



Cálculo Plástico de Estruturas Hiperestáticas
Ensaio em modelo reduzido
Prof. Fernando Luiz Lobo B. Carneiro

Prof. Eduardo C. S. Thomaz
Notas de aula

1 / 47

ESTRUTURA

REVISTA TÉCNICA

DAS CONSTRUÇÕES



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS NA FASE PLÁSTICA
FLAMBAGEM
VIGAS DE SECÇÃO VARIÁVEL
PECULIARIDADES DA NB-1
HIPERESTÁTICA

1960 31

Revista editada pelo Prof. Aderson Moreira da Rocha

Comentário : σ_R é o atual f_{ck} .



CÁLCULO DAS ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS DE CON- CRETO ARMADO NA FASE PLÁSTICA*

FERNANDO LUIZ LOBO CARNEIRO

1 — INTRODUÇÃO.

1.1 — O cálculo da resistência das seções transversais das peças de concreto armado no estágio III (cálculo na ruptura) é hoje cada vez mais utilizado, e já foi consagrado nas normas e projetos de normas de vários países. Esse cálculo de esforços internos resistentes na fase plástica, — designado em inglês por “ultimate strength design”, foi o primeiro passo para introduzir a consideração do comportamento não-elástico do concreto armado no cálculo das estruturas.

1.2 — O segundo passo é o cálculo dos esforços internos solicitantes (esforços nas seções) das estruturas hiperestáticas, na fase plástica. É o que os ingleses designam por “ultimate load” ou “limit design”. Como nas estruturas hiperestáticas a carga final do colapso só é atingida através de sucessivas adaptações, que alteram a distribuição relativa dos esforços nas seções, esse cálculo é também conhecido como “redistribuição de momentos”.

1.3 — O cálculo plástico das estruturas hiperestáticas, aplicado às estruturas de aço, já atingiu elevado grau de desenvolvimento, e é exposto em obras sistemáticas como “The Steel Skeleton”, de J.F. Baker, Horne e Heyman, “Plastic Analysis of Structures”, de Hodge (ref. 1 e 2). Não pretendemos fazer exposição ou resumo dessa teoria. Limitar-nos-emos à exposição das peculiaridades de que se reveste necessariamente esse cálculo quando aplicado às estruturas de concreto armado.

* Condensado do trabalho apresentado às 1.^{as} Jornadas luso-brasileiras de engenharia civil.



1.4 — Devem-se ao pesquisador inglês A.L.L. Baker as principais contribuições teóricas e experimentais para a solução do problema.

Na França o problema tem sido estudado pelo eng. Guyon, o mestre do concreto protendido. Um bom balanço do estado da questão foi publicado em dezembro de 1958 e junho de 1959 pela Revista da Divisão Estrutural da “American Society of Civil Engineers”, e no artigo “Limit Design for Structural Concrete”, de Mattock (ref. 3 e 4).

1.5 — Ao contrário do que acontece com o cálculo da resistência das seções no estádio III, o cálculo plástico das estruturas hiperestáticas ainda não foi introduzido nas normas oficiais de cálculo de concreto armado, a não ser, de modo ainda embrionário e limitado, nas normas da Inglaterra, União Soviética, Noruega e Dinamarca. Recentemente o “Comité Européen du Béton” designou o professor A.L.L. Baker e o eng. Y. Guyon para elaborarem propostas práticas para uma norma de cálculo. Em diversos países estão sendo executados, por iniciativa do referido “Comité”, programas de pesquisa experimental, com o objetivo de obter dados mais completos.

No Brasil estamos ensaiando, no Instituto Nacional de Tecnologia, uma série de 30 vigas, com seção transversal 20 cm \times 60 cm, e 330 cm de comprimento, armadas com barras de três categorias, com diâmetros e percentagens de armadura variados. Infelizmente não foi possível terminar essa série de ensaios antes da redação desta conferência, nem proceder a uma análise completa dos resultados. Utilizaremos no entanto, no que se segue, diversas conclusões já extraídas de uma análise parcial. Por sugestão do eng. Guyon, quando da sua visita ao Brasil, enviaremos os resultados completos ao “Comité Européen du Béton”.

2 — PECULIARIDADES DO CÁLCULO PLÁSTICO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO.

2.1 — Numa estrutura hiperestática de material elasto-plástico, como o aço doce, os esforços nas seções são inicialmente os dados pelo cálculo elástico clássico. Se tôdas as cargas aumentam progressiva e proporcionalmente, vão surgindo regiões plastificadas limitadas, nas seções críticas em que os momentos fletores atingem os “momentos de plastificação”. Essas regiões plastificadas



são assimiladas a “rótulas ou articulações plásticas” que podem girar sob momento fletor constante e igual ao momento de plastificação, quando se verificarem aumentos ulteriores das cargas. Quando, numa estrutura ou parte da estrutura, de grau de hiperestaticidade n se formam $(n + 1)$ rótulas plásticas, dá-se o colapso, total ou parcial. As cargas de colapso devem ser iguais às cargas admissíveis ou de serviço multiplicadas por “coeficientes de majoração das cargas”, usualmente designados como “coeficientes de segurança”.

Como o aparecimento de cada rótula plástica introduz uma modificação na distribuição dos momentos fletores, a distribuição final, no colapso é diferente da que corresponde ao cálculo elástico. Em relação ao cálculo elástico clássico, a estrutura apresenta uma maior resistência. Sob a ação das cargas admissíveis ou de serviço a estrutura, que ainda está longe do colapso, pode estar toda ela ainda na fase elástica, ou já apresentar plastificação parcial, com o aparecimento das primeiras rótulas plásticas. Esta plastificação parcial sob as cargas admissíveis ou de serviço não é em geral inconveniente, nas estruturas metálicas.

Por outro lado, nestas estruturas, a capacidade de rotação das rótulas plásticas, é em geral suficientemente grande para que se possa chegar à formação da rótula plástica $(n + 1)$ sem que se tenha dado o colapso prematuro por ter sido atingida aquela capacidade de rotação em algum ponto da estrutura.

2.2 — Nas estruturas de concreto armado não basta verificar a segurança da estrutura à ruptura, por meio do confronto das cargas de serviço com as cargas de colapso. É preciso além disso que sob a ação das cargas de serviço não haja fissuração nociva, isto é, não se apresentem fissuras com abertura superior à tolerável em cada caso, de acordo com o tipo de exposição da estrutura. Esta segunda condição elimina preliminarmente a possibilidade de ser admitida formação de qualquer rótula plástica em serviço. Além disso a capacidade de rotação das rótulas plásticas de concreto armado não é grande, e existe o risco de ser atingida essa capacidade em alguma delas antes que se tenham formado as $(n + 1)$ correspondentes ao colapso final. Neste caso teríamos o colapso prematuro, e a redistribuição dos momentos, ou adaptação da estrutura, não seria tão completa. Eis aí duas peculiaridades das estruturas de



concreto armado que limitam a possibilidade da aplicação do cálculo hiperestático plástico.

2.3 — Uma terceira peculiaridade do cálculo plástico das estruturas hiperestáticas de concreto armado decorre do fato de ser possível variar as percentagens e a distribuição da armadura. Numa peça de seção constante essa variação permite alterar entre largos limites a resistência das seções, com pequena modificação de sua rigidez na fase elástica ou quase-elástica (estádio Ia, Ib e II). O momento de ruptura ou de plastificação de uma seção pode ser assim fixado de acordo com as conveniências do projeto. Esta é uma peculiaridade das estruturas de concreto armado que, ao contrário das duas anteriores, favorece a possibilidade de aplicação do cálculo hiperestático plástico. Graças a ela, como veremos, é possível arbitrar, dentro de certos limites, os momentos fletores hiperestáticos.

2.4 — Do que foi exposto em 2.2 são três as condições a serem obedecidas no cálculo plástico das estruturas de concreto armado.

- 1) — *segurança referida ao colapso*: as cargas de colapso devem ser iguais ou superiores às cargas de serviço multiplicadas pelos coeficientes de segurança;
- 2) — *capacidade de rotação das rótulas plásticas*: não deve ser atingida a capacidade de rotação de nenhuma rótula plástica antes da formação das n rótulas plásticas que precedem o colapso;
- 3) — *segurança contra fissuração nociva*: as cargas de serviço não devem produzir fissuras com abertura superior à abertura máxima tolerável.

A condição (3) exige um cálculo elástico, além do cálculo plástico correspondente às condições (1) e (2), pois sob a ação das cargas de serviço ainda não há redistribuição de momentos apreciável. Este cálculo elástico, que em geral é dispensável nas estruturas metálicas, é indispensável para as estruturas de concreto armado, pelo menos no estado atual da teoria. Não é necessário, no entanto que seja um cálculo rigoroso, pois se destina apenas a uma verificação de fissuração. Basta um cálculo elástico aproximado.

2.5 — Além das 3 condições expostas em 2.4, subsiste a condição relativa à limitação de flechas e outras deformações, em



estruturas delgadas, condição esta cuja verificação deve também ser feita com auxílio de um cálculo elástico aproximado, com as cargas de serviço.

3 — COMPORTAMENTO NÃO ELÁSTICO DO CONCRETO ARMADO.

3.1 — As armaduras comuns de aço doce têm comportamento bastante próximo do material elasto-plástico perfeito, pois sua curva tensões-deformações apresenta um trecho inicial quase totalmente reto, e um extenso patamar horizontal, correspondente ao escoamento (cedência) seguido de novo ramo ascendente (encroamento). As curvas tensões-deformações das armaduras especiais, como as de aço doce torcido a frio, não apresentam êsse patamar, mas seu trecho final, a partir do limite de escoamento convencional, pode ser assimilado a uma reta fracamente inclinada, quase horizontal. A capacidade de deformação destas barras, a partir do limite de escoamento convencional, é da mesma ordem de grandeza da deformação correspondente ao patamar horizontal das barras comuns de aço doce (superior a 0,5%).

3.2 — O concreto, quando ensaiado à compressão apresenta curva tensões-deformações que se afasta progressivamente da tangente na origem, definidora do módulo de elasticidade do material. Nas vizinhanças da tensão de ruptura êsse afastamento corresponde a um módulo secante igual a cerca de duas a três vezes o módulo de elasticidade inicial. Segue-se então um trecho fracamente inclinado, análogo ao das barras especiais de aço torcido a frio. A capacidade de deformação nessa fase quase-plástica não é tão grande quanto a do aço, mas é apreciável. Para os concretos de resistência média em torno de 200 kg/cm² (corpos de prova cilíndricos), cujo módulo de elasticidade inicial é aproximadamente 280 000 kg/cm², o encurtamento total de ruptura é da ordem de 0,30% a 0,35%, e o encurtamento no início da fase quase-plástica 0,15%. A capacidade de deformação na fase quase-plástica é portanto aproximadamente 0,15% a 0,20%. Nos concretos de alta resistência, superior a 400 kg/cm², o encurtamento da ruptura é menor, de ordem de 0,20 a 0,25%. Nos concretos de baixa resistência, ou ainda em início de endurecimento, o encurtamento de ruptura pode atingir 0,60%.

3.3 — Na tração o concreto apresenta também alguma plasticidade.



Sua medida direta é difícil. No entanto a razão 1:2, verificada entre a resistência à tração simples e a resistência aparente à tração na flexão, pode ser explicada por meio de uma curva tensões-deformações de tração elasto-plástica, na qual o alongamento de ruptura é igual a 4 vezes a deformação elástica, o que corresponde, para uma resistência média à tração simples de 14 kg/cm^2 , ao encurtamento de ruptura de 0,02%. O módulo de elasticidade à tração é igual ao módulo de elasticidade à compressão, (ref. 22).

3.4 — O comportamento não-elástico do concreto armado não decorre apenas do comportamento elasto-plástico aproximado dos materiais constituintes — aço e concreto. A passagem do estágio I ao estágio II, com a fissuração, diminui apreciavelmente a rigidez das peças solicitadas à flexão, mesmo quando o aço ainda trabalha na fase elástica, e as tensões no concreto ainda estão bastante afastadas da ruptura.

Nas peças em que a armadura é inferior à armadura limite a passagem ao estágio III, com o início do escoamento da armadura, dá lugar a uma redução progressiva da altura da zona de compressão sem que o concreto tenha ainda rompido, acompanhada de forte aumento das aberturas das fissuras. As deformações nesta fase, sob momento fletor praticamente constante, são consideráveis, correspondendo a um extenso patamar horizontal da curva momentos-curvaturas ou momentos-flechas. Nas peças solicitadas à flexão composta com predomínio do esforço normal de compressão, e nas peças fletidas super armadas, o concreto rompe antes de ser atingido o escoamento da armadura de tração, e a fase quase-plástica é bem menor, pois é determinada apenas pela plasticidade do concreto comprimido.

3.5 — Do que foi exposto conclui-se que o dado experimental decisivo para o estudo da aplicabilidade do cálculo plástico das estruturas hiperestáticas ao concreto armado é a curva momentos fletores-curvatura (ou, na falta desta, a curva momentos-fletores-flechas). — das peças solicitadas à flexão. A relação entre o momento fletor e a curvatura é a “rigidez”, que no caso de material elástico — é igual ao produto EJ , do módulo de elasticidade pelo momento de inércia da seção transversal.

3.6 — A rigidez pode ser calculada de modo exposto a seguir, para as diferentes fases ou “estádios” do concreto armado em peças fletidas:



- produto $E_c J_1$, sendo E_c o módulo de elasticidade do concreto e J_1 o momento de inércia da seção transversal total homogeneizada na fase inicial, designada “estádio Ia”;
- relação entre o momento fletor e a curvatura, nos demais fases, sendo a curvatura igual à relação entre a deformação específica do concreto na borda comprimida da seção transversal e a distância da mesma à linha neutra, ou à relação entre a deformação específica da armadura de tração e a sua distância à linha neutra.

3.7 — Os estádios considerados são os seguintes: (ref. 22).

- *estádio I_a* : concreto ainda não fissurado, toda a seção transversal na fase elástica;
- *estádio I_b* : concreto ainda não fissurado, mas com diagrama de tensão elasto-plástico na zona tracionada; concreto da zona comprimida e armadura, na fase elástica;
- *estádio II*: concreto fissurado, isto é, não mais resistindo à tração; concreto da zona comprimida ainda na fase quase elástica; armadura na fase elástica;
- *estádio III*: do início do escoamento da armadura de tração até a ruptura do concreto, na zona de compressão no caso de peças solicitadas à flexão com armadura inferior à armadura limite; ou armadura de tração ainda na fase elástica, e zona de compressão de concreto na fase plástica, até a ruptura, no caso de peças solicitadas à flexão composta com predominância do esforço normal de compressão, ou de peças fletidas super-armadas.

