a um concreto medíocre ( $\sigma'_{br} \approx 100 \text{ kgf/cm}^2$ ), a um concreto corrente ( $\sigma'_{br} \approx 200 \text{ kgf/cm}^2$ ) e a um concreto de alta resistência ( $\sigma'_{br} \approx 400 \text{ kgf/cm}^2$ ). Vê-se que a diferença entre a interpretação "elástica" e a interpretação "plástica" cresce com  $K^2$ .

A largura relativa da faixa de contacto  $b_0/d = 0,10$  corresponde ao método RILEM para ensaio de tração indireta, e  $b_0/d = 1/6$  ao método ASTM. Tomando a média entre  $P^+$  e  $P^-$ , a diferença com  $b_0/d = 0,10$ , é da ordem de 25% para concretos correntes e de 50% para concretos de alta resistência. Esses valores parecem exagerados em face dos dados experimentais disponíveis, como se verá em 8.2.

O cálculo do limite inferior da carga de colapso indica para que a ruptura se dê por tração indireta, que, a relação  $b_0/d$ , entre a largura da faixa de contacto e a altura do bloco, não deve ultrapassar 0,112, 0,125 e 0,150, respectivamente para concretos com  $K^2 = 5, 4$  e  $3$ . No anexo estão incluídos os gráficos correspondentes a esses concretos, traçados por um computador eletrônico(\*).

---

(\* ) computador eletrônico IBM do Dep. de Cálculo Científico (DCC) da Coordenação dos Programas Pós graduados de Engenharia (COPPE) da Universidade Federal do Rio de Janeiro.



$\sigma_{br}$ kgf/cm <sup>2</sup>	$K^2$	$(b_0/d) = 0,10$ (RILEM)		$(b_0/d) = 1/6$ (ASTM)	
		Elast.	Plast.	Elast.	Plast.
		$P^{el.}/(\sigma_0 d)$	$P^-/(\sigma_0 d)$	$P^+ /(\sigma_0 d)$	$P^{el.}/(\sigma_0 d)$
					$P^-/(\sigma_0 d)$
					$P^+ /(\sigma_0 d)$
<u>100</u>	<u>3</u>	<u>1,57</u>	<u>1,25</u> ( $b/d \geq 0,65$ )	<u>2,03</u> ( $b/d \geq 0,58$ )	<u>1,57</u>
					<u>1,61</u> ( $b/d > 0,54$ )
					<u>2,23</u> ( $b/d \geq 0,58$ )
<u>200</u>	<u>4</u>	<u>1,57</u>	<u>1,61</u> ( $b/d \geq 0,52$ )	<u>2,40</u> ( $b/d \geq 0,50$ )	<u>1,57</u>
					<u>1,98</u> ( $b/d \geq 0,49$ )
					<u>2,67</u> ( $b/d \geq 0,50$ )
<u>400</u>	<u>5</u>	<u>1,57</u>	<u>1,94</u> ( $b/d \geq 0,43$ )	<u>2,74</u> ( $b/d \geq 0,45$ )	<u>1,57</u>
					<u>2,32</u> ( $b/d \geq 0,46$ )
					<u>3,07</u> ( $b/d \geq 0,45$ )

$$K^2 = 1/2 (\sigma_0/\sigma_0) = 1/2 (0,75 \sigma_{br}/\sigma_{br})$$



## 8. ENSAIO DE TRACÃO INDIRETA

8.1 - Na figura 10 estão representados os resultados obtidos anteriormente, para o caso de  $b \geq d$ . Trata-se do ensaio de tração indireta - ("tensile splitting test"), realizado tanto com corpos de prova cilíndricos (compressão diametral, ref. 4) como com corpos de prova cúbicos ou prismáticos.

Os limites superior  $P^+$  e inferior  $P^-$  estão representados em função de largura relativa da faixa de contacto  $b_0/d$ , para um concreto com  $K^2 = 5$ . O valor dado pela "interpretação elástica convencional" :

$$P/(d \sigma_0) = \frac{\pi}{2}$$

está também representado.

Verifica-se que a carga de colapso plástico, compreendida entre  $P^-$  e  $P^+$ , é superior à prevista pela teoria plástica, e que portanto a resistência à tração indireta, calculada pela fórmula "elástica", é um pouco superior à resistência à tração direta ou "verdadeira".



