| | | |
|---|---|---|
| | **Tabelas de Flexão - EB3-1967**<br>**Prof. Fernando Lobo Carneiro** | Prof.. Eduardo C. S. Thomaz<br>Notas de aula |


**Revista editada pelo Prof. Aderson Moreira da Rocha**

# SUMÁRIO

# TABELAS COM COEFICIENTES ADIMENSIONAIS PARA O CALCULO DE PEÇAS DE CONCRETO ARMADO NO ESTADIO III (1)-

*Instituto Nacional de Tecnologia*
*Divisão de Ensino e Documentação*

(de acordo com a EB-3/67 e seu anexo)

FERNANDO LUIZ LOBO B. CARNEIRO

+ + +

## I -FLEXÃO SIMPLES

### A) SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA SEMPLES

(1) $y = k_y . h$ (2) $z = k_z . h$

(3) $M_r = k_{mr} . (b . h^2 . \sigma_R)$ (4) $S_f = \dfrac{M_r}{\sigma_e . z}$

(5) $h = k_h \sqrt{\dfrac{M_r}{b . \sigma_R}}$ (6) $k_h = \dfrac{h}{\sqrt{\dfrac{M_r}{b . \sigma_R}}}$

(7) $k_{mr} = \dfrac{M_r}{b . h^2 . \sigma_R}$ $k_y = \mu \dfrac{\sigma_e}{\sigma_R}$

Os coeficientes $k$ são adimensionais, e podem ser obtidos nas tabelas I e II anexas (2).

Todas as grandezas que figuram nas fórmulas devem ser expressas nas mesmas unidades (por exemplo $b$ e $h$ em cm, $M$ em kgf.cm,

(1) Estas tabelas podem ser livremente reproduzidas, desde que seja citada a fonte.

(2)

| Cat. | $\sigma_e$ | $\sigma'_e$ | Cat. | $\sigma_e$ | $\sigma'_e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| CA – 24 | 2.400 | 2.400 | CA – 50A | 5.000 | 4.200 |
| CA – 32 | 3.200 | 3.200 | CA – 50B | 5.000 | 4.000 |
| CA – 40A | 4.000 | 4.000 | CA – 60A | 6.000 | 4.200 |
| CA – 40B | 4.000 | 3.600 | CA – 60B | 6.000 | 4.200 |

(em kgf/cm²)

## TABELAS PARA DIMENSIONAMENTO COM COEFICIENTES ADIMENSIONAIS

### TABELA I

### ARMADURA SIMPLES — SEÇÃO RETANGULAR

| | | | | Coeficiente de redução de $\sigma_e$ para os aços $B$ (1) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_y$ | $k_z$ | $k_{mr}$ | $k_h$ | *CA* 24 | *CA* 32 | *CA* 40*A* | *CA* 40*B* | *CA* 50*A* | *CA* 50*B* | *CA* 60*A* | *CA* 60*B* |
| 0,02 | 0,99 | 0,020 | 7,08 | | | | | | | | |
| 0,04 | 0,98 | 0,039 | 5,06 | | | | | | | | |
| 0,06 | 0,97 | 0,058 | 4,15 | | | | | | | | |
| 0,08 | 0,96 | 0,077 | 3,60 | | | | | | | | |
| 0,10 | 0,95 | 0,095 | 3,24 | | | | | | | | |
| 0,12 | 0,94 | 0,112 | 2,97 | | | | | | | | |
| 0,14 | 0,93 | 0,130 | 2,78 | | | | | | | $\sigma_e$ | $\sigma_e$ |
| 0,16 | 0,92 | 0,147 | 2,61 | | | | | | $\sigma_e$ | | |
| 0,18 | 0,91 | 0,163 | 2,48 | | | | | | | | |
| 0,20 | 0,90 | 0,180 | 2,36 | | | | | | | | |
| 0,22 | 0,89 | 0,196 | 2,26 | | | | $\sigma_e$ | $\sigma_e$ | | | |
| 0,24 | 0,88 | 0,211 | 2,18 | | | | | | | | |
| 0,26 | 0,87 | 0,226 | 2,10 | | | | | | | | |
| 0,28 | 0,86 | 0,241 | 2,04 | | | | | | | | |
| 0,30 | 0,85 | 0,255 | 1,98 | | | $\sigma_e$ | | | | | |
| 0,314 | 0,843 | 0,264 | 1.94 | $\sigma_e$ | $\sigma_e$ | | | | | | |
| 0,32 | 0,84 | 0,269 | 1,93 | | | | | | | | 0,99 |
| 0,333 | 0,833 | 0,277 | 1,90 | | | | | | | | |
| 0,34 | 0,83 | 0,282 | 1,88 | | | | | | 0,99 | | 0,97 |
| 0,355 | 0,822 | 0,292 | 1,85 | | | | | | | | |
| 0,36 | 0,82 | 0,295 | 1,84 | | | | 0,99 | | 0,97 | | 0,95 |
| 0,38 | 0,81 | 0,308 | 1,81 | | | | 0,97 | | 0,95 | | 0,93 |
| 0,40 | 0,80 | 0,320 | 1,77 | | | | 0,96 | | 0,93 | | 0,91 |
| 0,413 | 0,794 | 0,328 | 1,74 | | | | | | | | 0,90 |
| 0,42 | 0,79 | 0,332 | 1,73 | | | | 0,94 | | 0,92 | | |
| 0,44 | 0,78 | 0,343 | 1,71 | | | | 0,93 | | 0,91 | | |
| 0,446 | 0,777 | 0,346 | 1,70 | | | | | | 0,90 | | |
| 0,46 | 0,77 | 0,354 | 1,68 | | | | 0,91 | | | | |
| 0,48 | 0,76 | 0,364 | 1,66 | | | | 0,90 | | | | |
| 0,486 | 0,757 | 0,367 | 1,65 | | | | 0,90 | | | | |
| 0,500 | 0,750 | 0,375 | 1,63 | | | | | | | | |

(1): multiplicar $\sigma_e$ pelos coeficientes de redução da tabela quando se desejar ultrapassar os valores-limite de $k_y$ indicados para os aços $B$ (no máximo até os valores limite indicados para os aços $A$ correspondentes).

$\sigma_R$ e $\sigma_e$ em kgf/cm²). Pode-se também adotar para $M_r$ e $b$ unidade de comprimento diferente da usada para h, $\sigma_R$ e $\sigma_e$, desde que a unidade de fôrça seja a mesma (por exemplo $b$ em m, $M_r$ em kgf.m, $h$ em cm, $\sigma_R$ e $\sigma_e$ em kgf/cm²; ou $b$ em m, $M_r$ em t.m, $h$ em cm $\sigma_R$ e $\sigma_e$ em t/cm²), *menos em* (4)!

