



ESTRUTURA

REVISTA TÉCNICA

DAS CONSTRUÇÕES



NESTE NÚMERO:

SIMPÓSIO DE PLASTICIDADE DA A.B.P.E.
CONCRETO ARMADO PROTENDIDO
EFEITOS DINÂMICOS
ESTRUTURAS DE BRASÍLIA

1961

38



SUGESTÕES PARA UMA NORMA DE CÁLCULO PLÁSTICO DE ES- TRUTURAS HIPERESTÁTICAS DE CONCRETO ARMADO

por *Fernando Luiz Lobo B. Carneiro*

— O presente trabalho foi apresentado, em 26 de maio de 1961, no “Sim-
pósio de Cálculo de Estruturas no Regime Plástico”, organizado pela Asso-
ciação Brasileira de Pontes e Estruturas (núcleo da Guanabara) e patroci-
nado pelo Departamento de Atividades Técnicas do Clube de Engenharia; e
posteriormente desenvolvido em duas palestras realizadas na Escola de En-
genharia de São Carlos, nos dias 9 e 10 de junho.

— Constitui êle a fundamentação das sugestões enviadas pelo autor ao
“Comité Européen du Béton”, relativas ao capítulo “Efeito Hiperestático da
Plasticidade”, do projeto de norma internacional de cálculo e execução de
obras de concreto armado que está sendo elaborado por aquêle Comitê, do
qual o Brasil é “membro observador”, através da Associação Brasileira de
Normas Técnicas (A.B.N.T.).

— A “comissão de Hiperestática” (Comissão XI) do “Comité Européen du
Béton”, encarregada da elaboração do referido capítulo, está constituída da
seguinte maneira, desde a reunião realizada em Monaco, em janeiro de 1961:

Prof. A.L.L. BAKER (Inglaterra), Presidente da Comissão

Y. GUYON (França)

C. BENITO (Espanha)

G. MACCHI (Itália)

C. J. LOUW (Holanda)

A. YLINEN (Finlândia)

R. DIAZ DE COSSIO (México)

C. P. SIESS (Estados Unidos).

CORREIA de ARAUJO (Portugal)

F. LEONHARDT (Alemanha)

R. S. JENKINS (Inglaterra)

C. MASSONET (Bélgica)

A. H. MATTOCK (Estados Unidos)

*Fernando L. LOBO B. CARNEIRO
(Brasil)*

— A Comissão organizou um programa internacional de ensaios, do qual
participarão os seguintes laboratórios:

Cement and Concrete Ass. (Inglaterra) Univ. of Leeds (Inglaterra)

Imperial College (Inglaterra)

Turim (Itália)

Praga (Tchecoslováquia)

C.E.B. (França)

Lisbôa (Portugal)

Madrid (Espanha)



Kingston (Canadá)
Illinois (E. Unidos)
Liège (Bélgica)

Chicago (E. Unidos)
México (México)
Inst. Nac. Tecnologia (Brasil)

— A participação brasileira nesse programa internacional de ensaios caberá ao Instituto Nacional de Tecnologia (Rio de Janeiro), em colaboração com o CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS.

— O presente trabalho compreende: 1 — uma introdução; 2 — uma exposição dos fundamentos do cálculo plástico das estruturas de concreto armado; 3 — a marcha de cálculo sugerida; 4 — O texto proposto pelo autor ao “Comité Européen du Béton”; 5 — exemplos numéricos.

1. Introdução

1.1 — A consideração do comportamento *não-elástico* do concreto armado no cálculo das estruturas compreende dois passos:

- a) cálculo da *resistência das seções transversais* (esforços internos resistentes) no *estádio III*;
- b) cálculo dos *esforços internos solicitantes, nos sistemas hiperestáticos, em regime plástico* (efeito hiperestático da plasticidade).

O 1º passo já foi incorporado à maioria das normas de cálculo de concreto armado, inclusive no Brasil, onde é prática corrente (norma brasileira NB-1).

1.2 — O 2º passo — consideração do chamado “efeito hiperestático da plasticidade”, embora já introduzido de modo muito parcial e limitado nas normas da Inglaterra, U.R.S.S. e países escandinavos, ainda não alcançou pleno amadurecimento. São necessárias novas pesquisas sistemáticas em laboratórios estruturais, inclusive para a determinação de numerosos parâmetros necessários ao cálculo. Atualmente o “Comité Européen du Béton” está coordenando um programa internacional de ensaios com êsse objetivo. Criou-se, no seio dêsse Comitê uma “Comissão de Hiperestática”, presidida pelo professor A. L. L. Baker, do “Imperial College”, de Londres. Procuraremos expor, neste trabalho, o estado atual do cálculo plástico das estruturas hiperestáticas de concreto armado, indicando a seguir uma marcha de cálculo baseada na proposta que enviamos áquele Comitê, relativa ao capítulo “Efeito Hiperestático da Plasticidade”, a ser incorporado ao projeto de norma internacional de cálculo e execução de estruturas de concreto armado, que está sendo por êle elaborado.



1.3 — Começaremos mostrando, através de um exemplo prático, algumas das diferenças fundamentais entre o cálculo plástico de estruturas hiperestáticas de aço e de concreto armado. Como se sabe, êsse cálculo já atingiu, para as estruturas de aço, um amadurecimento muito maior que para as de concreto armado. Desde os estudos iniciais dos pioneiros — Kazinczy (1914) e Maier-Leibnitz (1927) —, seguidos por Bleich e Melan, a nova teoria foi desenvolvida e sistematizada por J. F. Baker, Horne, Heyman, Prager, Greenberg, Hodge, Neal, Symonds, Beedle, pelos pesquisadores da Academia da Construção e da Arquitetura da U.R.S.S., e, entre nós, Telemaco von Langendonck e Sydney Santos, incorporando-se à “estática das construções”. Infelizmente as diferenças fundamentais a que nos referimos impedem a simples transposição dos resultados obtidos para as estruturas de aço, às estruturas de concreto armado.

2. Fundamentos do cálculo hiperestático na fase plástica e diferenças entre as estruturas de aço e as de concreto armado.

2.1 — O cálculo hiperestático na fase plástica parte do fato experimental seguinte: o diagrama momento-curvatura de uma peça fletida apresenta, em sua parte final, um trecho fracamente incli-

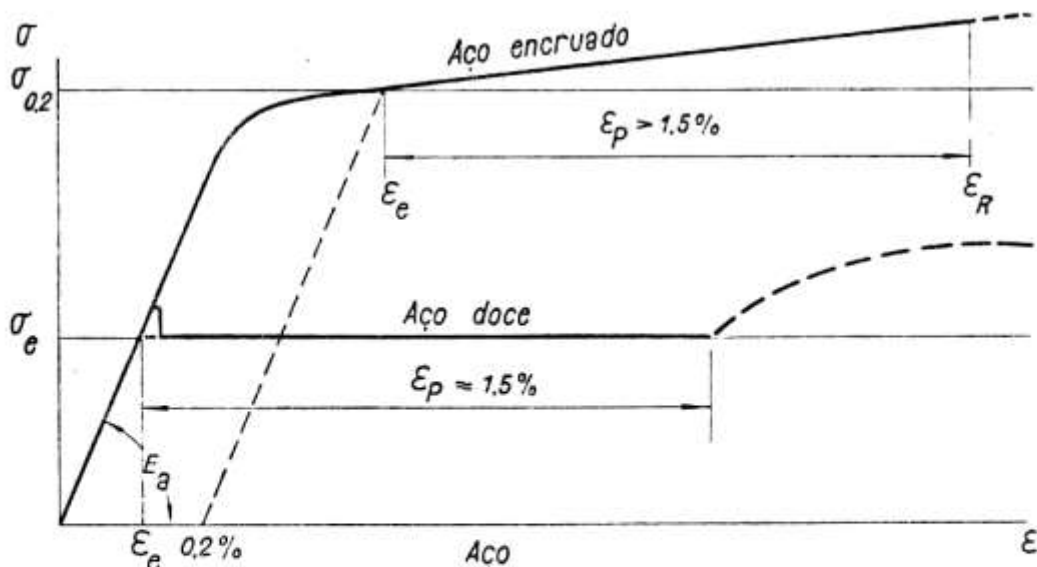


Fig. 1

nado, assimilável, para fins práticos, a um patamar horizontal extenso. Atingido o “momento fletor de plastificação” M_p , a curva-



tura da peça poderá aumentar consideravelmente, sem acréscimos sensíveis do momento-fletor (figuras 3 e 4). Essa fase — *aproximadamente plástica* — do diagrama momento-curvatura é por sua vez consequência de fases plásticas ou aproximadamente plásticas dos diagramas tensão-deformação dos materiais utilizados (figuras 1 e 2). No concreto armado verifica-se além disso a “subida da linha neutra”, no estágio III.

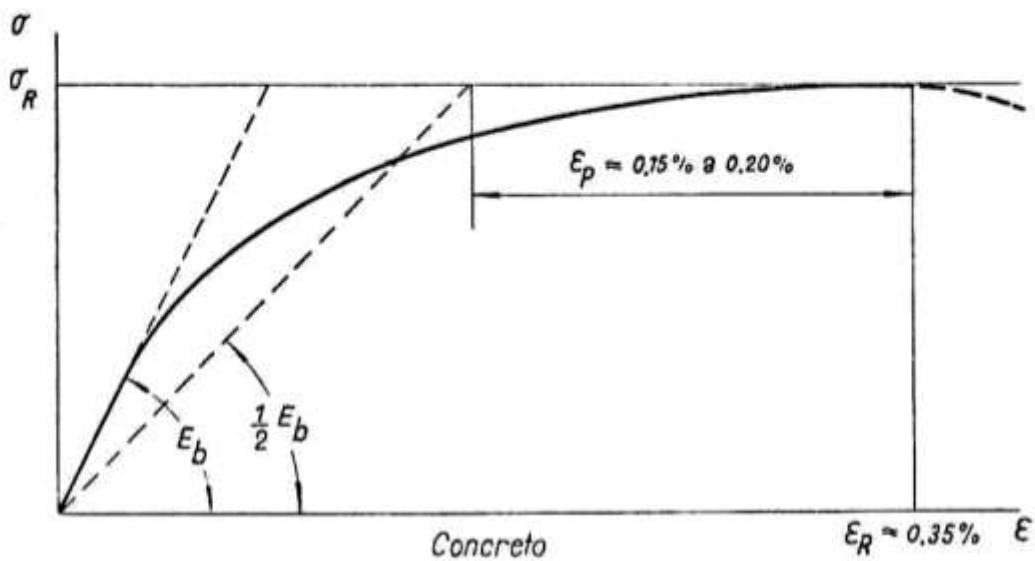


Fig. 2

2.2 — A existência do patamar horizontal ou quase-horizantal —, no diagrama momento-curvatura conduz ao conceito de *rotula plástica*: região de pequeno comprimento, nas vizinhanças de