8.2 - Esta conclusão é confirmada por diversas pesquisas experimentais (ref. 26), mas nestas a diferença encontrada entre a resistência à tração indireta e a resistência à tração direta é menor que a indicada na Figura 10. Isso se explica pelo fato de que a plasticidade do concreto é limitada: o valor "verdadeiro" da carga de colapso deve estar compreendido entre o valor dado pela teoria da elasticidade e o valor dado pela teoria da plasticidade. Aliás a diferença encontrada em ensaios comparativos de tração indireta e tração direta é frequentemente da mesma ordem de grandeza dos erros inerentes ao ensaio de tração direta, o que levou alguns pesquisadores a concluir pela igualdade entre os resultados dos dois ensaios, ou até mesmo por uma diferença, embora ligeira, em sentido contrário ao previsto pela teoria da plasticidade.

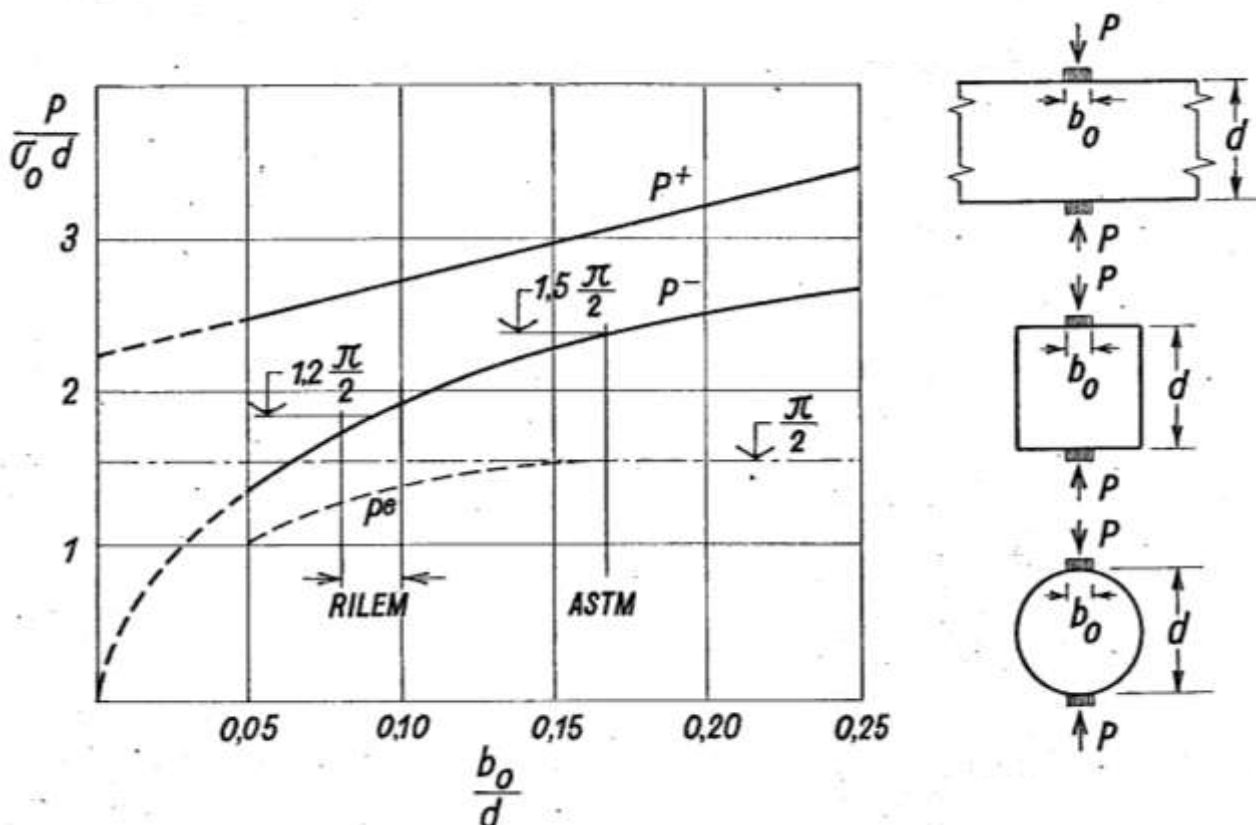


Fig. 10 *Ensaio de tração indireta .  
Limites superior e inferior da carga de colapso plástico.*



A existência de uma redistribuição de esforços, prevista pela teoria da plasticidade, que tende a aumentar a capacidade de carga dos cilindros ensaiados à compressão diametral, foi recentemente confirmada em pesquisa realizada por Seefried, Gesund e Pincus (ref. 25), cujas conclusões coincidem portanto com as do presente trabalho.

8.3 - A Figura 10 confirma a constatação deste trabalho de que a relação  $b_0/d$  não deve ser muito grande, pois a diferença entre a interpretação "elástica" e os resultados da aplicação da teoria da plasticidade cresce com  $b_0/d$ . No método internacional RILEM para ensaios mecânicos de concreto prescreve-se:

$$0,08 \leq (b_0/d) \leq 0,10$$

valor este que deve ser preferido ao do método ASTM (ref. 32), que é

$$(b_0/d) = 0,167$$

(na realidade a largura real da faixa de contacto, no método ASTM, é em geral inferior a esse valor, em virtude da curvatura da superfície do corpo de prova, mas pode atingi-lo no caso de concretos muito resistentes ou de tira de contacto muito deformável).