3.8 — Designamos por M_{I_a} , M_{I_b} , M_{II} e M_R os momentos fletores correspondentes respectivamente ao fim do estágio I_a , ao fim do estágio I_b (fissuração), ao fim do estágio II, e à ruptura final da peça. Para M_{I_b} admitimos para o concreto tracionado a curva tensões-deformações elasto plástica definida em 3.3. Para M_{II} adotamos uma curva tensões-deformações do concreto comprimido simplificada: uma reta, com inclinação correspondente ao do dóbros do módulo de elasticidade desse material. O valor de M_{II} , conforme a porcentagem de armadura é determinado pelo fato de ser atingida no aço a tensão de escoamento σ_s , ou no concreto a tensão de ruptura σ_R ,



sendo o cálculo destas tensões feito de acôrdo com essa hipótese. Para M_{III} adotamos o critério da norma brasileira NB-1: diagrama retangular das tensões de compressão na zona comprimida de concreto, aço no escoamento, em peças fletidas com armadura inferior à armadura limite, isto é, com distância da linha neutra à borda comprimida inferior à distância limite. Esta última é calculada pela hipótese das seções planas, com encurtamento de ruptura convencional do concreto igual a 0,15%, não devendo porém ultrapassar a metade da altura útil.

3.8 — De acôrdo com a NB-1 o momento fletor de ruptura M_R , nas peças fletidas *da secção retangular com armadura simples inferior à armadura limite*, é dado pela fórmula:

$$(3.8.1) \quad M_R = bh^2 \sigma_R \frac{x}{h} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{h} \right)$$

sendo

b — largura da secção transversal

h = altura útil;

σ_R = tensão mínima de ruptura do concreto à compressão (quantilho de 5%, compreendido em geral entre 3/5 e 3/4 da tensão média de ruptura, corpos de prova cilíndricos;

x = distância da linha neutra à borda comprimida;

$z = h - \frac{1}{2} x$ = braço de alavanca.

A posição da linha neutra é dada por

$$(3.8.2) \quad x = \mu \frac{\sigma_e}{\sigma_R}$$

sendo

$$\mu = \frac{S_f}{bh}$$

S_f = área da secção transversal da armadura;

σ_e = limite de escoamento do aço (real ou convencional a 0,2% de deformação permanente).



A posição limite da linha neutra, além da qual a peça é super armada, é dada por

$$(8.3.3) \quad \lim x/h = \frac{\epsilon_R}{\epsilon_R + \epsilon_e}$$

sendo

ϵ_R = encurtamento de ruptura convencional de concreto = 0,15%;

ϵ_e = deformação específica do aço na tensão de escoamento, real ou convencional.

3.9 — Transcrevemos a seguir os resultados obtidos para um concreto de resistência média compreendida entre 200 e 250 kg/cm², com $\sigma_R = 150$ kg/cm², $E_c = 280\,000$ kg/cm², resistência à tração simples $\sigma_T = 14$ kg/cm², sendo $n = \frac{E_f}{E_c} = 7,5$ no estágio I_a, e $n = 2 \frac{E_f}{E_c} = 15$ no fim do estágio II.

Designaremos a “rigidez” (relação entre o momento fletor M e a curvatura $1/\rho$) pelo símbolo (EJ) , por analogia com o “produto de rigidez” na fase elástica. A altura total da seção transversal é d . Tomamos $h = 0,95 d$.

QUADRO 3.9.1.				
Porcentagem da armadura	Valores de $(EJ)/(E_c \frac{bd^3}{12})$, com $h = 0,95 d$			
	Estádio I _a (n = 7,5)	Fim do Estádio I _b	Média de I _a e I _b	Fim do estágio II (n = 15)
100μ%	$(EJ)_{I_a}$	$(EJ)_{I_b}$	$(EJ)_I$	$(EJ)_{II}$
0,5%	1,07	0,72	0,90	0,25
1,0%	1,15	0,84	1,00	0,39
1,5%	1,23	0,94	1,09	0,50
2,0%	1,30	1,05	1,18	0,60
2,5%	1,38	1,13	1,26	0,67
3,0%	1,45	1,21	1,33	0,75

3.10 — Em todo o estágio I_a a rigidez é constante. Segue-se uma transição gradual até o fim do estágio I_b. Podemos tomar para



tôda esta fase (I_a e I_b) uma rigidez média, que não difere muito do $E_c J$ calculado sem levar em conta a armadura, como é usual.

3.11 — No estágio II há também uma transição gradual da rigidez, desde o valor $(EJ)_I$ até o valor $(EJ)_{II}$. O valor final $(EJ)_{II}$ pode também ser calculado pela fórmula (3.11.1):

$$(3.11.1) \quad (EJ)_{II} = \frac{M_{II}}{\frac{\epsilon_f}{h-x}} = \frac{S_f \sigma_f z}{\frac{\sigma_f E_f}{h-x}} = E_f S_f (h-x) z = \\ = E_f S_f (h-x) \left(h - \frac{x}{3} \right)$$

sendo:

$E_f = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2 =$ módulo de elasticidade do aço;

$x =$ distância da linha neutra à borda comprimida, calculada no estágio II, com $n = 2 \frac{E_f}{E_c} = 15$;

$\sigma_f =$ tensão na armadura de tração, no local da fissura.

Entre duas fissuras sucessivas a tensão na armadura de tração é variável, e menor que a tensão correspondente ao cálculo no estágio II, pois esta só se verifica nas seções fissuradas. A rigidez média da peça é portanto maior que $(EJ)_{II}$, e está compreendida entre $(EJ)_I$ e $(EJ)_{II}$. Poder-se-ia calcular essa rigidez média introduzindo na fórmula (3.11.1) um coeficiente de redução aplicado a ϵ_f ou ao σ_f do seu denominador. Este coeficiente tem, segundo muitos pesquisadores, a forma

$$(3.11.2) \quad \psi = 1 - \frac{k}{\mu \sigma_f}$$

sendo k um coeficiente experimental (igual a 4, segundo os ensaios de Ferry Borges e Arga e Lima).

Vemos que o coeficiente ψ é maior nas peças fracamente armadas, e que em qualquer caso tende para 1 quando a tensão no aço σ_f cresce. Quando σ_f se aproxima da tensão de escoamento da armadura podemos tomar $\psi = 1$ pois a tensão na armadura de tração se uniformiza.



Curva momentos fletores - Curvaturas

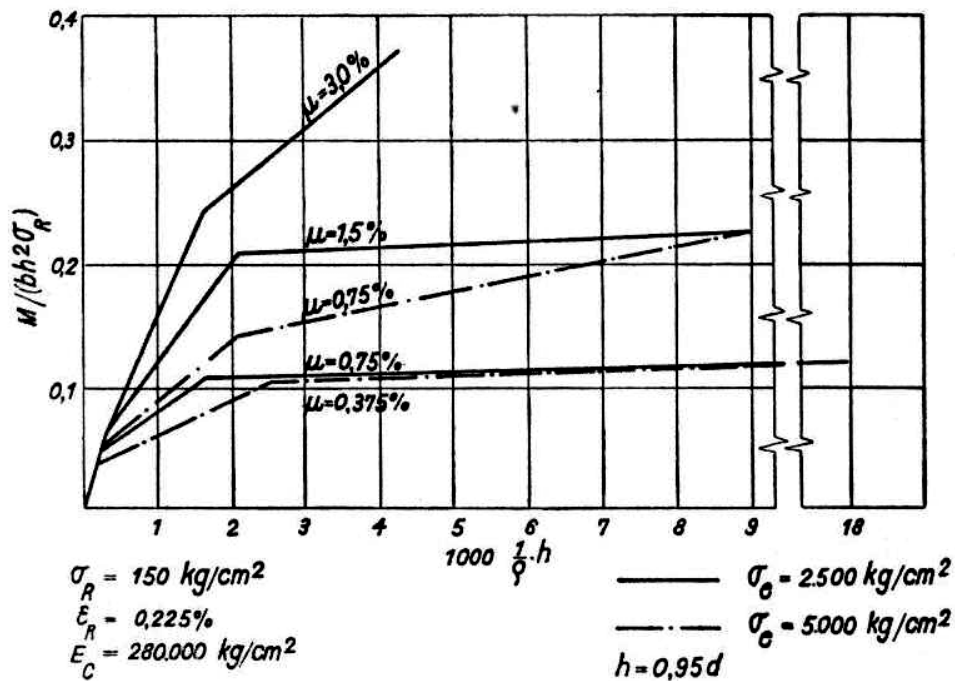
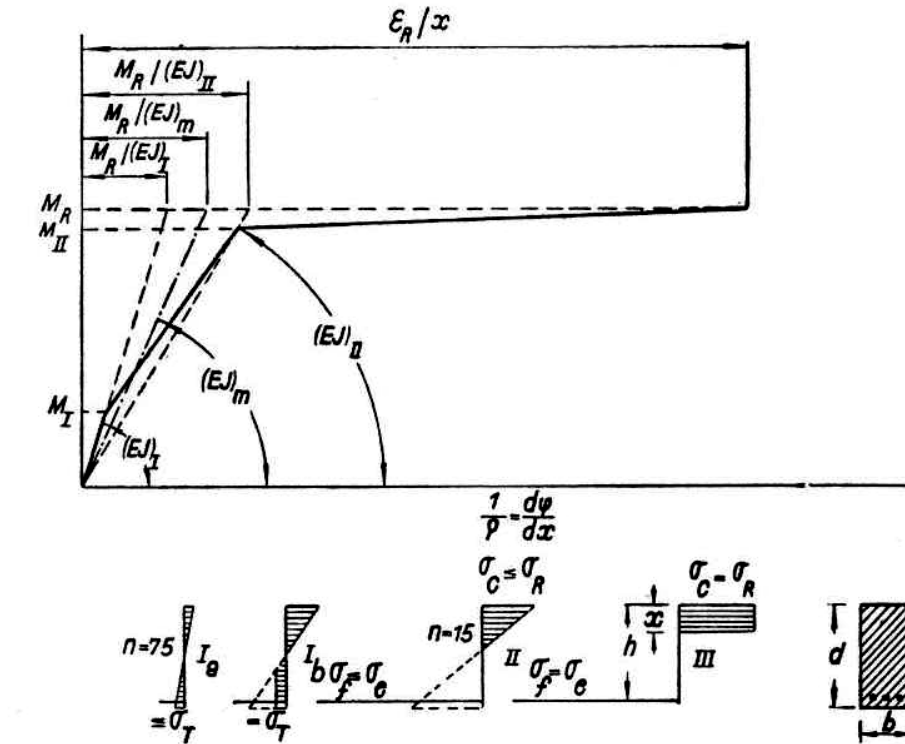


Fig. 1



3.12 — Em lugar de aplicar a fórmula (3.11.2) é mais simples e prático admitir uma transição linear da curvatura, desde M_{Ib} , correspondente à fissuração inicial, até M_{II} , correspondente no fim do estágio II. De acôrdo com êste último critério a curva momentos-fletores-curvaturas é composta inicialmente de um trecho reto cuja inclinação corresponde a $(EJ)_I$, e que liga a origem ao ponto de coordenadas M_{Ib} , $\frac{M_{Ib}}{(EJ)_I}$.

Segue-se um segundo trecho reto, menos inclinado, e que liga a extremidade do primeiro trecho ao ponto de coordenadas M_{II} , $\frac{M_{II}}{(EJ)_{II}}$. (fig. 1).

3.13 — O terceiro trecho da curva momentos-fletores-curvaturas corresponde ao estágio III, e é também uma reta de inclinação ainda menor, quase horizontal nas peças fracamente armadas (com armadura inferior à metade da armadura-limite). A curvatura final, no momento da ruptura, e calculada pela fórmula

$$(3.13.1) \quad \frac{M_R}{(EJ)_{III}} = \frac{\epsilon_R}{x} = \frac{\epsilon_R}{x/h} \frac{1}{h}$$

sendo x calculado pela fórmula (3.8.2), e M_R pela fórmula (3.8.1).

O ponto de coordenadas $M_R: \frac{M_R}{(EJ)_{III}}$ define o fim da curva momentos fletores curvaturas.

Não devemos no entanto tomar para ϵ_R o valor convencional de 0,15%, utilizado para a determinação da posição limite da linha neutra, na NB-1. Como o diagrama retangular, admitido para o cálculo de x (fórmula 3.8.1) é convencional, a verdadeira profundidade da zona de compressão é um pouco maior. Se admitirmos o “coeficiente de enchimento” 0,75, podemos tornar para ϵ_R , na fórmula (3.13.1), 75% do valor de encurtamento de ruptura do concreto indicada em 3.2, isto é, $0,75 \times 0,30\% = 0,225\%$.

3.14 — A curva momentos fletores curvatura assim estilizada tem o aspeto da fig. 1. Uma primeira comparação com os resultados obtidos nos ensaios em curso no I.N.T., a que já nos referimos, mostra que o critério exposto é bastante satisfatório. É também bastante próximo do critério de professor Jäger, adotado provisoriamente pelo Comité Européen du Béton” (ref. 18).



3.15 — Como valores aproximados de M_{Ib} e M_{II} podemos adotar os seguintes nas peças de seção retangular com armadura simples:

QUADRO 3.15.1		
Relação entre a armadura da peça e a armadura limite	M_{Ib}/M_R	M_{II}/M_R
0,15	0,50	0,95
0,25	0,45	0,95
0,50	0,30	0,95
0,75	0,25	0,75
1,00	0,20	0,65

O valor de M_R deve ser calculado pela fórmula (3.8.1).

As profundidades-limite da zona de compressão, e as correspondentes taxas-limite de armadura, em seções retangulares com armadura simples, e concreto com os característicos médios definidos em 3.2, são aproximadamente as seguintes:

QUADRO 3.9.2		
Categoria das barras	lim (x/h)	lim μ
Lisas 37 CA, $\sigma_e = 2\ 500\ \text{kg/cm}^2$	0,5	3,0%
Lisas 50 CA, $\sigma_e = 3\ 000\ \text{kg/cm}^2$	0,5	2,5%
Torcidas CA-T40, $\sigma_e = 4\ 000\ \text{kg/cm}^2$	0,28	1,0%
Com mossas ou saliências CA-T50, $\sigma_e = 5\ 000\ \text{kg/cm}^2$	0,25	0,75%

Obs.: Concreto com resistência média entre 200 e 250 kg/cm^2 $\sigma_R = 150\ \text{kg/cm}^2$

4 — CAPACIDADE DE ROTAÇÃO DAS RÓTULAS PLÁSTICAS

4.1 — A forma da curva momentos flettores-curvaturas mostra que ainda mesmo no estágio II pode haver grande diferenciação, do ponto de vista da rigidez, entre partes de uma estrutura ou de uma barra. Essa diferenciação, entre as partes fissuradas e as ainda não fissuradas, pode em certos casos, originar uma “redis-



tribuição de momentos” sensível, mesmo sob as cargas de serviço. Numa viga contínua ou bi-engastada, ainda não fissurada nas zonas de momentos positivos, mas já parcialmente fissurada nas zonas de momentos negativos, tudo se passa como se houvesse pequenos trechos, junto dos apoios, com rigidez muito menor que a do resto da barra. Segundo o quadro (3.9.1.) o $(E J)$ desses pequenos trechos pode ser inferior à metade do $(E J)$ do resto da barra, se esta é fracamente armada. O resultado disso é que os momentos negativos sobre os apoios são então inferiores aos calculados pela teoria elástica clássica, com $(E J)$ constante; em compensação os momentos positivos no vão são maiores, pois a “linha de fechamento” baixa. Se surge outro trecho fissurado, mas desta vez na zona de momentos positivos, o efeito descrito é parcialmente compensado, e os momentos sobre os apoios voltam a se aproximar dos do cálculo elástico clássico, sem, no entanto chegar a atingí-los. Esse efeito foi verificado experimentalmente por L.H.N. Lee (ref. 5).