*Em edifícios*: $M_r = 1{,}65\ (M_g + M_p) = 1{,}65\ M$

Nas *pontes* e em edifícios industriais com pontes rolantes o momento oriundo das cargas móveis deve ser multipicado por 2:

$$M_r = 1{,}65\ (M_g + M_p) + 2\ M_{p,\ \text{móveis}}$$
$$= 1{,}65\ (M_g + M_p + 1{,}2\ M_{p,\ \text{móveis}})$$

TABELA II

VALORES-LIMITE PARA ARMADURA SIMPLES

| Categoria da armadura | $k_{y1}$ | $k_{z1}$ | $k_{mr1}$ | $k_{h1}$ |
|---|---|---|---|---|
| $CA-24$ | 0,500 | 0,750 | 0,375 | 1,63 |
| $CA-32$ | 0,500 | 0,750 | 0,375 | 1,63 |
| $CA-40\ A$ (ou $40\ B$ com $0{,}9\ \sigma_e$) | 0,486 | 0,757 | 0,367 | 1,65 |
| $CA-40\ B$ | 0,355 | 0,822 | 0,292 | 1,85 |
| $CA-50\ A$ (ou $50\ B$ com $0{,}9\ \sigma_e$) | 0,446 | 0,777 | 0,346 | 1,70 |
| $CA-50\ B$ | 0,333 | 0,833 | 0,277 | 1,90 |
| $CA-60\ A$ (ou $60\ B$ com $0{,}9\ \sigma_e$) | 0,413 | 0,794 | 0,328 | 1,74 |
| $CA-60\ B$ | 0,314 | 0,843 | 0,264 | 1,94 |

Momento máximo com armadura simples:

(8) $M_{r1} = k_{mr1} \cdot (b \cdot h^2 \cdot \sigma_R)$ (9) $y_1 = k_{y1} \cdot h$

(10) $z_1 = k_{z1} \cdot h$ (11) $S_{f1} = \dfrac{M_{r1}}{z_1 \cdot \sigma_e}$

Altura mínima com armadura simples:

(12) $k_1 = h_{h1} \cdot \sqrt{\dfrac{M_r}{b \cdot \sigma_R}}$

*Obs:* pode-se também usar para os aços $B$ os valores-limite dos aços $A$ correspondentes, desde que no cálculo de $S_{f1}$ se substitua $\sigma_e$ por $0{,}9\ \sigma_e$.

+++ +++

## B) SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA DUPLA

$M_r > M_{r1}$ ou $h < h_1$

$M_{r2} = M_r - M_{r1}$ (calcular $M_{r1}$ pela fórmula (8))

(13) $S_{f2} = \dfrac{M_{r2}}{(h-h')\,\sigma_e}$ (14) $S_f' = \dfrac{M_{r2}}{(h-h')\sigma'_e}$

(calcular $S_{f1}$ pela fórmula (11))

(15) $S_f = S_{f1} + S_{f2}$ $k_y = \mu \dfrac{\sigma_e}{\sigma_R} - \mu' \dfrac{\sigma_e'}{\sigma_R}$

*Obs:* si no cálculo de $M_{r1}$ forem usados para os aços $B$ os valores--limite dos aços $A$ correspondentes, substituir $\sigma_e$ por 0,9 $\sigma_e$ tanto no cálculo de $S_{f1}$ como no de $S_{f2}$.

## C) VIGAS T

(com mesa de espessura $d$ e largura $b$ e alma de largura $b_o$)

1.° *caso*) $y \leq d$

— fazer o cálculo como seção retangular de largura $b$

Momento máximo para o 1.° caso:

(16) $M_{rI} = b \,.\, d \,.\, \sigma_R\,(h - \dfrac{d}{2})$, com $z = h - \dfrac{d}{2}$

2.° *caso*) $y > d$

— decompor o momento total em duas parcelas, uma resistida pelas abas da mesa (largura total $= b - b_o$), e outra resistida pela alma, como viga retangular de largura $b_o$ e altura útil $h$

*abas*: (17) $M_{rI} = (b - b_o)\,d.\sigma_R\,(h - \dfrac{d}{2})$, com $z_1 = h - \dfrac{d}{2}$

(18 $S_{fI} = \dfrac{M_{rI}}{\sigma_e \,.\, (h - \dfrac{d}{2})}$

*alma*: (19) $M_{rII} = M_r - M_{rI}$

Calcular como seção retangular de largura $b_0$ e altura $h$, obtendo assim a seção $S_{fII}$ (fórmulas —(6)— e —(4)—.

(20) $S_f = S_{fI} + S_{fII}$

# II - FLEXÃO COMPOSTA

## TABELA III

### CONCRETO ARMADO NO ESTADIO III — FLEXÃO COMPOSTA — SEÇÃO RETANGULAR

| Coeficientes | | | | $\sigma_{au}$ = Tensão na Armadura de Tração (t/cm²) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_y$ | $k_x$ | $k_{mr}$ | $k_h$ | *CA* 24 | *CA* 32 | *CA* 40*A* | *CA* 40*B* | *CA* 50*A* | *CA* – 50*B* | *CA* 60*A* | *CA* 60*B* |
| 0,02 | 0,99 | 0,020 | 7,08 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,04 | 0,98 | 0,039 | 5,06 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5.00 | 6.00 | 6,00 |
| 0,06 | 0,97 | 0,058 | 4,15 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,08 | 0,96 | 0,077 | 3,60 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,10 | 0,95 | 0,095 | 3,24 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,12 | 0,94 | 0,112 | 2,97 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,14 | 0,93 | 0,130 | 2,78 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,16 | 0,92 | 0,147 | 2,61 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,18 | 0,91 | 0,163 | 2,48 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,20 | 0,90 | 0,180 | 2,36 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5.00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,22 | 0.89 | 0.196 | 2,26 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,24 | 0,88 | 0,211 | 2,18 | 2,40 | 3,20 | 4.00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,26 | 0,87 | 0,226 | 2,10 | 2,40 | 3,20 | 4.00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,28 | 0,86 | 0,241 | 2,04 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,30 | 0,85 | 0,255 | 1,98 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,314 | 0,843 | 0,264 | 1,94 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 6,00 |
| 0,32 | 0,84 | 0,269 | 1,93 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5,00 | 6,00 | 5,95 |
| 0,333 | 0,833 | 0,277 | 1,90 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 5.00 | 6.00 | 5,86 |
| 0,34 | 0,83 | 0,282 | 1,88 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 4,96 | 6,00 | 5,81 |
| 0.355 | 0,822 | 0,292 | 1,85 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 4,00 | 5,00 | 4,88 | 6,00 | 5,71 |
| 0,36 | 9 82 | 0,295 | 1,84 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 3,98 | 5,00 | 4,85 | 6,00 | 5,69 |
| 0,38 | 0,81 | 0 308 | 1,81 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 3,90 | 5,00 | 4,76 | 6,00 | 5,57 |
| 0,40 | 0,80 | 0,320 | 1,77 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 3,84 | 5,00 | 4,68 | 6,00 | 5,47 |
| 0,413 | 0,794 | 0,328 | 1,74 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 3,79 | 5,00 | 4,62 | 6,00 | 5,40 |
| 0,42 | 0,79 | 0,332 | 1,73 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 3,77 | 5,00 | 4,59 | 5,77 | 5,30 |
| 0,44 | 0,78 | 0,343 | 1,71 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 3,72 | 5,00 | 4,52 | 5,19 | 5,00 |
| 0,446 | 0,777 | 0,346 | 1,70 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 3.69 | 5,00 | 4,50 | 5,00 | 4,90 |
| 0,46 | 0.77 | 0,354 | 1,68 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 3,66 | 4,64 | 4,32 | 4,64 | 4,64 |
| 0,48 | 0,76 | 0,364 | 1,66 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 3,61 | 4,14 | 4,07 | 4,14 | 4,14 |
| 0,486 | 0,757 | 0,367 | 1,65 | 2,40 | 3,20 | 4,00 | 3,60 | 4,00 | 4,00 | 4,00 | 4,00 |
| 0,500 | 0,750 | 0,375 | 1,63 | 2,40 | 3,20 | 3,67 | 3,44 | 3,67 | 3,67 | 3,67 | 3,67 |
| Tensão na Armadura de Compressão (t/cm²): $\sigma'_{au} = \sigma_e'$ | | | | 2,40 | 3,20 | 4.00 | 3,60 | 4,20 | 4,00 | 4,20 | 4,20 |