8.4 - Observe-se que a conclusão, contida no presente trabalho, de que a resistência à tração indireta, calculada pela fórmula "elástica", é um pouco superior à resistência à tração direta ou "verdadeira", não põe em questão a utilidade prática do método de ensaio de tração indireta. É necessário um maior número de pesquisas muito cuidadosas para que se possa determinar com maior rigor a ordem de grandeza dessa diferença. Então, si isso for considerado necessário, poder-se-á introduzir um fator-corretivo.



UNIVERSIDADE DO BRASIL

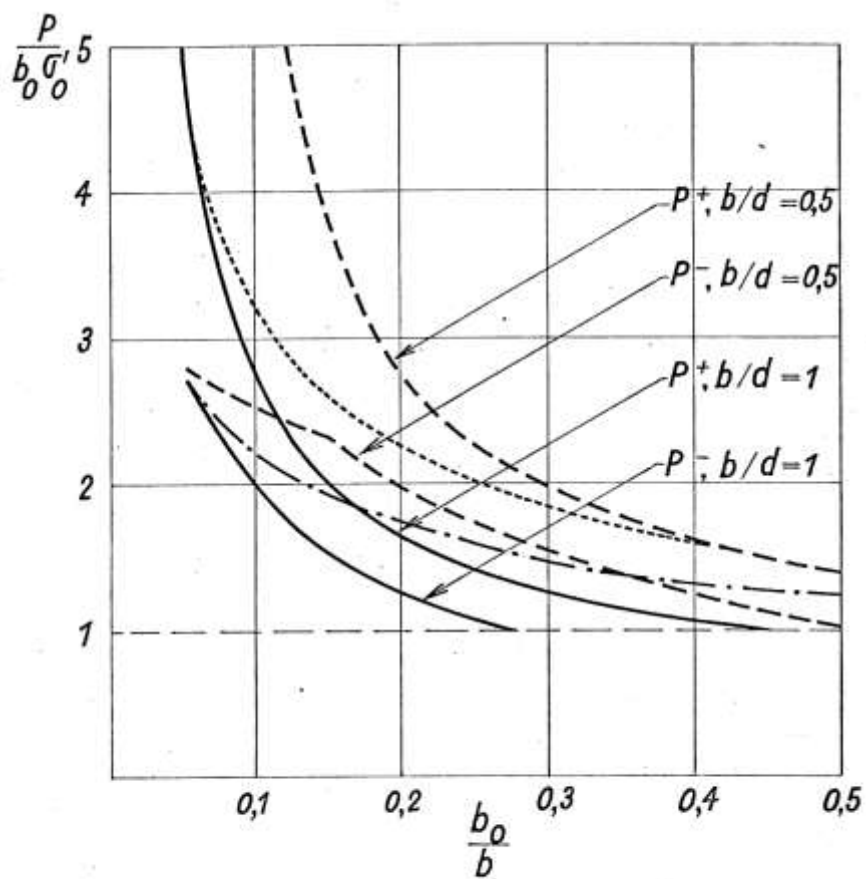
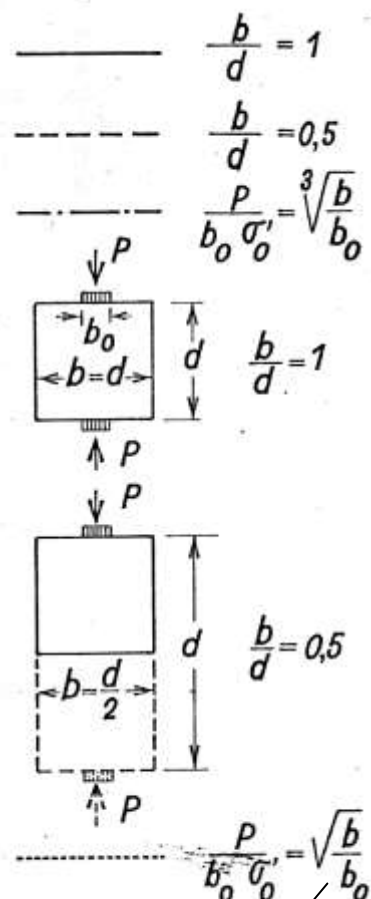


Fig. 11



Prof. Telemaco  
van Langendonck

**Bloco parcialmente carregado.**

**Confronto com as fórmulas semi-empíricas para  
pressão admissível na faixa do contacto.**



## 9. ARTICULAÇÕES E BLOCOS DE APOIO

9.1 - Uma outra conclusão interessante do presente trabalho, e que confirma teoricamente os resultados experimentais obtidos por J. Bossi (ref. 22), é que o ensaio de tração indireta pode também ser realizado com blocos cuja largura  $b$  seja inferior à altura  $d$ , ou com cilindros truncados lateralmente por dois planos paralelos ao plano diametral que contém as cargas, semelhantes aos "pêndulos" utilizados em articulações de pontes.