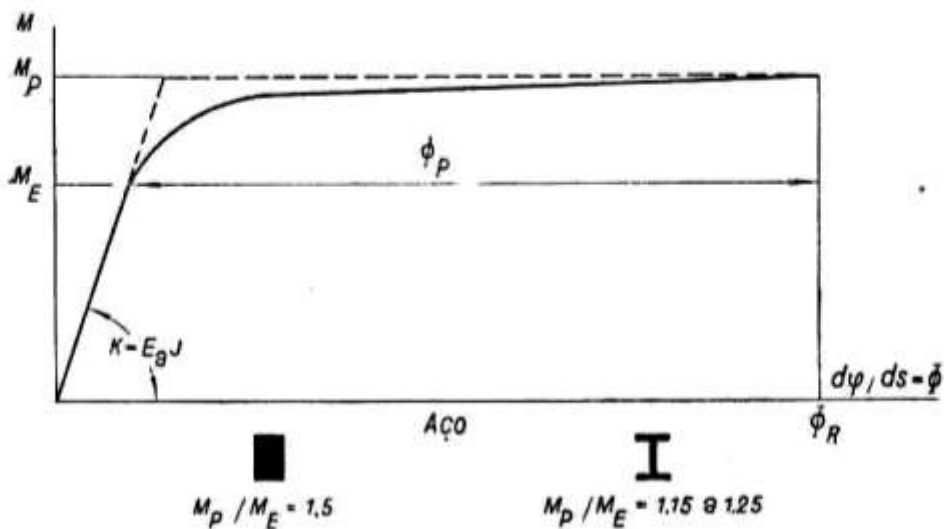


Fig. 3

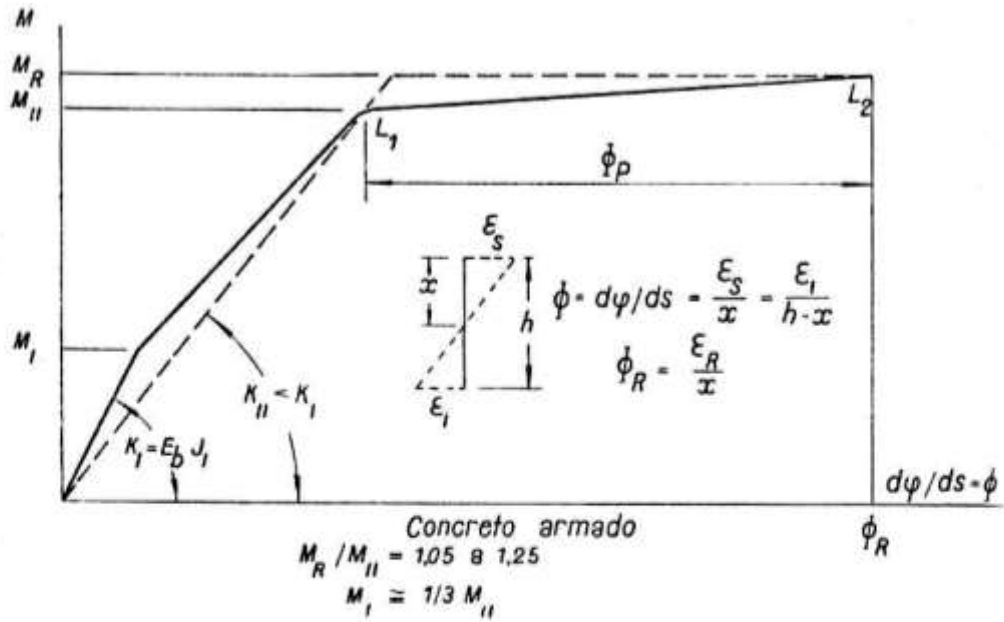


Fig. 4

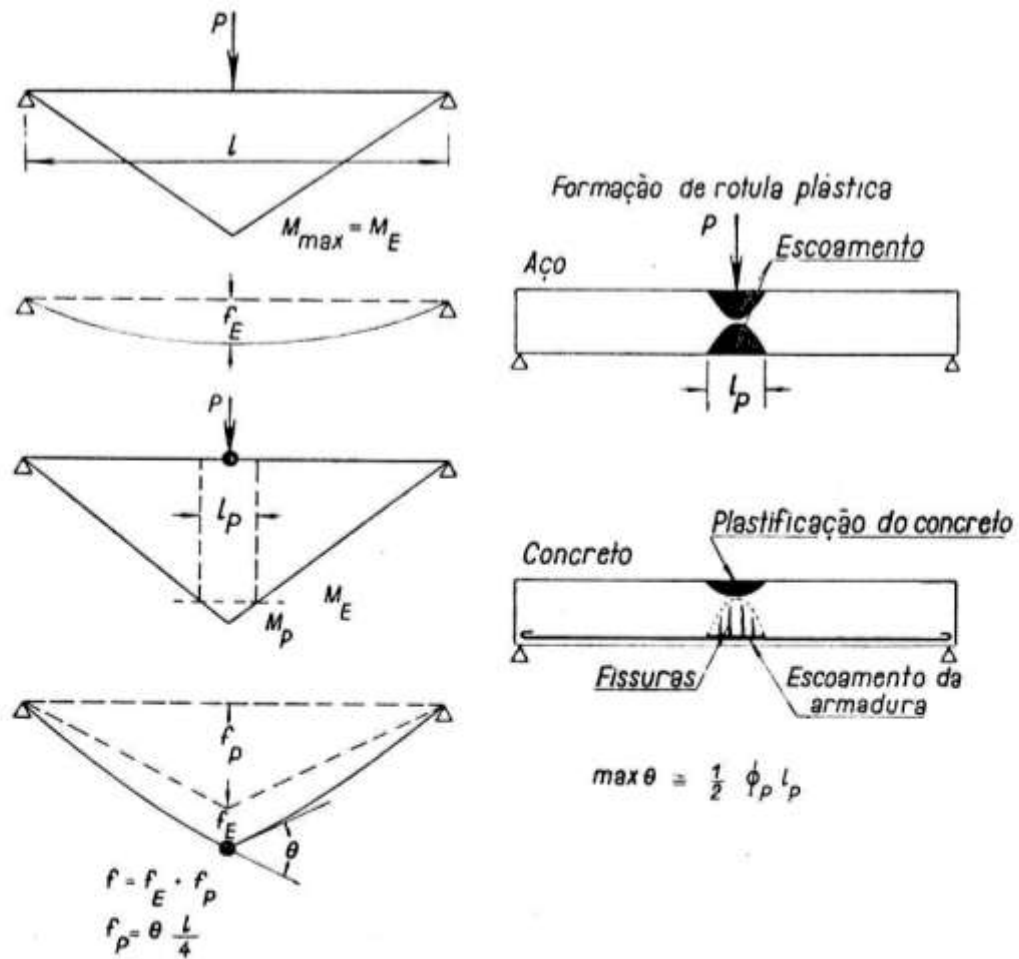


Fig. 5



uma seção de momento máximo, que entra em fase plástica ou quase-plástica quando o momento fletor atinge o valor M_p , enquanto as seções mais afastadas ainda estão na fase elástica. Nessa região verifica-se uma *grande deformação plástica*: a “*rotação da rótula plástica*”, que é o *ângulo de descontinuidade* do eixo da peça, de um e outro lado da rótula plástica. Para fins práticos supõe-se a rótula plástica concentrada numa seção transversal, embora ela tenha o comprimento finito l_p (figura 5).

2.3 — Tomemos agora, como exemplo prático, uma viga bi-engastada de aço, com seção transversal constante e carga uniforme-

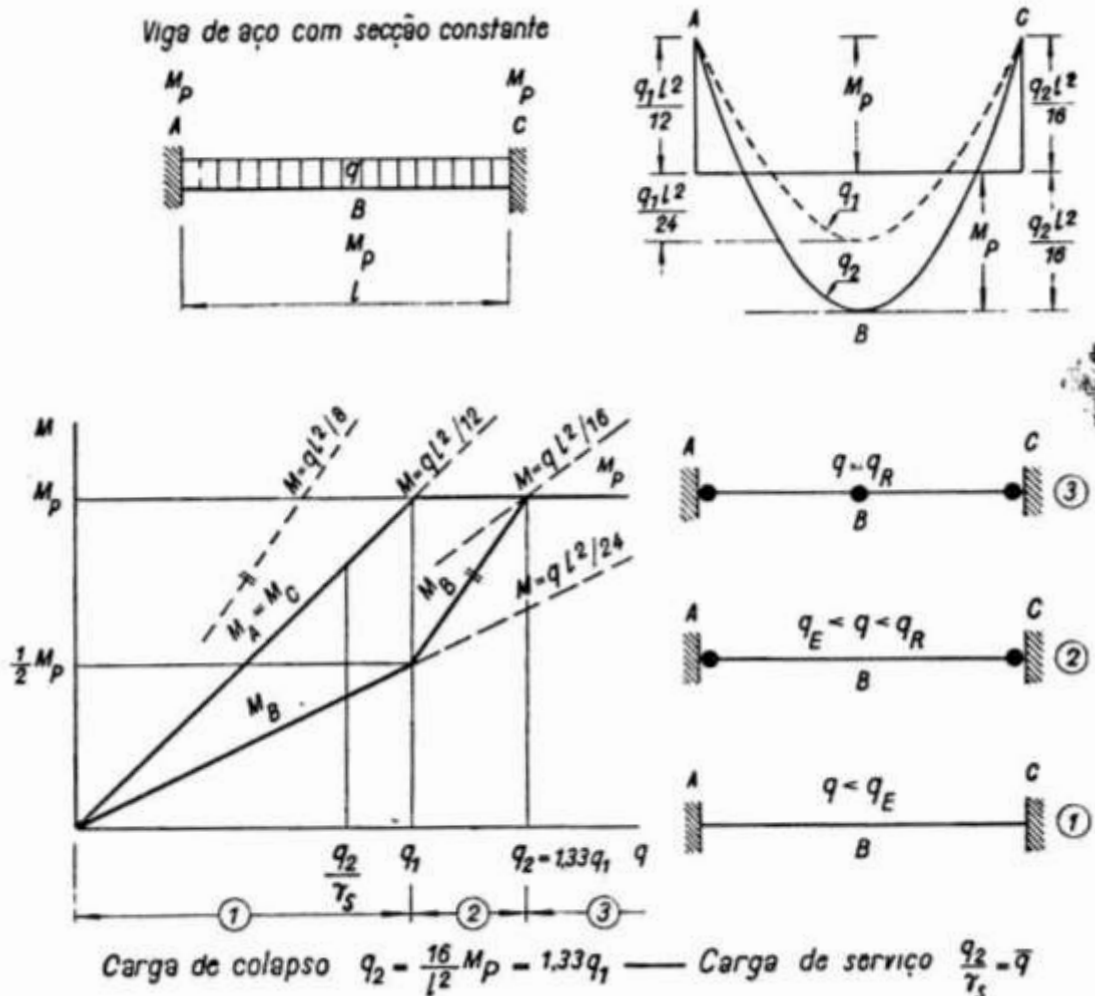


Fig. 6

memente distribuída (figura 6). Fazemos a carga q crescer gradualmente, a partir de 0:



— Inicialmente temos a *fase elástica* (designada na figura 6 como *fase 1*), na qual

$$M_A = M_C = \frac{ql^2}{12} \quad M_B = \frac{ql^2}{24} = \frac{1}{2} M_A$$

— Quando os momentos de engastamento M_A e M_C atingem o M_P (momento de plastificação), a seção no meio do vão, com momento M_B , ainda está na fase elástica. Formam-se as *duas primeiras rótulas plásticas* em A e C . Seja $q_1 = q_E$ a carga correspondente. Temos

$$M_A = M_C = M_P = \frac{q_E l^2}{12} \quad \text{e portanto } q_E = M_P \cdot \frac{12}{l^2}$$

— A viga no entanto ainda resiste. Se q continua a crescer, os momentos de engastamento M_A e M_C se mantêm constantes, ao passo que M_B aumenta. Nesta segunda fase (designada na figura 6 como *fase 2*) qualquer acréscimo de carga, acima de q_E , é suportado pela viga como se ela fôsse bi-rotulada em A e C , provocando assim em B um acréscimo de momento igual a

$$\frac{(q - q_E) l^2}{8}$$

— Quando o momento em B atinge por sua vez o valor M_P forma-se nessa seção a *terceira rótula plástica*, e a viga se transforma em *cadeia cinemática* ou *mecanismo* (sistema hipostático), entrando em *colapso* (*fase 3* da figura 6).

— A carga de colapso $q_2 = q_R$ pode ser calculada pela simples condição estática: a parábola $M_0 = \frac{q_R l^2}{8}$ toca as duas envoltórias $+M_P$ e $-M_P$:

$$M_A + M_B = M_0 = \frac{q_R l^2}{8} = 2 M_P$$

$$M_P = \frac{q_R l^2}{16}$$

e portanto

$$q_R = M_P \cdot \frac{16}{l^2} = 1,33 \quad q_E = q_E + \frac{1}{3} q_E$$



— Ao mesmo resultado chegaremos, evidentemente, si somarmos ao valor de M_B no fim da fase elástica (carga q_E) o acréscimo de momento devido ao acréscimo de q sobre q_E , calculado para viga bi-rotulada:

$$M_B = M_P = \frac{q_E l^2}{24} + \frac{(q_R - q_E) l^2}{8}$$

(como $\frac{q_E l^2}{24} = \frac{1}{2} M_P$ temos $q_R - q_E = \frac{1}{3} q_E$)

— O raciocínio anterior pode ser facilmente generalizado. O colapso de um sistema — ou de parte dêle —, cujo grau de hiperestaticidade seja n se dará somente quando se formarem $(n + 1)$ rótulas plásticas.

2.4 — No exemplo anterior vemos que há uma reserva de segurança relativamente ao cálculo elástico clássico. A carga de ruptura ou de colapso é 33% superior à do cálculo clássico. A carga de serviço será

$$\bar{q} = \frac{q_R}{\gamma_s},$$

sendo γ_s o coeficiente de segurança, ou melhor, o fator do coeficiente de segurança aplicável às cargas (chamado no projeto de norma do Comité Européen du Béton *coeficiente de majoração das cargas*; o outro fator, γ_m , do coeficiente de segurança, chamado *coeficiente de minoração da resistência*, correspondente aos defeitos de execução, é considerado através de uma redução do momento de plastificação M_P ; além disso a falta de homogeneidade do material é considerada através da definição de sua *resistência mínima*, ou *característica*, exatamente como na NB-1).

— No cálculo inverso, ou de projeto, dimensionaríamos a viga para resistir ao momento

$$M_P = \frac{\gamma_s \bar{q} l^2}{16}$$

(em lugar do valor $\frac{\gamma_s \bar{q} l^2}{12}$, do cálculo clássico).