O valor de $k_y$, dado na tabela para o $k_h$ obtido neste cálculo, deverá ser inferior ao valor limite indicado para a categoria da armadura. Se, no caso de aços $B$, fôr ultrapassado êsse valor-limite (no máximo até o valor-limite da categoria $A$ correspondente), deve-se substituir $\sigma_e$ pelo valor reduzido indicado na tabela I, tanto para o cálculo de $S_{f1}$ como de $S_{fII}$.

*Obs:* tanto no 1.° caso como no 2.° a altura $y = k_y \cdot h$ da zona de compressão equivalente deverá além disso satisfazer à condição de que o momento estático dessa zona de compressão em relação ao centro de gravidade da armadura de tração não seja superior a 3/4 do momento estático da área total da seção transversal.

## INSTRUÇÕES PARA O USO DA TABELA PARA FLEXÃO COMPOSTA, SEÇÃO RETANGULAR

(TABELA III)

### NOTAÇÕES

$M_r$ = momento fletor no estado-limite último (ruptura).

$N_r$ = força normal no estado-limite último (ruptura).

*em edifícios:*

$$M_r = 1{,}65\,(M_g + M_p) = 1{,}65\,M$$
$$N_r = 1{,}65\,(N_g + N_p) = 1{,}65\,N$$

*nas pontes* (e em edifícios industriais com cargas rolantes):

$$M_r = 1{,}65\,(M_g + M_p) + 2M_{p,moveis} = 1{,}65\,(M_g + M_p + 1{,}2\,M_{p,moveis})$$

$$N_r = 1{,}65\,(N_g + N_p) + 2\,N_{p,moveis} = 1{,}65\,(N_g + N_p + 1.2\,N_{p,moveis})$$

$$\boxed{M_{er} = M_r + N_r\left(\frac{h-h'}{2}\right)} =$$ momento fletor (no estado-limite último) referido ao centro de gravidade da armadura de tração (ou situada do lado menos comprimido)

$$\boxed{M'_{er} = M_r - N_r\left(\frac{h-h'}{2}\right)} =$$ momento fletor (no estado-limite último) referido ao centro de gravidade da armadura de compressão.

*Observação:* ao usar as fórmulas aqui indicadas. deve-se considerar positiva a força normal, quando de compressão, e negativa quando de tração, e sempre positivo o momento fletor.

$\sigma_{au}$ = tensão na armadura de tração no estado-limite último (ruptura), igual à tensão de escoamento $\sigma_e$ quando $k_y = y/h \leq k_{y1}$ (v. tabela II; na tabela III os valores de $k_{y1}$ correspondem às tensões $\sigma_{au}$ grifadas)

$\sigma'_{au}$ = tensão na armadura de compressão no estado-limite último, igual a $\sigma'_e$ em todas as regras de dimensionamento adiante descritas, desde que, na flexão composta com grande excentricidade, se tenha

$$h' \leq \frac{4}{7} \cdot y$$

*Observação*: ao usar as fórmulas aqui indicadas, devem-se considerar positivas as tensões $\sigma_{au}$ e $\sigma'_{au} = \sigma'_e$.

* * *

Os valores de $\sigma_{au}$ são dados na tabela III em função de $k_y = y/h$. Os coeficientes $k_z = z/h$, $k_{mr} = k_y \cdot k_z$ e $k_h = \sqrt{\frac{1}{k_{mr}}}$ são os mesmos da tabela I.

* * *

As demais notações são as da *NB*–1/60 e do Anexo da *EB*–3/67

* * *

## EXPLICAÇÕES TEORICAS

*GRANDE EXCENTRICIDADE*: Definem-se aqui como de "*flexão composta com grande excentricidade*" todos os casos em que é possível equilibrar os esforços solicitantes utilisando-se armadura simples (de tração) ou dupla (de tração e de compressão), sem que a altura $y$ da "zona de compressão equivalente" ultrapasse o valor 0,5 h, isto é, desde que $k_y \leq 0{,}5$. No caso limite, fronteira entre a "*grande excentricidade*" e a "*excentricidade intermediária*", a armadura de tração é teòricamente nula, embora se deva sempre colocar uma armadura mínima; e o equilíbrio é obtido com utilização de uma armadura de compressão, sendo a altura da "zona de compressão equivalente" $y = 0{,}5\,h$, ou $k_y = 0{,}5$

Para todos os casos de "grande excentricidade" o *dimensionamento é feito como se se tratasse de flexão simples, tomando-se em lugar de $M_r$ o momento fletor referido ao centro de gravidade da armadura de tração $M_{cr} = M_r + N_r\left(\frac{h-h'}{2}\right)$, e subtraindo-se da armadura de tração assim obtida o valor $N_r/\sigma_{su}$,* ou ($N_r/\sigma_e$ quando $k_y \leq k_{y1}$). Conforme o caso, ter-se-á de usar armadura simples ou dupla. Na "*marcha de cálculo*" exposta mais adiante estão pormenorizados todos os casos que possam ocorrer. Si a força normal fôr de tração, o dimensionamento será feito considerando-se $N_r$ negativo.

Si a armadura de tração encontrada fôr negativa, isso significa que *a marcha de cálculo seguida já não mais se aplica*, pois o caso não é de "*grande excentricidade*", mas de "*excentricidade intermediária*".

Estabelecendo a equação de equilíbrio de momentos em relação ao centro de gravidade da armadura de compressão para $k_y = 0{,}5$ e armadura de tração nula, é fácil deduzir a seguinte condição para que se tenha "grande excentricidade":

$$M'_{cr} = M_r - N_r\left(\frac{h-h'}{2}\right) \geq -\,[0{,}5\,(0{,}25 - h'/h)]\,.\,b\,h^2\,\sigma_R$$

(atende-se para o fato de que o 2.° membro da desigual de é negativo)

Essa condição também pode ser escrita em função de excentricidade da força normal, condiderándo-se que $h^2 \cong (h-h').\,d$

$$M_r/N_r = e \geq \left(\frac{h-h'}{2}\right)\left[1 - \frac{(0{,}25 - h'/h)}{N_r/(b\,\sigma_r)}\right]$$

*EXCENTRICIDADE INTERMEDIARIA*: Definem-se aqui como de "*flexão composta com excentricidade intermediária*" todos os casos de flexão composta com força normal de compressão em que é possível equilibrar os esforços solicitantes utilizando-se unicamente uma armadura de compressão (isto é, considerando-se armadura nula junto à borda tracionada ou menos comprimida), sendo a altura $y$ da zona de compressão equivalente" compreeendida entre 0,5 $h$ e a altura total $d$. Quando forem necessárias duas armaduras de compressão, o caso será de "*pequena excentricidade*".

