



ESTÁTICA DAS CONSTRUÇÕES

Isostática

O Eng. Leopoldo de Castro Moreira, calculista de pontes, foi Professor da ENE, Escola Nacional de Engenharia, da Universidade do Brasil, atual UFRJ.

Em 1964 divulgou suas notas de aula de Isostática.

Os conceitos continuam exatamente os mesmos. Totalmente válidos e aplicáveis.

Os itens abordados nessas notas de aula são:

Estruturas:

- Vigas simplesmente apoiadas, com e sem balanços.
- Vigas Gerber.
- Treliças, vários tipos.
- **Arcos Tri-articulados.**

Cargas :

- Carga Permanente (diagramas)
- Carga Móvel (linhas de influência)

Itens especiais dessas notas de aula:

- O método da cadeia cinemática, para determinar as linhas de influência. É válido também para qualquer estrutura hiperestática.
- O estudo de treliças. Muito amplo e considera os tipos de treliça mais utilizados.
- Os arcos tri-articulados. Eram muito usados na época, pois sendo isostáticos, eram de cálculo fácil e de fácil execução.
 - Hoje são usados arcos sem articulações, isto é, hiperestáticos, e o cálculo tornou-se fácil com os computadores.
 - Os arcos tri-articulados são o sistema principal dos arcos hiperestáticos, no método das forças (ou esforços), e seu conhecimento é fundamental.
- Foram anexadas, nessas notas de aula, fotos para ilustrar obras com arcos.



CAPITULO IV

ARCOS TRIARTICULADOS

4.1 ARCOS DE ALMA CHEIA

Os arcos de alma cheia são estruturas que se ligam ao exterior por meio de duas articulações, e que se compõem de duas partes ligadas entre si por outra articulação. As três articulações não podem estar em linha reta.

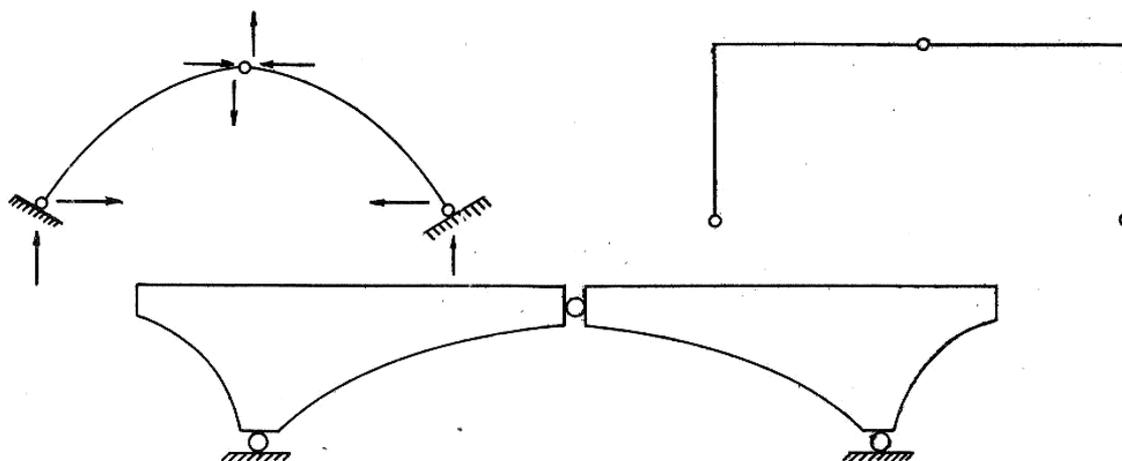


Fig. 204

Quando o arco estiver sujeito a um carregamento qualquer, aparecerem, em cada articulação externa, duas reações e, na articulação interna, também duas forças de ligação. Assim, teremos:

$$t + v = 4 + 2 = 6 \text{ incógnitas.}$$

Cada parte do arco — como o arco todo — está em equilíbrio, de modo que teremos, para cada parte, três equações. Ao todo, serão

$$3s = 3 \times 2 = 6 \text{ equações.}$$

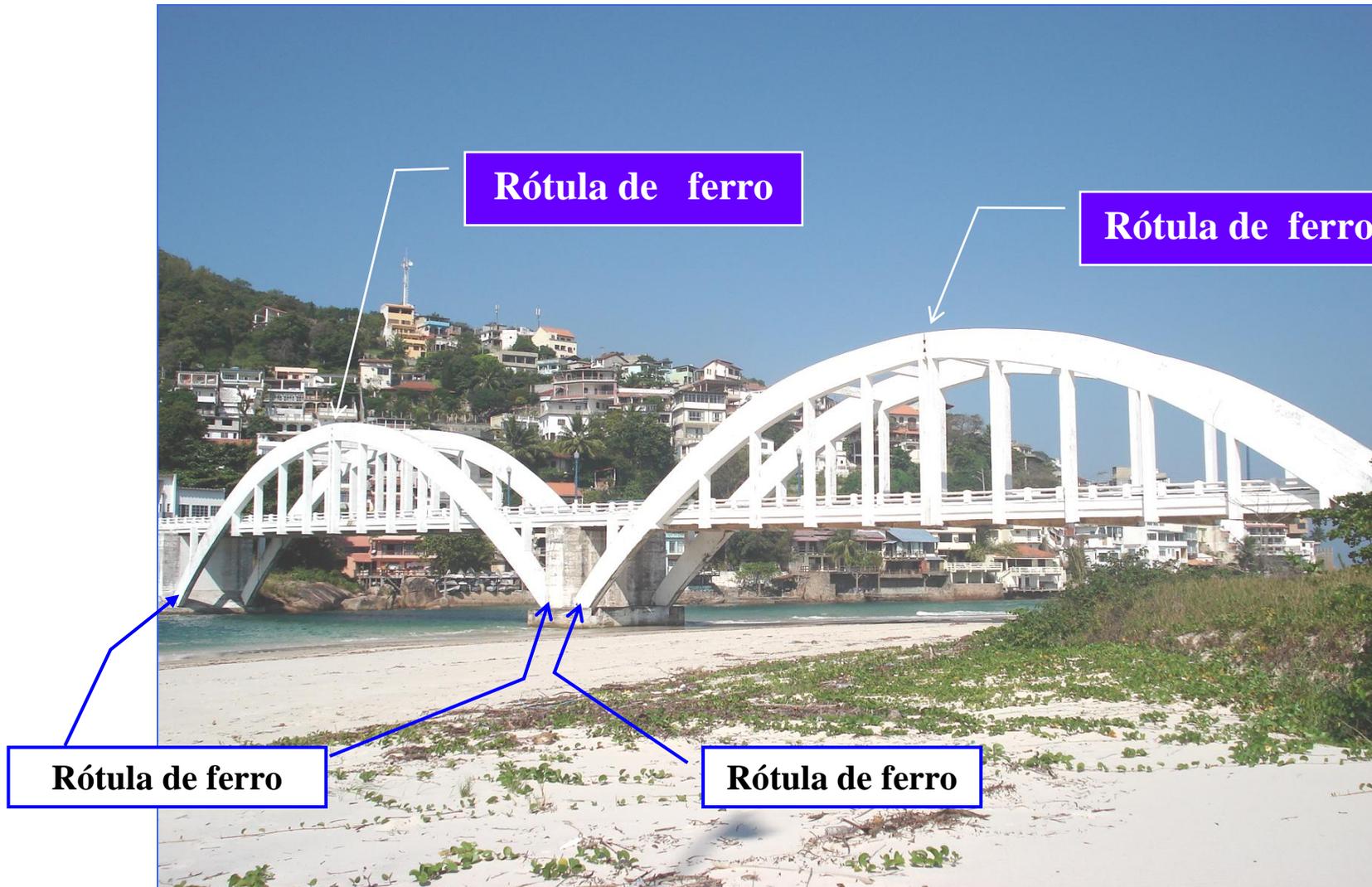
Logo,

$$t + v = 3s,$$

e o sistema será isostático.