2.5 — Vejamos agora o que se passa, não na ruptura, mas nas condições de serviço. Se o coeficiente de segurança, ou melhor, o coeficiente de majoração das cargas, γ_s , fôr superior à relação q_R/q_E (isto é, no nosso exemplo, a 1,33) a viga estará ainda to-



*talmente na fase elástica, nas condições de serviço. Não haverá início de plastificação em serviço, nesse caso; apenas ficaremos mais próximos do início da segunda fase (plastificação) do que estaríamos se tivéssemos dimensionado a viga segundo o cálculo clássico. A segurança contra o colapso final será no entanto suficiente. Essa condição, que vai constituir por assim dizer a “filosofia” do cálculo hiperestático plástico do concreto armado, não é necessariamente obrigatória para as estruturas metálicas. Nestas, quando não há alternância de esforços, pode-se admitir em alguns pontos o início da plastificação *ainda nas condições de serviço* — por exemplo, formação de algumas das n primeiras rótulas plásticas, que procedem o colapso. *No concreto armado isso não poderia ser tolerado*, pois teríamos, ainda em serviço, escoamento das armaduras, acompanhado de fissuração com abertura exagerada; *a carga de serviço deverá ser sempre inferior à carga de início de plastificação* (início da formação das primeiras rótulas plásticas). Esta é uma primeira diferença fundamental entre o cálculo plástico das estruturas de aço e de concreto.*

2.6 — A segunda diferença fundamental entre as estruturas de aço e de concreto armado consiste em que, nestas últimas, podemos variar as armaduras, e portanto variar os momentos de ruptura M_R das seções, sem afetar apreciavelmente (ou, pelo menos, nas mesmas proporções) a “rigidez” EJ da peça. Numa peça de seção transversal geométrica constante é possível distribuir as armaduras de tal modo que os momentos resistentes acompanhem de perto os momentos solicitantes, obtendo-se assim uma peça quase que “de igual resistência”, embora o aspecto externo não o denote. Consideremos o caso de vigas de concreto armado bi-engastadas, representadas na figura 7:

2.7 — Se a viga tiver sido dimensionada segundo o diagrama de momentos obtido de acordo com o cálculo elástico clássico (figura 7, *a*), o momento de ruptura da seção do centro será igual à metade do momento de ruptura das seções de engastamento. Desprezando, como efeito de segunda ordem, as alterações de rigidez dos diferentes trechos da viga, oriundas da fissuração (isto é, da passagem do estágio I ao estágio II), vê-se que a viga se comporta de acordo com o cálculo elástico até o fim, pois os momentos de rupturas nas três seções críticas serão atingidos *no mesmo tempo*. Neste caso *não existe a reserva de segurança* a que nos referimos no

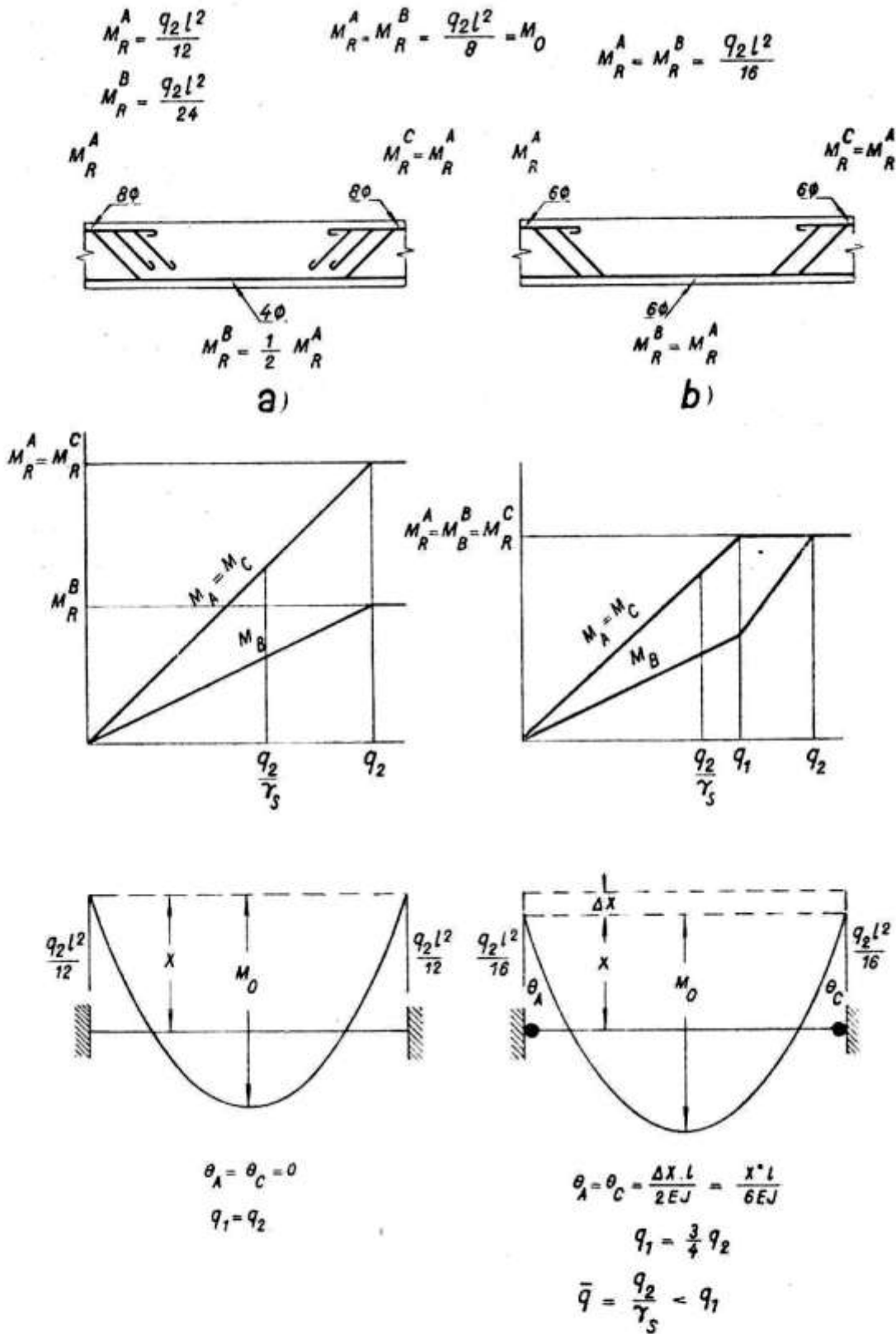


Fig. 7



item 2.4. *A viga rompe tal como foi dimensionada.* A reserva de segurança só existiria se a seção do centro fôsse superdimensionada em relação ao cálculo elástico, ao passo que as seções de engastamento fôsem dimensionadas de acôrdo com êste cálculo. Em particular, se dispuséssemos no centro armadura igual à das seções de engastamento, teríamos a mesma reserva de segurança calculada anteriormente para uma viga de aço de seção transversal constante.

2.8 — Podemos no entanto *dimensionar a viga segundo um diagrama de momentos diferente do diagrama de momentos obtido no cálculo elástico, — desde que fiquem respeitadas as condições gerais da estática.* Podemos por exemplo dimensionar a viga para um diagrama de momentos em que os momentos fletores nas seções de engastamento e no meio do vão sejam iguais (isso corresponde a fazer baixar a “linha de fechamento”, mantendo inalterado o “diagrama isostático”, isto é, reduzir os momentos nas seções de engastamento e aumentar o momento no meio do vão, sem modificar a parábola $M_0 = \frac{q l^2}{8}$). Neste caso, podemos reproduzir o raciocínio feito para a viga metálica de seção transversal constante (figura 7, b). A viga romperá de acôrdo com o diagrama que foi “arbitrado”, desde que as duas primeiras rótulas plásticas, formadas em A e C, tenham capacidade de rotação suficiente.

2.9 — Os dois exemplos citados mostram que, embora não haja nas estruturas hiperestáticas de concreto armado a “reserva de resistência” das estruturas hiperestáticas metálicas com peças de seção transversal constante, as primeiras possuem em geral uma apreciável *capacidade de adaptação a diagramas de momentos que se afastem dos diagramas do cálculo elástico, desde que respeitadas as condições da estática.* Essa propriedade leva à importante dedução de que, *mesmo que o cálculo elástico clássico não corresponda ao comportamento inicial real da estrutura, — devido às variações de rigidez oriundas da fissuração —, podemos fazer o dimensionamento segundo o diagrama de momentos obtido nesse cálculo elástico.* Êste último, apesar de não corresponder exatamente ao funcionamento real da peça na fase elástica, pode ser adotado como *uma das soluções particulares do cálculo plástico* (um dos diagramas de momentos que podem ser “arbitrados”). *Não existe pois a tão alegada contradição entre — dimensionar as seções segundo o estágio III —, e — calcular os esforços solicitantes, nos sistemas hi-*



perestáticos, pelo método elástico clássico. Essa contradição só poderia aparecer, teoricamente, em sistemas em que ocorressem seções críticas super-armadas tão frágeis que sua capacidade de rotação, quase inexistente, não permitisse *nem mesmo* a adaptação ao diagrama elástico clássico, ligeiramente diferente do diagrama elástico real. Nestes casos seria necessário um “*cálculo elástico exato*”, no qual, ao contrário do que se faz geralmente, fossem consideradas as variações de rigidez entre trechos de uma mesma peça oriundas da fissuração (as “instruções provisórias” adotadas na U.R.S.S. contêm fórmulas aproximadas para os “fatores de correção” correspondentes a essa influência da fissuração sobre a rigidez).

2.10 — Passemos agora a outro aspecto da questão. Para haver *adaptação completa* da estrutura hiperestática é preciso que a $(n + 1)$ rótula plástica, que determina o colapso da estrutura, chegue a se formar. Se antes disso uma das primeiras n rótulas plásticas se romper, por ter sido atingida a sua *capacidade de rotação*, não haverá adaptação completa, e a carga de ruptura será inferior à que seria calculada na hipótese de formação do mecanismo final de colapso. Para verificar esta condição será necessário calcular as *rotações das rótulas plásticas*. Se conhecermos previamente qual das $(n + 1)$ rótulas plásticas correspondentes ao mecanismo de colapso é a que se forma em último lugar, será fácil calcular todas as deformações do sistema no instante em que ele vai se transformar em mecanismo — isto é, no instante em que a rótula plástica $(n + 1)$ começa se formar, sendo ainda nula a sua rotação. Como os momentos fletores nas seções correspondentes às n primeiras rótulas plásticas são conhecidos (são iguais aos momentos de plastificação dessas seções), o sistema se torna *estaticamente determinado*. Todos os trechos situados entre as rótulas plásticas estarão na fase elástica, e os “ângulos de descontinuidade”, ou “rotações das rótulas plásticas”, poderão ser calculados pelos métodos clássicos (princípio dos trabalhos virtuais, teoremas de Mohr, etc.), tomando-se como sistema principal aquele em que existem n rótulas, nas seções das n primeiras rótulas plásticas. Voltemos ao exemplo da viga bi-engastada (figuras 6 e 8). Podemos operar de duas maneiras (figura 8):

a) aplicar ao sistema principal bi-rotulado a carga q_R e os momentos $M_A = M_C = X^*$, iguais ao momento de plastificação M_P . Temos

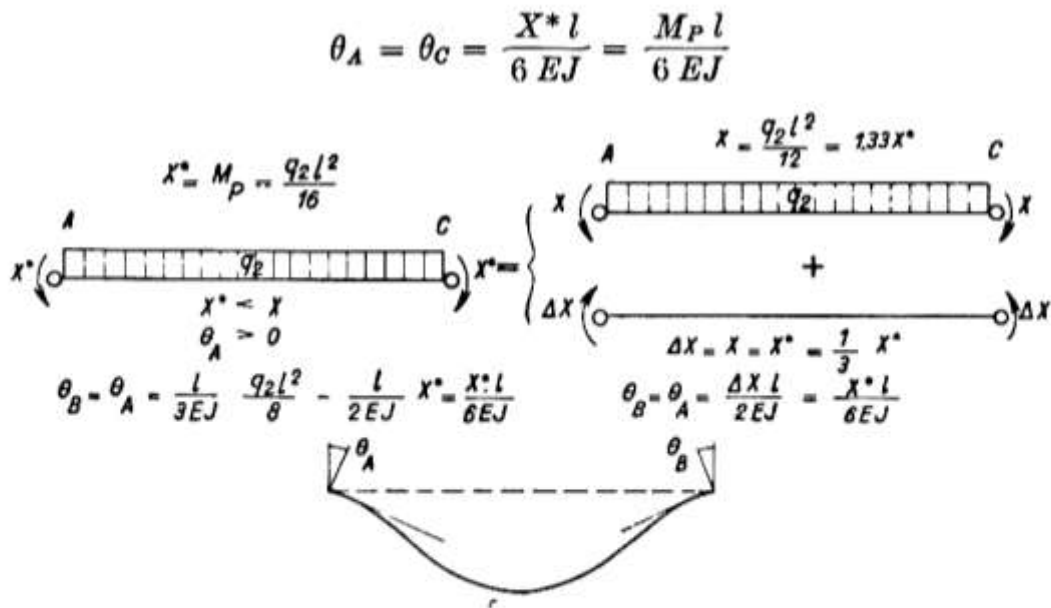


Fig. 8

quando o momento de plastificação M_B da seção do meio do vão é também igual a M_P , e portanto

$$M_0 = \frac{q_R l^2}{8} = 2 M_P = 2 X^*$$

b) aplicar ao sistema principal bi-rotulado apenas momentos ΔX iguais à diferença entre o momento de engastamento X que se teria, em um cálculo elástico e o momento de plastificação X^* :

$$\Delta X = X - X^*$$

(de fato, só essa diferença ΔX é quem vai originar as rotações plásticas θ , pois os momentos de engastamento "elásticos" X mais a carga q_R não produzem rotações no sistema principal)

$$\theta = \frac{\Delta X \cdot l}{2 EJ} = \frac{X^* \cdot l}{6 EJ} = \frac{M_P \cdot l}{6 EJ}$$

pois, neste caso,

$$\Delta X = \frac{q_R \cdot l^2}{12} - \frac{q_R l^2}{16} = \frac{1}{3} \frac{q_R l^2}{16} = \frac{1}{3} X^*$$

2.11 — Esse valor de θ deverá ser inferior à capacidade de rotação das rótulas plásticas A e C , para que o sistema possa atingir a fase 3 (formação da terceira rótula plástica), isto é, para que possa haver completa adaptação. A capacidade de rotação plástica é muito grande nas estruturas de aço. Se tomarmos, para o



aço, $\epsilon_P = 1,5\%$ e $x = h/2$ (seção simétrica), a rotação da rótula plástica (figura 5) será

$$\theta_{\max} = \frac{1}{2} \Phi_P l_P = \frac{1}{2} \frac{30 \times 10^{-3}}{h} \cdot l_P = \frac{15 \times 10^{-3}}{h} \cdot l_P$$

ao passo que, para o concreto, em seções com *armadura média*, a fórmula aproximada do professor A. L. L. Baker fornece apenas

$$\theta_{\max} = \frac{1,5 \times 10^{-3}}{x} \cdot l_P = \frac{3/4 (1,5 \times 10^{-3})}{x_{III}} \cdot l_P \cong \frac{5 \cdot 10^{-3}}{h} l_P$$

(x_{III} é a altura da zona de compressão, segundo a NB-1; supõe-se que a distância x da linha neutra à borda comprimida seja igual a $4/3 x_{III}$).