Nos casos de "excentricidade intermediária" a borda mais afastada do ponto de aplicação da força nromal excêntrica de compressão pode ser tracionada (deformação unitária = alongamento), sempre que $\underline{x < h}$ ou $\underline{y < 0{,}75\,h}$, ou comprimida (deformação unitária = = encurtamento), sempre que $x > h$ ou $y > 0{,}75\,h$. Como se supõe nula, de acôrdo com a condição anterior, a armadura junto a essa borda, não interessa conhecer o valor de deformação unitária correspondente. A tensão na armadura de compressão, situada junto à borda mais próxima da fôrça normal excêntrica de compressão, será $\sigma'_{au} = \sigma'_e$, e portanto conhecida, independentemente do valor de $y$. Por outro lado, seja qual fôr o valor de $y$ (desde que $0{,}5\,h \leq y \leq d$), o momento da resultante das tensões de compressão no concreto será constante, e igual a $\underline{0{,}375\,b\,h^2\sigma_R}$ (*momento-teto*). A equação de equilíbrio, em relação ao centro de gravidade da armadura situada junto à borda tracionada ou menos comprimida, independe portanto do conhecimento do valor de $y$ (e do valor da tensão última de compressão no concreto, definida na alínea *e* do item 3 do Anexo da EB-3/67). Essa equação fornece imediatamente:

$$S'_t = \frac{M_{er} - 0{,}375\,b\,h^2\,\sigma_R}{\sigma'_e\,(h - h')}$$

sendo $S_t = 0$ teòricamente, embora se deva sempre colocar uma *armadura mínima*, junto à borda tracionada ou menos comprimida.

A condição para que se tenha "excentricidade intermediária" é fàcilmente obtida combinando o limite dado no item anterior com o que se obtém estabelecendo a equação de equilíbrio em relação à armadura de compressão (situada junto à borda mais comprimida), para o caso extremo em que, sendo $S_t = 0$, tem-se $y = d$ (e a tensão de compressão última do concreto é $0{,}75\sigma_R$, de acôrdo com as hipoteses do Anexo da *EB*-3/67):

$$-\,0{,}5\,(0{,}25 - h'/h)\,b\,h^2\,\sigma_R \geq M'_{er} \geq -\,0{,}375\,b\,h^2\,\sigma_R$$

(atente-se para o fato de que todos os membros das desigualdades são negativos).

Essa condição também pode ser escrita em função da excentricidade da fôrça normal, considerando-se que $h^2 \cong (h-h')\,.\,d$ :

$$\left(\frac{h-h'}{2}\right)\left[\,1 - \frac{(0{,}25 - h'/h)}{N_r/(bd\sigma_R)}\,\right] \geq M_r/N_r = e \geq$$

$$\geq \left(\frac{h-h'}{2}\right)\left[\,1 - \frac{1}{N_r/\,(0{,}75\,b\,d\,\sigma_R}\,\right]$$

*PEQUENA EXCENTRICIDADE*: Definem-se aqui como de "*flexão composta com pequena excentricidade*" os seguintes casos:

a) "*Compressão excêntrica*": todos os casos de flexão composta com força normal de compressão em que, sendo a seção totalmente comprimida, com $y = d$., são necessárias duas armaduras de compressão, uma junto à borda mais próxima do ponto de aplicação da fôrça normal excêntrica de compressão ($S'_t$), e outra junto á outra borda ($S_t$), para equilibrar os esforços solicitantes;

b) "*tração excêntrica*": todos os casos de flexão composta com força normal de tração em que são necessárias duas armaduras de tração para equilibrar os esforços solicitantes, sendo a seção transversal totalmente tracionada, e portanto nula a contribuição do concreto.

A condição para que se tenha "*compressão excêntrica*" já foi dada no item anterior:

$$M'_{er} \leq -0{,}375\, b\, h^2 \sigma_R \quad \text{ou} \quad e \leq \left(\frac{h-h'}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{N_r/(0{,}75\, b\, d\sigma_R)}\right]$$

A condição para que se tenha "*tração excêntrica*" consiste simplesmente em que $M_{er}$ (com $N_r$ negativo), seja negativo, isto é, em que o valor absoluto da excentricidade seja inferior a $\left(\frac{h-h'}{2}\right)$.

Tanto para a "compressão excêntrica" como para a "tração excêntrica" o equilíbrio póde ser obtido utilizando-se armaduras diferentes nas duas bordas, e supondo-se que as deformação nas duas bordas são iguais. ($x = \infty$). Póde-se também, por motivos construtivos, adotar armadura simétrica, colocando, junto a ambas as bordas, armaduras iguais à maior armadura calculada pelo processo anterior; neste caso teremos $x \leq \infty$, e a tensão na armadura mais afastada do ponto de aplicação da força normal será inferior á da outra. Em qualquer dos casos o dimensionamento independe do conhecimento de $x$.

$$\textit{Compressão excêntrica:} \quad S'_t = \frac{M_{er} - 0{,}375\, b\, h^2 \sigma_R}{\sigma'_e (h-h')}$$

$$S_t = \frac{-0{,}375\, b\, h^2 \sigma_R - M'_{er}}{\sigma'_e\, (h-h')}$$

(atente-se para o fato de que $M'_{er}$ é negativo).

Observe-se que $S_t + S'_t = \dfrac{N_r - 0{,}75\, b\, d\, \sigma_R}{\sigma'_{e}}$, isto é, a soma das duas armaduras independe da excentricidade e é igual a armadura total que seria necessária no caso de compressão axial (segundo a nova fórmula de cálculo de pilares do Anexo da *EB*–3/67).

$$\textit{Tração excêntrica: } S'_t = \frac{-\, M_{er}}{\sigma_e\,(h - h')} \qquad S_t = \frac{M'_{er}}{\sigma_e\,(h - h')}$$

(atente-se para o fato de que $M'_{er}$ é positivo e $M_{er}$ negativo)

## MARCHA DE CALCULO PARA DIMENSIONAMENTO

Esta marcha de cálculo aplica-se à *flexão composta com fôrça normal de compressão, seções retangulares.* Para o caso de fôrça normal de tração, bastam as indicações da "esplicação teórica".

I — *Dados*: $M_r$, $N_r$, $\sigma_R$, a categoria do aço, $b$ e $h$, determinam-se as armaduras $S_t$ e $S'_t$ de acôrdo com a marcha a seguir. Se a altura útil $h$ não fôr prefixada, póde ser determinada por tentativas, como se se tratasse de flexão simples com momento fletor igual a $M_{er}$ (as tentativas são necessárias, pois para calcular $M_{er}$ é preciso conhecer $\dfrac{h - h'}{2}$ e portanto $h$) . V. *notações*).

II — *Cálculo de* $M_{er}$ e $M'_{er}$:

$$21)\quad M_{er} = M_r + N_r \left(\frac{h - h'}{2}\right)$$

$$22)\quad M'_{er} = M_r - N_r \left(\frac{h - h'}{2}\right)$$

Póde ser adotado para $h'$ o valor aproximado $h' = 0{,}05\, h$.