4.2 — O comprimento do trecho fissurado junto de cada apoio é uma fração do comprimento s da zona de momentos negativos, dada aproximadamente por

$$(4.2.1) \quad l_{fiss.} = s \left(1 - \frac{M_{1b}}{M_{II}} \right)$$

É portanto bastante pequeno, quando comparado com o comprimento total da barra. Ainda não pode esse trecho fissurado junto ao apoio ser assimilado a uma “rótula plástica”, pois não é susceptível de deformar-se sob momento fletor quase-constante, mas já é como que o embrião de uma futura rótula plástica. A maior deformabilidade desses pequenos trechos fissurados, em relação à parte ainda não fissurada é particularmente sensível nos balanços com carga uniformemente distribuída, nos quais o momento fletor decresce rapidamente, a partir da seção de engastamento. A flecha na extremidade do balanço é determinada na sua maior parte pela deformação do pequeno trecho fissurado junto à seção de engastamento, podendo desprezar-se em muitos casos a parcela oriunda da deformação do resto da peça, que ainda está no estágio I. Tudo se passa como se o balanço fosse rígido e girasse junto ao engaste. Este efeito foi por nós verificado experimentalmente no I.N.T., em ensaios de modelos reduzidos de sapatas (fig. 6 a 11).



4.3 — No cálculo plástico de estruturas hiperestáticas de grau n de concreto armado, baseado na determinação da carga de colapso, a capacidade de deformação dos pequenos trechos plastificados, que se formam junto a n seções com momentos fletores máximos, é ainda muito maior. Esses pequenos trechos já atingiram o estágio III, e podem deformar-se consideravelmente, sob momento fletor quase-constante. Formaram-se assim as “rótulas plásticas”, concepção básica da nova teoria. Ao avizinhar-se o colapso temos zonas ainda no estágio I, zonas fissuradas, no estágio II, e os pequenos trechos plastificados, já no estágio III, isto é, as “rótulas plásticas”. Nessa fase a fissuração já se estendeu de tal maneira que é mais simples desprezar-se a diferenciação entre as partes fissuradas e as não fissuradas, e considerar apenas a diferenciação entre os trechos plastificados — rótulas plásticas, e o resto da estrutura, que é suposto no estágio II. Quanto maior essa diferenciação, maiores as possibilidades do cálculo plástico. Nos trechos entre as rótulas plásticas pode-se aplicar a teoria elástica, adotando-se uma rigidez média adequada. Seria no entanto exagerado tomar para todo o resto da estrutura apenas a rigidez (EJ) correspondente ao fim do estágio II, indicada na última coluna do quadro (3.9.1). Sugerimos que se adote, enquanto não haja melhores dados experimentais, um valor de (EJ) correspondente à fase intermediária do estágio II, — por exemplo, a média dos (EJ) correspondente ao estágio I (penúltima coluna do quadro 3.9.1) e ao fim do estágio II (última coluna do mesmo quadro). Baker adotou a hipótese extremamente pessimista de um (EJ) igual ao (EJ) do fim do estágio II, aplicado a toda a estrutura, nos intervalos entre rótulas plásticas. No entanto trechos ponderáveis das barras, na ocasião do colapso, ainda estarão com fissuração incipiente, sendo as tensões na armadura nos intervalos, entre as fissuras, inferiores às tensões correspondentes ao estágio II; e haverá mesmo alguns trechos ainda não fissurados, nas vizinhanças dos pontos de momentos nulos. Acreditamos que a sugestão de um (EJ) médio, que fizemos, ainda estará a favor da segurança. A existência de uma mesa comprimida na zona de momentos positivos, nas vigas T de edifícios, vem reforçar ainda mais esta nossa sugestão, pois o (EJ) da viga T no fim do estágio II é maior que o EJ da viga retangular; as vigas trabalham como viga T nos vãos e como viga retangular na região das rótulas plásticas.



4.4 — A determinação da “capacidade de rotação” das rótulas plásticas constitui um dos problemas mais sérios e decisivos, no estudo da aplicabilidade da nova teoria ao concreto armado. Este problema ainda não atingiu amadurecimento completo, e exige novas pesquisas. Passamos a expor o estado atual da questão.

4.5 — A mais simples das teorias sobre a capacidade de deformação das rótulas plásticas de concreto armado é devida a A.L.L. Baker. Baker distingue dois tipos de rótulas plásticas:

Tipo A) rótulas plásticas com trações: são as que se formam nas peças solicitadas à flexão simples ou composta, com predominância da flexão, com armaduras inferiores à armadura-limite. A capacidade de rotação é devida ao escoamento da armadura, acompanhado de redução progressiva da altura da zona comprimida do concreto, até que este rompa, quando a deformação na borda comprimida atinge seu encurtamento de ruptura.

Tipo B) *rótulas plásticas totalmente comprimidas*: são as que se formam nas peças solicitadas à flexão composta, com predominância da compressão (compressão excêntrica). A capacidade de rotação é devida exclusivamente à plastificação do concreto, junto à face mais comprimida. Estas rótulas, que funcionam sem fissuração têm capacidade de rotação muito inferior às do tipo A, a menos que se confira ao concreto uma maior capacidade de encurtamento antes da ruptura, por meio de cintamento adequado.

4.6 — Chamando:

ϵ_p = diferença entre o encurtamento de ruptura do concreto ϵ_R , e o encurtamento já verificado ao ser iniciado o estágio III;

l_p = comprimento do trecho plastificado;

θ = rotação da rótula plástica, de comprimento l_p , a fórmula de Baker, para as rótulas plásticas do tipo A é a seguinte:

$$(4.6.1) \quad \text{Tipo A: } \theta_{\max} = \frac{\epsilon_p}{x} l_p = \frac{\epsilon_p}{x/h} \frac{l_p}{h}$$

sendo x/h calculado de acordo com as fórmulas do estágio III, já indicadas (3.8.2).



Baker indica como valor de segurança (“safe value”):

$$(4.6.2) \quad \epsilon_p = 10^{-3}$$

Baker verificou que, ao avizinhar-se a ruptura, ocorrem deslismamentos apreciáveis da armadura, junto à seção de momento máximo, e que o trecho plastificado, nos casos mais desfavoráveis, se estende *pelo menos* ao longo de um comprimento igual à metade da altura útil da peça, para cada lado do apoio, podendo ser maior. Assim Baker indica, ainda como valor de segurança (“safe value”):

$$(4.6.3) \quad l_p = h/2$$

Esse é o comprimento das rótulas plásticas que se formam na seção de engastamento de uma barra, junto a um nó de estrutura reticulada. No caso de vigas contínuas simplesmente apoiadas, teremos o comprimento l_p para cada lado do apoio, e o comprimento total da rótula plástica será

$$(4.6.4) \quad 2 l_p = h$$

A fórmula de Baker, (4.6.1), se transforma com êsses “valores seguros”, na seguinte:

$$(4.6.5) \quad \theta_{\max} = \frac{10^{-3}}{x/h} \frac{1}{2} \text{ (rótulas junto a um nó)}$$

$$(4.6.6) \quad \theta_{\max} = \frac{10^{-3}}{x/h} \text{ (rótulas sôbre apoios de vigas contínuas)}$$

Para rótulas totalmente comprimidas, do tipo B, Baker indica a fórmula “safe value”:

$$(4.6.7) \quad \text{Tipo B} = \theta_{\max} = 10^{-3} \frac{l_p}{h}$$

na qual l_p é em geral dado também pela (4.6.3).

4.7 — Havendo cintamento, circular ou mesmo retangular, o valor θ_{\max} , dado em (4.6.7) pode ser consideravelmente aumentado, segundo ensaios de W.L.L. Chan, colaborador de Baker. Chamando S_s o volume de cintamento por unidade de comprimento da peça, e S_n a área da seção transversal do núcleo por êle envolvido, êsse valor pode ser aumentado cêrca de 10 vêzes, desde que $S_s/S_n \geq 0,01$. Êste efeito também pode ser utilizado nas rótulas

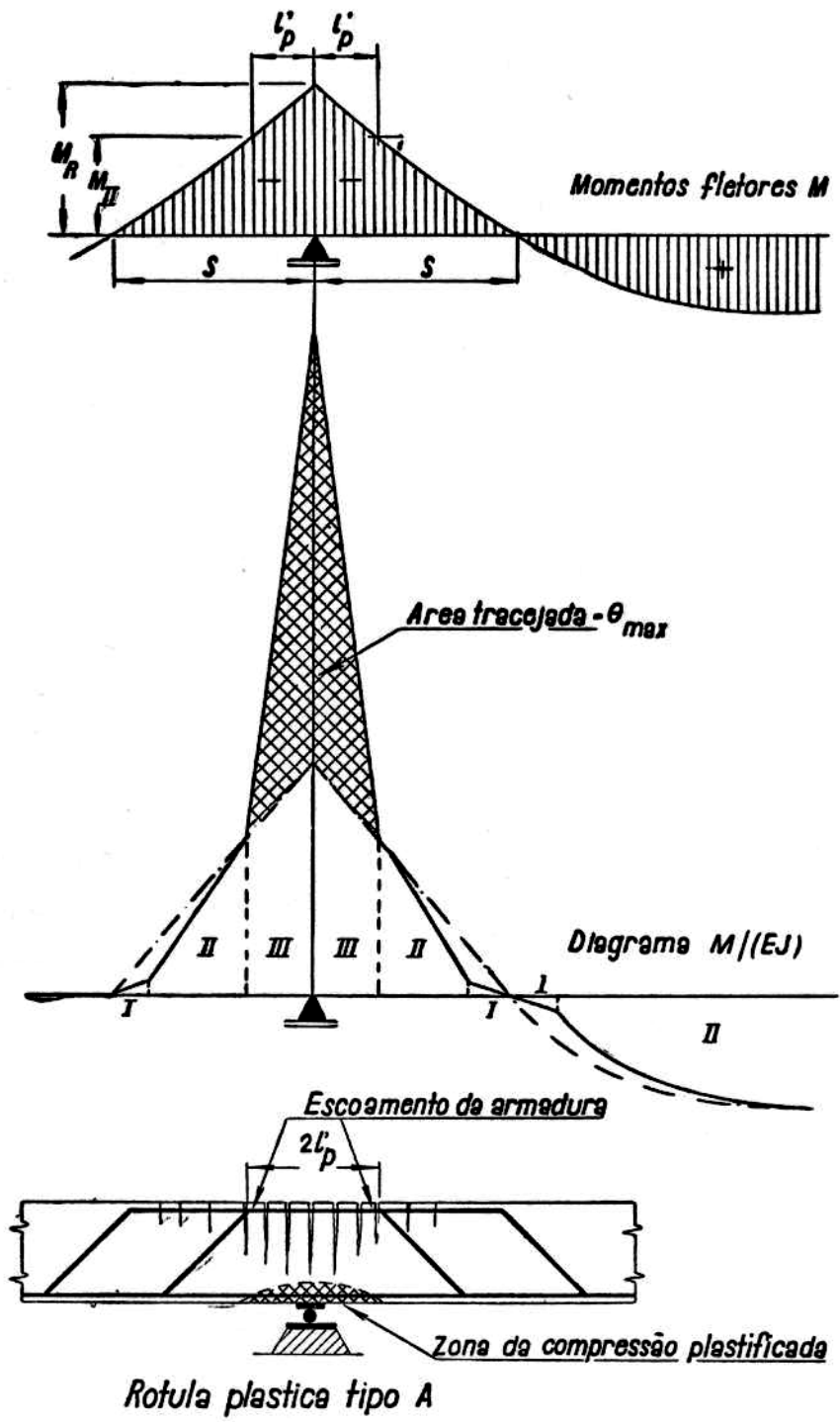


Fig. 2



do tipo A, por meio de cintamento adequado da zona de compressão, mas são necessárias experiências mais amplas para que esta solução possa ser adotada com segurança. Em qualquer dos casos é preciso impor condições que evitem a destruição prematura, ainda em serviço, da camada externa ao núcleo cintado (exfoliação).

4.8 — O pesquisador Minoru Yamada determinou experimentalmente a capacidade de rotação (ret. 11). Yamada admite que o comprimento plastificado seja igual a $2z = 2(h - x/2)$, na armadura, e x no betão comprimido. Apesar da dispersão dos resultados, que levou Yamada a não considerar confirmada a fórmula por êle deduzida a partir dessa hipótese, é fácil verificar que a fórmula de Baker, com os “valores seguros” indicados em (4.6.2) e (4.6.4), isto é, colocada sob a forma (4.6.6), fornece valores muito inferiores aos experimentais, e portanto demasiado prudentes. Se multiplicarmos por 2 os valores correspondentes à fórmula de Baker, teremos uma curva limite — inferior dos resultados experimentais de Yamada. Numa primeira análise dos ensaios por nós realizados no Brasil também encontramos valores superiores aos da fórmula de Baker. A igual conclusão levam os ensaios de Ernst (ret. 30).

4.9 — Outras teorias, como a de W.L.L. Chan, se baseiam na determinação da área do diagrama $M/(EJ)$, em sua parte excedente do diagrama que corresponderia à extrapolação do estágio II até à ruptura final. A figura 2 indica com clareza essa teoria, aplicada às curvas fletoras-curvatura indicadas nesta conferência. O comprimento do trecho plastificado (estádio III), para cada lado do ponto de momento máximo, seria dado aproximadamente pela fórmula

$$(4.9.1) \quad l_p = s(1 - M_{II}/M_R)$$

onde s tem o significado já definido em 4.2.

Mais tarde Chan indicou como “valor convencional” de l_p a ser introduzido na fórmula (4.6.1) de Baker, o seguinte:

$$(4.9.2) \quad l_p = 0.25 s, \text{ a } 0,35 s$$

Chegamos a valores bastante próximos de $0.25 s$ utilizando os esquemas indicados nesta conferência para curva momentos fletoras-curvaturas, mas apenas nos casos de peças fortemente arma-



das. No caso de armaduras médias ou fracas é mais correto o critério de Baker, baseado na constatação experimental do “espraçamento” do trecho plastificado. No entanto, como em peças com l/h superior a 10 o critério de Chan fornece valores de l_p superiores a $h/2$, e como a fórmula de Baker é excessivamente prudente, sugerimos que se adote para l_p o maior dos dois valores: $h/2$ ou $0,25 s$.

4.10 — Nas peças com armadura excessivamente fraca a fórmula de Baker fornece valores muito grandes, que só poderão ocorrer com deformações exageradas da armadura, acompanhadas de fissuras com aberturas tão acentuadas que dificilmente poderiam ser aceitas, mesmo num critério baseado na ruptura. É mais prudente considerar que a capacidade de rotação das rótulas plásticas termina, nesses casos, quando as fissuras apresentarem aberturas de alguns milímetros. Sugerimos considerar como limite superior o correspondente a uma profundidade da zona comprimida $x/h = 0,1$ (taxa armadura de cerca 0,5% a 0,6% no caso de barras lisas, comuns, 0,35% no caso de barras lisas torcidas, CA-T40 e 0,3% no caso de barras com mossas ou saliências CA-T50). Para alturas menores da zona comprimida não se considerarão novos acréscimos do valor da capacidade de rotação. Esse critério equivale aproximadamente a admitir um alongamento máximo de armadura de 0,9% a partir do escoamento, e fissuras com abertura média de 1 a 2 mm, na ocasião em que é considerada esgotada a capacidade de rotação.