Nas seções de concreto fortemente armadas, e nas seções solicitadas à flexão composta com excentricidade média, esse valor pode baixar até $\frac{2 \cdot 10^{-3}}{h} l_P$. Seções de concreto “super-armadas” teriam capacidade de rotação plástica ainda menor, classificando-se como “seções frágeis”, inadmissíveis no caso de cálculo hiperestático plástico.

2.12 — O “comprimento de plastificação” l_P , de um só lado da seção crítica, é igual a

$$l_P = \left(1 - \frac{M_E}{M_P} \right) Z$$

no caso de peças metálicas (Hodge), sendo Z a distância do ponto de momento nulo à rótula plástica (no caso de vigas contínuas existem dois comprimentos l_P , um de cada lado da seção crítica). Se se tratar por exemplo de seção metálica retangular, o comprimento de plastificação será $\frac{1}{3} (Z)$. Nas peças de concreto armado o comprimento de plastificação nunca é inferior a $\frac{1}{2} h$, em virtude de deslisamentos da armadura junto à seção crítica; mas por outro lado, quando a viga é de pequena altura em relação ao vão, isto é, quando a relação Z/h é grande, esse comprimento não chega a atingir o valor correspondente à fórmula acima indicada. Verifica-se uma “localização da plastificação” (Macchi), atribuível à falta de homogeneidade do concreto armado, que levou o professor Baker a sugerir que l_P varie com a raiz quarta de Z/h , em lugar de lhe ser proporcional. Em geral, para o concreto armado, l_P está compreendido entre $\frac{1}{2} h$ e h (de cada lado da seção crítica).



2.13 — A capacidade de rotação relativamente pequena das rótulas plásticas de concreto armado torna sempre imprescindível calcular as rotações θ , verificação esta que é geralmente considerada desnecessária para as estruturas de aço. Esta é a terceira diferença fundamental entre as estruturas de aço e as de concreto armado, no que se refere ao cálculo hiperestático plástico. É preciso no entanto observar que, mesmo para as estruturas metálicas, há casos em que pode verificar-se uma ruptura prematura, antes da formação do mecanismo final de colapso, por excesso de deformação de uma rótula plástica. Hodge trata desta questão na capítulo 4 de seu livro “Plastic Analysis of Structures”. Um desses casos excepcionais é o de uma viga contínua de três vãos, com os vãos extremos descarregados, e o vão central com uma carga concentrada no meio; a primeira rótula plástica, que surge sob a força concentrada, pode atingir sua capacidade máxima de deformação antes de surgirem as rótulas sobre os apoios, quando o vão central é muito menor que os vãos extremos (é esse o chamado “paradoxo do professor Stüssi”). O método indicado por Hodge para o cálculo das rotações θ coincide com o do prof. A. L. L. Baker, e se baseia na consideração de *um sistema tornado estáticamente determinado após a formação das n primeiras rótulas plásticas*.

2.14 — Uma quarta diferença entre as estruturas metálicas e as de concreto armado reside na necessidade da verificação da fissuração em serviço, para estas últimas. Esta condição não deve ser confundida com aquela que foi descrita em 2.5. Não basta impôr que não haja início de plastificação em serviço. Embora ainda não se dê escoamento das armaduras, a sua tensão em serviço, nas regiões sub-dimensionadas em relação ao cálculo elástico, (isto é, nas vizinhanças das seções escolhidas como rótulas plásticas), pode ser muito elevada, e provocar fissuração com aberturas indesejáveis. Como mostramos em 2.5, não teremos ainda atingido o escoamento da armadura, mas estaremos muito mais perto disso do que estaríamos se o dimensionamento tivesse sido feito de acordo com o cálculo elástico clássico. Nas estruturas metálicas esse fato não provoca nenhum fenômeno visível, mas nas de concreto armado pode fazer com que a abertura das fissuras ultrapasse os limites toleráveis.

2.15 — Para as estruturas metálicas desenvolveram-se métodos que dispensam qualquer cálculo hiperestático “elástico” prévio. Esses métodos, baseados nos chamados “teoremas de cálculo plástico”,



permitem determinar o mecanismo final do colapso, isto é, a localização das $(n + 1)$ rótulas plásticas, sem ser necessário conhecer a ordem em que se formaram. Pode-se assim calcular facilmente a capacidade de carga da estrutura, mas fica-se sem saber se há formação de algumas rótulas plásticas ainda em serviço. Se fôr necessário calcular as rotações das rótulas plásticas, será necessário, através de nova pesquisa, descobrir qual a que se forma em último lugar (Hodge). Esses métodos além disso só são úteis quando as peças têm momento de plastificação constante. Conclui-se portanto que não podem ser transpostos simplesmente para as estruturas de concreto armado.

2.16 — No caso das estruturas de concreto armado, será necessário sempre fazer um cálculo hiperestático “elástico” prévio. *Em nossa opinião esse cálculo deve mesmo ser sempre o ponto de partida. Introduzindo modificações prudentes e limitadas na distribuição de momentos fornecida por esse cálculo elástico, e dimensionando as peças para os novos diagramas assim obtidos, poderemos prever exatamente em que pontos se formarão as n primeiras rótulas plásticas: as n seções de momento máximo para as quais “arbitramos” momentos fletores inferiores aos do cálculo clássico, — desde que essa modificação ou “redistribuição de momentos” importe por sua vez em aumento dos momentos fletores em tôdas as demais seções de momentos máximos, de acôrdo com a simples aplicação das condições gerais da estática.* Indicaremos a seguir a marcha geral a ser adotada no cálculo, seguindo as sugestões que enviamos ao Comité Européen du Béton, anexadas a êste trabalho.

3. Marcha de Cálculo.

3.1 — O primeiro passo a realizar é o cálculo da estrutura segundo a chamada “hiperestática clássica”, isto é, elástica. Esse cálculo não deve ser feito com excessos de rigor, que aliás não corresponderiam ao comportamento real da estrutura. Em certos casos — aliás os mais freqüentes —, tais como vigas contínuas e estruturas comuns de edifícios, será suficiente fazer um cálculo aproximado. Para os quadros, e, de um modo geral, estruturas com nós deslocáveis, impõe-se cálculo mais rigoroso, pois as simplificações podem conduzir a erros muito grandes. Nas estruturas comuns de edifícios, por exemplo, pode ser adotada a simplificação que consiste em calcular cada andar isoladamente, supondo as bases dos



pilares inferiores, e os topos dos pilares superiores, engastados, ou articulados; nas vigas contínuas de muitos vãos não será em geral necessário considerar propagação de momentos além do segundo vão. Seria no entanto inaceitável procurar simplificar o cálculo de um quadro de galpão, ou de viga contínua de ponte, solidária com pilares, e com nós deslocáveis. O calculista deverá agir criteriosamente, avaliando os erros que poderão ser cometidos através das simplificações.

3.2 — O cálculo clássico é feito geralmente com os momentos de inércia calculados no estágio I, ou simplesmente com os momentos de inércia das seções geométricas, desprezadas as armaduras. Em alguns casos poderá ser necessário levar em conta a influência da fissuração, e calcular os momentos de inércia no estágio II, como adiante indicaremos. Se as armaduras nos apoios e no vão forem muito diferentes, uma peça de seção geométrica constante passará a ser de inércia variável, como se fôsse dotada de vutes. Uma maneira de levar em conta êsse efeito é multiplicar por um coeficiente de correção os momentos sobre os apoios, calculados na hipótese de inércia constante. Segundo as "Instruções provisórias para o cálculo de sistema hiperestáticos" da U.R.S.S. êsses coeficientes de correção são os seguintes:

$$\alpha = \frac{3}{2 + \beta} \text{ para vigas bi-engastadas ou vãos intermediários de vigas contínuas}$$

$$\alpha = \frac{1,5}{0,5 + \beta} \text{ para vigas engastadas e apoiadas, ou vigas contínuas de 2 vãos}$$

$$\beta = \text{relação entre a rigidez } (EJ)_{II} \text{ no meio do vão e a rigidez } (EJ_{II}) \text{ sobre os apoios.}$$

Para o segundo e o penúltimo apoios de vigas contínuas de mais de 2 vãos, tomar a média dos dois valores indicados.

3.3 — Após êsse cálculo prévio segundo a hiperestática clássica, escolhem-se, de acôrdo com as conveniências, n seções de momentos fletores máximos cujos momentos fletores devem ser *reduzidos*, sendo n o grau de hiperestaticidade do sistema. São as seções nas quais se formarão as n primeiras rótulas plásticas, que precedem o colapso da estrutura. Nessas seções os "momentos de



plastificação”, isto é, os momentos de ruptura (estádio III) deverão ser atingidos *antes* das demais seções de momentos máximos, se as cargas aumentarem proporcionalmente. Numa viga contínua, por exemplo (figura 9), essas n seções serão em geral as seções sôbre

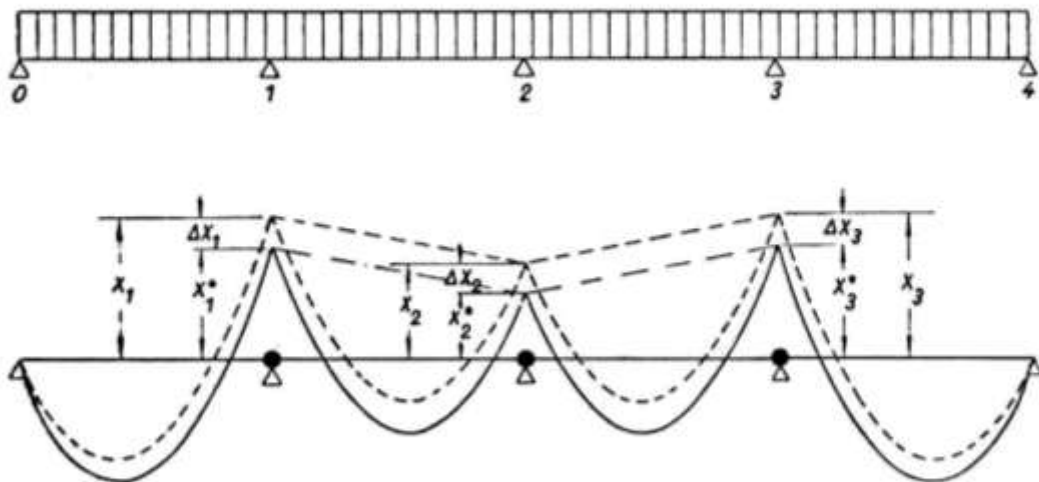


Fig. 9

os apoios intermediários; os momentos negativos serão reduzidos, as “linhas de fechamento” baixarão, e os momentos positivos máximos aumentarão. As n seções, sôbre os apoios, serão dimensionadas para momentos X^* *menores* que os momentos X do cálculo clássico, mas, em compensação, as seções de momentos positivos máximos serão *tôdas* dimensionadas para momentos superiores aos do cálculo clássico. De um modo geral, uma vez conhecidos os momentos em n seções críticas, — que serão os momentos “arbitrados” X^* , inferiores momentos X dados pelo cálculo clássico —, o sistema se tornará estáticamente determinado. As simples regras da estática permitirão o traçado do novo diagrama de momentos, que será o diagrama de momentos do cálculo plástico.

3.4 — Nos sistemas com nós deslocáveis é mais difícil a escolha das n seções onde provocaríamos a formação das n primeiras rótulas plásticas, se as cargas aumentassem proporcionalmente até o colapso. Consideremos por exemplo um pórtico simples bi-rotulado. Para torná-lo estáticamente determinado basta introduzir uma articulação. Teríamos então que escolher uma seção de momento máximo como rótula plástica. Suponhamos que, por analogia com a viga contínua, a seção escolhida seja a de um dos dois nós superiores, e que aí pretendêssemos reduzir o momento fletor. O resul-



tado seria o seguinte: o momento fletor do meio de vão aumentaria, *mas o momento fletor no outro nó superior sofreria uma redução*. Seríamos assim levados a dimensionar ambas as seções correspondentes aos nós superiores para momentos *inferiores aos do cálculo clássico*, e a seção do meio do vão *para momento superior*, tal como numa viga contínua de três vãos. No entanto é evidente que, se as cargas aumentarem proporcionalmente, em lugar de formar-se apenas a rótula plástica imaginada a princípio, *formar-se-ão duas*, nos dois nós superiores, *ao mesmo tempo*. Não chegará a formar-se a terceira rótula, pois provavelmente o colapso da estrutura se dará antes disso, — com carga inferior à prevista —, por instabilidade lateral do quadro. Se o deslocamento horizontal fôsse impedido, não haveria êsse inconveniente, e o quadro poderia ser calculado plásticamente exatamente como uma viga contínua de três vãos. Havendo deslocabilidade lateral, não será possível reduzir os momentos nos nós superiores; a única possibilidade será a escolha da seção do meio do vão como rótula plástica. Neste caso, dar-se-ia o contrário: os momentos nos nós superiores seriam aumentados, e o momento no vão reduzido (isso pode aliás ser conveniente, em certos casos). Já num pórtico simples bi-engastado seria possível reduzir, num cálculo plástico, os momentos nos nós superiores, aumentando, ao mesmo tempo, os das bases dos pilares (engastamentos). Procuraremos esclarecer melhor esta questão através de exemplos numéricos.