O dimensionamento nos casos de "grande excentricidade" póde ser feito dispensando-se o cálculo de $M'_{er}$; si a armadura $S_t$ encontrada fôr negativa, isso significa que o caso não é de "grande excentricidade", mas de "excentricidade intermediária" ou de "pequena excentricidade".

*III — Grande excentricidade*: quando $\dfrac{M'_{er}}{b\, h^2 \sigma_R} \geq$

$$\geq -\; [\, 0{,}5\, (0{,}25 - h'/h)\, ]$$

(supondo $h'/h = 0{,}05$: quando $\dfrac{M'_{er}}{b\, h^2 \sigma_R} \geq -\, 0{,}100$)

a) *Armadura simples*: quando $\frac{M_{er}}{b\,h^2\sigma_R} \leq 0{,}375$

$$23)\quad k_{mr} = \frac{M_{er}}{b\,h^2\,\sigma_R}$$

Na Tabela III, na linha correspondente a $k_{mr}$, obtém-se $k_y$, $k_z$ e a tensão na armadura $\sigma_{au}$. Quando $k_y \leq k_{yl}$, tem-se $\sigma_{au} = \sigma_e$, como se pode verificar na Tabela III. V. *notações* e Tab. II.

$$24)\quad z = k_z\,.\,h$$

$$25)\quad S_t = \frac{M_{er}}{\sigma_{au}\,.\,z} - \frac{N_r}{\sigma_{au}}$$

b) *Armadura dupla*: quando $\frac{M_{er}}{b\,h^2\,\sigma_R} \geq 0{,}375$

$$26)\quad M_{r0} = 0{,}375 \quad b\,h^2\,\sigma_R \text{ (correspondente a } k_y = 0{,}5)$$

$$27)\quad M_{er} - M_{r0} = M_{er} - 0{,}375\,b\,h^2\,\sigma_R$$

Com o valor de $\sigma_{au}$ tirado da última linha da Tabela III, correspondente a $k_y = 0{,}5$, calcula-se $S_t$:

$$28)\quad S_t = \left[\frac{M_{r0}}{\sigma_{au}\,.\,0{,}75\,h} + \frac{M_{er} - M_{r0}}{\sigma_{au}\;(h-h')}\right] - \frac{N_r}{\sigma_{au}}$$

$$29)\quad S'_t = \frac{M_{er} - M_{r0}}{\sigma'_e\,(h-h')}$$

c) *Alternativas*:

Muitas vezes, quando se empregam aços especiais (categorias *CA*–40, 50 e 60), será mais econômico colocar armadura de compressão maior que a acima indicada, reduzindo-se ao mesmo tempo a armadura de tração. Para realizar esta alternativa de dimensionamento, basta adotar um valor de $h_y$ inferior a 0,5, aumentando-se deste modo a tensão $\sigma_{au}$; nas fórmulas (26) e (27) o coeficiente 0,375 deve então ser substituído pelo $k_{mr}$ correspondente a êsse $k_y$. e na fórmula (28) o coeficiente 0,75 deve ser substituído pelo $k_z$ também correspondente a êsse $k_y$. Si a armadura $S_t$ encontrada fôr negativa, a alternativa deve ser desprezada. Um confronto das diversas alternativas, (inclusive a que corresponde a armadura simétrica), só é prático quendo se utilizam ábacos. No entanto, quando o dimensionamento é feito com tabelas, convém estudar pelo menos a alternativa em que $k_y = k_{y1}$, com $\sigma_{su} = \sigma_e$. V. Tabela II.

A marcha de cálculo é então a seguinte:

26 A) $M_{r1} = k_{mr1} . b\, h^2 \sigma_R$

27) A) $M_{r2} = M_{er} - M_{r1}$

28) A) $S_t = \left[\frac{M_{r1}}{\sigma_e . z_1} + \frac{M_{r2}}{\sigma_e (h-h')}\right] - \frac{N_r}{\sigma_e}$, com $z_1 = k_{z1} . \mathrm{h}$

29) A) $S'_t = \frac{M_{r2}}{\sigma'_e (h-h')}$

Os valores de $k_{y1}$ e $k_{z1}$ podem ser obtidos na Tabela II, ou na Tabela III, na linha em que a tensão na armadura de tração aparece grifada. Se $S_t > 0$, esta alternativa póde ser adotada com vantagem, do ponto de vista econômico.

IV — *Excentricidade intermediária*$_1$

quando $- 0{,}5 \quad (0{,}25 - h/h) \geq \frac{M'_{er}}{b\, h^2\, \sigma_R} \geq - 0{,}375$

(supondo $h'/h = 0{,}05$, quando $- 0{,}100 \geq \frac{M'_{er}}{b\, h^2\, \sigma_R} \geq - 0{,}375$)

Neste caso o dimensionamento se reduz ao simples cálculo da armadura de compressão $S'_t$, pela fórmula (29):

29) $S'_t = \frac{M_{er} - M_{r0}}{\sigma_e' (h-h')} = \frac{M_{er} - 0{,}375\, b\, h^2\, \sigma_R}{\sigma'_e \ (h-h')}$

A armadura de tração é teòricamente nula. É necessário no entanto colocar uma *armadura mínima* junto à borda mais afastada do ponto de aplicação do esforço normal de compressão, de acôrdo com o disposto no item 34 da *NB*-1:

$$30) \begin{cases} \text{aços CA}-24 \text{ e } 32 & S_t \geq 0{,}25 \, \frac{b \ h}{100} \\ \text{aços CA}-40,\ 50 \text{ e } 60 & S_t \geq 0{,}15 \, \frac{b \ h}{100} \end{cases}$$

Se, para outras hipóteses de carga, a peça fôr solicitada por carga axial, como por exemplo no caso de momentos variáveis alternados, ou variando de zero a um máximo, a armadura $S_t$ deverá ser pelo menos igual à metade da armadura mínima de pilares:

$$31) \quad S_t \geq 0{,}4 \frac{bd}{100}$$

V — *Pequena excentricidade* (*compressão excêntrica*):

$$\text{quando } \frac{M'_{er}}{b\,h^2\,\sigma_R} \leq -\,0{,}375$$

Neste caso são necessárias armaduras de compressão em ambas as bordas, designando-se então como $S_t$ a armadura de compressão situada junto à borda mais afastada do ponto de aplicação da força normal de compressão.

$$29) \quad S'_t = \frac{M_{er} - 0{,}375\, b\, h^2\, \sigma_R}{\sigma'_e\ (h - h')}$$

$$32) \quad S_t = \frac{-\,M'_{er} - 0{,}375\, b\, h^2 \sigma_R}{\sigma'_e\, (h - h')}$$

Como $M'_{er}$ é negativo, e de valor absoluto $> 0{,}375\, b\, h^2\, \sigma_R$, vê-se que o numerador da fração da fórmula (32) é também positivo.

A armadura total deverá ser pelo menos igual à armadura mínima de pilares.

$$33) \quad S_t + S'_t \geq 0{,}8 \frac{b\ d}{100}$$

e, no caso descrito acima da fórmula (31):

$$S'_t \geq 0{,}4 \frac{b\ d}{100} \quad \text{e} \quad S_t \geq 0{,}4 \frac{b\ d}{100}$$

Frequentemente, por motivos construtivos, convém adotar *armadura simétrica*, com $S_t = S'_t$, e sendo $S'_t$ calculada pela fórmula (29).