Arcos Tri-articulados - Restinga da MARAMBAIA / RJ construídos em 1940



Projeto Prof. Antonio Alves de Noronha 1940 - Foto em 2006

**COORDENADAS = 23 3 46.82 S 43 33 57.79 W
e 23 3 45.59 S 43 33 57.10 W**



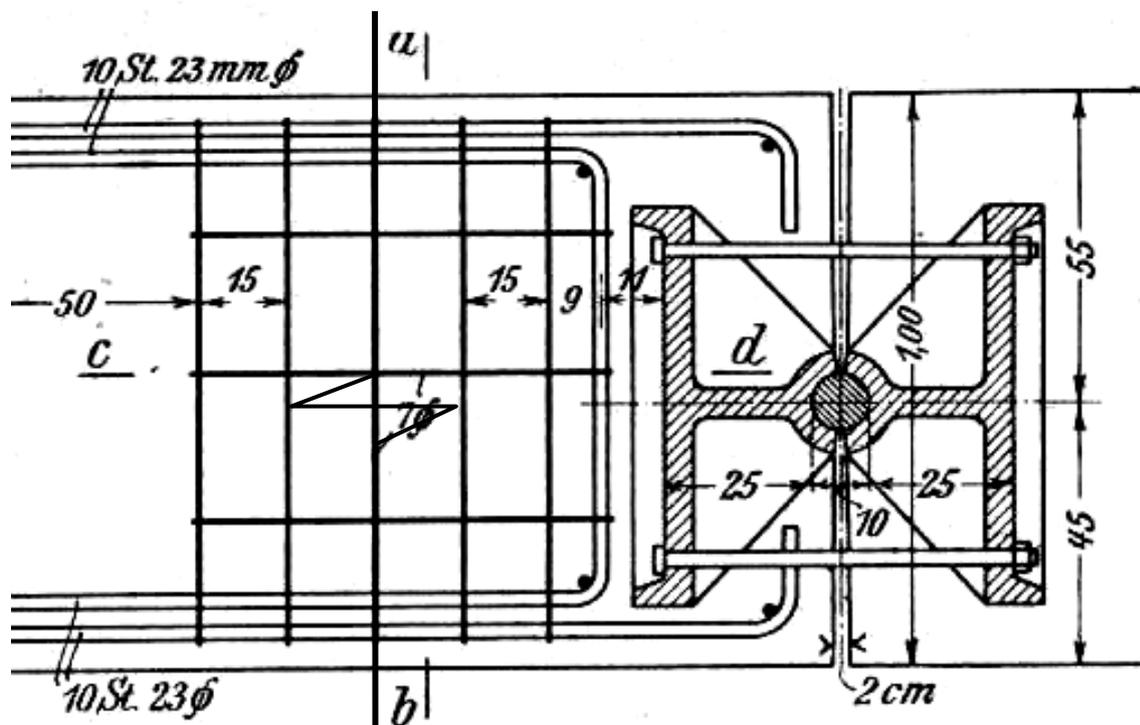
Rótula de ferro no topo (fecho) do arco

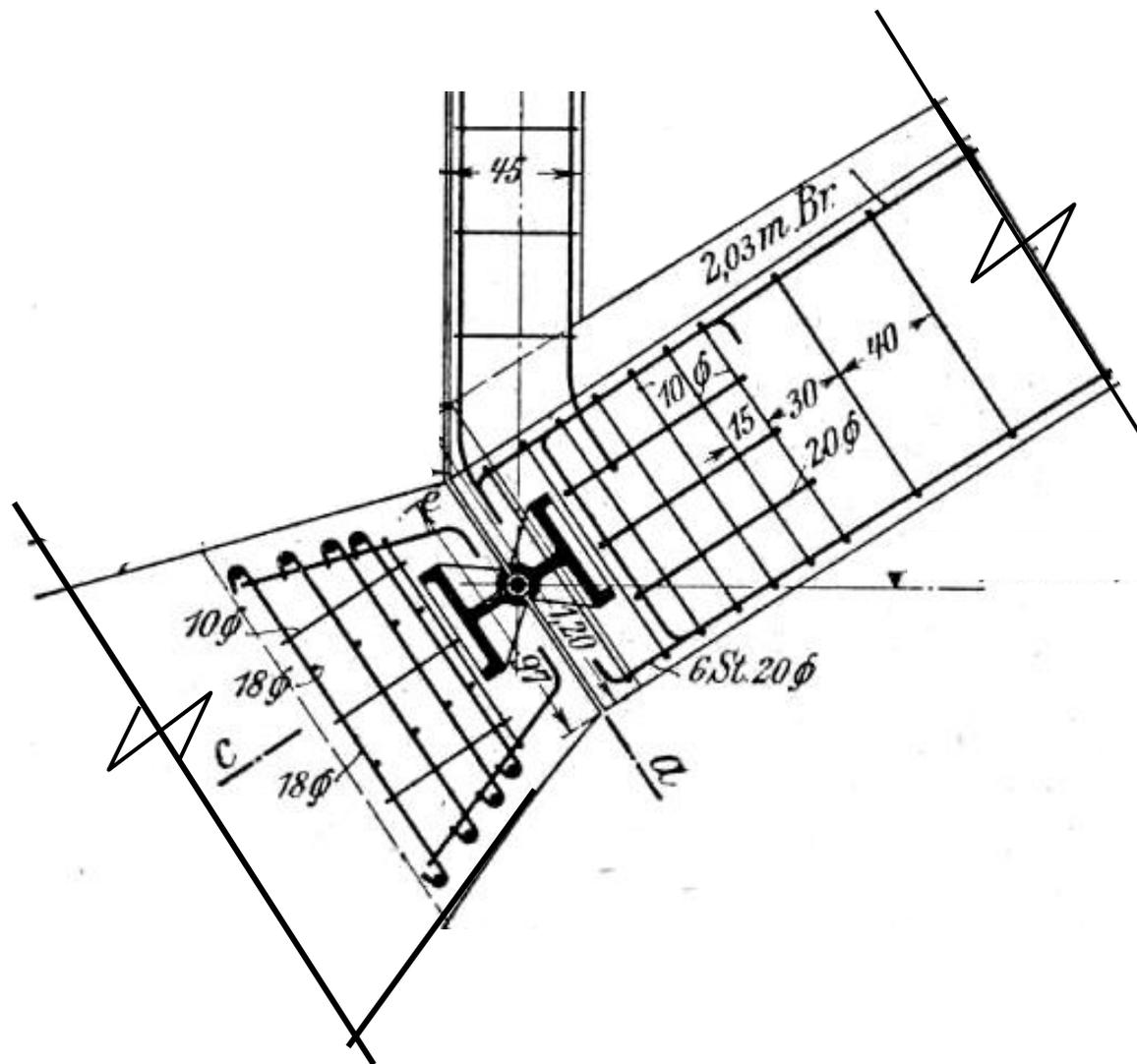


Foto em 2006



Detalhe típico de rótula de ferro no topo (fecho) de um arco triarticulado de concreto armado.