3.5 — Muita vezes não será útil reduzir os momentos em todas as n rótulas plásticas. Em algumas delas poderemos manter os momentos do cálculo clássico. Isso não significa que sua rotação seja nula, pois as reduções de momentos nas rótulas vizinhas provocarão rotações nessas rótulas em que não “arbitramos” reduções de momentos. Outras vezes será conveniente introduzir menos de n rótulas plásticas. O cálculo será feito com n rótulas, mas imporemos a condição de que algumas delas não sofram deformações, através das equações de compatibilidade; nesta última hipótese, os momentos nas seções correspondentes às “rótulas plásticas de rotação nula” serão em geral superiores aos do cálculo clássico (essas rótulas não se formarão, na realidade). Procuraremos também ilustrar êste caso com um exemplo prático.

3.6 — Terminada a etapa da escolha das n seções nas quais queremos reduzir os momentos em relação ao cálculo clássico (provocando a formação de rótulas plásticas caso as cargas aumentas-



sem proporcionalmente até a ruptura), — cumpre “arbitrar” os momentos X^* , menores que os momentos X do cálculo clássico, para os quais essas seções serão dimensionadas. A condição

$$\frac{X}{\gamma_s} \leq X^* \leq X,$$

sendo γ_s o coeficiente de majoração das cargas, é suficiente para que não se formem rótulas plásticas *em serviço*, pois o momento fletor em serviço será $\frac{X}{\gamma_s}$, já que a estrutura ainda estará na fase elástica.

Com $\gamma_s = 1,4$ temos $0,7 X \leq X^* \leq X$ isto é, não poderemos “arbitrar” reduções, em relação ao cálculo clássico, de mais de 30%. O coeficiente $\gamma_s = 1,4$ é um dos fatores do coeficiente global de segurança. O outro fator, γ_m , na NB-1, é 1,18, e o produto dos dois, 1,65. No caso de pontes, as cargas móveis devem ser acrescidas de 20%, mantendo-se inalterados os dois fatores de coeficiente de segurança.

3.7 — Arbitradas assim as reduções

$$\Delta X = X - X^*$$

cálculam-se as rotações plásticas θ tomando como sistema principal isostático aquele que é obtido com a introdução de n articulações nas seções correspondentes às n rótulas plásticas (figuras 10 e 11)

$$\Delta X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta X_2 \cdot \delta_{12} + \dots = \theta_1$$

$$\Delta X_1 \cdot \delta_{12} + \Delta X_2 \cdot \delta_{22} + \dots = \theta_2$$

.....

Em muitos casos, como as vigas contínuas, esse mesmo sistema principal será o mais conveniente para o cálculo elástico prévio (figura 10). Em muitos outros o cálculo elástico prévio será feito mais fácil com outro sistema principal, ou pelo método das deformações (rotações, Cross, etc.), ou ainda simplesmente com a utilização de tabelas existentes.

3.8 — As rigidezes EJ a considerar no cálculo das rotações plásticas não serão no entanto as que são geralmente utilizadas (estádio I, ou simplesmente seção de concreto, desprezando-se as

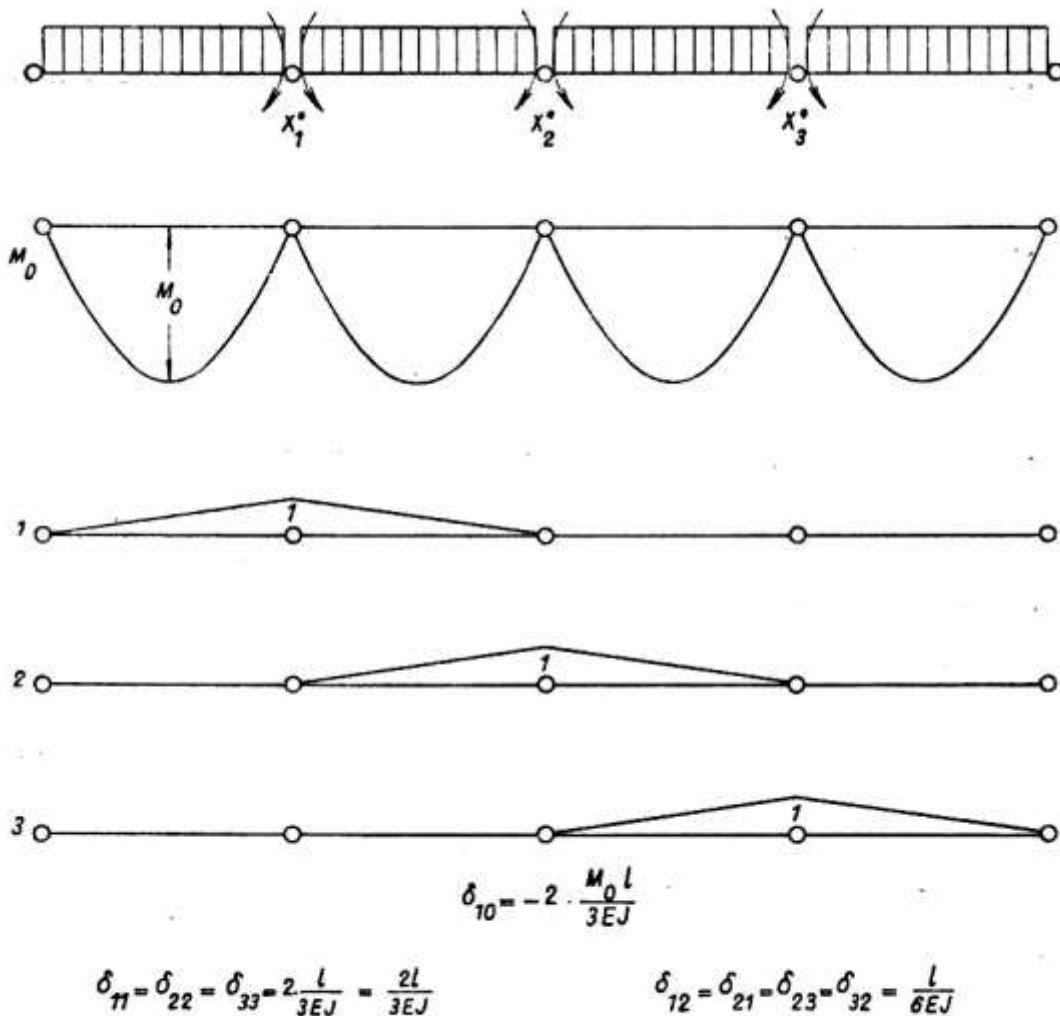


Fig. 10

armaduras). Isso seria erro grave, pois levaria a enorme subestimação das rotações θ . Ao aproximar-se o colapso final a estrutura estará toda fissurada, exceto na imediata vizinhança dos pontos de momento nulo. O professor A. L. L. Baker aconselha adotar os EJ do estágio II, desprezando o efeito favorável desses pequenos trechos. O EJ do estágio II pode ser facilmente calculado pela fórmula

$$(EJ)_{II} = A \cdot E_a (h - \bar{x}) \bar{z}$$

sendo \bar{x} e \bar{z} , respectivamente, a distância da linha neutra à borda comprimida, e o braço da alavanca, ambos calculados no estágio II. Nos casos correntes pode-se tomar $n = 15$ (vide a parte 4 deste trabalho). E_a é o módulo de elasticidade do aço, e A a área da seção

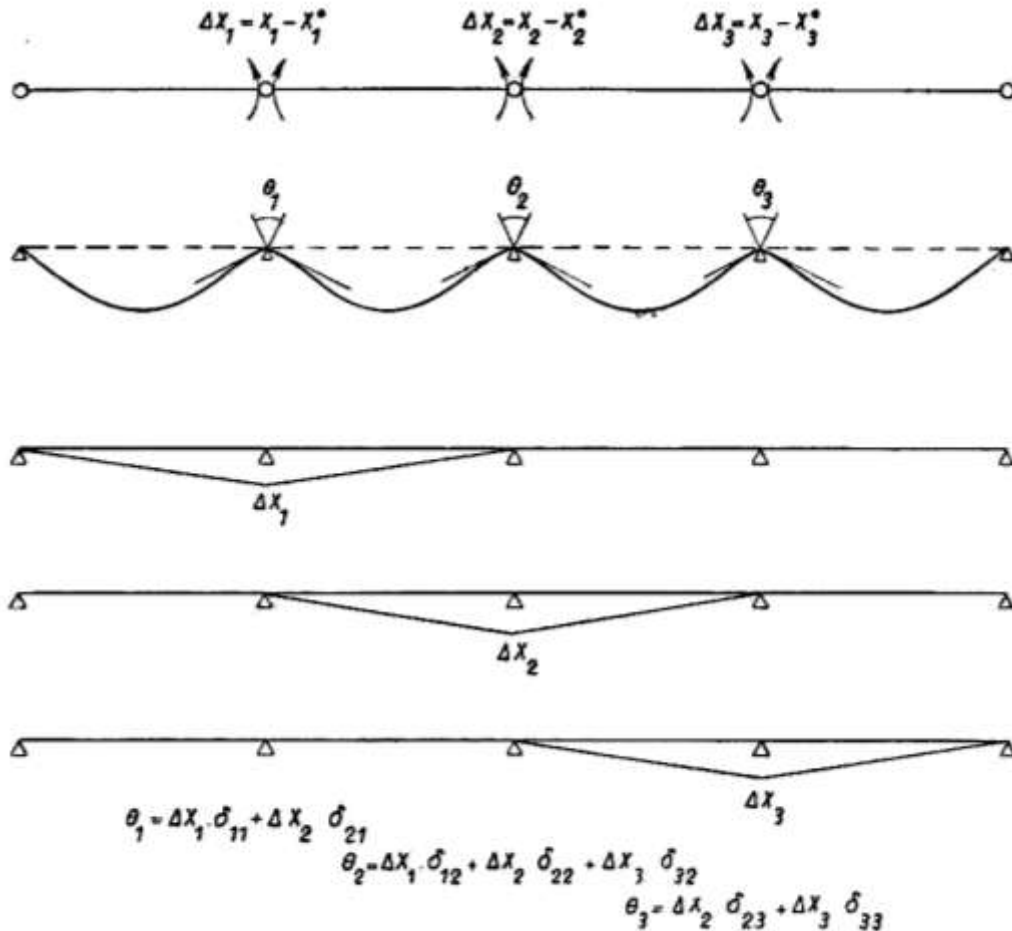


Fig. 11

transversal da armadura de tração (notações do C.E.B.) No caso de seções retangulares com armadura simples:

$$\bar{x}/h = n\mu \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\mu}} \right) \quad \bar{z}/h = 1 - \frac{1}{3} (\bar{x}/h)$$

$$\mu = S_f/(bh)$$

No caso de seção em T com $\bar{x} > d$ (fórmulas aproximadas)

$$\bar{x}/h \cong \frac{0,5 bd^2 + n S_f h}{h (bd + n S_f)} \quad \bar{z}/h \cong 1 - 0,5 (d/h)$$

Si $\bar{x} < d$, considera-se a seção como retangular, mas de largura b (largura da mesa).

Em geral o $(EJ)_{II}$ no meio do vão é um pouco superior ao das seções sobre os apoios, porque estas são retangulares, e aquela



em T ; basta no entanto considerar a rigidez no meio do vão, pois a maior rigidez dos trechos na vizinhança dos pontos do momento nulo compensa folgadoamente o erro cometido.

3.9 — Além disso é preciso não esquecer de multiplicar as cargas por γ_s , ao calcular os ΔX . Os momentos para o dimensionamento à ruptura serão calculados com o coeficiente de segurança global $\gamma_s \cdot \gamma_m$ (1,65 no caso da NB-1), mas para o cálculo das rotações plásticas θ basta tomar o fator chamado “coeficiente de majoração das cargas”, γ_s , pois o outro fator, γ_m , corresponde aos erros de execução, que originam falhas de resistência locais, mas pouco influem nas deformações do conjunto.

3.10 — Depois de calculadas as rotações θ é preciso confrontá-las com as rotações máximas permissíveis. No estágio atual do problema recomendam-se as fórmulas do professor A. L. L. Baker, indicadas na parte 4 deste trabalho. O comprimento de plastificação, *para cada lado da seção crítica*, é dado pela fórmula

$$l_P = 0,63 \left(\frac{Z}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot h$$

no caso de aço doce e concreto de resistência mínima 110 kg/cm²; no caso de aço com mossas ou saliências, encruado, o coeficiente 0,63 é aumentado para 0,81. No caso de concreto de alta resistência, com resistência mínima 330 kg/cm², esses valores são reduzidos a 2/3, com interpolação linear no intervalo. Z é a distância da seção crítica ao ponto de momento nulo.

Z/h	$(Z/h)^{\frac{1}{2}}$	Z/h	$(Z/h)^{\frac{1}{2}}$
0,75	0,93	1,75	1,15
1,00	1,00	2,00	1,19
1,25	1,06	3,00	1,32
1,50	1,11	4,00	1,42

A rotação máxima permissível é dada por

$$\theta_{\max} = \frac{3/4 (1,5 \cdot 10^{-3})}{x_{III}} \cdot l_P$$

sendo x_{III} a altura da zona de compressão, no estágio III, segundo a NB-1. No caso de vigas contínuas, e análogos, é preciso não esquecer de *somar os dois comprimentos de plastificação, calculados para cada lado da seção crítica*.



3.11 — Se as rotações calculadas forem superiores às rotações máximas permissíveis, será necessário diminuir os ΔX “arbitrados”. Uma outra solução, ainda não suficientemente estudada, é o cintamento da zona comprimida, que tem com conseqüência o aumento da capacidade de rotação. Esse cintamento é particularmente útil no caso de seções solicitadas à flexão composta com pequena excentricidade (bases e topos de colunas).