Resumindo, temos, no caso de rótulas do tipo A:

$$(4.10.1) \quad \theta_{\max} = \frac{10^{-3}}{x/h} \frac{l_p}{h} \leq 10 \cdot 10^{-3} \frac{l_p}{h}$$
$$l_p = \text{maior dos dois valores} \begin{cases} h/2 \\ 0,25 s \end{cases}$$

No caso de rótulas totalmente comprimidas do tipo B, toma-se $x = h$ na fórmula (4.10.1).

Em geral, no caso de rótulas do tipo A, a capacidade de rotação estará assim compreendida entre $1 \cdot 10^{-3}$ (armadura-limite) e $5 \cdot 10^{-3}$ (peças fracamente armadas). As rótulas sobre apoios de vigas contínuas, que se estendem para ambos os lados da secção crítica, têm capacidade de rotação dupla.



5 — CONDIÇÕES IMPOSTAS PELA SEGURANÇA CONTRA FISSURAÇÃO NOCIVA

5.1 — O cálculo das estruturas hiperestáticas de concreto armado na fase plástica, baseado na carga de colapso, possibilita que se “arbitrem”, dentro de certos limites, os momentos fletores hiperestáticos, atribuindo-lhes valores diferentes dos que seriam fornecidos pelo cálculo clássico. Numa viga contínua, por exemplo, os momentos sobre os apoios intermediários, correspondentes ao cálculo clássico, podem ser reduzidos. A partir das “linhas de fechamento” assim arbitradas são então traçados os diagramas isostáticos, obtendo-se momentos positivos, nos vãos, superiores aos do cálculo elástico. Passamos a demonstrar que a segurança contra fissuração nociva em serviço exige em primeiro lugar que os momentos arbitrados no cálculo plástico não se afastem muito dos momentos do cálculo elástico, mesmo que a condição relativa à capacidade de rotação das rótulas plásticas permitisse uma maior “redistribuição”.

5.2 — Sejam: $X_1, X_2 \dots X_i$ os momentos fletores hiperestáticos calculados pela teoria elástica clássica, com as cargas multiplicadas pelos respectivos coeficientes de segurança;

$\bar{X}_1, \bar{X}_2 \dots \bar{X}_i$ os momentos fletores “arbitrados”, correspondentes ao cálculo plástico (1);

ν o coeficiente de segurança médio (na NB-1, $\nu = 1,65$ para as cargas permanentes e sobrecargas comuns de edifícios; para cargas móveis o coeficientes de segurança é 2,0).

A primeira condição para que não haja fissuração nociva é que, sob a ação das cargas de serviço não haja escoamento da armadura em nenhum ponto da estrutura. Sendo assim, a estrutura deverá comportar-se em serviço aproximadamente na fase elástica, e os momentos fletores em serviço, nas seções correspondentes às “rótulas plásticas”, serão

$$X_1/\nu, X_2/\nu, \dots X_i/\nu$$

Por outro lado, para que fique assegurada, no cálculo plástico, a segurança contra o colapso da estrutura, essas seções críticas deverão ser obrigatoriamente dimensionadas de modo que a arma-

(¹) Convenção de A.L.L. Baker.



dura comece a escoar quando os momentos fletores atingirem os valores “arbitrados”

$$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_i$$

A primeira condição relativa à segurança contra fissuração nociva em serviço será portanto:

$$(5.2.1) \quad X_1/\nu < \bar{X}_1; X_2/\nu < \bar{X}_2; \dots X_i/\nu < \bar{X}_i$$

Podemos exprimi-la da seguinte maneira: os momentos fletores hiperestáticos não poderão ter valores arbitrados inferiores aos momentos fletores do cálculo elástico clássico divididos pelo coeficiente de segurança médio. Convém aplicar esta condição com uma pequena margem de segurança, que sugerimos seja de 10%. Assim:

$$(5.2.2) \quad \bar{X}_1 \geq X_1 / (0,9 \nu); \bar{X}_2 \geq X_2 / (0,9 \nu), \dots \\ \bar{X}_i \geq X_i / (0,9 \nu).$$

No caso corrente em que $\nu = 1,65$, temos $0,9 \nu = 1,5$ e

$$(5.2.3) \quad \bar{X}_1 \geq 2/3 X_1; \bar{X}_2 \geq 2/3 X_2; \dots \bar{X}_i \geq 2/3 X_i$$

isto é, nenhum momento fletor hiperestático poderá ter valor arbitrado inferior a 2/3 do valor dado pelo cálculo elástico clássico.

O afastamento máximo em relação à teoria elástica clássica seria, segundo essa sugestão, 33%. A norma inglesa já permite uma “redistribuição de momentos” que importe em afastamento máximo de 15%, e a norma da União Soviética 30%. A condição (5.2.2) deve ser também aplicada às rótulas totalmente comprimidas cintadas, a fim de impedir a “exfoliação” em serviço.

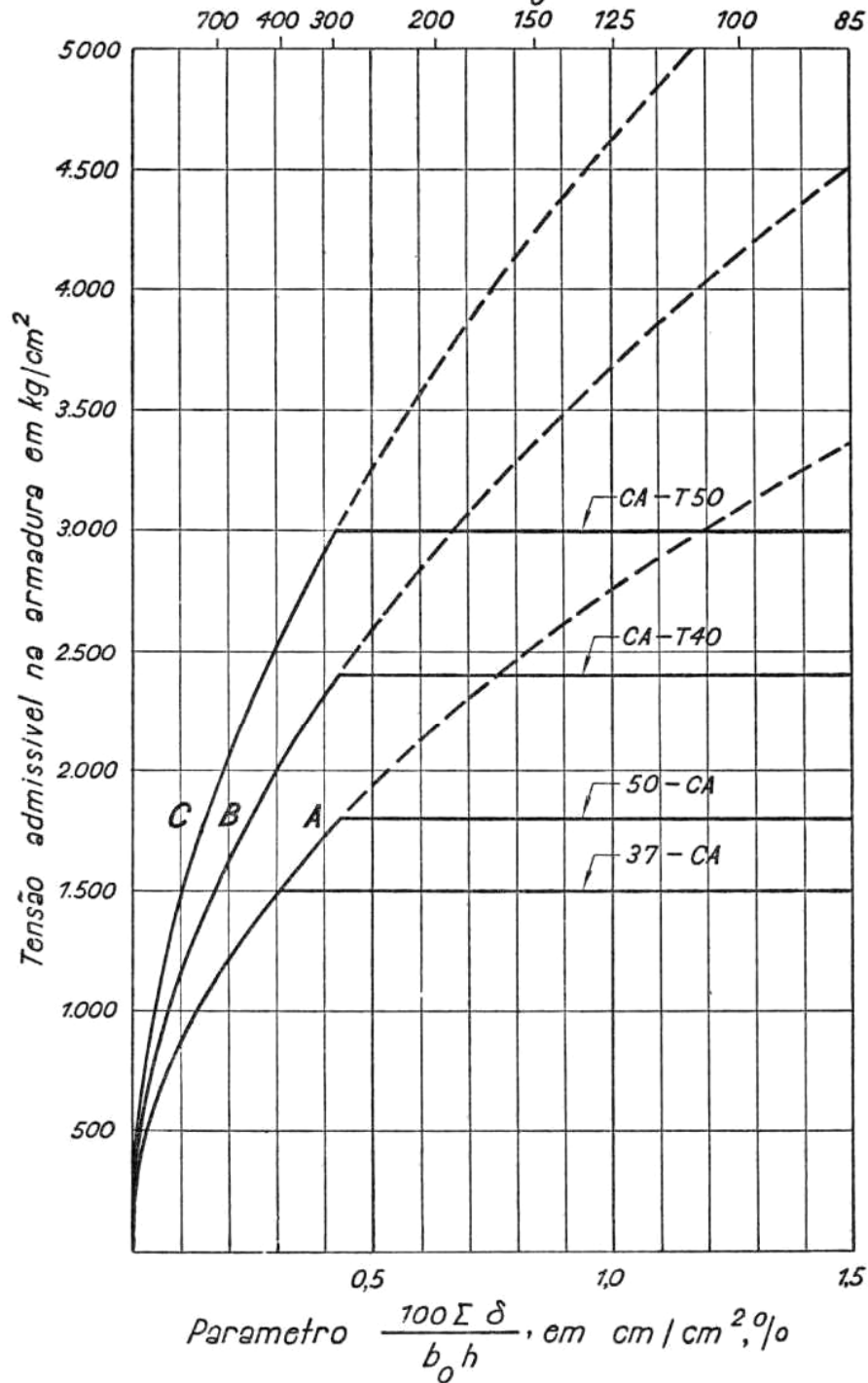
5.3 — Não basta no entanto, respeitar essa primeira condição.

É indispensável, a nosso ver, introduzir uma segunda condição, que limite a fissuração, em serviço, nas regiões vizinhas das seções críticas nas quais foram arbitrados os momentos fletores hiperestáticos, isto é, nas regiões em que se formariam as “rótulas plásticas” se todas as cargas aumentassem até o colapso. Esta questão tem sido abordada de modo extremamente vago pelos pesquisadores que se têm dedicado ao cálculo na fase plástica. Baker, ao justificar a necessidade de um cálculo elástico aproximado, diz apenas que “sob as cargas de serviço ... devem ser evitadas fissuras muito abertas, grandes deformações ou exfoliação do concreto”. Não



SEGURANÇA CONTRA FISSURAÇÃO NOCIVA NAS PEÇAS FLETIDAS

$$\text{Parametro } \frac{\delta}{\mu} = \frac{\delta}{S_p}, \text{ em cm}$$
$$b_0 h$$



- A = Barras lisas
- B = Barras lisas torcidas
- C = Barras com móssas ou saliências

Fig. 3



caberia nesta conferência abordar pormenorizadamente a teoria da fissuração (fendilhamento) do concreto armado, mas consideramos que essa teoria, em seu estado atual, já permite formular regras práticas para garantir a segurança contra fissuração nociva. O assunto é bastante conhecido em Portugal, a cujos pesquisadores se devem contribuições valiosas, descritas nos trabalhos de Ferry Borges e Arga e Lima. (ref. 20, 23 a 27).

5.4 — Podemos admitir em caráter aproximado, que a tensão na armadura, em serviço, é igual a σ_e/ν , quando o cálculo da resistência da seção transversal é feito no Estádio III, com coeficiente de segurança ν . No entanto as seções críticas correspondentes às “rótulas plásticas” são dimensionadas para os momentos fletores \bar{X}_i , mas, em serviço, são solicitadas, não pelos momentos \bar{X}_i/ν , e sim pelos momentos X_i/ν , maiores que os primeiros. Resulta daí que nessas seções a tensão efetiva do aço, em serviço, será igual à tensão admissível normalmente, multiplicada pela relação X_i/\bar{X}_i :

$$(6.4.1) \quad \sigma_f = (X_i/\bar{X}_i) (\sigma_e/\nu)$$

Na hipótese extrema (condição 5.2.2) em que $(X_i/\bar{X}_i) = 0,9 \nu$ teremos

$$(4.5.2) \quad \sigma_f = 0,9 \sigma_e$$

A tensão no aço, em serviço, será igual a 90% do seu limite de escoamento, nas seções críticas em que foram arbitrados momentos fletores hiperestáticos inferiores de 33% aos do cálculo elástico. Isso não tem a menor importância, do ponto de vista do colapso da estrutura, pois o cálculo na fase plástica garante segurança adequada contra o colapso. Mas um valor tão elevado da tensão no aço em serviço impõe condições relativas à segurança contra fissuração nociva muito mais severas que as usuais, em todas as regiões vizinhas das seções críticas correspondentes às “rótulas plásticas”.

5.5 — No projeto de revisão da Norma Brasileira NB-2 adotamos como critério de segurança contra fissuração nociva, (85% das fissuras com abertura máxima de 0,2 mm) o seguinte:

— quando o “parâmetro de fissuração” δ/μ (relação entre o diâmetro das barras e a taxa de armadura) for igual a 300 cm as tensões em serviço na armadura podem atingir 1.800 kg/cm² para barras



lisas, 2.400 kg/cm² para barras lisas torcidas, e 3.000 kg/cm² para barras com mossas ou saliências, torcidas ou não; para outros valores do parâmetro δ/μ , as tensões admissíveis são inversamente proporcionais à raiz quadrada de δ/μ (v. figura 3).

Como além dessa condição a tensão admissível normalmente, em estruturas calculadas pela teoria clássica, não pode ser maior que σ_e/ν , os valores 1.800, 2.400 e 3.000 não devem ser ultrapassados mesmo que δ/μ seja inferior a 300, respectivamente nas barras lisas 50 CA ($\sigma_e = 3.000$ kg/cm²), barras torcidas CA-T40 ($\sigma_e = 4.000$ kg/cm²), e barras torcidas CA-T50 ($\sigma_e = 5.000$ kg/cm²). No caso de barras lisas comuns 37 CA ($\sigma_e = 2.400$ kg/cm²) o parâmetro δ/μ correspondente à tensão admissível de 1.500 kg/cm² se eleva a 433 (ref. 20).

5.6 — Propomos estender êsse critério ao caso das elevadas tensões que se verificam em serviço nas regiões correspondentes às rótulas plásticas. Si por exemplo essas tensões atingem o valor extremo dado por (5.4.2), isto é, $0,9 \sigma_e$, o “parâmetro de fissuração” δ/μ não poderá ser superior a 192, para barras lisas comuns 37 CA, ou 133, para barras lisas especiais 50 CA e para barras torcidas CA-T40 ou CA-T50. Se êsse critério na prática se apresentar excessivamente severo, a única solução será reduzir a diferença entre os momentos arbitrados no cálculo plástico e os momentos do cálculo elástico, isto é, aumentar a relação (\bar{X}_i/X_i). No quadro que segue apresentamos os valores obtidos em várias hipóteses, tanto usando o critério de fissuração do projeto de revisão da NB-2, como a fórmula

$$(5.6.1) \quad \delta/\mu \leq (1/K) \left(\frac{27\,000}{\sigma_f} - 5 \text{ cm} \right)$$

indicada por Ferry Borges e Arga e Lima ($K = 0,04$ para barras lisas, 0,02 para barras lisas torcidas, e 0,01 para barras com mossas ou saliências). Desprezamos nessa fórmula o termo $(4/\mu \sigma_f)$, de redução de σ_f , por ser σ_f muito elevado, e próximo de σ_e . (ref. 27).

A fórmula correspondente ao projeto de revisão da NB-2 é

$$(5.6.2) \quad \delta/\mu \leq \frac{300}{(\sigma_f/\sigma_{f0})^2}$$

com $\sigma_{f0} = 1\,800$ kg/cm² para barras lisas, 2\,400 kg/cm² para barras lisas torcidas, e 3\,000 kg/cm² para barras com mossas ou saliências, torcidas ou não (fig. 3).