## III — FLEXÃO OBLIQUA (SEÇÃO RETANGULAR)

Na falta de cálculo mais rigoroso, o cálculo na ruptura (estádio III) das peças solicitadas em flexão obliqua póde ser feito, ficando-se a favor das segurança, segundo o processo aproximado na Norma NyTU 123/55, da U.R.S.S., item 105, e também adotado pela nova norma portuguesa (art. 31) e pelo projeto de norma venezuelana, elaborado pelo eng. Paez (item 12.4).

Já existem cálculos rigorosos conhecidos e disponíveis
VER ANEXO 01 AO FINAL

*Flexão simples obliqua*

Sejam:

$M_{rx}$ a componente do momento fletor segundo o eixo principal paralelo ao lado menor da seção (flexão em plano paralelo ao lado maior), calculada no estado-limite último;

$M_{ry}$ a componente do momento fletor segundo o eixo principal paralelo ao lado maior (flexão em plano paralelo ao lado menor), calculada no estado-limite último;

$M_{rd}$ o momento fletor com a mesma direção de $M_{rx}$, e capaz de romper a peça por flexão atuando isoladamente (momento fletor de ruptura da seção de altura total $d$, e largura $b$);

$M_{rb}$ o momento fletor com a mesma direção de $M_{ry}$, e capaz de romper a peça por flexão atuando isoladamente (momento fletor de ruptura da seção com altura total $b$ e largura $d$)

O processo aproximado de cálculo é baseado na condição:

$$\frac{M_{rx}}{M_{rd}} + \frac{M_{ry}}{M_{rb}} \leq 1$$

Para que essa condição seja verificada é necessário dimensionar a seção, nas direções $d$ e $b$, para momentos $M_{rd}$ e $M_{rb}$ maiores, respectivamente, que $M_{rx}$ e $M_{ry}$, supondo-se que cada um atue isoladamente. De acôrdo com as conveniências, uma vez arbitrado um $M_{rd} > M_{rx}$, calcula-se $M_{rb}$ pela condição acima.

Como mostra o eng.° Paez em comentário ao projeto de norma venezuelana. uma solução conveniente é dimensionar a seção, nas duas direções, para os momentos $M_{rd} = 2\,M_{rx}$ e $M_{rb} = 2\,M_{ry}$, supostos atuando isoladamente.

Dados $M_{rx}$ e $M_{ry}$, componentes do momento $M_r$ que atua em direção obliqua relativamente aos eixos principais da seção, basta portanto dimensionar a seção, em cada direção, para um momento de ruptura igual ao dôbro da componente de $M_r$ correspondente.

*Flexão composta obliqua*

Sejam:

$e_x = M_{ry}/N_r$; $e_y = M_{rx}/N_r$, as excentricidades da força normal $N_r$, calculada no estado-limite último, nas direções respectivamente paralelas ao menor lado e ao maior lado da seção transversal;

$N_{rx}$ a fôrça normal capaz de romper a peça por flexão composta, atuando isoladamente com a excentricidade $e_x$;

$N_{ry}$ a fôrça normal capaz de romper a peça por flexão composta, atuando isoladamente com a excentricidade $e_y$;

$N_{ro}$ a fôrça normal capaz de romper a peça por compressão simples, isto é, com excentricidade nula:

$$N_{ro} = (bd)\,.\,0{,}75\,\sigma_R + (S_j + S_j')\,\sigma_e'.$$

O processo aproximado de cálculo é baseado na condição:

$$\frac{1}{N_{rx}} + \frac{1}{N_{ry}} \leq \frac{1}{N_r} + \frac{1}{N_{ro}} = \frac{1 + N_r/N_{ro}}{N_r}$$

Para que essa condição seja verificada é necessário dimensionar a seção, nas direções $d$ e $b$, para forças normais $N_{ry}$ e $N_{rx}$, maiores que $N_r$, supondo-se que cada uma atue isoladamente com excentricidade igual, respectivamente, a $e_y$ e $e_x$. Uma dessas fôrças normais pode ser arbitrada sendo a outra calculada pela condição acima. Referindo os esforços solicitantes ao centro de gravidade da seção, esta será dimensionada, na direção $d$, para a fôrça normal $N_{ry}$ e o momento $M_{rd} = N_{ry}\,.\,e_y$; e na direção $b$ para a fôrça normal $N_{rx}$ e o momento $M_{rb} = N_{rx}\,.\,e_x$.

Uma solução conveniente é dimensionar a seção, nas duas direções para

$$N_{rx} = N_{ry} = \frac{2\,N_r}{1 + \dfrac{N_r}{N_{ro}}}$$

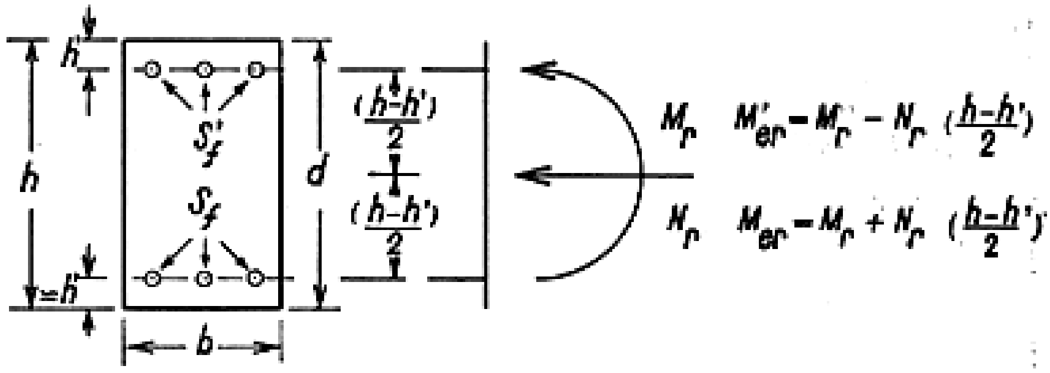
e os momentos $M_{rd} = N_{ry}\,.\,e_y$ e $M_{rb} = N_{rx}\,.\,e_x$, supostos cada um deles atuando em combinação com essa fôrça normal, e isoladamente do outro.