3.12 — A tensão na armadura, na seção onde houve redução de momento em relação ao cálculo plástico (rótula plástica), será aproximadamente igual a

$$\sigma_{af} = \bar{\sigma}_{af} \frac{X}{X^*} = \frac{\sigma_e}{\gamma_s \cdot \gamma_m} \frac{X}{X^*}$$

sendo, $\bar{\sigma}_{af}$ a tensão admissível em serviço no caso de cálculo clássico, igual, na NB-1, aproximadamente $\sigma_e/1,65$:

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_e}{1,65} \frac{X}{X^*}$$

No caso extremo em que $X^* = 0,7 X$ (redução de 30%), a tensão na armadura em serviço, na seção-rótula plástica, será igual a 85% do limite de escoamento, bastante elevada portanto. Para deduzir isso basta lembrar que se a seção tivesse sido dimensionada para o momento X a armadura trabalharia em serviço a $\sigma_e/1,65$; no entanto a seção foi dimensionada para o momento X^* , menor que X . Nesse cálculo despreza-se a variação do braço de alavanca z .

3.13 — A verificação de fissuração nas seções onde os momentos sofreram as reduções ΔX pode ser feita segundo a condição do C.E.B., menos severa que a do projeto de revisão da norma NB-2:

$$\frac{\delta}{\mu^*} \leq \frac{\alpha}{\sigma_{af} (0,4 + 4,5 \mu^*)}$$

sendo $\alpha = 42.000$ kg/cm para aço liso

e $\alpha = 66.000$ kg/cm para aço com mossas ou saliências;

δ o diâmetro;

μ^* a taxa de armadura, referida a um “tirante fictício” tendo o mesmo centro de gravidade da armadura, e extendendo-se até a borda tracionada da seção transversal, e até as faces laterais.



Nos casos em que essa condição não fôr satisfeita, poder-se-á combinar armaduras de diâmetros maiores com armaduras finas (malhas), tomando para δ , em lugar do diâmetro, quatro vêzes a relação entre a área total e o perímetro total da armadura de tração.

3.14 — O fato de não ser perfeitamente horizontal o trecho final do diagrama momento-curvatura (fig. 3 e 4) origina um pequeno erro do cálculo hiperestático plástico, tal como foi apresentado. Esse erro é no sentido de uma ligeira superestimação da resistência da estrutura. Para eliminá-lo o prof. Baker sugere que as seções de momentos máximos correspondentes às n rótulas plásticas sejam dimensionadas considerando-se como momento de ruptura o limite L_2 da figura 4, mas que as seções de momentos máximos *entre* as n rótulas plásticas sejam dimensionadas tomando-se como momento de ruptura o limite L_1 , um pouco menor (em geral compreendido entre 80% — peças muito armadas, e 95% — peças pouco armadas, do limite L_2). Como a diferença entre os limites L_2 e L_1 é da mesma ordem das diferenças de resistência originadas, ao longo de uma mesma peça, pelas variações estatísticas dos característicos do aço e do concreto, e pelas falhas locais de execução, somos de opinião que não é necessário dimensionar de modo diferente as seções de momento máximo correspondentes às n rótulas plásticas e as seções intermediárias. *Tôdas podem ser dimensionadas segundo o estágio III, pelos métodos usuais.* A introdução das “resistências características”, ou “resistências mínimas”, em lugar das resistências médias dos materiais, e a existência de um “coeficiente de minoração”, correspondente às falhas de execução, constituem as justificativas principais desta proposta, também enviada pelo autor à Comissão de Hiperestática do “Comité Européen du Béton”. Convém no entanto evitar, em estruturas calculadas segundo a marcha indicada neste trabalho, seções excessivamente armadas. O momento de ruptura nunca deverá ser superior, por exemplo, a 2/3 do “momento teto” (nas seções retangulares, a altura do retângulo das compressões nunca deverá ser superior a 0,32 h).

3.15 — A marcha de cálculo aqui indicada corresponde a uma das variantes contidas nas “sugestões relativas à consideração do efeito hiperestático da plasticidade”, transcritas na parte 4 deste trabalho. O texto dessas sugestões completa o que acaba de ser



exposto, e sugere outras variantes, como o “método indireto” do eng^o italiano Macchi (método das rotações impostas). Os exemplos numéricos anexados contribuirão para uma melhor compreensão da matéria. Neste trabalho não consideramos o caso de estruturas com cargas móveis, que será abordado posteriormente.

4. Sugestões enviadas pelo eng. Fernando Luiz Lobo B. Carneiro, relativas ao item 2.212 do anteprojeto de norma internacional de cálculo e execução de obras de concreto armado, do “Comité Européen du Béton”.

EFEITO HIPERESTÁTICO DA PLASTICIDADE

**CONSIDERAÇÃO DO EFEITO HIPERESTÁTICO
DA PLASTICIDADE**

TEXTO

Princípios — P 2,212

O cálculo das solicitações, nas estruturas hiperestáticas, pode ser feito segundo a teoria elástica clássica, ou mediante a consideração do efeito hiperestático da plasticidade. Seja qual fôr o método adotado, deverão ser feitas as duas verificações seguintes:

- *segurança* — verificação da resistência ou da estabilidade do elemento considerado, aplicando-se às cargas características” os “coeficientes de majoração” (1);

(1) — “*Carga característica*” é a carga de serviço, adotada no projeto. Segundo o projeto de norma do Comité Européen de Béton, quando se dispõe de um estudo estatístico a “carga característica” é igual ao valor médio da carga máxima que poderá ocorrer pelo menos uma vez durante a vida da construção, acrescido de desvio padrão (= valor da carga máxima que poderá ocorrer, com 85% da probabilidade, pelo menos uma vez, durante a vida da construção). No caso de cargas permanentes tomar-se-á o valor médio aumentado ou diminuído do desvio padrão, conforme essa carga atue contra a segurança ou a favor da segurança. As cargas acidentais da norma brasileira NB-5 podem ser tomadas como “cargas características”. No caso de cargas móveis, norma brasileira NB-2 as “cargas características” podem ser consideradas como iguais às cargas móveis das normas NB-6 e NB-7, acrescidas de 20%.

— *Coefficiente de majoração* — das “cargas características” é um dos dois fatores do coeficiente de segurança, segundo o projeto de norma do Comité Européen de Béton (nos casos normais é igual a 1,4). O outro fator é o “*coeficiente de minoração*” das “resistências características” (*resistências características*) são: a resistência mínima (5% de probabilidade) do concreto, tal como está definida na NB-1, e o limite de escoamento mínimo do aço das armaduras). O “*coeficiente de minoração*” (em geral igual a 1,15) leva em



— condições de serviço — verificação da fissuração e das deformações, tomando as cargas nas condições de serviço, isto é, sem “coeficientes de majoração”.

A consideração do efeito hiperestático da plasticidade pode ser feita segundo uma teoria geral, apoiada em dados experimentais, ou segundo métodos simplificados, nos quais se supõe que as deformações plásticas (inelásticas) se concentram em seções críticas, sob a forma de “rótulas plásticas”, cujas rotações devem ser limitadas por critérios prudentes, baseados em resultados de ensaios. A verificação das condições de serviço pode ser feita desprezando-se as “redistribuições de momentos” em serviço, devidas à fissuração, por meio de um cálculo elástico aproximado (C)

Recomendações — R 2,212

Método simplificado (Baker, Guyon, Macchi) :

Em uma estrutura n vezes estáticamente indeterminada, escolhem-se n seções nas quais os momentos fletores seriam máximos em regime elástico, e projetam-se (dimensionam-se) essas seções para resistirem a momentos fletores X^* menores que os momentos X que seriam obtidos segundo um cálculo clássico, tomando-se as “cargas características” multiplicadas pelos “coeficientes de majoração”. Nessas seções críticas se formarão n rótulas plásticas, antes do colapso da estrutura. O conhecimento dos momentos fletores de ruptura (momentos resistentes) nessas n seções críticas torna a estrutura estáticamente determinada, podendo-se assim calcular as solicitações em todas as outras seções pelas simples regras da estática, aplicando sempre às “cargas características” os “coeficientes de majoração”. Os momentos fletores nas seções de momento máximo situadas entre as n seções escolhidas como “rótulas plásticas” serão maiores que os momentos correspondente em regime elástico, caso a escolha tenha sido bem feita. (C).

Deverão ser ainda feitas as seguintes verificações:

R 2,212-1: As “rótulas plásticas” não devem se formar nas condições normais de serviço (nas quais pode-se admitir um regime elástico para a estrutura).

conta os defeitos de execução. Nas normas brasileiras NB-1 e NB-2 podemos admitir que o “coeficiente de minoração” é 1,18; o produto dos dois é 1,65 (para peças solicitadas à flexão, que não sejam super-armadas).

O C.E.B. adotou como “resistência característica” a resistência mínima a 5% de probabilidade.



Os valores X^* fixados arbitrariamente como momentos fletores de ruptura das n seções críticas correspondentes às “rótulas plásticas” devem portanto estar compreendidas entre os limites seguintes:

$$\frac{X}{\gamma_s} \leq X^* \leq X$$

(sendo: X , o momento fletor obtido em cálculo elástico, com as “cargas características” multiplicadas pelos “coeficientes de majoração”; X^* o momento de ruptura para o qual é dimensionada a seção crítica escolhida como “rótula plástica”; e γ_s o “coeficiente de majoração” média ponderada —, aplicado às cargas características”).

Em geral ter-se-á, para $\gamma_s = 1,4$:

$$0,7 X \leq X^* \leq X,$$

isto é: os momentos fletores, “arbitrados” nas n seções críticas não deverão ser inferiores a 70% dos momentos que seriam obtidos pelo cálculo elástico clássico (C).

R 2,212-2 — As rotações das “rótulas plásticas” não devem ultrapassar certos limites (capacidade de rotação) fixados por ensaios (C).

Para verificar esta condição (R 2,212-2), pode-se adotar um dos dois métodos seguintes:

R 2,212-2a) — método direto — (Baker): calculam-se as rotações das n rótulas plásticas por meio dos processos clássicos (por exemplo, trabalhos virtuais), aplicando à estrutura isostática de referência (sistema principal) as “cargas características” multiplicadas pelos “coeficientes de majoração” e os momentos X^* , arbitrados. Se as rotações ultrapassarem os valores admissíveis, modificam-se, por tentativas, êsses valores X^* (C).

R 2,212-2b) — método indireto, ou das “rotações impostas” (Macchi): adotam-se valores arbitrários para as rotações, desde que inferiores aos valores máximos admissíveis, e calcula-se o efeito dessas “rotações impostas” (deformações impostas) sobre a estrutura hiperestática.

Se os momentos nas seções críticas, resultantes do efeito das “rotações impostas” e da ação das “cargas características” multipli-



casas pelos “coeficientes de majoração” não satisfizerem à condição 2,212-1, deverão ser modificados, por tentativas, os valores “arbitrados” para essas “rotações impostas”. (5)

R 2,212-3: Para calcular as deformações de cada elemento da estrutura, entre as “rótulas plásticas” pode-se adotar um dos dois processos seguintes: (C)

- a) admitir que o elemento está em regime elástico, mas com uma “rigidez” reduzida, que leve em conta o efeito da fissuração (estádio II) Baker)
- b) tomar a “rigidez” correspondente à fase “não-fissurada” (estádio I), e considerar as deformações inelásticas devidas à fissuração (estádio II) como concentradas em uma *terceira seção crítica*, situada entre as duas seções críticas de “rótulas plásticas” que limitam o elemento considerado (Macchi).

R 2,212-4: Verificação da fissuração —

Esta verificação (v. R 2,229) torna-se particularmente necessária para as regiões vizinhas das seções críticas de “rótulas plásticas”.

Nas condições de serviço a estrutura pode ser considerada em regime elástico, com as cargas características sem majoração. Pode ser desprezada a mudança de braço de alavanca entre as condições de serviço (\bar{z}) e a situação que precede a ruptura (z), estágio III), tomando-se para tensão no aço, em serviço, no local de uma fissura na “rótula plástica”, o valor

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_a^*}{\gamma_s} \left(\frac{X}{X^*} \right)$$

que tem como valor extremo σ_a^* , quando $X^* = \frac{X}{\gamma_s}$ (sendo σ_{af} a tensão na armadura em serviço, estágio II; σ_a^* a “tensão de cálculo à ruptura do aço” = a tensão na armadura, na ruptura por flexão, no cálculo segundo o estágio III (7).

(5) — O pesquisador italiano Macchi elaborou tabelas que fornecem os efeitos de uma “rotação imposta” nas estruturas hiperestáticas mais usuais.

(7) — σ_a^* é igual ao limite de escoamento mínimo do aço dividido pelo “coeficiente de minoração” (v. nota (1). Adotando-se a NB-1, com “coeficiente de minoração” 1,18, conclui-se o valor extremo de σ_{af} (quando se adota para X^* o menor valor possível em face de R 2,212-1) é igual a 85% do limite de escoamento mínimo especificado para a categoria do aço utilizado.



COMENTARIOS

Comentários — CP 2,212

A consideração do efeito hiperestático da plasticidade é uma questão delicada, que é objeto de estudos e de um programa internacional de pesquisas organizado pelo Comité Europeu do Concreto (2). As indicações dadas sobre essa questão nos “Princípios”, “Recomendações” e “Comentários” devem ser utilizadas com prudência, e consideradas como provisórias.

Comentários — CR 2,212

O método simplificado do prof. A. L. L. Baker se baseia no cálculo das deformações da estrutura *imediatamente antes do colapso*, isto é, exatamente no instante em que a rótula plástica ($n+1$) vai começar a se formar, sendo ainda nula a sua rotação. Para aplicar esse método é preciso portanto haver certeza de que a rótula plástica ($n+1$), que determina o colapso da estrutura, — isto é, a *última* rótula plástica —, se formará em uma das seções críticas *fora* das n seções críticas escolhidas como as n primeiras rótulas plásticas. É necessário que as *reduções de momento* “arbitradas” nas n seções críticas ocasionem *umentos*, relativamente ao cálculo elástico, dos momentos em *tôdas as outras seções críticas* que não hajam sido escolhidas como rótulas plástica. Se esta condição fôr satisfeita, as seções correspondentes às n rótulas plásticas serão *sub-dimensionadas* relativamente ao cálculo elástico, e *tôdas as outras seções de momento máximo serão super-dimensionadas*. No caso contrário existirá a possibilidade de que uma rótula plástica se forme *fora* das n seções críticas escolhidas, *antes do colapso*.