QUADRO 5.6.2.

Relação (\bar{X}_i/X_i)	Parâmetro de fissuração máximo (máx. δ/μ) em cm			
	Aço liso 37 CA ($\sigma_e = 2.400$)	Aço liso 50 CA ($\sigma_e = 3.000$)	Aço torcido ($\sigma_e = 4.000$)	Aço torcido CA-T50, com mossas ou sa- liências ($\sigma_e = 5.000$)
2/3	192(187)	133(125)	133(125)	133(100)
0,70	206(200)	142(131)	143(137)	143(120)
0,75	237(222)	165(152)	165(167)	165(167)
0,85	310(270)	215(192)	215(225)	215(260)

Obs.: Os números fora dos parêntesis correspondem à fórmula (5.6.2), e os números entre parêntesis à fórmula (5.6.1) critério de Ferry Borges e Arga e Lima.

5.7 — A segunda condição relativa à segurança contra fissuração nociva, em serviço, das regiões correspondentes às rótula plásticas, que acabamos de sugerir, leva a dedicar atenção especial à armadura dessas regiões. A fim de atender às limitações indicadas para o parâmetro de fissuração δ/μ , essas armaduras deverão ser constituídas em geral por barras de pequeno diâmetro, muito bem distribuídas. Uma solução que nos parece interessante é a combinação de barras normais e malhas muito finas. Neste caso o “diâmetro equivalente” a considerar é igual a 4 vezes o quociente da seção transversal total da armadura pelo seu perímetro total. Outra medida, sugerida também por vários pesquisadores, como Baker e Chan, consiste em realizar cintamento da zona de compressão, a fim de aumentar a capacidade de encurtamento do concreto comprimido. Esta medida nada tem a ver com a segurança contra fissuração nociva, e tem em vista apenas aumentar a capacidade de rotação da rótula plástica. Acreditamos que em geral o cintamento só será útil ou necessário nas rótulas totalmente comprimidas (tipo B), como as que se formam nos topos ou nas bases das colunas. Nestes casos o cintamento envolverá toda a seção transversal, e é de execução fácil. Nas rótulas das peças fletidas estamos convencidos de que, na maio-



ria dos casos, a única medida especial a tomar é a adoção de armadura de tração constituída por barras de pequeno diâmetro e bem distribuídas.

6 — CÁLCULO DAS ROTAÇÕES DAS RÓTULAS PLÁSTICAS

6.1 — O cálculo das estruturas hiperestáticas na fase plástica se baseia no fato de que o colapso se dá quando se forma a rótula plástica ($n + 1$), sendo n o grau de hiperestaticidade. A.L.L. Baker toma como estado de referência aquele que precede imediatamente o colapso. Nesse momento a rótula plástica, que designamos ($n + 1$) ainda não começou a se deformar, e as deformações da estrutura podem ser calculadas como se ela não existisse. Essa concepção é também aplicada às estruturas metálicas, quando se trata de determinar as suas deformações (vide o capítulo 4, item 4.4 a 4.6 do livro “Plastic Analysis of Structures”, de Hodge). (ref. 2).

6.2 — No método de Baker considera-se assim que, num sistema hiperestático de grau n , formam-se n rótulas plásticas. O sistema se torna assim estáticamente determinado, pois são conhecidos os momentos fletores em n pontos. Nos trechos entre as rótulas plásticas os esforços são calculados como em sistemas isostáticos, e as deformações são calculadas pela teoria elástica. É fácil assim calcular a rotação total de cada rótula plástica. A localização das rótulas plásticas corresponde às seções em que se verificariam os momentos fletores máximos, num cálculo elástico, e nos casos mais simples ela é imediata. Os momentos de plastificação \bar{X}_i são arbitrados, dentro de certos limites, definidos pelas condições estabelecidas a seguir:

6.2.1 — As rotações θ das rótulas plásticas devem corresponder a um trabalho positivo dos momentos plásticos \bar{X}_i : um resultado contrário seria absurdo, e indicaria que a localização das rótulas plásticas foi errônea. Quando se adotam as convenções de sinais usuais na resistência dos materiais, o sinal de θ é o mesmo de \bar{X}_i .

6.2.2 — As rotações das rótulas plásticas deverão ser inferiores à capacidade máxima θ_{max} de rotação definida no item 4.

6.2.3 — Sob a ação das cargas de serviço não deve haver fissuração nociva, obedecendo-se às duas condições expostas no item 5.



Si essas condições não forem satisfeitas pelos primeiros valores de \bar{X}_i arbitrados, êstes devem ser reajustados, devendo repetir-se a operação até que todos os valores de \bar{X}_i sejam satisfatórios. Uma vez terminada esta operação, as armaduras dos trechos situados entre as rótulas plásticas são dimensionadas de acôrdo com os diagramas de momentos decorrentes (diagramas isostáticos partindo das “linhas de fechamento” definidas pelos valores finais dos \bar{X}_i).

6.3 — Baker em seu livro apresenta o seguinte esquema de cálculo:

sejam δ_{ii} a rotação relativa das extremidades i dos tramos adjacentes à rótula plástica i , sob a ação de momentos iguais a 1, atuando em i , no mesmo sentido de \bar{X}_i .

δ_{ij} a rotação da extremidade j do tramo ij , sob a ação de momento igual a 1, atuando em i na direção de \bar{X}_i .

δ_{i0} a rotação relativa das extremidades i dos tramos adjacentes à rótula plástica i , sob a ação das cargas multiplicadas pelos coeficientes de segurança (o sentido positivo das rotações em i é sempre o de \bar{X}_i).

A teoria elástica forneceria o sistema de equações

$$\begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} + \dots &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} + \dots &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

No cálculo plástico os segundos termos não serão nulos, pois os \bar{X}_i arbitrados são diferentes dos X_i do cálculo clássico. O sistema (6.3.1) se transforma então no seguinte:

$$\begin{aligned} \delta_{10} + \bar{X}_1 \delta_{11} + \bar{X}_2 \delta_{21} + \dots &= -\theta_1 \\ \delta_{20} + \bar{X}_1 \delta_{12} + \bar{X}_2 \delta_{22} + \dots &= -\theta_2 \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Em geral os \bar{X}_1 têm sinal positivo, e os δ_{i0} sinal negativo; neste caso, os θ_i , que devem ter sempre o mesmo sinal que \bar{X}_i , serão também positivos. No sistema (6.3.2) os \bar{X}_i não são mais incógnitas a determinar, são valores arbitrados. As equações servem para o cálculo dos θ_i , a fim de verificar-se si são satisfeitas as condições (6.2.1) e (6.2.2). Para verificar a condição (6.2.3) é necessário um cálculo elástico aproximado, que poderá ser feito através do sistema (6.3.1), por iteração, ou por outros métodos, como o método de Cross. É



interessante salientar aqui que a solução elástica clássica é uma das soluções particulares da nova teoria, e que não há nenhuma inconveniência em fazer o cálculo elástico dos hiperestáticos e em seguida, o dimensionamento das seções na ruptura.

6.4 — A apresentação esquemática de Baker, que acabamos de expor, não é sempre a mais adequada. Adapta-se muito bem ao cálculo das vigas contínuas, mas em estruturas reticuladas com nós deslocáveis ela se modifica. Trata-se no entanto de problema relativamente simples: conhecidos os momentos em n seções de um sistema hiperestático de grau n , tornado assim isostático, calcular as rotações relativas das partes das barras situadas de um e outro lado de cada dessas seções nas quais são admitidas as rótulas plásticas.

6.5 — Afim de verificar até que ponto a nova teoria é aplicável ao concreto armado, estudemos um caso simples: uma viga contínua de muitos tramos iguais, com carga uniformemente distribuída. Os vãos internos dessa viga contínua se comportam exatamente como uma viga bi-engastada. Seja

$$M_0 = (\nu q l^2)/8$$

o momento fletor isostático, isto é, o momento máximo em viga simples de vão igual, produzido pelas cargas multiplicadas pelo coeficiente de segurança.

Temos então, como $\bar{X}_i = \bar{X}_j = \bar{X}$, e supondo infinito o número de tramos:

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \delta_{jj} = \frac{2l}{3(EJ)} \\ \delta_{ij} &= \delta_{ji} = \frac{l}{6(EJ)} \\ \delta_{i0} &= \delta_{j0} = -\frac{2M_0 l}{3(EJ)} \\ (6.5.1) \quad \theta &= \frac{2M_0 l}{3(EJ)} - \frac{\bar{X} l}{(EJ)} \end{aligned}$$

Num cálculo elástico teríamos, para $\theta = 0$

$$(6.5.2) \quad X = 2/3 (M_0) = (\nu q l^2)/12$$

Arbitraremos o momento de plastificação em

$$(6.5.3.) \quad \bar{X} = 1/2 (M_0) = (\nu q l^2)/16$$



Nesta hipótese temos

$$(6.5.4) \quad \bar{X} = 3/4 X \leq 2/3 X$$

Está satisfeita assim a condição (5.2.3.).

A rotação da rótula plástica será:

$$(6.5.5) \quad \theta = \frac{\bar{X}l}{3(EJ)}$$

No caso de viga contínua de apenas 4 tramos iguais, um dos exemplos escolhidos por Baker, o coeficiente de (EJ) no denominador, sempre fazendo $\bar{X} = 1/2 (M_0)$, é igual a 2 nas rótulas correspondentes ao segundo e ao quarto apoio, e 3 no apoio central. Em geral teremos $\theta = \alpha \frac{\bar{X}l}{(EJ)}$, sendo α um coeficiente numérico, função dos característicos da estrutura.

6.6 — Para verificar si θ satisfaz à condição (4.6.6.).

$$\theta \leq \frac{10^{-3}}{x/h}$$

é conveniente colocar a (6.5.5) sob a forma

$$(6.6.1) \quad \frac{\theta}{\bar{X}/(EJ)} = \frac{l}{3}$$

ou, de um modo geral,

$$\frac{\theta}{\bar{X}/(EJ)} = \alpha l$$

O momento de plastificação \bar{X} é precisamente o momento M_R para o qual a peça deve ser dimensionada, tanto sôbre o apoio como no meio do vão, pois fizemos $\bar{X} = 1/2 (M_0)$.

No quadro 6.6.2 apresentamos os valores de $\frac{\theta_{\max.}}{M_R/(EJ)_{\text{medio}}}$ para várias taxas de armadura, e dois tipos de aço. (Essa relação é um índice de grau de aplicabilidade da teoria plástica ao concreto armado). A condição (6.6.1) só será verificada, como é fácil ver, quando a relação l/h , entre o vão e a altura útil, fôr inferior a 3 vêzes o coeficiente numérico da última coluna dêsse quadro.

$$(6.6.3) \quad l/h \leq 3 \left(\frac{\theta_{\max.}}{M_R/(EJ)_{\text{medio}}} \right) / h$$



QUADRO 6.6.2

Taxa de armadura μ	a/h	$(EJ)_{\text{medio}}$	M_R	$M_R/(EJ)_{\text{medio}}$	θ_{max}	$\frac{\theta_{\text{max}}}{M_R/(EJ)_{\text{medio}}}$	
$\sigma_e = 2\,5000 \text{ kg/cm}^2$	3,0 %	0,500	$1,22 \cdot \frac{bh^3 \cdot E_c}{12}$	$0,375 bh^2 \sigma_R$	$1,98 \cdot \frac{10^{-3}}{h}$	$2 \cdot 10^{-3}$	1,02 h
	2,0 %	0,333	0,96 "	0,278 "	1,86 "	$3 \cdot 10^{-3}$	1,61 h
	1,5 %	0,250	0,84 "	0,219 "	1,67 "	$4 \cdot 10^{-3}$	2,40 h
	1,0 %	0,167	0,71 "	0,153 "	1,39 "	$6 \cdot 10^{-3}$	4,32 h
	0,75 %	0,125	0,65 "	0,127 "	1,26 "	$8 \cdot 10^{-3}$	6,35 h
	0,50 %	0,083	0,56 "	0,083 "	0,92 "	$10 \cdot 10^{-3}$	10,90 h
	0,375%	0,062	0,52 "	0,062 "	0,90 "	$10 \cdot 10^{-2}$	11,10 h
$\sigma_e = 5\,000 \text{ kg/cm}^2$	0,75 %	0,250	0,65 "	0,219 "	2,17 "	$4 \cdot 10^{-3}$	1,84 h
	0,50 %	0,167	0,56 "	0,153 "	1,77 "	$6 \cdot 10^{-3}$	3,39 h
	0,375%	0,127	0,52 "	0,127 "	1,58 "	$8 \cdot 10^{-3}$	5,06 h
	0,250%	0,080	0,47 "	0,080 "	1,10 "	$10 \cdot 10^{-3}$	9,10 h
	0,182%	0,062	0,45 "	0,072 "	1,03 "	$10 \cdot 10^{-3}$	9,70 h

Obs.: 1) $(EJ)_{\text{medio}} = \frac{(EJ)_I + (EJ)_{II}}{2}$

2) $E_c = 280\,000 \text{ kg/cm}^2$

3) $\sigma_R = 150 \text{ kg/cm}^2$

4) $h = 0,95 d$

5) θ_{max} dado por (4.6.6): rótulas sôbre apoios de vigas contínuas

$1/3 =$



ou, de um modo geral,

$$l/h \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\theta_{\max.}}{M_R/(EJ)_{\text{medio}}} \right) / h$$

Se l/h for por exemplo igual a 10, a condição (4.6.6) só será satisfeita nas vigas armadas com aço comum ($\sigma_e = 2.500 \text{ kg/cm}^2$) em que a taxa de armadura for inferior ou igual a 1,25%, ou nas vigas armadas com aço especial ($\sigma_e = 5.000 \text{ kg/cm}^2$) em que a taxa de armadura for inferior ou igual a 0,5%. Nas vigas mais altas, com l/h igual a 5, as taxas de armadura poderão ser maiores (cerca de 2% nas vigas armadas com aço comum, ou 0,7% nas armaduras com aço especial). Se fossem admitidos valores de θ_{\max} superiores ao “valor seguro” de Baker, a restrição relativa ao valor máximo de l/h seria menos severa. ⁽¹⁾

6.7 — Os cálculos feitos no item anterior indicam que, mesmo no seu estado atual, o cálculo hiperestático plástico já pode ser aplicado ao concreto armado, desde que as peças não sejam muito fortemente armadas, e que a relação l/h não seja muito grande.