Si a largura do bloco ou do cilindro for superior a uma determinada fração de altura (da ordem de 0,5, quando a largura relativa da faixa de contacto  $b_0/d$  é da ordem de 0,1) o resultado obtido é praticamente o mesmo que com corpos de prova cilíndricas normais, com cubos ou com blocos cuja largura seja superior a  $d$  (prismas). Em ref. 23 e 24 encontra-se a interpretação "elástica" de vários desses casos, que pode ser confrontada com a interpretação "plástica" do prescrito trabalho.





UNIVERSIDADE DO BRASIL

9.2 - Embora a ruptura dos blocos ou "pendulos" de articulações se dê na realidade, por tração indireta, sempre que a largura for superior ao valor indicado acima, é uma tradição de muitas normas ou regulamentos de cálculo limitar a pressão de contacto admissível. Afim de possibilitar a comparação dos resultados do presente trabalho com os valores semi-empíricos indicados por essas normas, foram representados na Figura 11 os casos  $b/d = 1$  e  $b/d = 0,5$ , sendo no entanto a carga de colapso referida à resistência à compressão simples  $\sigma'_0$ , em lugar da resistência à tração simples  $\sigma_0$ . Têm-se assim, nessa figura, os limites superior e inferior da pressão de contacto correspondente à ruptura por tração indireta ("fendage", "splitting failure", "spaltbruch") do bloco. Estão representadas também as curvas  $\sqrt[3]{b/b_0}$  e  $\sqrt{b/b_0}$ . A primeira é adotada pela maioria das normas e regulamentos, e a segunda corresponde a pesquisa realizada por T. van Langendonck (ref. 27) com área de carregamento parcial homotética da seção transversal do bloco. Conclui-se que, mesmo para o carregamento em faixa (estado plano de deformação), o único considerado no presente trabalho, a fórmula de raiz quadrada de  $b/b_0$  é mais indicada que a da raiz cúbica,



## 10. CONCLUSÃO

10.1 - Os resultados obtidos pela aplicação dos métodos clássicos - da teoria da plasticidade ao concreto, com a adoção da envoltória de Mohr, simplificada indicada em 2. como condição de plastificação - (yeld condition) - são bastante interessantes e sugerem o prosseguimen- to da pesquisa, tanto no domínio teórico como no experimental. No do- mínio teórico, a pesquisa poderá ser orientada, por exemplo, para a consideração de campos de velocidades cinemáticamente admissíveis e de campos de tensões estáticamente admissíveis contínuos, com o obje- tivo de reduzir as diferenças entre os valores de limite superior e do limite inferior da carga de colapso plástico.

10.2 - O problema abordado, - bloco com carregamento parcial em faces opostas, levou a uma interpretação do ensaio de tração indireta - (splitting tensile test) pela teoria da plasticidade. A carga de co- lapso plástico determinada com o auxílio da teoria da plasticidade é um pouco superior à carga de ruptura por tração indireta fornecida pe- la teoria da elasticidade. Em consequência, a resistência à tração in- direta, resultante da interpretação "elástica" de ensaio, deve ser um pouco superior à resistência à tração direta ou "verdadeira". Como o concreto apresenta apenas uma plasticidade limitada, é provável que a diferença entre essas duas resistências seja inferior à indicada nes- te trabalho. A capacidade real de carga dos corpos de prova submeti- dos ao ensaio de tração indireta deve estar compreendida entre o va- lor fornecido pela teoria da elasticidade e o valor calculado no pre- sente trabalho, pela teoria da plasticidade. Somente com um maior nú- mero de pesquisas extensas e muito cuidadosas poder-se-á determinar - com maior rigor a diferença entre a resistência à tração indireta e a resistência à tração direta.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Mörsch, E. Der Eisenbetonbau, I Band, II Hälfte, p. 302 . 1928
2. Gehler, W. Erläuterungen zu den Eisenbeton - Bestimmungen 1932, p. 299. Berlin , 1933 (5. ed).
3. Leon, A. Über die Scherfestigkeit des Betons. Beton u. Eisen , 20/4/1935.
4. Carneiro, Fernando Luiz Lobo B. Une nouvelle méthode pour la détermination de la résistance à la traction des bétons, item 3 . In "Résistance à la traction des bétons", Bulletin 13 mars/1953, RILEM, Paris (orig. Ass. Bras. Normas Técnicas, Brasil, 5a. Reunião, 1943.)
5. Cowan, Henry J. The strength of plain, reinforced and prestressed concrete under the action of combined stresses. Magazine of Concrete Research, 14, december 1953.
6. Langendonck, Telemaco van. A resistência do concreto a esforços combinados. Rev. "Engenharia", São Paulo - Brasil, 95, - julho, 1950.
7. Comité Mixte FIP-CEB. Recommendations Pratiques pour le Calcul - et l'Execution des Ouvrages en Béton Précontraint, item R 4,32 - Bulletin CEB, 54, mars 1966, pp. 191/198.
8. Prager, W. Hodge Jor., P.G. Theory of Perfectly Plastic Solids . 5-26 (lines of discontinuity), 7-33 (limit analysis in plane strain) John Wiley & Sons, 1963.
9. Hodge Jor., P. G. Plastic analysis of structures. 8 (General theory of combined stresses), 12 (Problems in plane stress). Mc Graw Hill, 1959.
10. Prager, W. An introduction to plasticity. 1-9 (Plastic potential), 1.10 (Generalized plastic potential), 3-3, 3-4, 3-5 (Limit analysis). Addison Wesley, 1959.