Detalhe típico das rótulas na nascença (base) dos arcos articulados em concreto armado.



Carga Permanente.

Primeiramente, recordemos as noções de momentos nucleares.

Nos arcos triarticulados, como nos arcos de um modo geral, aparece o problema da flexão composta, isto é, aparece uma fôrça \underline{K} inclinada, excêntrica em cada secção (Fig.205).

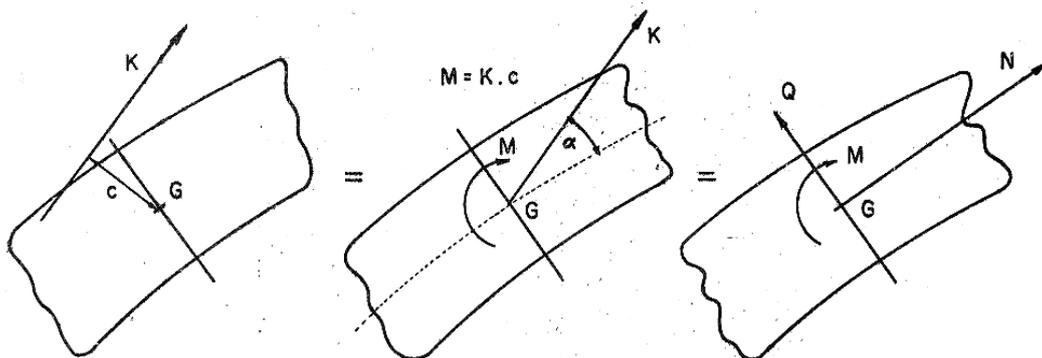


Fig. 205

Podemos trazer esta fôrça para o centro de gravidade, desde que apliquemos aí, também, o momento $M = K \cdot c$ produzido pela fôrça. Podemos, ainda, decompor a fôrça, agora aplicada no centro de gravidade, em suas componentes: a normal $N = K \cos \alpha$, e a tangencial ou cortante $Q = K \sin \alpha$. Este conjunto constitui as chamadas fôrças seccionais do sistema. O efeito da fôrça cortante Q pode ser considerado separadamente, de modo que o problema da flexão composta resumir-se-á na fôrça normal excêntrica (Fig.206).

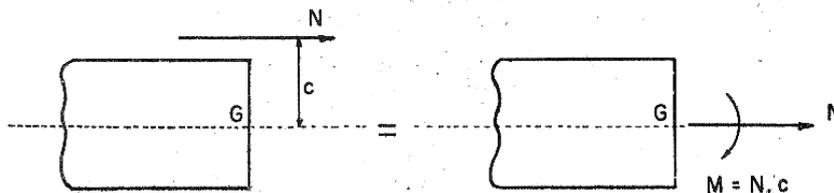


Fig. 206

Quando há vários casos de carga (carga permanente, vento, carga móvel, variação de temperatura, etc.), aparece o problema de calcular a solução "maxima maximorum" proveniente da pior combinação possível de causas. Não podemos, porém, somar simplesmente os máximos de momentos de cada caso e os máximos de fôrças normais, pois que, aí, teríamos uma solicitação irreal que, em hipótese alguma, poderia ocorrer.

Não basta, tão pouco, calcular os máximos de \underline{M} em cada caso com os \underline{N} correspondentes e fazer as duas somas (ou os máximos



de N com os M correspondentes), pois que estas poderiam não corresponder às piores hipóteses. Daí, a necessidade dos momentos nucleares.

Consideremos, então, uma peça, cuja secção transversal (pelo plano S) seja representada como na Fig.207, sujeita à força ex-cêntrica N (de excentricidade c).

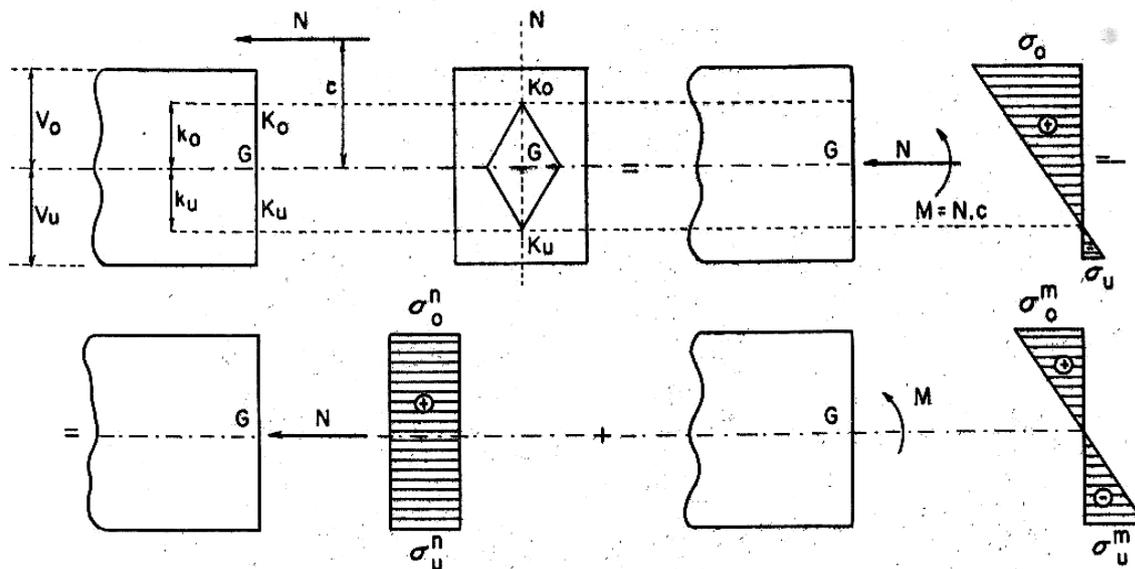


Fig. 207

$$N \begin{cases} \text{Compressão: } + \\ \text{Tração: } - \end{cases}$$

$$M \begin{cases} \text{Tração, fibra superior: } - \\ \text{Tração, fibra inferior: } + \end{cases}$$