7 — APLICAÇÃO ÀS FUNDAÇÕES DE CONCRETO ARMADO

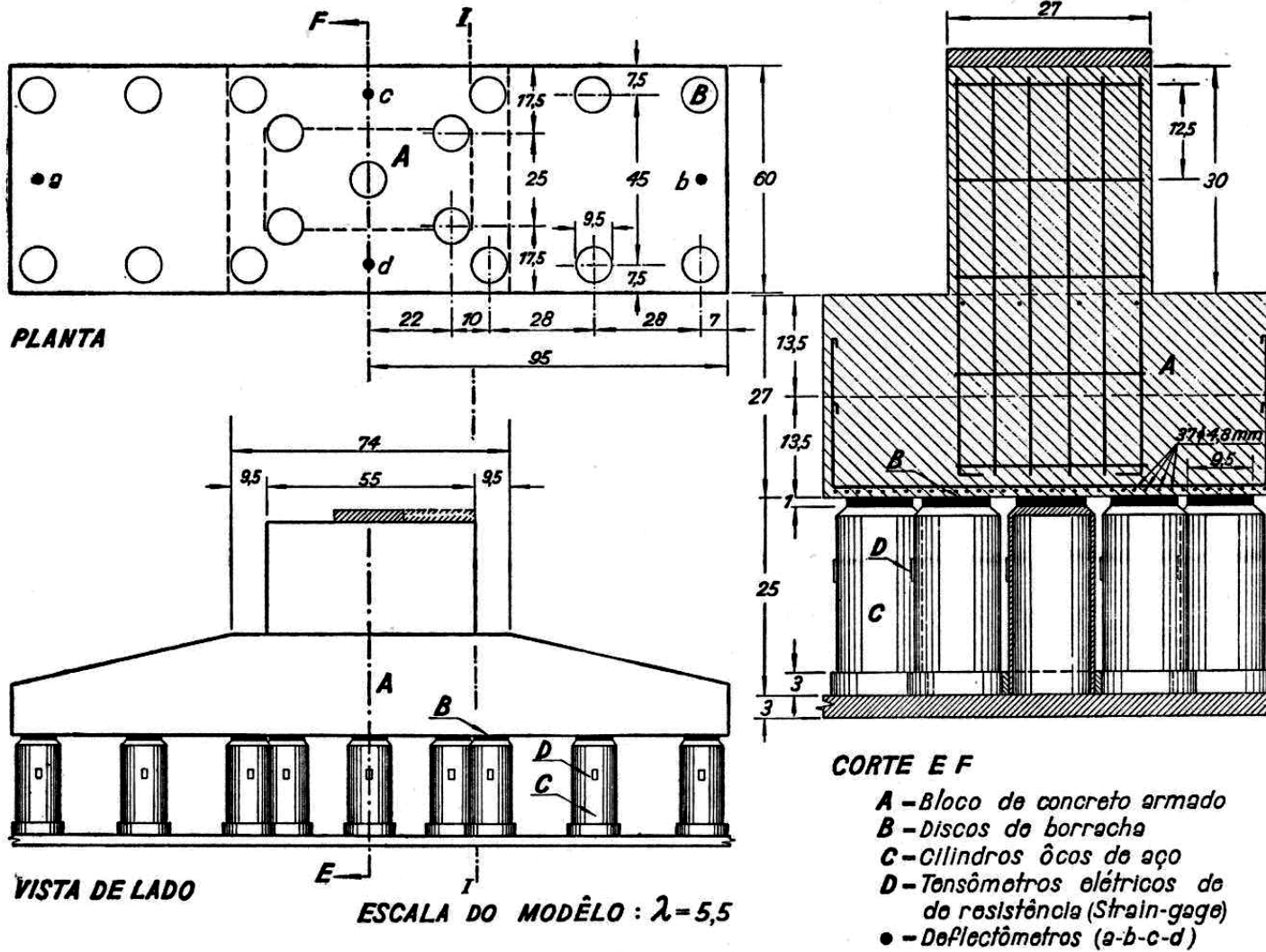
7.1 — Antes de encerrar esta conferência, pedimos permissão para apresentar algumas conclusões interessantes que extraímos de ensaios de modelos reduzidos de sapatas sobre estacas. Todos os resultados desses ensaios estão claramente expostos nas figuras 4 a 11, e nos dispensamos de descrevê-los pormenorizadamente.

7.2 — Nas fundações as reações do terreno, ou das estacas, dependem das deformações da estrutura. Surge assim uma nova e apreciável capacidade de adaptação, que se vem somar àquela que decorre da formação de rótulas plásticas. A estrutura pode assumir o aspecto de um mecanismo, sem chegar ao colapso, pois está continuamente amparada pelo terreno, ou pelas estacas. As pressões sobre o terreno, ou as reações das estacas, sofrem contínua redistribuição, à proporção que a estrutura se deforma, principalmente depois que surgem rótulas plásticas. O colapso só se dará

⁽¹⁾ Na obra fundamental de Baker, ref. 21, encontram-se fórmulas e ábacos que permitem o cálculo aproximado do coeficiente numérico α , de (6.5.5), inclusive nos casos de estruturas com nós deslocáveis e ação do vento (Cap. V e fig. 32). Como Baker exprime θ em função de M_o , em lugar de \bar{X} , o coeficiente α é igual ao dôbro do valor aí indicado (fórmula 9).



817.



ESTRUTURA - Nº 31

Fig. 4



ESTRUTURA - Nº 31

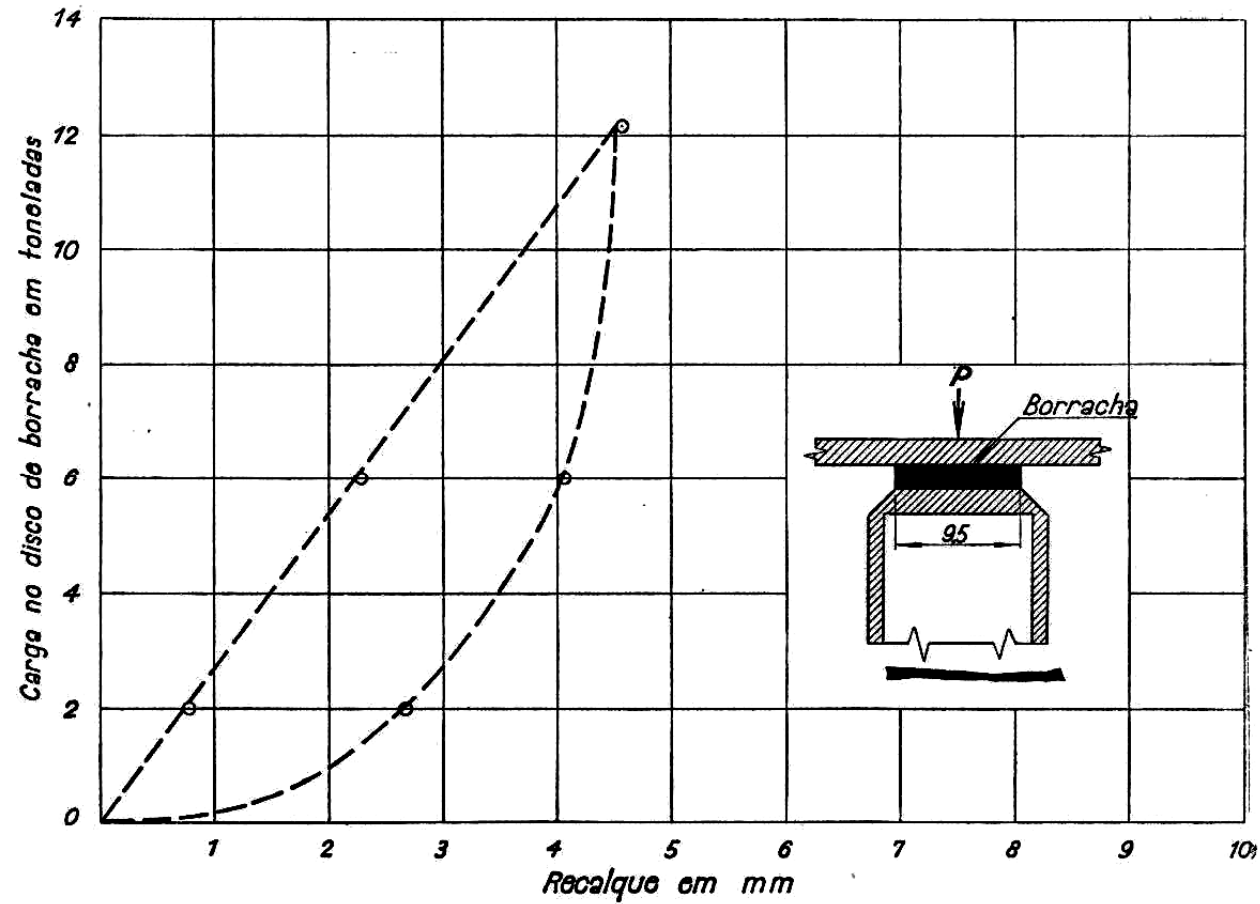
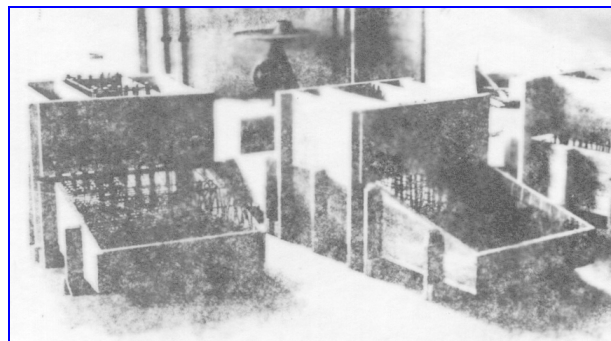
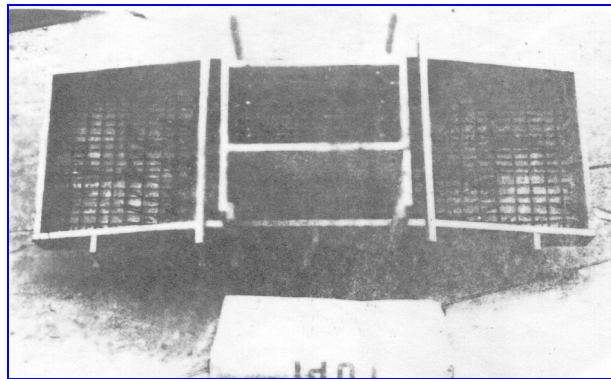


Fig. 5



INT - Instituto Nacional de Tecnologia - Ensaio de blocos - 1959



Blocos ensaiados



Prof. Lobo Carneiro

(Fotos adicionadas ao artigo original)