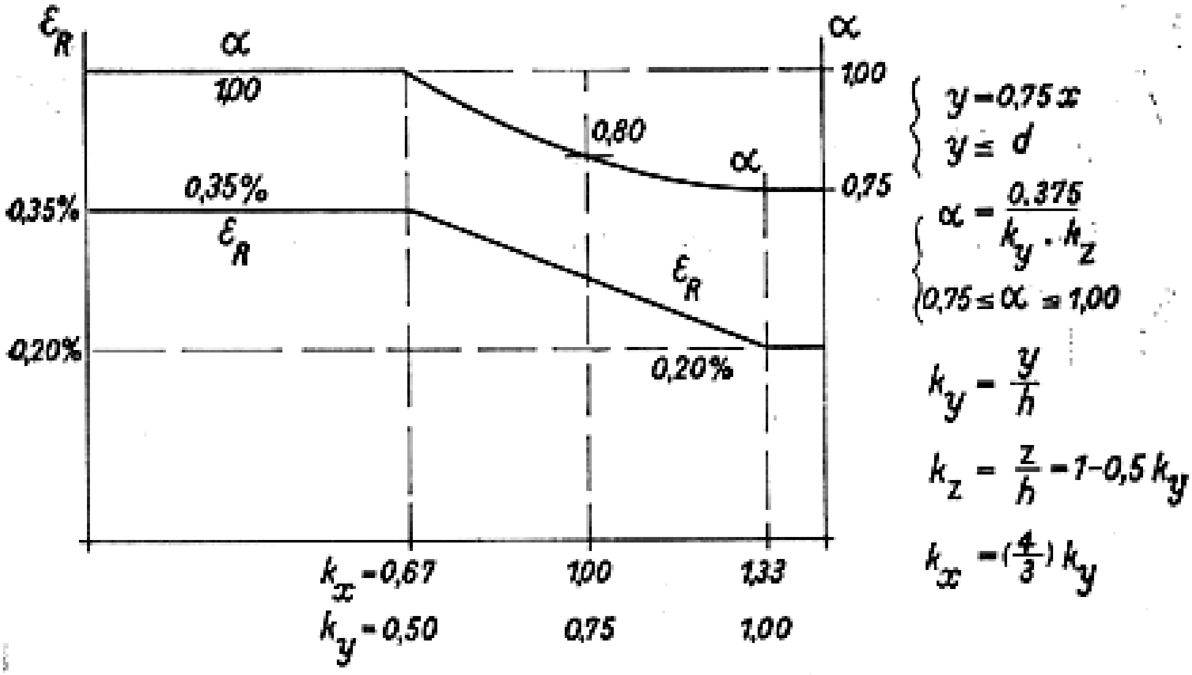
Segundo a norma venezuelana é também possível fazer o cálculo aproximado tomando a fôrça normal $N_r$ atuando sucessivamente na direção $d$ com a excentricidade $e_{yo}$. e na direção $b$ com a excentricidade $e_{xo}$, devendo estas excentricidades satisfazer à seguinte condição:

$$\frac{e_x}{e_{xo}} + \frac{e_y}{e_{yo}} \leq 1$$

Quando se usa êste último processo de cálculo, uma solução conveniente é adotar $e_{xo} = 2\, e_x$ e $e_{yo} = 2\, e_y$, isto é, dimensionar a seção para a fôrça normal $N_r$ e, em cada direção, para os momentos $M_{rd} = 2\, M_{rx}$ e $M_{rb} = 2\, M_{ry}$, respectivamente.

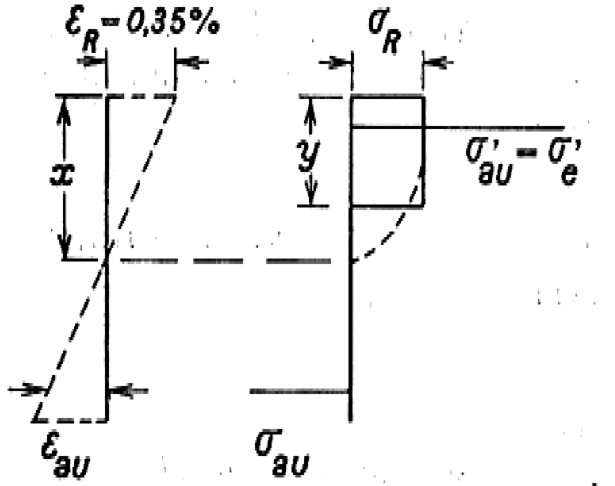
## FLEXÃO SIMPLES OU COMPOSTA — SEÇÃO RETANGULAR
(de Acôrdo com o Anexo da EB–3/67)




*Para* $0{,}5\,h \leq y \leq d$ : $(b\,y \cdot \alpha\,\sigma_R)\,z = 0{,}375\,b h^2 \sigma_R$ *(momento-têto)*

Grande excentricidade $y \leq 0{,}5\, h$ (com $S_f \cong 0$)

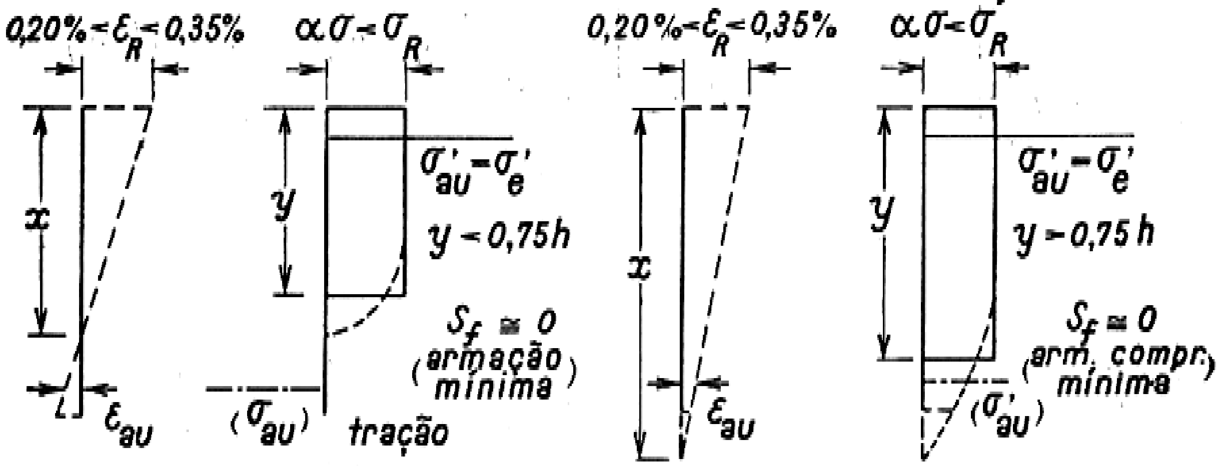



Para $y \leq \dfrac{\varepsilon_R}{\varepsilon_R + \varepsilon_e} \cdot 0{,}75$ :

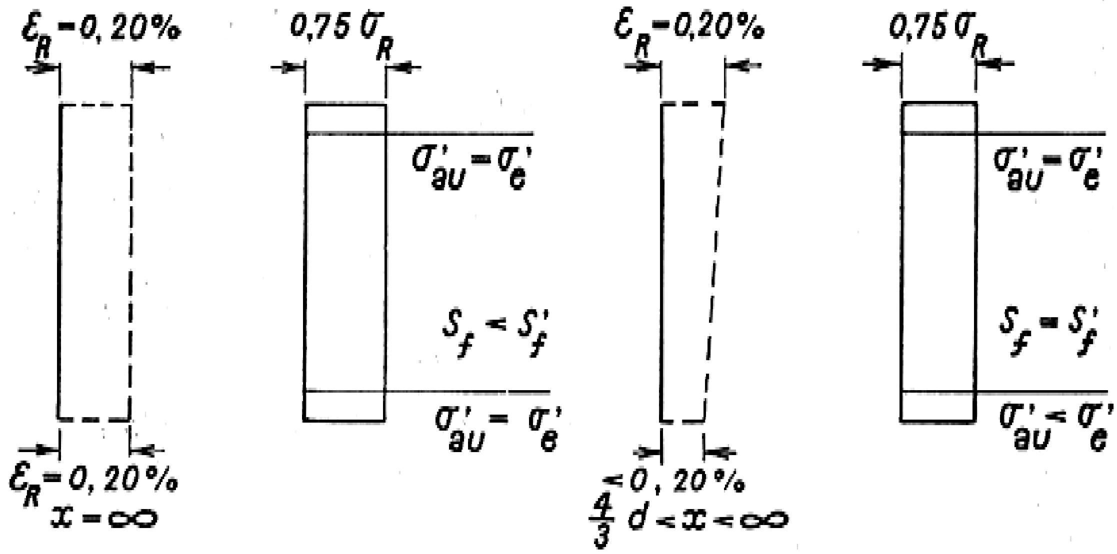
$\varepsilon_{au} = \varepsilon_e$ e $\sigma_{au} = \sigma_e$