Temos, assim

$$M = N \cdot c.$$

Sob a ação da força normal, nas bordas superior e inferior da secção, aparecerão as tensões

$$\begin{cases} \sigma_o^n & \text{e} & \sigma_u^n, \\ \sigma_o^n = \sigma_u^n = \frac{N}{F}, \end{cases}$$

e, sob a ação do momento, as tensões σ_o^m e σ_u^m que, de acordo com as convenções, serão

$$\sigma_o^m = + \frac{M}{W_o} \quad \text{e} \quad \sigma_u^m = - \frac{M}{W_u},$$



onde

$$W_o = \frac{J}{V_o}, \quad W_u = \frac{J}{V_u}.$$

Sob a ação conjunta de \underline{N} e \underline{M} , as tensões serão σ_o e σ_u :

$$\begin{cases} \sigma_o = \sigma_o^n + \sigma_o^m = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_o}, \\ \sigma_u = \sigma_u^n + \sigma_u^m = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_u}. \end{cases}$$

Substituindo, agora, \underline{M} por $N \cdot c$, teremos

$$\begin{cases} \sigma_o = \frac{N}{F} + \frac{Nc}{W_o} = \frac{N}{W_o} \left[\frac{W_o}{F} + c \right] \\ \sigma_u = \frac{N}{F} - \frac{Nc}{W_u} = \frac{N}{W_u} \left[\frac{W_u}{F} - c \right]. \end{cases}$$

Tomemos, agora, os momentos provocados pela força normal excêntrica em relação aos pontos nucleares K_o e K_u : são os chamados momentos nucleares:

$$\begin{cases} M_o = N(c - k_o), \\ M_u = N(c + k_u). \end{cases}$$

Determinemos, agora, as distâncias k_o e k_u . Suponhamos uma força \underline{N} atuando no ponto nuclear superior, K_o ; a tensão na borda superior será, então, σ_o e, na borda inferior, σ_u (que é nula).

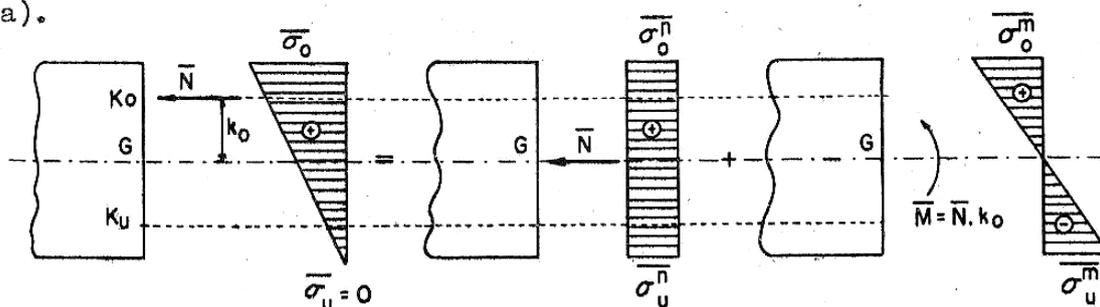


Fig. 208

Se a força \underline{N} agisse isoladamente, aplicada no centro de gravidade, teríamos as tensões

$$\sigma_o^n = \sigma_u^n = \frac{N}{F}.$$



O momento proveniente da excentricidade k_0 será $\bar{M} = \bar{N} \cdot k_0$, e dará, quando isolado, as tensões

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_o^m = \frac{\bar{M}}{W_o} = \frac{\bar{N}k_0}{W_o}, \\ \bar{\sigma}_u^m = -\frac{\bar{M}}{W_u} = -\frac{\bar{N}k_0}{W_u} \end{array} \right.$$

Por superposição de efeitos, podemos escrever:

$$\sigma_u = 0 = \bar{\sigma}_u^n + \bar{\sigma}_u^m = \frac{\bar{N}}{F} - \frac{\bar{N}k_0}{W_u}.$$

Dai:

$$\frac{\bar{N}}{F} = \frac{\bar{N}k_0}{W_u},$$

donde:

$$(4.101) \quad k_0 = \frac{W_u}{F}.$$

Analogamente, com \bar{N} em k_u , acharíamos $k_u = W_o/F$.

Substituindo nas expressões de σ_o e σ_u , virá:

$$(4.102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_o = \frac{N}{W_o} [k_u + c] = \frac{M_u}{W_o}, \\ \sigma_u = \frac{N}{W_u} [k_o - c] = -\frac{M_o}{W_u}. \end{array} \right.$$

Chegamos, assim, a expressões que nos dão as tensões por um simples quociente, e não por uma soma, como as davam as expressões iniciais. A vantagem é que poderemos somar as tensões facilmente.

Se tivermos, assim, vários casos de carregamento, devemos calcular os momentos nucleares M_o e M_u para cada caso (em cada secção), e com isto, as tensões extremas σ_o e σ_u .

Somariamos, em seguida, as tensões σ_o para cada estado, de modo que dessem combinações mais desfavoráveis possíveis:

$$\sigma_o^{\max \text{ posit.}} \quad \text{e} \quad \sigma_o^{\max \text{ negat.}}$$

a carga permanente entrando sempre com o seu sinal próprio.

Analogamente, com as σ_u , acharíamos:

$$\sigma_u^{\max \text{ posit.}} \quad \text{e} \quad \sigma_u^{\max \text{ negat.}}$$

Com isto, poderíamos calcular o momento \bar{M} e a força normal \bar{N} fictícios, que, atuando simultaneamente, provocariam as mesmas



tensões extremas máximas (geralmente, há dois pares de \bar{M} , \bar{N}).

Com efeito,

$$\begin{cases} \sigma_o = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_o}, \\ \sigma_u = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_u}. \end{cases}$$

Dai,

$$(4.103) \quad \begin{cases} \bar{N} = \frac{\sigma_o W_o + \sigma_u W_u}{W_o + W_u} F, \\ \bar{M} = (\sigma_o - \sigma_u) \frac{W_o W_u}{W_o + W_u}. \end{cases}$$

Escolhendo do conjunto

$$\begin{cases} \sigma_o \text{ max posit.}, & \sigma_o \text{ max negat.}, \\ \sigma_u \text{ max posit.}, & \sigma_u \text{ max negat.}, \end{cases}$$

o par de valores σ_o , σ_u mais afastado, acharemos \bar{N} e \bar{M} .

Se a secção fôsse simétrica, teríamos

$$W_o = W_u = W,$$

e:

$$(4.104) \quad \begin{cases} \bar{N} = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} F, \\ \bar{M} = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2} W. \end{cases}$$

Geralmente, achamos dois pares:

$$\begin{cases} \bar{M}_{\text{max}} \text{ e } \bar{N}, \\ \bar{N}_{\text{max}} \text{ e } \bar{M}, \end{cases}$$

e devemos verificar qual o mais desfavorável para cada ponto de vista.

Poderíamos não ter calculado as σ_o e σ_u de cada caso: somariamos diretamente os M_o e M_u , achando, finalmente,

$$\begin{cases} M_o \text{ max posit.}, & M_o \text{ max negat.}, \\ M_u \text{ max posit.}, & M_u \text{ max negat.}, \end{cases}$$

e aí, então, calcularemos as σ_o max, etc.