64

11. Olszak, W., Mroz, Z., Perzyna, P. Recent trends in the development of the theory of plasticity. 12 (Soil mechanics). Pergamon Press, 1960.
12. Drucker, D. C., Prager, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Quart. of Applied Mathematics, vol 10, 1952.
13. Shield, R. T. Stress and velocity fields in soil mechanics. J.Math. Phys., vol 33,2,1954, pp 144/156.
14. L'Hermité, R. Idées actuelles sur la technologie du béton, 3. Bulletin RILEM, 18, juin 1954, pp 27/39.
15. Risch, H., Sell, R., Rasch, C. H., Stöckl, S. Investigations of concrete under sustained load. RILEM Colloquium, 1958, Munich.
16. Desayi, P., Viswanatha, C. S. True ultimate strength of plain concrete. Bulletin RILEM, 36, sept. 1967, pp. 163/173.
17. Trott, J. J. A simple technique for recording load strain curves for concrete beams in flexure. Magazine of Concrete Research, 42, 1962, pp. 155/158.
18. Hughes, B. P. Chapman, G.P. The deformation of concrete and micro-concrete in compression and tension with particular reference to aggregate size. Magazine of Concrete Research, 54, march 1966, pp. 19/24.
19. Hughes, B. P., Chapman, G. P. The complete stress-strain curve for concrete in direct tension. Bulletin RILEM, 30, mars 1966, pp. 95/97.
20. Lefèvre, C. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment e des Travaux Publics, mars-avril 1965, pp. 355/360; juillet-aout 1963, pp. 693/696.
21. Beres, L- Investigation on structural loosening of compressed concrete. Bulletin RILEM, 36, sept. 1967.
22. Bossi, J. Recherches experimentales sur le comportement des épreuves de béton à l'essai brésilien. Bulletin RILEM, 22 mars 1964, pp. 9/35.



23. Rest, C.H. A universal test specimen for concrete. RILEM Symposium on the experimental research of field testing of concrete, october-19-4, Trondheim - Norway.
24. Kirmsier, P. G. Dailey, G. Stress analysis of a universal concrete-test specimen. RILEM Symposium on the experimental research of field testing of concrete, october 1964, Trondheim - Norway.
25. Seefried, K. J., Gesund, H., Pincus, G. An experimental investigation of the strain distribution in the split cylinder test. - Journal of materials, Vol 2, 4, ASTM., 1967.
26. Enquête - Résistance à la traction directe du béton. Bulletin - RILEM, 20, sept. 1963, pp. 83/90.
27. Langendonck. Teleraco van. Resistência de blocos parcialmente carregados. Rev. "Engenharia", São Paulo - Brasil, 115, março 1962 .
28. Carneiro. Fernando Luiz Lobo B. A resistência ao esforço constante das peças de concreto armado e protendido, pp. 7/8. Instituto Nacional de Tecnologia, Brasil, 1964.
29. Resendiz, D. Aplicacion del analysis limite al calculo de la capacidad de f carga de cimentaciones. Rev. "Ingenieria", Mexico, abril 1962.
30. Velloso, Dirceu A. O método das cargas limites na teoria das fundações. 2as. Jornadas Luso-brasileiras de engenharia civil, Rio de Janeiro, agosto 1967.
31. RILEM - Méthode d'Echatillonage, de Confection et de Conservation des Eprouvettes, et d'Essai Mécanique du Béton.
32. A.S.T.M. - Standard Method C 496/66.