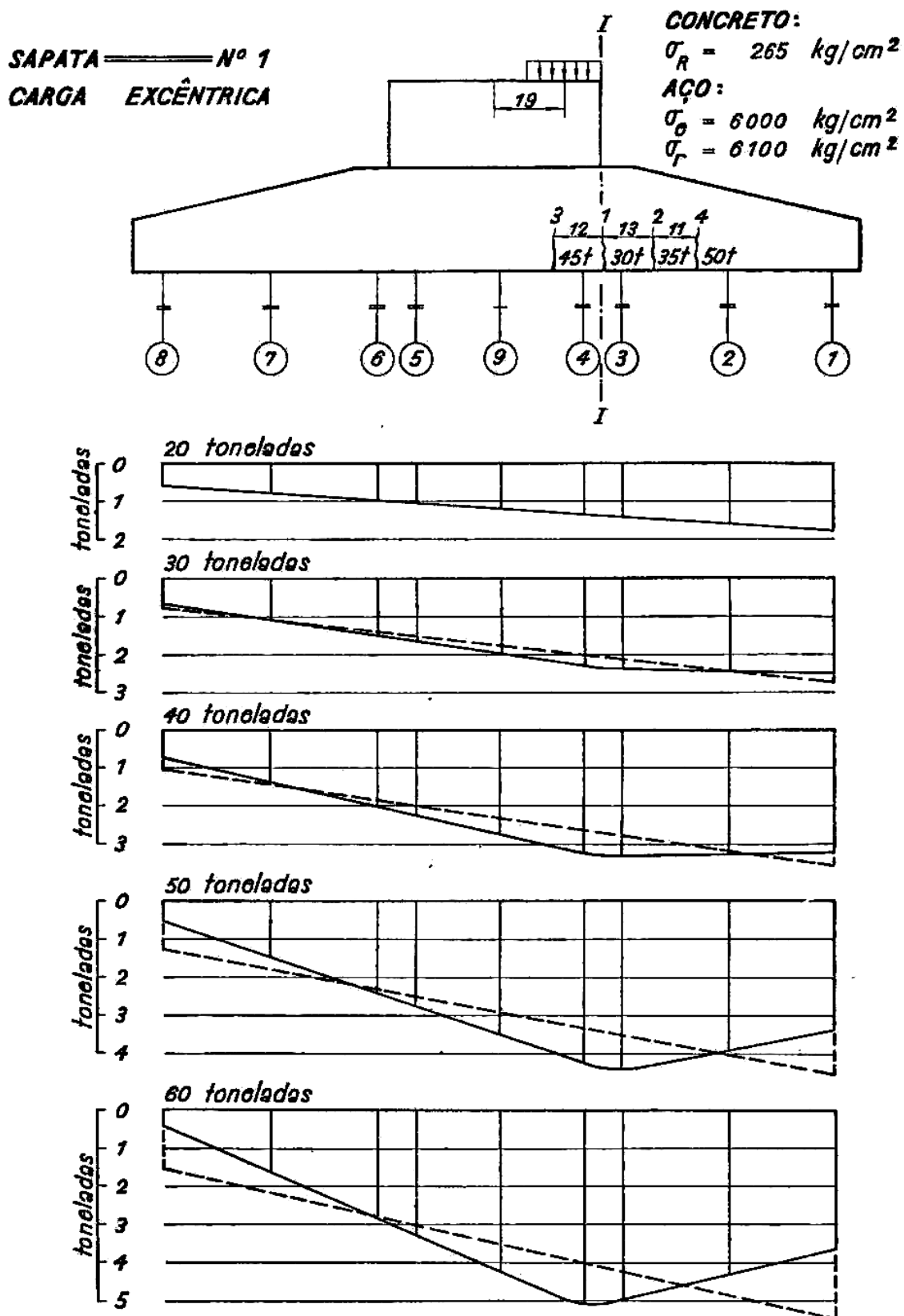


Fig. 6

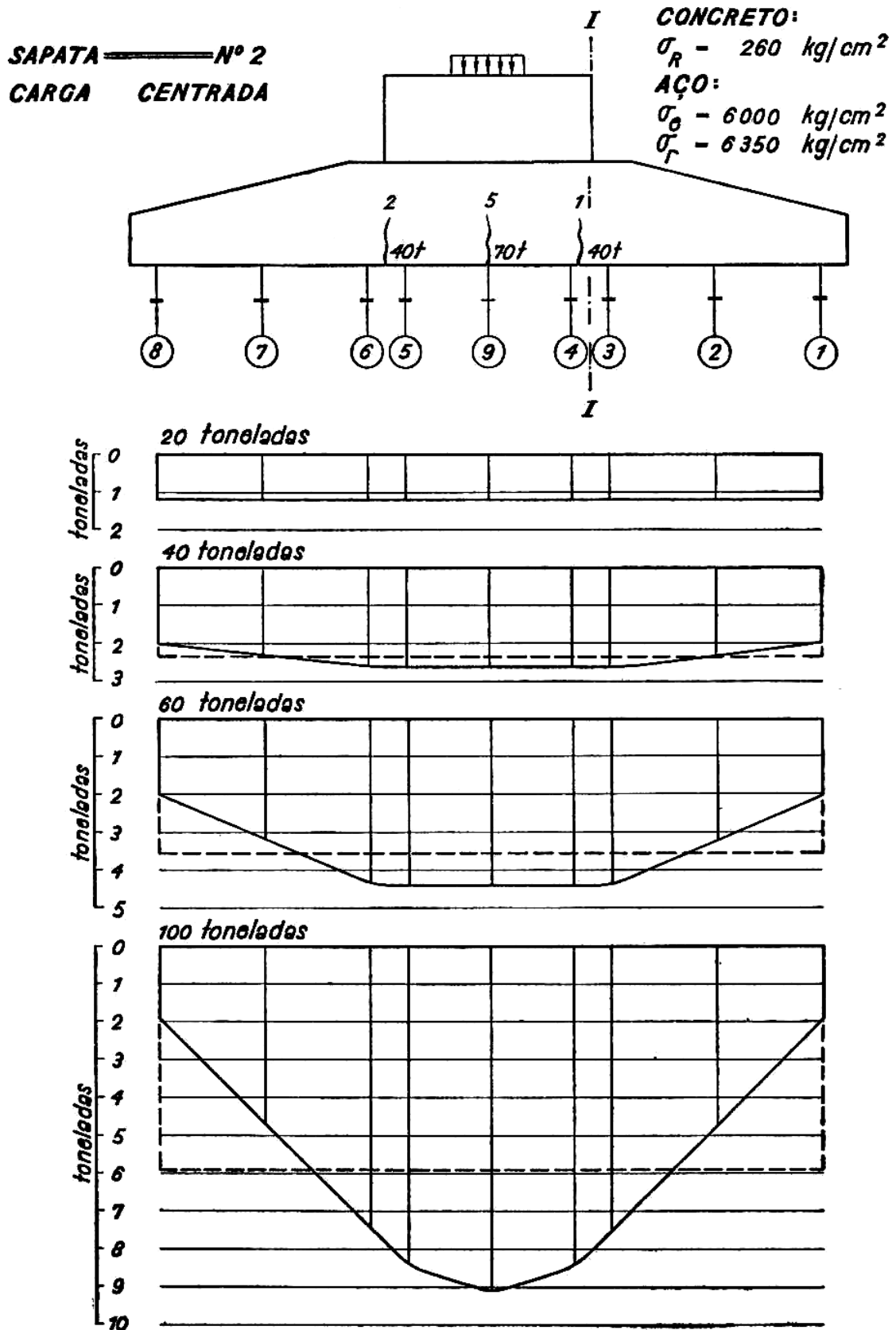


Fig. 7

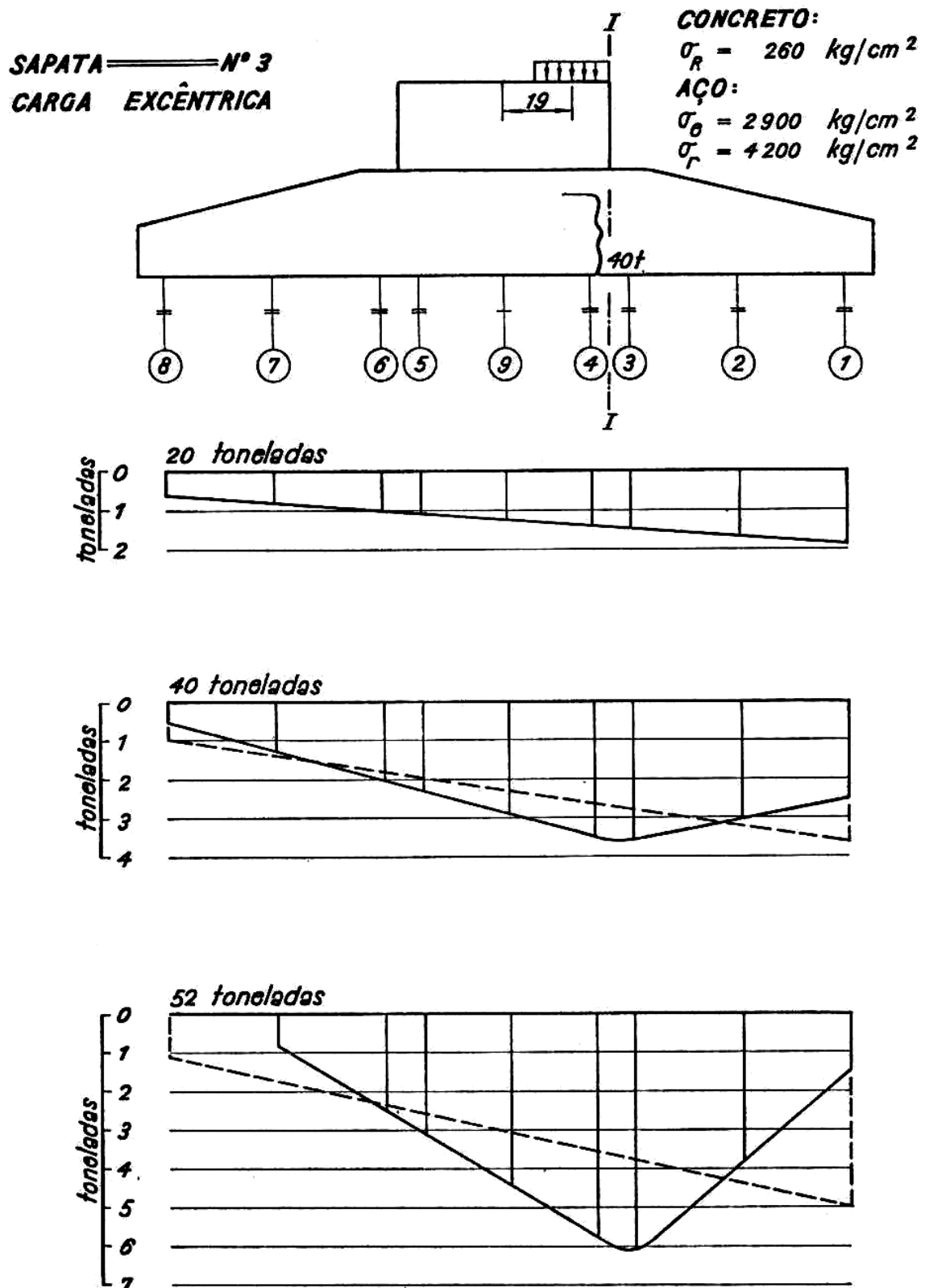
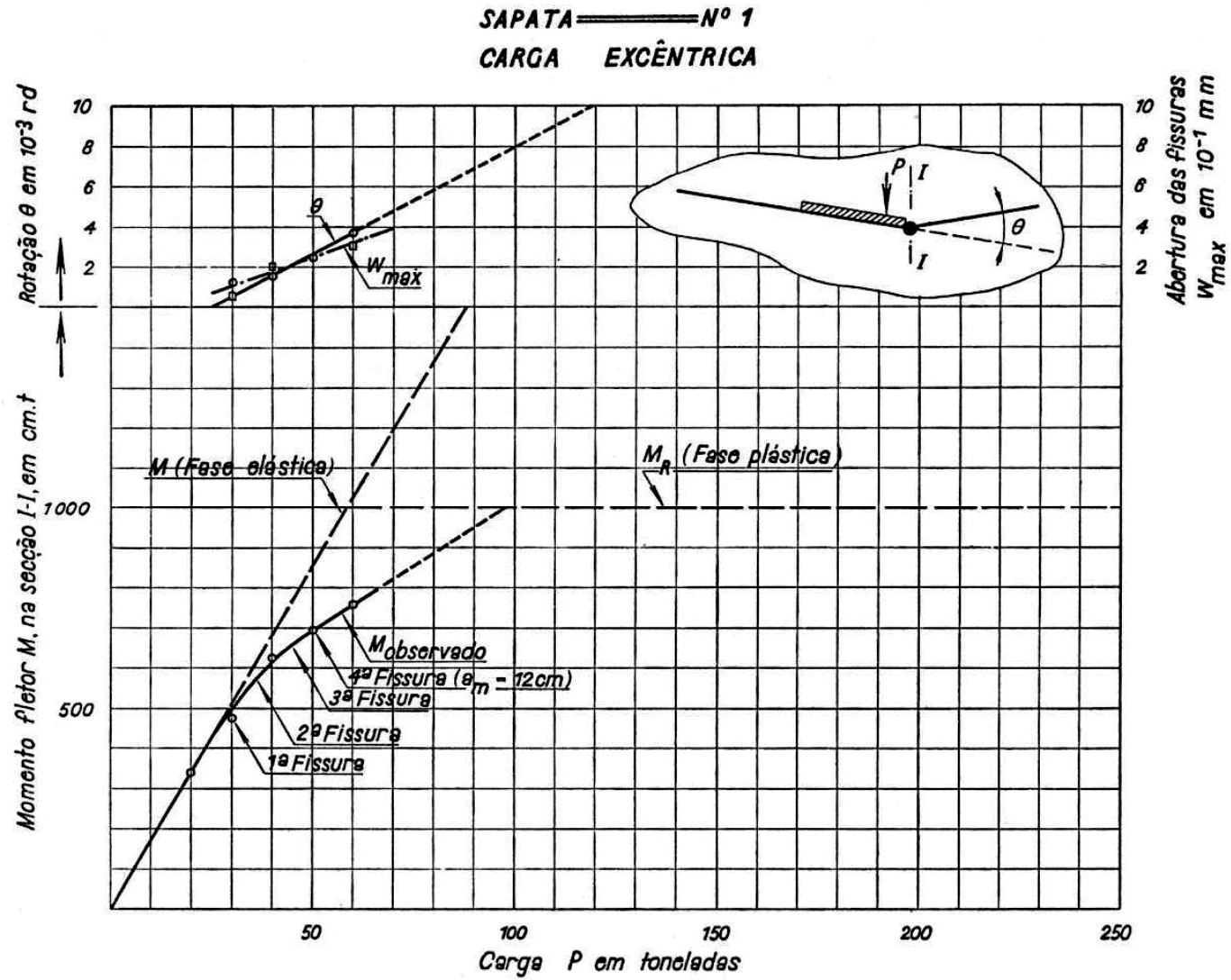