com $\varepsilon_e = \dfrac{\sigma_e}{E}$ (Aços A) $\qquad \varepsilon_e = \dfrac{\sigma_e}{E} + 0{,}2\%$ (Aços B)

Excentricidade intermediária $(0{,}5h < y < d)$ (com $S_f \cong 0$)




Pequena excentricidade (compressão excêntrica)



**ANEXO 01 - ÁBACOS EM ROSETA PARA FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA**

CEB/FIP Manual on

# BENDING AND COMPRESSION

## DESIGN OF SECTIONS UNDER AXIAL ACTION EFFECTS AT THE ULTIMATE LIMIT STATE


Prepared by

**Comité Euro-International du Béton (CEB)**
Euro-International Committee for Concrete

in co-operation with

**Fédération Internationale de la Précontrainte (FIP)**
International organisation for the development of concrete, prestressing and related materials and techniques

**Editorial team**

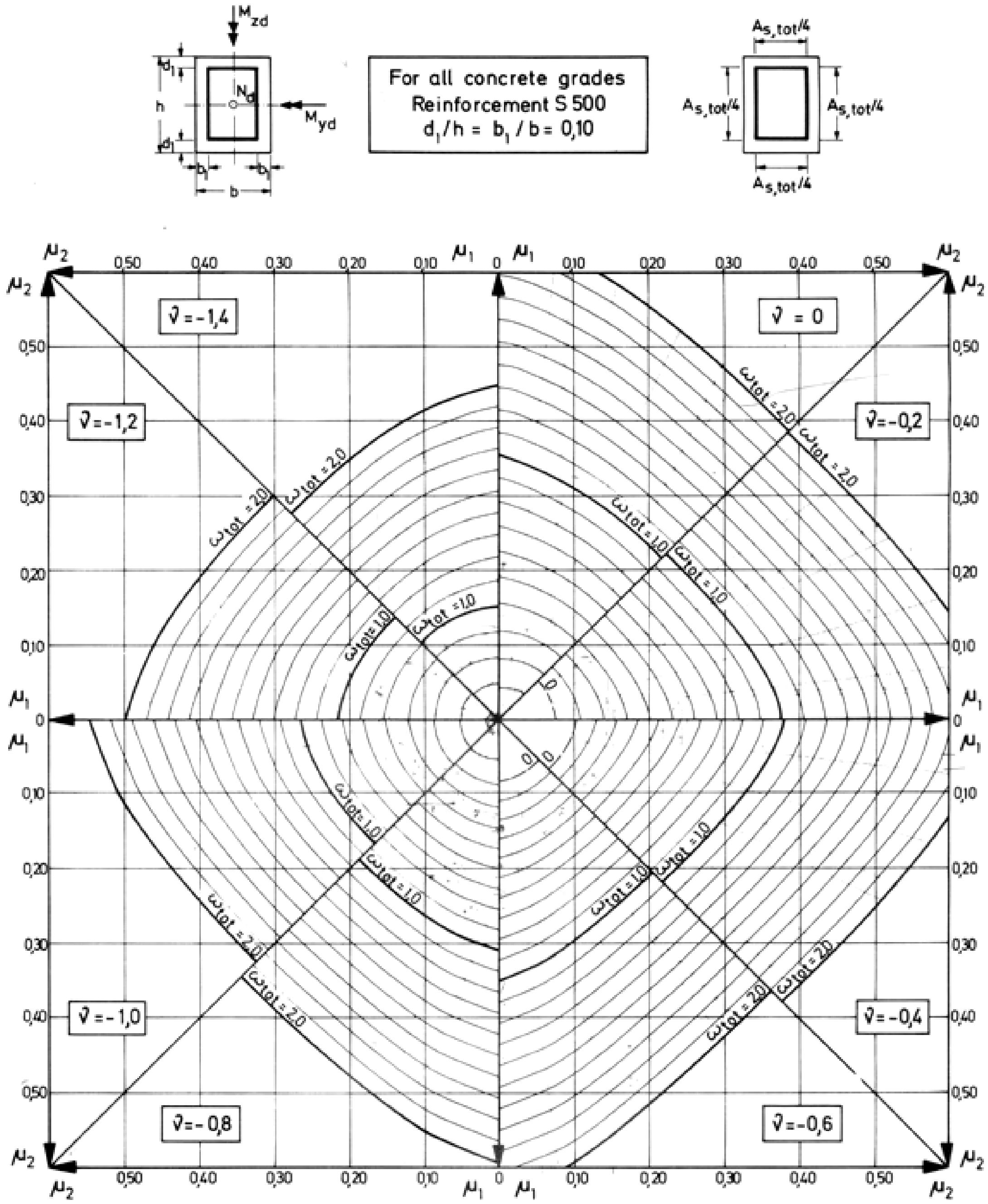
| | |
|---|---|
| E Grasser, | *München, W Germany* (Chairman) |
| A G Meseguer, | *Madrid, Spain* |
| P J Montoya, | *Madrid, Spain* |
| W Moosecker, | *München, W Germany* |
| F Morán | *Madrid, Spain* |
| J Perchat, | *Paris, France* |
| G Thielen, | *Paris, France* |



**1982**

**Construction Press**
London and New York

**Design Chart 51** **Interaction diagram for a rectangular section under biaxial bending and axial force (S 500; reinforcement arrangement 2)**




$$\mu_y = \frac{|M_{yd}|}{bh^2 f_{cd}}$$

if $\mu_y > \mu_z \longrightarrow \mu_1 = \mu_y;\ \mu_2 = \mu_z$

if $\mu_y < \mu_z \longrightarrow \mu_1 = \mu_z;\ \mu_2 = \mu_y$

$$\mu_z = \frac{|M_{zd}|}{b^2 h f_{cd}}$$

$$\omega_{tot} = \frac{A_{s,tot}}{bh} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

$$\nu = \frac{N_d}{bh\, f_{cd}}$$

$$A_{s,tot} = \omega_{tot} \frac{bh}{f_{yd}/f_{cd}}$$

Reinforcement arrangement see section at head of the table

Para pilares com dimensões maiores que 80cm ocorre uma imprecisão ( a favor da segurança ) pois os cobrimentos adotados no gráfico, d1 e b1, ficam muito grandes, pois d1/h = b1/b = 0,10

+ + +