CR 2,212-1 — A verificação R 2,212 pode ser dispensada em certos tipos de estruturas, para as quais se pode demonstrar, de um modo geral, que essa verificação fica automaticamente satisfeita quando fôr obedecida a condição R 2,212-1.

Como indicação provisória, poder-se-ia dispensar da verificação R 2,212-2 as vigas contínuas de vãos iguais, ou pouco diferentes, desde que a altura útil da seção transversal não seja infe-

(2) O Instituto Nacional de Tecnologia foi incluído entre os laboratórios que devem participar desse programa internacional de pesquisas.



rior a 1/10 do vão, e que as seções não sejam dimensionadas para momentos fletores superiores à metade do "momento-teto" (3).

CR 2,212-2 — Enquanto se aguardam os resultados do programa internacional de pesquisas do C.E.B., podem-se adotar provisoriamente os valores propostos pelo prof. Baker.

$$\theta_{\max} = \frac{1,5 \times 10^{-3}}{x} l_p$$

(sendo: l_p , o comprimento "equivalente" da zona plastificada e x , a distância da linha neutra à borda comprimida, no estágio III; no caso de método de ruptura com diagrama retangular das tensões de compressão, essa distância é suposta igual a 4/3 da altura da zona de compressão) (4).

Para l_p poderá tomar, de cada lado da seção crítica:

$$l_p = K_1 K_2 K_3 \left(\frac{Z}{h} \right) \cdot h$$

sendo:

Z = distância da seção de momento nulo à seção crítica

$K_1 = 0,7$ para aço doce

$K_1 = 0,9$ para aço encruado de aderência melhorada

$K_2 = 1,0$ na flexão simples

(3) — "momento-teto", segundo o projeto de norma do Comité Européen de Béton, é aquele que corresponde a uma altura da zona de compressão (diagrama retangular) igual à metade da altura útil, no caso de seção retangular. No caso geral, a definição do C.E.B. é a mesma do item 25 da NB-1 (segunda maneira de calcular a flexão composta com pequena excentricidade): considera-se como "teto" do momento da resultante das compressões no concreto em relação à armadura de tração, 3/4 do valor que corresponderia ao caso em que a zona de compressão se estendesse por toda a altura útil da seção transversal. No caso de seção retangular com armadura simples a "metade do momento-teto" corresponde a zona de compressão com altura igual a 0,21 h.

(4) — No projeto de norma do Comité Européen de Béton supõe-se que a zona de compressão (diagrama retangular equivalente) tenha altura igual a 3/4 da distância da linha neutra à borda comprimida. O valor x é portanto igual a 4/3 do valor obtido segundo a NB-1, que designaremos como x_{III} , para evitar confusões. Podemos assim escrever a fórmula de Baker:

$$\theta = \frac{3/4 (1,5 \times 10^{-3})}{x_{III}} \cdot l_p = \frac{1,125 \times 10^{-3}}{x_{III}} \cdot l_p$$

sendo x_{III} calculado de acordo com a NB-1 (estádio III).



$K_2 = \left(1 + 0,5 \frac{N}{N_u} \right)$ na flexão composta, sendo N a força normal de compressão atuante — cargas majoradas por γ_s , e N_u a carga de ruptura da peça no caso de compressão axial.

$K_2 = 0,9$ para concreto de “resistência característica” igual a 110 kg/cm², (interpolação linear no intervalo)

$K_2 = 0,6$ para concreto com “resistência característica” igual a 330 kg/cm².

Quando a seção é totalmente comprimida (pequena excentricidade) toma-se $x = h$; e, havendo cintamento eficiente, $1,0 \times 10^{-3}$ em lugar de $1,5 \times 10^{-3}$.

CR 2,212-2a — Pode-se operar duas maneiras. Pela primeira utilizam-se as “equações gerais de compatibilidade” (método das forças):

$$\delta_{10} + X^* \delta_{11} + X_2^* \delta_{12} + \dots = -\theta_1$$

para o cálculo das rotações θ , — e essas mesmas equações, com segundo membro nulo:

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots = 0$$

para o cálculo em regime elástico.

Pela segunda maneira o cálculo em regime elástico é feito por qualquer método (inclusive portanto o método das rotações e o método de Cross); em seguida calculam-se as rotações aplicando às “equações gerais de compatibilidade”, já referidas, sem os “termos de carga” δ_{10} , as diferenças

$$\Delta X = X - X^*$$

$$\Delta X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta X_2 \cdot \delta_{12} + \dots = \theta_1$$

.....

O cálculo em regime elástico pode ser aproximado, isto é, sem a preocupação de rigor excessivo. Podem ser além disso utilizados os “coeficientes de correção” das instruções soviéticas para o cálculo de sistemas hiperestáticos.

CR 2,212-3a, b — Deve-se calcular a “rigidez” na fase não fissurada (estádio I) pela fórmula:

$$K_I = E_b' I_I$$



sendo: E'_b o módulo de elasticidade longitudinal imediato do concreto, dado pela fórmula R 2,212-3 (6);

I_I o momento de inércia da seção homogeneizada não fissurada — estágio I — com

$$n = \left(\frac{E_a}{E'_b} \right)$$

Podem ser desprezadas as armaduras no cálculo de I_I .

A rigidez no local de uma fissura (rigidez no fim da fase de fissuração — fim de estágio II correspondente ao “limite L_I ” do prof. A. L. Baker) pode ser calculada pela fórmula (fig. 4):

$$K_{II} = E_a A (h - \bar{x}) (\bar{z})$$

(sendo E_a o módulo de elasticidade longitudinal do aço; A a área da seção transversal da armadura de tração; \bar{x} a distância da linha neutra à borda comprimida, e \bar{z} o “braço da alavanca”, ambas calculadas no estágio II — cálculo clássico —, com coeficiente de equivalência

$$n = 2 \frac{E_a}{E'_b};$$

(no caso da seção retangular $\bar{z} = h - \bar{x}/3$).

Quando se adota o método de cálculo R 2,212-3a pode-se tomar como “rigidez” reduzida um valor médio, entre os dois valores K_I e K_{II} acima indicados, ou, se se quer ser mais prudente, o segundo valor (limite L_I do prof. Baker, isto é, K_{II} calculado no estágio II com

$$n = 2 \left(\frac{E_a}{E'_b} \right)$$

5. Exemplos numéricos.

Exemplo n.º 1

1 — Viga engastada e apoiada, de vão $l = 6,00$ m, com carga uniformemente distribuída $\bar{q} = 1,80$ t/m. Seção em L , de acordo

(6) — A fórmula de projeto de norma do C.E.B. para o módulo de elasticidade imediato de concreto estabelece que este é igual a 21.000 vezes a raiz quadrada da resistência média à compressão em corpos de prova cilíndricos (em kg/cm²). Para $\sigma_{cm} = 180$ kg/cm² ($\sigma_R = 110$ a 135 kg/cm²) obtém-se o valor $E_s = 280.000$ kg/cm² ($E_s/E'_s = 7,5$; $2 E_s/E'_s = 15$).



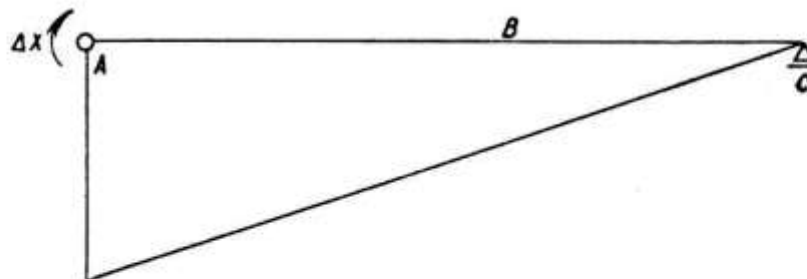
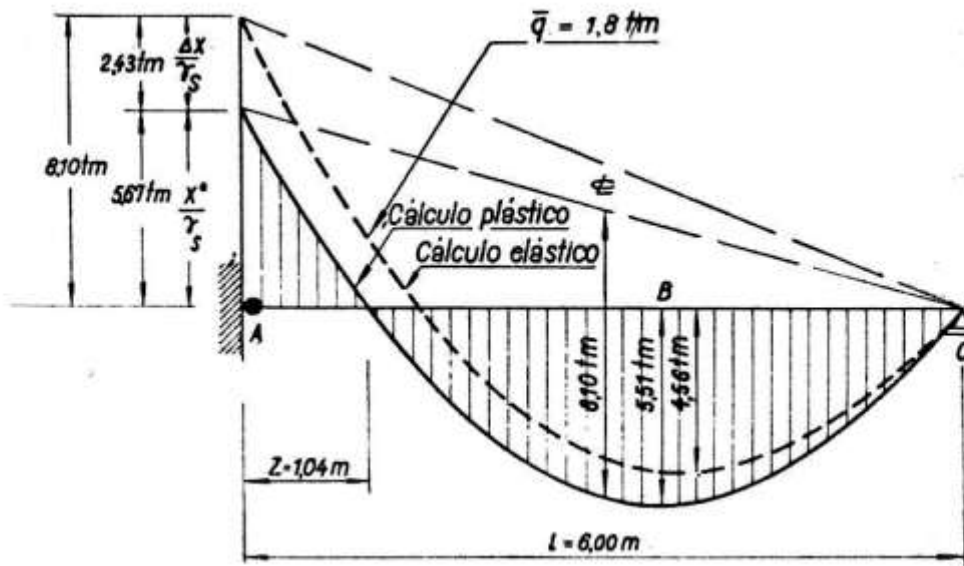
com a figura 12. Caso semelhante ao exemplo n.º 8 da série “Exercícios de Hiperestática” do prof. A. Polillo, “Estrutura” n.º 29. Essa viga pode ser considerada como um dos tramos de uma viga contínua de dois tramos iguais, com carga uniformemente distribuída (nesta hipótese a rotação θ da rótula plástica sobre o apoio central será igual ao dobro da que é calculada neste exemplo, mas, ao mesmo tempo, o comprimento de plastificação l_P será duplo, e também dupla, em consequência, a capacidade de rotação da rótula plástica).

— Os cálculos, neste exemplo, são feitos para as duas hipóteses seguintes:

- a) aço liso comum 37 CA e concreto com $\sigma_R = 110 \text{ kg/cm}^2$;
 $\sigma_e/\sigma_R = 2.400/110 = 21,8$
- b) aço torcido com saliências CA-T 50 e concreto com $\sigma_R = 150 \text{ kg/cm}^2$; $\sigma_e/\sigma_R = 5.000/150 = 33,3$.

2 — Na figura 12 está representado em linha tracejada o diagrama de momentos correspondente ao cálculo elástico (hiperestática clássica), para a carga de serviço \bar{q} . Segundo a norma brasileira NB-1 a carga de ruptura deverá ser $1,65 \bar{q}$, sendo 1,65 o coeficiente de segurança global. Os momentos de ruptura, para dimensionamento segundo o estágio III, deverão portanto ser iguais aos momentos da figura 12 multiplicados por 1,65. Quando calcularmos a rotação θ da rótula plástica multiplicaremos no entanto a carga de serviço por 1,40, apenas, pois supomos o coeficiente de segurança global 1,65 decomposto em dois fatores $\gamma_s \cdot \gamma_m = 1,40 \times 1,18$. O primeiro fator é o “coeficiente de majoração das cargas” e o segundo, chamado “coeficiente de minoração da resistência”, corresponde á possibilidade de falhas locais de execução, e, embora deva ser também considerado no dimensionamento pelo estágio III, não precisa ser considerado no cálculo da rotação θ .

3 — Como exemplo de aplicação do cálculo plástico, aplicamos ao momento de engastamento correspondente ao cálculo elástico *uma redução de 30%*. Na figura 12 está representado em linha cheia o diagrama que se obtém aplicando essa redução ao diagrama elástico traçado para a carga de serviço. Os momentos de ruptura, para dimensionamento pelo estágio III, neste cálculo plástico, serão os momentos do diagrama em linha cheia da figura 12, multiplicados por 1,65. A redução ΔX , aplicada ao hiperestático



$$\Delta X = \gamma_s \cdot 2.43 = 1.4 \cdot 2.43 = 3.40 \text{ t/m}$$

$$\theta = \frac{\Delta X L}{3EJ}$$

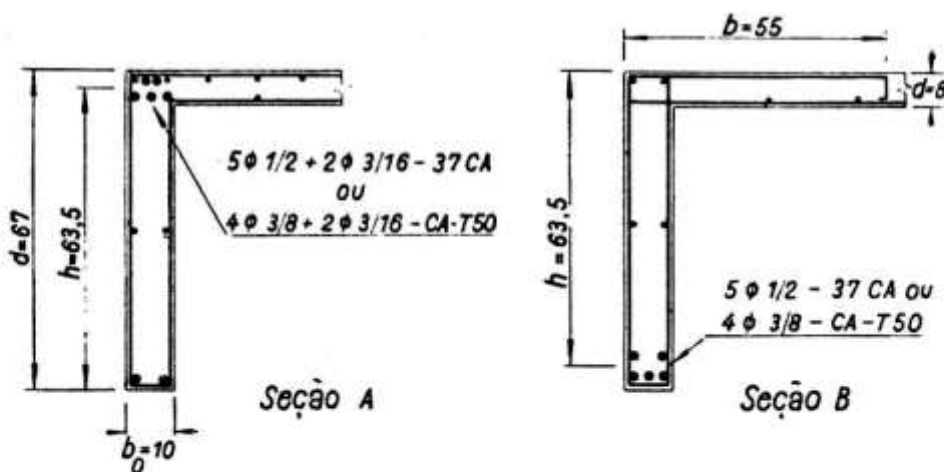


Fig. 12



X , considerada no cálculo da rotação θ , é obtida multiplicando-se por $\gamma_s = 1,40$ a parcela de 30% do momento de engastamento do cálculo elástico, calculado para a carga de serviço. Na figura 12 isso fica bem claro.