Retomemos, agora, o caso da carga permanente. Poderemos estu-



dar um arco triarticulado sujeito a cargas permanentes por um processo analítico. Para isto, devemos, em primeiro lugar, determi-

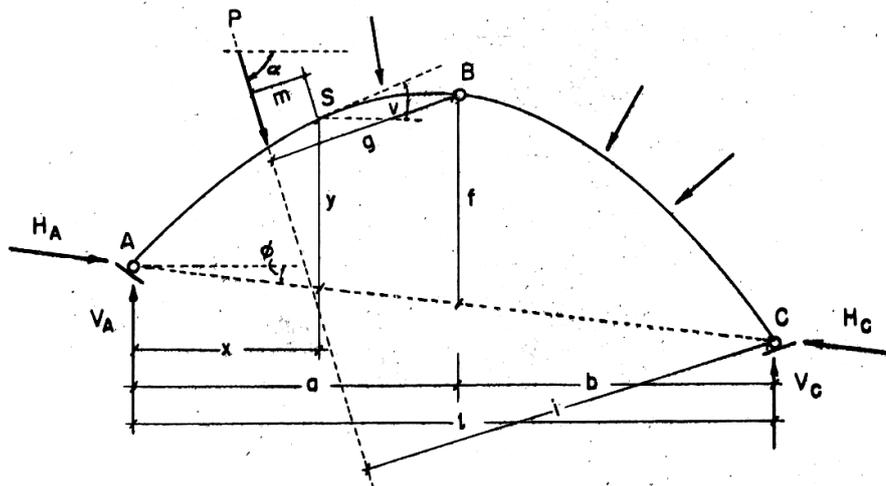


Fig. 209

nar as reações. Isto se faz pela aplicação das três equações de equilíbrio da estática,

$$\sum V = 0, \quad \sum H = 0, \quad \sum M = 0,$$

e da equação de momentos em relação à articulação B,

$$\sum M_B = 0.$$

Temos, assim:

$$\sum V = 0 \longrightarrow V_A + V_C + H_C \operatorname{sen} \phi - H_A \operatorname{sen} \phi + \sum P \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

$$\sum H = 0 \longrightarrow H_A \operatorname{cos} \phi - H_C \operatorname{cos} \phi + \sum P \operatorname{cos} \alpha = 0,$$

$$\sum M_C = 0 \longrightarrow V_A \cdot l - \sum P_1 = 0,$$

$$\sum M_B = 0 \longrightarrow V_A a - V_C b - H_A f \operatorname{cos} \phi + H_C f \operatorname{cos} \phi - \sum P g = 0.$$

Dai, tiramos os valores de V_A , V_C , H_A , H_C .

Com estas relações, calcularemos os momentos, forças cortantes e forças normais em qualquer seção do arco:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_S = V_A x - H_A y \operatorname{cos} \phi - \sum_A^S P \cdot m, \\ N_S = V_A \operatorname{sen} v + H_A \operatorname{cos} (\phi + v) - \sum_A^S P \operatorname{cos} (\alpha + v), \\ Q_S = V_A \operatorname{cos} v + H_A \operatorname{sen} (\phi + v) - \sum_A^S P \operatorname{sen} (\alpha + v). \end{array} \right.$$



Isostática – Arcos
Prof. Leopoldo de Castro Moreira
E.N.E.-1964

Notas de
aula

Prof. Eduardo C. S.
Thomaz

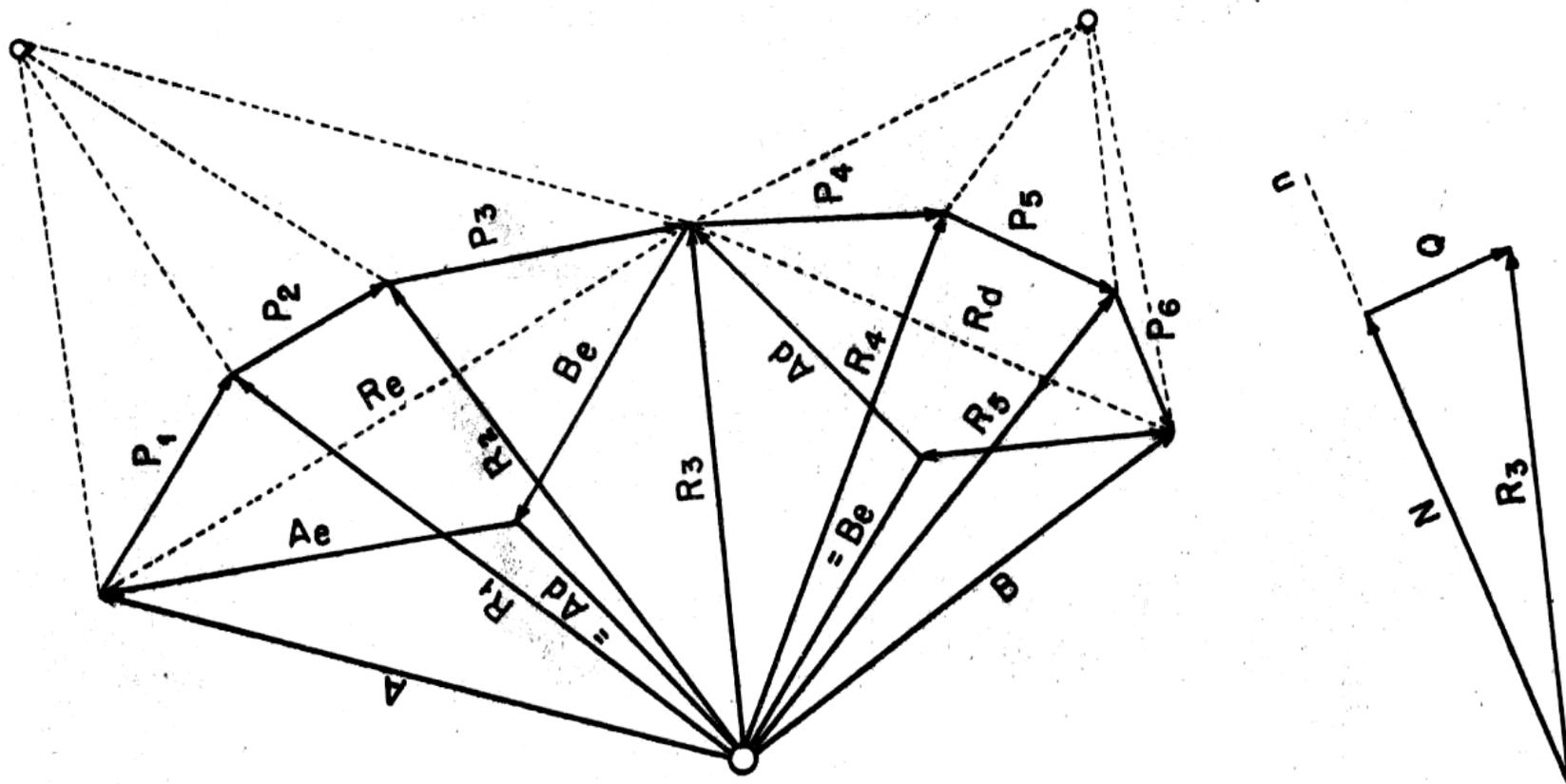
13 / 30

Ponte Salginatobel - Suíça 1930 - Arco triarticulado

<http://aquarius.ime.eb.br/~webde2/prof/ethomaz/pontes/Ponte%20Salginatobel%201930.pdf>