Fig. 8



ESTRUTURA - Nº 31

493



Abertura das fissuras
 W_{max} em 10^{-1} mm

Fig. 9



484

ESTRUTURA - Nº 31

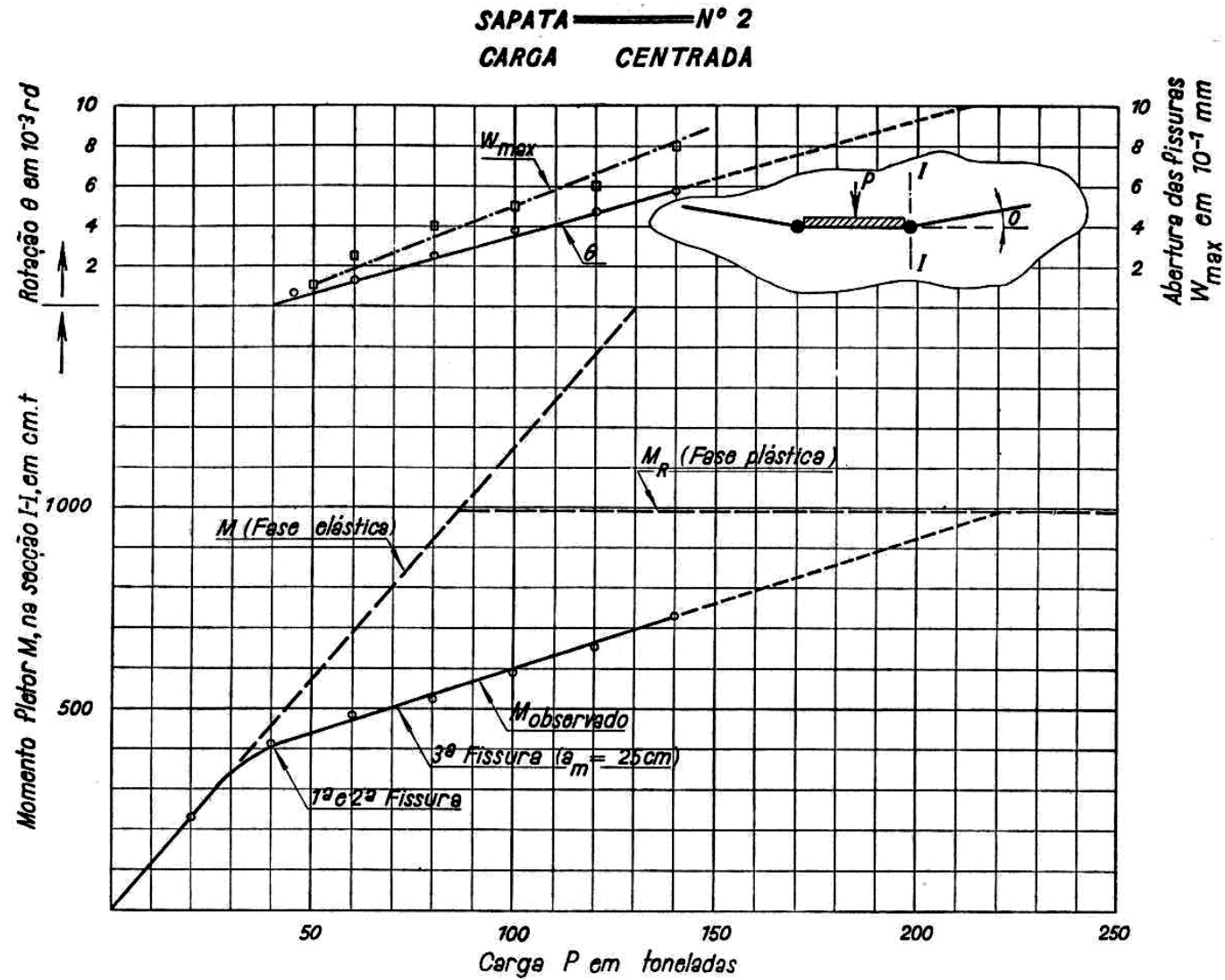


Fig. 10



ESTRUTURA - Nº 31

485

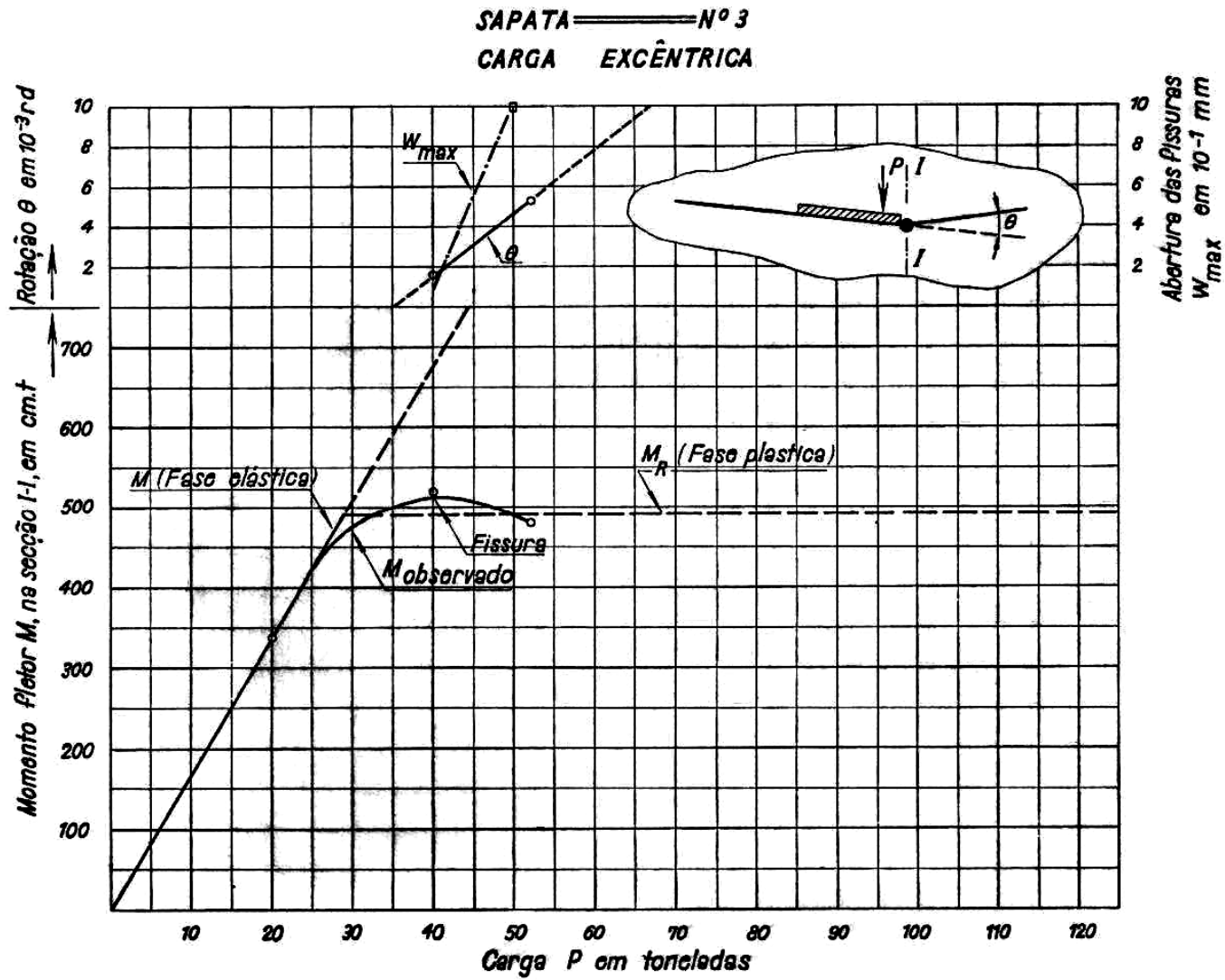


Fig. 11



quando fôr superada a resistência do terreno ou das estacas, ou quando fôr atingida a capacidade de rotação de alguma das rótulas plásticas que se formaram. Surge assim a possibilidade de estabelecer novos métodos de cálculo da distribuição das reações de terreno ou das estacas, métodos êstes baseados na fase plástica.

7.3 — Imaginemos por exemplo uma sapata sôbre estacas, formando de cada lado da base da coluna como que dois balanços. As reações das estacas podem ser supostas proporcionais aos seus recalques, se as estacas têm as suas pontas apoiadas em terreno muito firme, ou em rocha, pois nestes casos predominará nesses recalques a parcela correspondente ao encurtamento elástico da própria estaca.

Se a sapata é bastante rígida, a “redistribuição” devida ao efeito clássico de “viga elástica sôbre apoios elásticos” é muito pequena. Era êste o caso das sapatas cujos modelos foram por nós ensaiados. Quando a carga cresce, surge uma zona fissurada muito limitada, no engaste de cada balanço, zona esta que depois se transforma em rótula plástica. No caso de carga excêntrica, só se forma uma rótula plástica, do lado do balanço mais solicitado.

7.4 — A rotação das rótulas plásticas tem como efeito aliviar as estacas nas extremidades dos balanços, e aumentar as reações centrais. Êsse efeito de concentração é cada vez mais acentuado, à medida que progride a deformação da rótula plástica. A carga total aumenta, mas o momento fletor na seção correspondente à rótula plástica se mantém aproximadamente constante, em consequência da modificação da lei de distribuição das reações das estacas. Se a capacidade de rotação da rótula plástica é suficiente, a ruptura só se dará quando fôr ultrapassada a resistência de alguma das estacas centrais. Êsse o mecanismo essencial verificado nos ensaios de modelos que realizamos. O interessante é que, no caso de carga excêntrica (esfôrço de compressão e momentos, atuando sôbre a sapata), é possível aplicar uma carga total bem superior à carga dada pelo cálculo clássico, sem que em nenhuma estaca seja ultrapassada a carga limite. Isso se deve à modificação do diagrama de reações das estacas, com maior concentração no centro, como se pode ver nos desenhos. O novo método de cálculo, que deduzimos dos resultados dos ensaios, possibilita nesse caso (carga excêntrica) economia apreciável; é indispensável no entanto evitar que haja fis-



suração nociva em serviço, segundo as regras expostas na conferência, e com o auxílio do cálculo clássico.

7.5 — Creio não ser necessário entrar em maiores minúcias. Três condições da estática — uma de forças (verticais) e duas de momentos (momento à esquerda e à direita da rótula plástica), e mais a lei linear que liga a reação da estaca ao recalque, são suficientes para determinar essas reações em função da rotação da rótula plástica. A sapata pode ser considerada rígida, excepto na rótula plástica; com esta hipótese simplificadora, os diagramas das reações são trapézios com ordenada comum sobre a rótula.

7.6 — Nos ensaios foram utilizados tensômetros elétricos de resistência para determinar as reações sobre as estacas. Estas foram substituídas por cilindros metálicos ocos, com discos de borracha sobrepostos, a fim de reproduzir, respeitadas as condições de semelhança, a sua elasticidade.

8 — ALGUMAS CONCLUSÕES

8.1 — O objetivo de trabalho que elaboramos para servir de tema a esta conferência não é formular regras prontas e acabadas, ou emitir conclusões definitivas. Desejávamos apenas verificar se a nova teoria, em seu estado atual, já pode ser utilizada, pelo menos de modo parcial, no cálculo das estruturas hiperestáticas de concreto. Desejávamos também, através dessa análise, chegar a algumas indicações sobre o rumo que devem tomar as pesquisas experimentais, a fim de que essa teoria possa ser aperfeiçoada, eliminando-se as dúvidas e incertezas ainda existentes.

8.2 — Acreditamos ter demonstrado que a nova teoria já pode ser utilizada parcialmente na prática de cálculo de concreto armado, embora através de critérios prudentes. Além da verificação de que a capacidade de rotação das rótulas plásticas não é ultrapassada, consideramos indispensável a verificação da segurança contra fissuração nociva em serviço, segundo a dupla condição descrita no item 5.

8.3 — A restrição final do item anterior torna necessário, em qualquer caso, um cálculo elástico aproximado. As estruturas seriam assim calculadas primeiramente segundo o cálculo elástico clássico. Em seguida os momentos fletores hiperestáticos seriam reduzidos de acordo com as conveniências, respeitando-se sempre os



limites máximos de afastamento em relação à teoria elástica dados no item 5, e adotando-se as precauções especiais aí também indicadas, que redundam na adoção obrigatória de armaduras de pequeno diâmetro e bem distribuídas nas regiões vizinhas das rótulas plásticas. A verificação final relativa às rotações das rótulas plásticas poderia ser dispensada em muitos casos, estabelecendo-se limites adequados para a taxa de armadura em função da relação l/h .

8.4 — Essa é, em minha opinião, a marcha a seguir, pelo menos em face do estado atual da nova teoria. Acreditamos que um de seus principais méritos é demonstrar a inutilidade e convencionalismo do cálculo elástico clássico, quando levado a extremos de rigor. Isso representará um sério golpe não pròpriamente na chamada hiperestática clássica, mas nos seus excessos e algebrismos, que atingem as raias da ingenuidade. Um cálculo elástico aproximado, seguido além disso de pequenos e convenientes “reajustamentos”, arbitrados segundo certas regras, será suficiente, na quase totalidade dos casos. Como exemplo disso, citamos Yu e Hognestad, no “Review of Limit Design for Structural Concrete”: “Foi demonstrado (na obra de Baker e seus colaboradores) que um tal estado de redistribuição de momentos-momentos iguais nos topos e nas bases das colunas — pode ser obtido” ... “Muitos engenheiros consideravam como suficiente admitir que a estrutura deformada apresenta pontos de inflexão a meia altura das colunas” ... “Agora a teoria do cálculo — limite vem provar que o julgamento intuitivo desses engenheiros era são e correto”. (ref. 3).

8.5 — Um largo e fecundo campo se abre à experimentação, graças à nova teoria. As variações da rigidez do concreto armado, nos diversos estádios, a capacidade de rotação das rótulas plásticas, o comprimento de plastificação, a influência do cintamento, da armadura de compressão, e de outras disposições construtivas — eis aí alguns dos principais fatores que devem ser investigados.

No Brasil, por exemplo, o professor Sydney M. G. dos Santos lançou a idéia da execução de “rótulas condicionadas”, projetadas especialmente, e cujo funcionamento seria assegurado por disposições construtivas adequadas. (ref. 17).

8.6 — São essas as contribuições que nos foi possível apresentar às Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil dentro



do tema escolhido. A questão está em fase de intensa movimentação, graças aos dados que são cada dia divulgados nos diversos países. É possível portanto que várias das conclusões apresentadas venham a ser modificadas ou completadas em futuro próximo.

BIBLIOGRAFIA

- 1 — "The Steel Skeleton", J. F. Baker, M. R. Horne, J. Heyman, vol. II, 1956.
- 2 — "Plastic Analysis of Structures", Philip G. Hodge, Jr., 1959.
- 3 — "Review of Limit Design for Structural Concrete", C. W. Yu and Eivind Hognestad, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, december 1958, 1878/-1/28.
- 4 — "Review of Limit Design for Structural Concrete", Discussions by Aron Zaslavsky, W. W. L. Chan, Shankat Miraz, and Henry J. Cowan, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, june 1959, 59/70.
- 5 — "Limit Design for Structural Concrete", by Alan H. Mattock, Journal of de Research and Development Laboratories, Portland Cement Association (U.S.A.), may 1959, 14/24.
- 6 — "A Plastic Theory of Design for Ordinary Reinforced and Prestressed Concrete including Moment Re-distribution in Continuous Members", A. L. L. Baker, Magazine of Concrete Research n° 2 (London), june 1949, 57/66.
- 7 — "A Plastic Design Theory for Reinforced and Prestressed Concrete Shell Roofs", A. L. L. Baker, Magazine of Concrete Research n° 4 (London), july 1950, 27/34.
- 8 — "Ultimate Strength Theory for Short Reinforced Concrete Cylindrical Shell Roofs", A. L. L. Baker, Magazine of Concrete Research n° 10 (London), july 1952, 3/8.
- 9 — "The Ultimate Strength and Deformation of Plastic Hinges in Reinforced Concrete Frameworks", W. W. L. Chan, Magazine of Concrete Research n° 21 (London), november 1955, 121/132.
- 10 — "The Ultimate Strength and Deformation of Plastic Hings in Reinforced Concrete Frameworks", Discussion by A. L. L. Baker, R. Gartner, W. W. L. Chan, Magazine of Concrete Research n° 23 (London), august 1956, 111.
- 11 — "Drehfähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbetonbau", Minoru Yamada, Beton und Stahlbetonbau, april 1958, 85/91.
- 12 — "An Experimental Investigation of the Influence of the Formation of a Plastic Hinge on the Shear Strength of a Singly Reinforced Beam", N. M. Khan and A. H. Mattock, Magazine of Concrete Research n° 25 (London), 151/156.
- 13 — "Symposium sobre Aplicaciones de la Plasticidad en el Calculo de las Estructuras de Hormigon Armado" (Argentina, 1955), "La Plasticidad del Hormigon como Factor de Proyecto y Analisis de las Estructuras", Juan F. Garcia Balado, 29/32 ("Redistribucion de los Momentos en las Estructuras de Hormigon Armado").
- 14 — "Simposium sôbre Aplicaciones de la Plasticidad en el Calculo de las Estructuras de Hormigon Armado (Buenos Aires, 1955), "Cálculo Plástico de Sistemas Estáticamente Indeterminados", Arturo Bignoli, 55/97.



- 15 — “Anais do 2º Simposio de Estruturas (Brasil, 1957), “Problemas Atuais de Engenharia Estrutural”, Carlos Furtado de Simas, e discussão por Ivo Wolff, António Alces de Noronha, Aderson M. da Rocha, Fernando L. Lobo Carneiro, Alceu Hiltner e Ferry Borges, 65/79.
- 16 — “Cálculo, no regime de ruptura, das lajes de concreto armadas em cruz”, Samuel Chamecki, (Brasil), 1948.
- 17 — “Cálculo das solicitações na fase plástica”, Sydney M. G. dos Santos, Estrutura nº 21 (Brasil), 1959, 419/427.
- 18 — “Rapport sur les travaux du Comité Européen du Béton”, Y. Saillard, Annales de l’Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, abril 1960.
- 19 — “Beton Précontraint”, Y. Guyon.
- 20 — “Teoria da Fissuração das Peças de Concreto Armado”, Fernando Luiz Lobo B. Carneiro (Brasil), Estrutura nº 26, 1960.
- 21 — “The Ultimate-Load Theory applied to The Design of Reinforced & Prestressed Concrete Frames”, A. L. L. Baker, 1956.
- 22 — “Concreto Armado”, vol. I e II, Telemaco van Langendonck.
- 23 — “Die Verwendbarkeit hochfester Stahle im Stahlbetonbau”, Bauforschung im Wohnungsbau”, p. 76/77, publicação do “Bundesministerium fur Wohnungsbau, G. Rehm, 1960 — Alemanha.
- 24 — “Étude des conditions de formation des fissures de glissement et de décohesion das les solides”, — L. P. Brice, revista “Traxaux”, 6/1954.
- 25 — “Tensile Cracks in Reinforced Concrete”, — Axel Efsen e Herbert Krenchel, revista “Ingenioeren”, 1/2/1959.
- 26 — “Berechnung von Baukonstruktionen nach den Grenzbeanspruchungen” — Keldysch, 1953, U.R.S.S.
- 27 — “Formation of Cracks in Beams with low Percantage of Reinforcement”, — J. Ferry Borges e J. Arga e Lima, 1957 — Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Portugal.
- 28 — “Resistance à la traction des bétons” — Fernando Luiz Lobo B. Carneiro e Aguinaldo Barcellos, 1949, Instituto Nacional de Tecnologia, Brasil.
- 29 — “Comentários sôbre o projeto de revisão da Norma Brasileira, NB-1 — Fernando Luiz Lobo B. Carneiro, — 2º Simpósio de Estruturas.
- 30 — “Plastic Hinging at the Intersection of Beams and Columns”, — G. C. Ernst, Journal of the American Concrete Institute, nov. 1957.

N.A.: aos participantes das 1.^{as} Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, e demais engenheiros que receberam exemplares mimeografados da conferência, comunicamos que, além de pequenas falhas tipográficas, aparece nesses exemplares de maneira incorreta a fórmula 6.6.3 da página 415 (última fórmula da pg. 38 dos exemplares mimeografados).