LEGENDAS DAS FIGURAS

- Fig. 1 - Envoltória de Mohr simplificada (concreto)
- Fig. 2 - Condições de plastificação em função das tensões principais.
- Fig. 3 - Tipos de ruptura.
- Fig. 4 - Aplicações da teoria do potencial plástico generalizado (lei de fluência).
- Fig. 5 - Velocidade de dissipação da energia interna. Mecanismo de ruptura na compressão simples.
- Fig. 6 - Bloco com carregamentos parciais em faces opostas. Campos de velocidades cinematicamente admissíveis (Mecanismos de ruptura a e b). Limite superior da carga de colapso plástico.
- Fig. 7 - Distribuição de tensões correspondente ao mecanismo de ruptura a da Fig. 6.
- Fig. 8 - Bloco com carregamentos parciais em faces opostas. Campos de tensões estáticamente admissíveis.
- Fig. 9 - Limite inferior da carga de colapso plástico.
- Fig. 10 - Ensaio de tração indireta. Limites superior e inferior da carga de colapso plástico.
- Fig. 11 - Bloco parcialmente carregado. Confronto com as fórmulas semiempíricas para pressão admissível na faixa de contacto.

OBS:  $\sigma_0 = \text{resistência à tração simples} = \sigma_{br}$  (CEB).

$\sigma'_0 = \text{resistência "verdadeira" à compressão simples} = 0,75\sigma'_{br}$   
(CEB)



## PROGRAMA

67

```
// JOB
// FOR
*IOCS(CARD,1132PRINTER,PLOTTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
C   PROGRAMA APLICACAO DA TEORIA DA PLASTICIDADE AO CONCRETO
C   BLOCO COM CARGAS PARCIAIS OPOSTAS - FERNANDO L CARNEIRO

C   CALCULO DO LIMITE INFERIOR DA CARGA DE COLAPSO
C   DIMENSION R(40),S31A(40),S11A(40),S33A(40),S13A(40),S31C(40),
1S11C(40),S33C(40),S13C(40),PAI(40),PCI(40),PI(40),PS(40)
C   DEFINICAO DAS FUNCOES TRIG
C   UTILISADAS PARA RESOLUCAO DO SISTEMA DE DOIS PARES DE EQUACOES
C   DE EQUILIBRIO AO LONGO DAS LINHAS DE DESCONTINUIDADE QUE SEPARAM
C   AS REGIOES I-II E II-III
C   TRIG1(X,Y)=(-(1.+COS(2.*X))*SIN(2.*Y)-SIN(2.*X)*(1.-COS(2.*Y)))/
1SIN(2.*X)
C   TRIG2(X,Y)=(-SIN(2.*X)*(1.-COS(2.*Y))+(1.-COS(2.*X))*SIN(2.*Y))/
1SIN(2.*X)
C   INICIO DO PROGRAMA
C   CARACTERISTICAS DO CONCRETO KK=1/2(RES COMPRESSAO/RES TRACAO)
C   DO 50 KK=3,5
C   CALL SCALF(5./2.54,25./2.54,0.,0.)
C   CALL FGRID(3,0.,0.,0.1,10)
C   CALL FGRID(3,3.,0.,0.1,10)
C   CALL FGRID(0,0.,0.,0.5,6)
C   CALL FGRID(0,0.,-1.,0.5,6)
C   T=3.*3.1416/2.
C   X=-0.1
C   Y=-0.1
C   DO 2 I=1,10
C   CALL FCHAR(X,Y+0.020,0.10,0.10,T)
C   WRITE (7,3)Y
C   Y=Y+0.1-0.000001
2 CONTINUE
C   X=0.5
C   Y=0.05
C   DO 4 I=1,6
C   CALL FCHAR(X,Y,0.10,0.10,T)
C   WRITE (7,3)X
C   X=X+0.5
4 CONTINUE
3 FORMAT(F4.1)
C   CALL FCHAR(2.6,-0.06,0.2,0.2,T)
C   WRITE(7,15)
15 FORMAT('KK=')
C   CALL FCHAR(2.6,-0.12,0.2,0.2,T)
C   WRITE (7,5)KK
5 FORMAT(I1)
C   FK=FLOAT(KK)
C   CALCULO DO ANGULO DE ATRITO INTERNO F
C   F1=ATAN(SQRT(FK))
C   F=2.*F1-1.5707963
C   WRITE (3,11)KK,F
11 FORMAT (///'CONCRETO COM KK=',I4/, ' F=',F8.4/)
C   WRITE (3,111)
111 FORMAT (///' KK=1/2(RESISTENCIA A COMPRESSAO/RESIST A TRACAO)',///
1' F=ANGULO DE ATRITO INTERNO')
C   WRITE (3,13)
```