COORDENADAS = 46 58 54.25 N 9 43 6.12 E





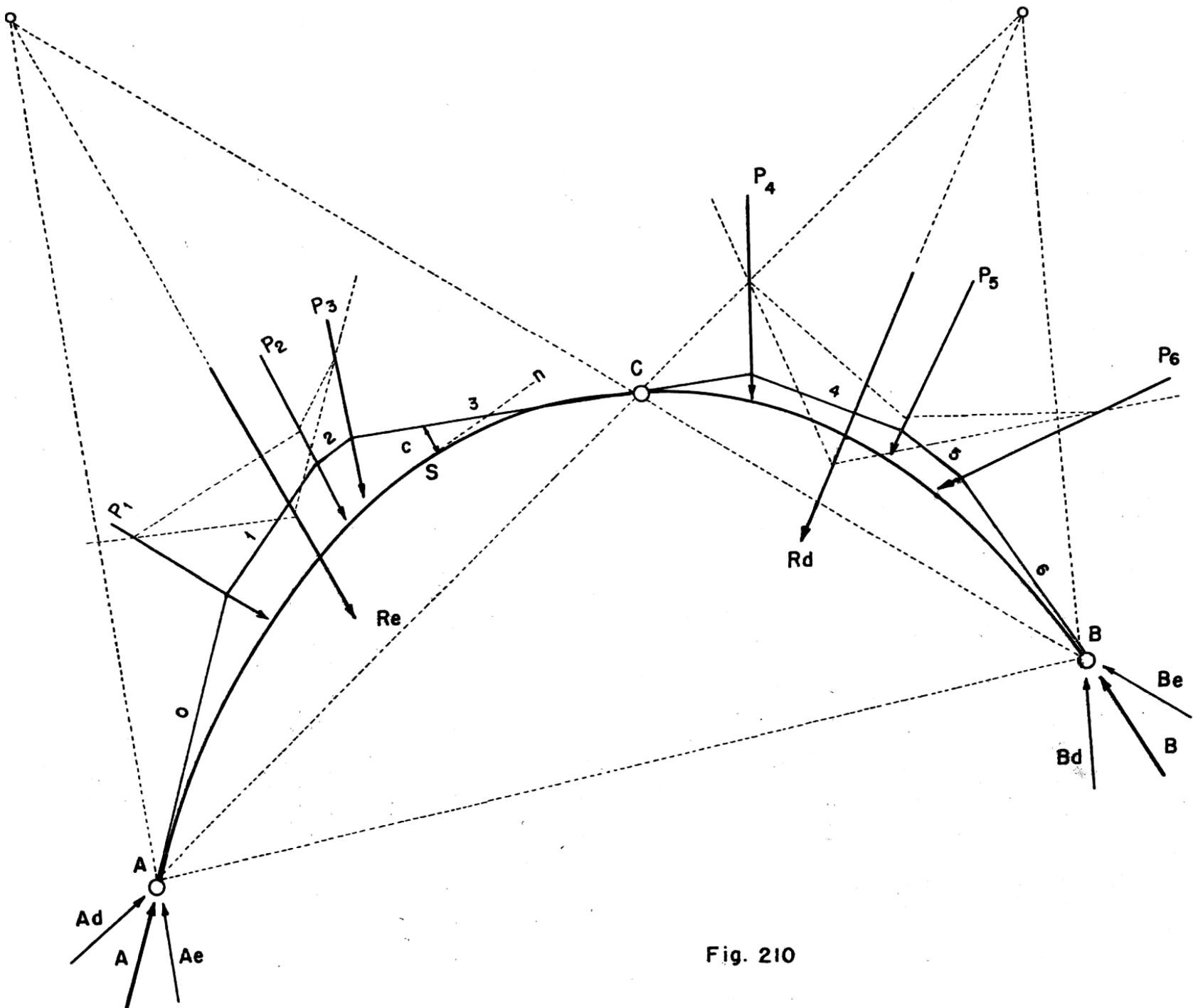


Fig. 210



Arcos têm apenas compressão nas seções, nenhuma tração, pois os materiais usados não resistem à tração.

Ponte romana em Gard / França - COORDENADAS = 43 56 51.85 N 4 32 4.86



Material : Pedra argamassada. Argamassa composta por cal e cinzas vulcânicas da região de Puzol na Itália, a chamada Puzolana.

No Brasil – Arcos da Lapa / RJ

COORDENADAS = 22 54 47.24 S 43 10 47.57 W



Inaugurado em 1750, era um aqueduto. Material : Pedra e cal.



Podemos proceder gráficamente para a determinação das reações de apoio e das forças seccionais. Suponhamos, então, um arco triarticulado sujeito a um carregamento qualquer $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, etc. (Fig.210).

Suporemos, em primeiro lugar, que só agem neste arco as cargas da parte esquerda (AC), isto é, as cargas P_1, P_2, P_3 .

Por meio de um funicular, determinamos a resultante R_e . As reações de apoio, devidas somente às cargas da esquerda, serão as mesmas que as provocadas por R_e . A reação da direita (B_e), devida somente a R_e , deverá ter a direção CB, pois que, não havendo outras cargas entre C e B , é necessário, para podermos ter momento nulo em C , que B_e tenha a direção CB; a direção da reação da esquerda (A_e) deverá ser tal que passe pelo ponto de encontro de B_e e R_e , pois, só havendo estas três forças, duas das quais concorrem em um ponto, a outra, também, deve concorrer nesse ponto para que haja equilíbrio. Uma vez conhecida a direção de A_e e B_e , acharemos seus valores decompondo R_e , no polígono de forças, nestas duas direções. Em seguida, suporemos que agem na estrutura, não mais as forças da esquerda, mas tão somente as forças da direita isoladas ($P_4, P_5, P_6 \dots$) e, raciocinando análogamente ao que fizemos acima, acharemos R_d, A_d, B_d . Compondo, agora, A_d com A_e e B_d com B_e , acharemos, finalmente, as reações de apoio totais A e B .

Se tomarmos, agora, para polo o ponto de encontro de A e B , no polígono de forças, e construirmos um novo funicular, este passará pelas três articulações e denominar-se-á, então, curva de pressões do arco.

Com efeito, a força total excêntrica que age numa secção qualquer S , é igual à soma de todas as forças à esquerda da secção. No polígono de forças, esta força será dada pelo raio vetor correspondente à última carga antes da secção (R , no caso) e, no funicular, sê-lo-á em posição pelo lado correspondente do mesmo. Realmente,

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

Dêste modo, o momento fletor em S será dado pelo produto dêste raio vetor pela distância de S ao lado do funicular:

$$M_s = R \cdot c,$$

sendo positivo (segundo nossa convenção) se o funicular passar acima do arco, e negativo se passar abaixo.