4 — Começamos pelo dimensionamento da viga no caso do cálculo ser feito pela *hiperestática clássica*. Como o dimensionamento no estádio III, segundo a NB-1, é prática corrente entre nós, transcreveremos apenas os resultados. No apoio a viga é calculada como viga retangular, e no vão como viga T , com as dimensões e altura útil indicadas na fig. 12.

<i>Momentos (hiperestática clássica)</i>	<i>Armadura de tração</i>	
	Hipótese (a)	Hipótese (b)
<i>Apoio:</i>		
$\bar{M} = 8,10 \text{ tm}$	10,6 cm ²	4,9 cm ²
$M_R = 1,65 \times 8,10 = 13,40 \text{ tm}$	(5 Ø 5/8 + + 2 Ø 1/4)	(4 Ø 1/2)
<i>Vão:</i>		
$\bar{M} = 4,56 \text{ tm}$	5,0 cm ²	2,4 cm ²
$M_R = 1,65 \times 4,56 = 7,50 \text{ tm}$	(4 Ø 1/2)	(4 Ø 3/8)

5 — Façamos agora o dimensionamento no caso do diagrama de momentos ter sido modificado, da forma anteriormente descrita, segundo um *cálculo plástico*:

<i>Momentos (cálculo hiperestático plástico)</i>	<i>Armadura de tração</i>	
	Hipótese (a)	Hipótese (b)
<i>Apoio:</i>		
$M_R = 1,65 \times 5,67 = 9,35 \text{ tm}$	6,9 cm ²	3,2 cm ²
	(5 Ø 1/2 + + 2 Ø 3/16)	(4 Ø 3/8 + + 2 Ø 3/16)
<i>Vão:</i>		
$M_R = 1,65 \times 5,51 = 9,10 \text{ tm}$	6,2 cm ²	2,9 cm ²
	(5 Ø 1/2)	(4 Ø 3/8)

6 — Antes de prosseguir, observemos que a soma do momento no apoio e do momento *máximo* no vão é ligeiramente menor, no caso do cálculo plástico, apesar de ter sido mantida invariável a “parábola isostática”. Além disso, o “braço de alavanca” da se-



ção do apoio é sensivelmente menor, no caso do cálculo plástico, devido á redução da porcentagem de armadura; ao passo que o braço de alavanca na seção de momento máximo no vão praticamente não varia, apesar do aumento da porcentagem de armadura, por tratar-se de viga T. A consequência é que a soma das armaduras negativa e positiva, nas seções de momento máximo, no caso do cálculo plástico, é 16% inferior á do cálculo elástico. Apesar da zona de momento positivo ser um pouco maior no cálculo plástico, verificar-se-á uma pequena economia de armaduras, além da maior facilidade na sua distribuição, que é evidente.

7 — Calculemos agora a “rotação da rótula plástica”, localizada na seção de engastamento. Basta para isso aplicar ao sistema principal isostático, indicado na figura 12, a redução ΔX aplicada ao momento de engastamento (redução de 30% em relação ao cálculo pela hiperestática clássica, conforme “arbitramos” no início). Repetimos que não deve ser esquecido, no cálculo de ΔX , o “coeficiente de majoração das cargas” $\gamma_s = 1,40$:

$$\Delta X = 1,40 \times 2,43 = 3,40 \text{ tm} = 3,4 \times 10^5 \text{ kg/cm}$$

A rotação da rótula plástica será:

$$\theta = \frac{\Delta X \cdot l}{3 (EJ)_{II}}$$

8 — O valor de (EJ) a adotar nêsse cálculo não é o do estádio I, usualmente utilizado na hiperestática clássica, e sim o (EJ) que se verifica no fim do estádio II, valor médio para tóda a peça.

O momento de inércia no estádio I, desprezando-se a armadura, calculado com auxilio do abaco de Strassner para seções em T, seria

$$J = 0,33 \frac{18 \times 67^3}{12} = 4,5 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

Tomando para o concreto o módulo de elasticidade efetivo 280.000 kg/cm² teríamos

$$(EJ)_I = 280.000 J = 126 \times 10^9 \text{ kg.cm}^2$$

Com o módulo de elasticidade 210.000 kg/cm² da NB-1 teríamos

$$(EJ)_I = 210.000 J = 95 \times 10^9 \text{ kg.cm}^2$$



9 — Para calcular o $(EJ)_{II}$, isto é, a “rigidez” no estágio II, temos que começar por calcular a distância x (da linha neutra a borda comprimida) e o braço de alavanca z , ambos no estágio II, com

$$n = 2 \times \frac{2.100.000}{280.000} = 2 \times 7,5 = 15$$

Para a seção do apoio utilizamos as fórmulas exatas do estágio II para seção retangular; e para a seção do vão, as fórmulas aproximadas para seções em T , indicadas no texto, em 3.8 (Beton-Kalender, “Bemessung der Stahlbetonteile”, III–E, fórmulas 21, 22 e, 28). Em seguida para obter os $(EJ)_{II}$, multiplicamos o *módulo de elasticidade do aço* (2.100.00 kg/cm²) pela *seção da armadura de tração* e pelo produto $(h - \bar{x}) \bar{z}$. Os resultados são os seguintes:

Seção transversal	Hipótese (a)	Hipótese (b)
$(\bar{x}, \bar{z} \text{ e } (EJ)_{II})$		
<i>Apoio</i>		
\bar{x}/h	0,43	0,32
\bar{z}/h	0,86	0,89
$(EJ)_{II}$	$29 \times 10^9 \text{ kg.cm}^2$	$16 \times 10^9 \text{ kg.cm}^2$
<i>Vão</i>		
\bar{x}/h	0,23	0,15
\bar{z}/h	0,94	0,94
$(EJ)_{II}$	$38 \times 10^9 \text{ kg.cm}^2$	$20 \times 10^9 \text{ kg.cm}^2$

10 — Vemos que o $(EJ)_{II}$ no apoio é um pouco menor que o $(EJ)_{II}$ no vão, o que pode causar estranheza á primeira vista. Isso se deve ao fato de que a seção do vão é em T , com menor \bar{x} , e, portanto maior $(h - \bar{x})$ e maior braço de alavanca. Como na vizinhança do ponto de momento nulo, de um e outro lado, existe um trecho da viga não fissurado, mesmo na vizinhança do colapso final, — e portanto com o (EJ) do estágio I, é fácil concluir que o (EJ) médio da viga será um pouco superior ao $(EJ)_{II}$ do estágio II. Para simplificar, ficando além disso com uma certa margem de segurança, adotaremos, para o cálculo de θ , o $(EJ)_{II}$ da seção do vão. O (EJ) médio será sem dúvida superior a êsse valor, e o erro no cálculo de θ será para mais. Temos assim:



Para a hipótese (a)

$$\theta = \frac{\Delta X \cdot l}{3 (EJ)_{II}} = \frac{(3,4 \times 10^5) (6,0 \times 10^2)}{3 \times 38 \times 10^9} = 1,8 \times 10^{-3} \text{ radianos}$$

Para a hipótese (b)

$$\theta = \frac{(3,4 \times 10^5) (6,0 \times 10^2)}{3 \times 20 \times 10^9} = 3,4 \times 10^{-3} \text{ radianos}$$

No caso de aço torcido CA-T 50 a peça é menos armada, e portanto de menor rigidez, que no caso de aço liso 37 CA. Veremos que em compensação a capacidade de rotação será maior, no caso de CA-T50.

11 — Calculemos agora a “capacidade de rotação da rótula plástica”, utilizando as fórmulas de BAKER, citadas no texto em 3.10 e em 4 (2,212-2). Para isso temos que calcular previamente a altura x_{III} da zona de compressão, segundo o estágio III. Utilizaremos a conhecida fórmula

$$x_{III} = \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_R} \frac{S_f}{b h} \right) \cdot h \quad (\text{notações da NB-1})$$

Para a hipótese (a) obtem-se

$$x_{III}/h = 21,8 \frac{6,9}{10 \times 63,5} = 0,238$$

Para a hipótese (b)

$$x_{III}/h = 33,3 \frac{3,2}{10 \times 63,5} = 0,168$$

11 — De acôrdo com a figura temos $Z = 105$ cm

$$(Z/h)^{1/4} = (105/63,5)^{1/4} = 1,65^{1/4} = 1,13$$

Por outro lado o coeficiente K_1 é igual a 0,7 para o 37 CA e 0,9 para o CA-T 50; o coeficiente K_2 é igual a 1; e o coeficiente K_3 é igual a 0,9 para concreto com $\sigma_R = 110$ kg/cm² e 0,85 para $\sigma_R = 150$ kg/cm².

Podemos então calcular a capacidade máxima de rotação da rótula plástica



<i>Cálculo de θ_{\max}</i>	<i>Hipótese (a)</i>	<i>Hipótese (b)</i>
$\frac{3/4 (1,5 \times 10^{-3})}{x_{III}}$	$\frac{4,8 \times 10^{-3}}{h}$	$\frac{6,7 \times 10^{-3}}{h}$
l_p	0,71 h	0,86 h
θ_{\max}	$3,4 \times 10^{-3}$	$5,8 \times 10^{-3}$
$\theta_{\text{calculado}}$	$1,8 \times 10^{-3}$	$3,4 \times 10^{-3}$

Vemos que a rotação θ é inferior à capacidade de rotação, em ambas as hipóteses. Está portanto satisfeita essa condição, e não é necessário modificar a redução ΔX arbitrada para X . Prevalece neste caso a outra condição, que fixa em 30% a redução máxima permissível (vide 3.6, no texto).

Si em lugar de 6 metros o vão fôsse de 9 metros, mantendo-se os momentos fletores e as armaduras (para isso a carga q teria que ser reduzida para 0,8 t/m), a rotação θ aumentaria proporcionalmente ao vão, isto é, aumentaria de 50%. A distância Z também aumentaria na mesma proporção, mas, como o comprimento de plastificação é proporcional a $(Z/h)^{1/4}$, e não a (Z/h) , a capacidade de rotação aumentaria apenas de 11%. Vemos assim que as peças muito delgadas, em que a relação entre o vão e a altura da seção é grande, são menos favoráveis para a aplicação do cálculo plástico.

12 — Para terminar, façamos a verificação da fissuração na seção do apoio. A tensão da armadura em serviço (ainda na fase elástica) será

$$\sigma_{af} \cong \frac{\sigma_s}{1,65} \frac{X}{X^*} = \frac{\sigma_s}{1,65} \frac{1}{0,7} = 0,86 \sigma_s$$

isto é, 2.060 kg/cm² na hipótese (a) e 4.300 kg/cm² na hipótese (b). Admitindo que o "tirante fictício" de concreto que envolve a armadura de tração tenha aproximadamente 7 cm de altura (dóbro da distância do centro de gravidade da armadura à borda tracionada), a taxa de armadura μ^* referida a êsse tirante fictício será, para a hipótese (a):

$$\frac{6,9}{10 \times 7} = 0,10$$

Para a hipótese (b):

$$\frac{3,2}{10 \times 4} = 0,08$$



Aplicando o critério de fissuração do C.E.B. (vide 3.12 no texto):

Hipótese (a)

$$\delta \leq \frac{42.000}{2.060 (0,4 + 4,5 \times 0,10)} \mu_* = 24 \times 0,10 = 2,4 \text{ cm}$$

Como o diâmetro adotado foi 1,27 cm, está satisfeita a condição.

Hipótese (b)

$$\delta \leq \frac{66.000}{4.300 (0,4 + 4,5 \times 0,08)} \mu_* = 20 \times 0,08 = 1,6 \text{ cm}$$

Como o diâmetro foi 0,95 cm, está satisfeita a condição.

Si se tratasse de viga de maiores proporções, como as vigas de pontes, a limitação de diâmetro seria condição primordial para a aplicação do cálculo plástico. No caso de vigas contínuas comuns de edifícios, armadas com barras de pequeno diâmetro, esta condição é quase sempre satisfeita.

Outra observação importante é a seguinte: a seção do meio do vão, ao contrário da do apoio, foi dimensionada para um momento maior que o momento correspondente ao cálculo elástico (no nosso caso, 20% maior). Em serviço, portanto, a tensão na armadura positiva será inferior á tensão admissível usual. Na hipótese (a) a tensão na armadura positiva será apenas 1.200 kg/cm² e na hipótese (b), apenas 2.500 kg/cm² (em lugar das tensões usuais 1.500 e 3.000 kg/cm²). Esse fato é muito favorável para a segurança contra fissuração nociva na zona de momentos positivos. Eis aqui uma outra vantagem do cálculo plástico, no caso de vigas T suportando lajes; pois nessas vigas, comuns em edifícios, a fissuração mais a temer-se é a que se verificaria na zona de momentos positivos, isto é, na face inferior da viga. A fissuração na face superior, na zona de momentos negativos, é em geral impedida pela laje, com sua armadura de ferros finos.

Nota: no próximo número de "Estrutura" serão apresentados outros exemplos numéricos, utilizando sistemas hiperestáticos constantes dos "Exercícios de Hiperestática" do Prof. A. Polillo.

* * *