69

```
13 FORMAT (' TRACADO DAS CURVAS LIMITE INFERIOR PI E LIMITE SUPERIOR
1PS DA CARGA DE COLAPSO', ' EM FUNCAO DA LARGURA B DO BLOCO', ' VAR
2IAVEIS ADIMENSIONAIS REFERIDAS ALTURA DO BLOCO E RESISTENCIA A TR
3ACA0', ' BO ', ' BLI ', ' PI ', ' BLS ', ' PS ', '/')
C LARGURA DA FAIXA DE CONTACTO REFERIDA A ALTURA DO BLOCO=BO
DO 50 J=2,8
BO=J*0.025
C VARIACAO DO LIM INFERIOR DA CARGA DE COLAPSO C/A LARGURA DO BLOCO
C LARGURA DO BLOCO=B
DO 73 I=1,40
B(I)=I*0.025
C LARG DA FAIXA DE CONTACTO NO MAXIMO IGUAL A LARG DO BLOCO
IF(B(I)-BO)21,21,22
21 S31A(I)=-2.*FK

S11A(I)=0.
S33A(I)=-2.*FK
S13A(I)=0.
S31C(I)=-2.*FK
S11C(I)=0.
S33C(I)=-2.*FK
S13C(I)=0.
PAI(I)=B(I)*2.*FK
PCI(I)=B(I)*2.*FK
GO TO 23
C ANGULO DA LINHA LIMITE DA REGIAO II COM A VERTICAL
22 CHI=ATAN(B(I)-BO)
AUX=SIN(F)*COS(CHI)
AN=ATAN(SQRT(1.-AUX**2)/AUX)
C HIPOTESE A-COLAPSO COULOMB NOS CAMPOS I E II , S32A=-2.*FK
A=(AN-CHI)/2.
G=ATAN(B(I)/(1.-BO/(SIN(A)/COS(A))))
X=A
Y=A+CHI

S31A(I)=TRIG3(X,Y)*FK

S11A(I)=TRIG1(X,Y)*FK
X=C
Y=C-CHI
S33A(I)=TRIG3(X,Y)*FK
S13A(I)=TRIG1(X,Y)*FK
C HIPOTESE C-COLAPSO COULOMB NOS CAMPOS II E III , S32A=-2.*FK
G=(AN+CHI)/2.
A=ATAN(BO/(1.-B(I)/(SIN(G)/COS(G))))
X=A
Y=A+CHI

S31C(I)=TRIG3(X,Y)*FK
S11C(I)=TRIG1(X,Y)*FK
X=C
Y=C-CHI
S33C(I)=TRIG3(X,Y)*FK
S13C(I)=TRIG1(X,Y)*FK
23 CONTINUE
DO 27 I=1,40
IF(B(I)-BO)123,124,124
```





71

```
123 PAI(I)=B(I)*2.*FK
    GO TO 27
124 IF(FK*S13A(I)+S33A(I))25,24,24
    24 IF(S13A(I)-1.)26,26,28
    25 IF(S13A(I)-S33A(I)/FK-2.)26,26,128
    26 PAI(I)=-S31A(I)*BO

27 CONTINUE
    GO TO 30
28 E=(S13A(I)-1.)/(S13A(I)-S13A(I-1))
    GO TO 129
128 E=(S13A(I)-S33A(I)/FK-2.)/((S13A(I)-S33A(I)/FK)-(S13A(I-1)-
1S33A(I-1)/FK))
129 BLI=0.025*I-0.025*E
    PAIL=-S31A(I)*BO*(1.-E)-S31A(I-1)*E*BO
    X=PAIL
    Y=-BLI
    CALL FPLLOT(-2,X,Y)

    CALL POINT(0)
    CALL FPLLOT(1,0.,0.)
    II=I
    DO 29 I=II,40
    B(I)=I*0.025
    PAI(I)=PAIL
29 CONTINUE
30 DO 34 I=1,40
    IF(B(I)-BO)130,231,231
130 PCI(I)=B(I)*2.*FK
    GO TO 34
231 IF(S11C(I)-S31C(I)/FK-2.)31,31,33
    31 IF(S13C(I)-1.)32,32,131
131 IF(S13C(I-1)-1.)134,134,33

32 PCI(I)=-S31C(I)*BO
    GO TO 34
33 PCI(I)=PCI(I-1)
34 CONTINUE
    GO TO 36
134 E=(S13C(I)-1.)/(S13C(I)-S13C(I-1))

    HLIO=BLI
    BLI=0.025*I-0.025*E
    PCIL=-S31C(I)*BO*(1.-E)-S31C(I-1)*BO*E
    X=PCIL
    Y=-BLI
    CALL FPLLOT(-2,X,Y)
    CALL POINT(0)
    CALL FPLLOT(1,0.,0.)

    III=I
    DO 35 I=III,40
    B(I)=0.025*I
    PCI(I)=PCIL
35 CONTINUE
36 DO 137 I=1,40
    IF(PAI(I)-PCI(I))136,135,135
```



```
135 PI(I)=PAI(I)
    GO TO 137
136 PI(I)=PCI(I)
137 CONTINUE
C     CALCULO DO LIMITE SUPERIOR DA CARGA DE COLAPSO
C     LARGURA A PARTIR DA QUAL PREVALECE O MECANISMO A
 37 BLS=1./SQRT(FK)
    DO 42 I=1,40
      IF(RO-B(I))39,38,38
 38 PS(I)=B(I)*2.*FK
      GO TO 42

 39 IF(B(I)-RLS)40,41,41
C     MECANISMO DE COLAPSO B

 40 PS(I)=(RO+B(I))*FK
    GO TO 42
C     MECANISMO DE COLAPSO A
 41 PS(I)=SQRT(FK)+BO*FK
 42 CONTINUE
    WRITE (3,14)BO,BLI,PI(40),BLS,PS(40)
14  FORMAT(F7.3,F7.3,F9.3,F7.3,F9.3)
    IO=IFIX(BO/0.025+0.000001)

    X=PI(IO)
    Y=-B(IO)

    CALL FPLOTT(-2,X,Y)
    IK=IO+1
    DO 6 I=IK,40
      X=PI(I)
      Y=-B(I)
 6  CALL FPLOTT(0,X,Y)
    CALL FPLOTT(1,4.,0.)
50 CONTINUE
    CALL EXIT
    END
```