As forças normal e cortante serão dadas pelas projeções dêste raio vetor sobre a normal e o plano da secção.



Quando o eixo do arco coincidir com a curva de pressões, os momentos e forças cortantes em todos os pontos do arco serão nulos.

Nos arcos triarticulados simétricos, sujeitos somente a cargas verticais, teremos:

$$\sum H = 0 \rightarrow H_A = H_B = H,$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A + V_B = \sum P_i,$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot \ell - \sum P_i (\ell - \alpha_i) = 0,$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow H \cdot f + V_A \frac{\ell}{2} - \sum P_i \left(\frac{\ell}{2} - \alpha_i \right) = 0.$$

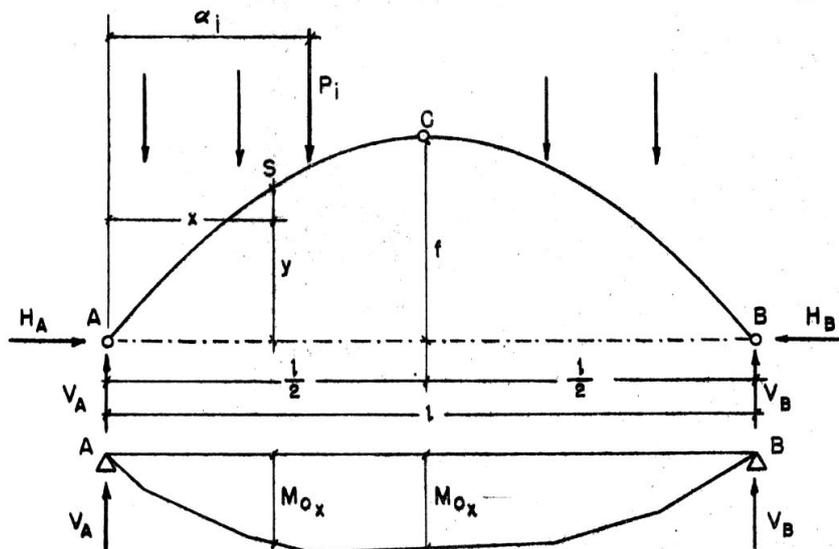


Fig. 211

Daí virá:

$$V_A = \frac{\sum P(\ell - \alpha_i)}{\ell},$$

$$V_B = \frac{\sum P\alpha_i}{\ell},$$

$$H = \frac{V_A \frac{\ell}{2} - \sum \frac{1}{2} P_i \left(\frac{\ell}{2} - \alpha_i \right)}{f}.$$

Daí, poderemos ver que V_A e V_B são as reações da viga simplesmente apoiada, de igual vão, sujeita às mesmas cargas que o arco. Além disto, vemos que o empuxo é igual ao momento no meio desta viga (sob a articulação central) dividido pela flexa:

(4.105)

$$H = \frac{M_{0c}}{f}.$$



O momento fletor num ponto qualquer de ordenadas (x, y) será

$$M_S = V_A \cdot x - \sum_0^x P_i (x - \alpha) - H \cdot y,$$

ou seja,

$$(4.106) \quad M_S = M_{Ox} - H \cdot y,$$

onde M_{Ox} é o momento da viga simples no ponto correspondente à secção S .

Se quisermos determinar a curva de pressões do arco (para fazer este coincidir com aquela), basta fazer $M_S = 0$, ou seja,

$$M_S = M_{Ox} - H \cdot y = 0.$$

Daí a equação da linha de pressões:

$$(4.107) \quad y = \frac{M_{Ox}}{H}.$$

Poderemos, então, com toda a facilidade, determinar a curva de pressões. Suponhamos, por exemplo, que se queira determinar a curva de pressões para um determinado arco (devida, por exemplo, ao peso próprio do mesmo). Suponhamos as cargas P_i , e seja a_i a distância de cada uma do apoio A (suporemos carregamento simé-

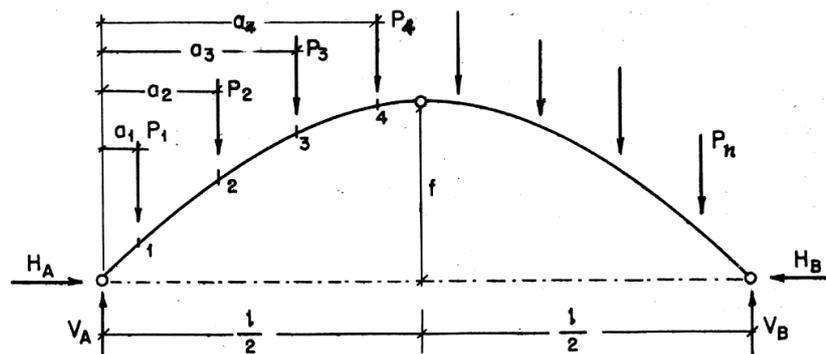


Fig. 212

trico). Teremos logo:

$$V_A = \sum_0^{l/2} P_i,$$

$$M_1 = A \cdot a_1,$$

$$\begin{aligned} M_2 &= M_1 + Q_1(a_2 - a_1) = M_1 + (A - P_1)(a_2 - a_1) = \\ &= M_1 + m_1, \end{aligned}$$



$$M_3 = M_2 + Q_2(a_3 - a_2) = M_2 + (Q_1 - P_2)(a_3 - a_2) =$$

$$= M_2 + m_2,$$

etc. Podemos organizar isto em forma de quadro:

P	Q	$Q_k(a_{k+1} - a_k)$	M	y
P_n	$Q_{n-1} = Q_{n-2} - P_1$	$Q_{n-1}(a_n - a_{n-1})$	$M_n = M_{n-1} + Q_{n-1}(a_n - a_{n-1})$	$y_n = M_n/H$
...
P_4				
P_3	$Q_2 = Q_1 - P_2$	$Q_2(a_3 - a_2)$	$M_3 = M_2 + Q_2(a_3 - a_2)$	$y_3 = M_3/H$
P_2	$Q_1 = A - P_1$	$Q_1(a_2 - a_1)$	$M_2 = M_1 + Q_1(a_2 - a_1)$	$y_2 = M_2/H$
P_1	A	$A \cdot a_1$	$M_1 = A \cdot a_1$	$y_1 = M_1/H$
	$\sum P = A$		$H = \frac{M_n}{f}$	

ou, esquematizando:

P_n	$\rightarrow = Q_{n-1} (x)$	$(a_n - a_{n-1}) = m_{n-1}$	$\rightarrow = M_n$	$y_n = M_n/H$
	$(+)$		$(+)$	
P_{n-1}	$\rightarrow = Q_{n-2} (x)$	$(a_{n-1} - a_{n-2}) = m_{n-2}$	$\rightarrow = M_{n-1}$	$y_{n-1} = M_{n-1}/H$
	$(+)$		$(+)$	
.....
	$(+)$		$(+)$	
P_4	$\rightarrow = Q_3 (x)$	$(a_4 - a_3) = m_3$	$\rightarrow = M_4$	$y_4 = M_4/H$
	$(+)$		$(+)$	
P_3	$\rightarrow = Q_2 (x)$	$(a_3 - a_2) = m_2$	$\rightarrow = M_3$	$y_3 = M_3/H$
	$(+)$		$(+)$	
P_2	$\rightarrow = Q_1 (x)$	$(a_2 - a_1) = m_1$	$\rightarrow = M_2$	$y_2 = M_2/H$
	$(+)$		$(+)$	
P_1	$\rightarrow = A (x)$	$a_1 = m_1$	$\rightarrow = M_1$	$y_1 = M_1/H$
	$(+)$		$(+)$	
	$\sum P = A$		$H = \frac{M_n}{f}$	



Um arco tri-articulado é uma estrutura isostática.