75

CONCRETO COM  $KK = 5$

$F = 0.7297$

$KK = 1/2 (\text{RESISTENCIA A COMPRESSAO} / \text{RESIST A TRACAO})$

$F = \text{ANGULO DE ATRITO INTERNO}$

TRACADO DAS CURVAS LIMITE INFERIOR PI E LIMITE SUPERIOR PS DA CARGA DE COLAPSO EM FUNCAO DA LARGURA B DO BLOCO

VARIAVEIS ADIMENSIONAIS REFERIDAS ALTURA DO BLOCO E RESISTENCIA A TRACAO

BO	PLI	PI	BLS	PS
0.050	0.621	1.353	0.447	2.486
0.075	0.479	1.674	0.447	2.611
0.100	0.436	1.943	0.447	2.736
0.125	0.426	2.132	0.447	2.861
0.150	0.451	2.257	0.447	2.986
0.175	0.476	2.382	0.447	3.111
0.200	0.501	2.507	0.447	3.236

77

CONCRETO COM  $KK = 4$

$F = 0.6435$

$KK = 1/2 (\text{RESISTENCIA A COMPRESSAO} / \text{RESIST A TRACAO})$

$F = \text{ANGULO DE ATRITO INTERNO}$

TRACADO DAS CURVAS LIMITE INFERIOR PI E LIMITE SUPERIOR PS DA CARGA DE COLAPSO EM FUNCAO DA LARGURA B DO BLOCO

VARIAVEIS ADIMENSIONAIS REFERIDAS ALTURA DO BLOCO E RESISTENCIA A TRACAO

BO	BLI	PI	BLS	PS
0.050	0.756	1.102	0.500	2.200
0.075	0.597	1.381	0.500	2.300
0.100	0.515	1.614	0.500	2.400
0.125	0.458	1.832	0.500	2.500
0.150	0.483	1.932	0.500	2.600
0.175	0.508	2.032	0.500	2.700
0.200	0.533	2.132	0.500	2.800



79

CONCRETO CC1 KK= 3  
F= 0.5235

KK=1/2 (RESISTENCIA A COMPRESSAO/RESIST A TRACAO)

F=ANGULO DE ATRITO INTERNO

TRACADO DAS CURVAS LIMITE INFERIOR PI E LIMITE SUPERIOR PS DA CARGA DE COLAPSO  
E A FUNCAO DA LARGURA B DO BLOCO

VARIÁVEIS ADIMENSIONAIS REFERIDAS ALTURA DO BLOCO E RESISTENCIA A TRACAO

RO	RLI	PI	RLS	PS
0.050	0.992	0.824	0.577	1.882
0.075	0.763	1.060	0.577	1.957
0.100	0.646	1.254	0.577	2.032
0.125	0.576	1.425	0.577	2.107
0.150	0.528	1.583	0.577	2.182
0.175	0.553	1.658	0.577	2.257
0.200	0.578	1.733	0.577	2.332