Um arco bi-articulado é uma vez hiperestático

Arco em treliça.

Viaduto Ferroviário de Garabit, Cantal (França)

construído por Gustave Eiffel



COORDENADAS = 44 58 24.38 N 3 10 26.1 E

Estrutura uma vez hiperestática externamente.



Linhas de Influência.

Suponhamos um arco triarticulado de alma cheia AGB (Fig.213), onde:

- ℓ = vão AB, medido horizontalmente,
- ℓ_1 = distância AG, medida horizontalmente,
- ℓ_2 = distância BG, medida horizontalmente,
- f = flexa medida verticalmente entre \underline{G} e a linha dos encontros \underline{AB} .
- β = ângulo que a linha dos encontros AB faz com a horizontal.

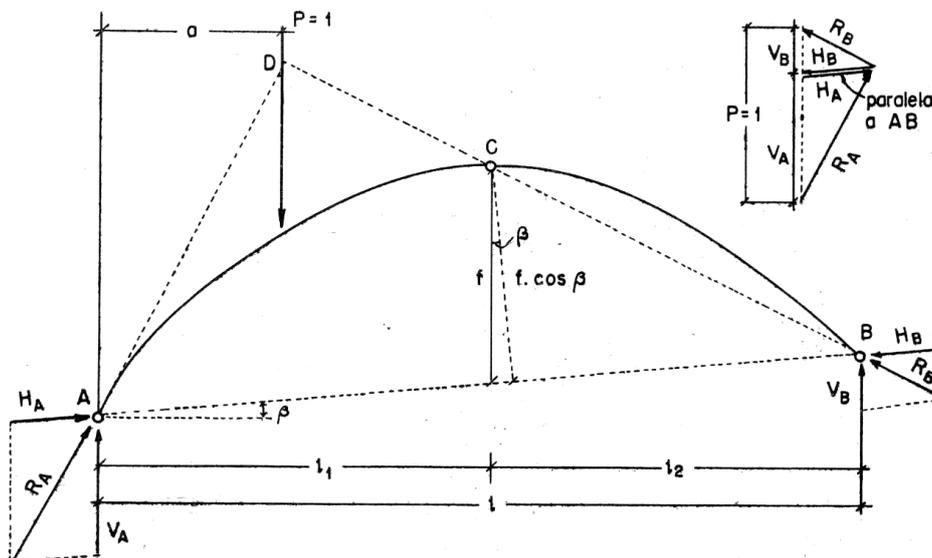


Fig. 213

Para a carga $P = 1$, numa dada posição definida por sua abcissa a , irão surgir, nos apoios \underline{A} e \underline{B} , as reações R_A e R_B , respectivamente. Como já sabemos, a direção de R_B (para a posição da Fig.213, isto é, $a < \ell_1$) será $G-B$; do mesmo modo, a direção de R_A será a de $D-A$ (\underline{D} sendo o ponto de encontro de \underline{G} e \underline{P}). Desta forma, se decompuzermos \underline{P} , num polígono de forças, segundo as direções AD e GB , obteremos R_A e R_B .

Podemos, ainda, decompor cada uma destas reações segundo a vertical e a direção da linha dos encontros AB , obtendo, assim, as reações verticais V_A e V_B e os empuxos H_A e H_B . Pela decomposição gráfica no polígono de forças, vemos que H_A e H_B são iguais e de sinais contrários; chamá-las-emos, simplesmente, de \underline{H} - empuxo.

Linhas de Influência das Reações Verticais.

Tomando os momentos em relação ao apoio \underline{B} , poderemos escrever (\underline{H} não dá momentos):

$$V_A \cdot \ell - P(\ell - a) = 0 \longrightarrow V_A = P \frac{\ell - a}{\ell}$$



$$(4.108) \quad y_{V_A} = \frac{V_A}{P} = \frac{\ell - a}{\ell} \quad \begin{cases} \text{para } a = 0 \rightarrow y_{V_A} = +1, \\ \text{para } a = \ell \rightarrow y_{V_A} = 0. \end{cases}$$

A linha de influência será, pois, uma reta que tem ordenada nula em B e ordenada +1 sobre a vertical de A; é a mesma linha de influência da viga simples de mesmo vão ℓ .

Para V_B , tomaríamos os momentos em relação a A:

$$V_B \cdot \ell - P \cdot a = 0 \longrightarrow V_B = P \frac{a}{\ell},$$

$$(4.109) \quad y_{V_B} = \frac{V_B}{P} = \frac{a}{\ell} \quad \begin{cases} \text{para } a = 0 \rightarrow y_{V_B} = 0, \\ \text{para } a = \ell \rightarrow y_{V_B} = +1. \end{cases}$$

É uma reta que passa por A e tem ordenada +1 em B; é a linha de influência de uma viga simples de vão ℓ .

Linha de Influência do Empuxo H.

Suponhamos a carga entre A e G; tomando os momentos da parte GB em relação a G, teremos:

$$0 < a < \ell_1, \quad V_B \cdot \ell_2 - Hf \cos \beta = 0 \longrightarrow H = V_B \frac{\ell_2}{f \cos \beta},$$

ou, substituindo, $H \Big|_A^G = P \frac{a \cdot \ell_2}{\ell f \cos \beta}$, donde virá:

$$(4.110) \quad y_H \Big|_0^{\ell_1} = \frac{H}{P} = \frac{a \cdot \ell_2}{\ell f \cos \beta} \quad \begin{cases} a = 0 \rightarrow y = 0, \\ a = \ell_1 \rightarrow y = \frac{\ell_1 \cdot \ell_2}{\ell f \cos \beta}, \\ a = \ell_2 \rightarrow y = \frac{\ell_2}{f \cos \beta}. \end{cases}$$

Quando a carga estiver entre G e B, tomando os momentos, em relação a G, da parte AG, virá:

$$\ell_1 < a < \ell, \quad V_A \cdot \ell_1 - Hf \cos \beta = 0 \quad H = V_A \frac{\ell_1}{f \cos \beta},$$

ou, substituindo, $H \Big|_G^B = P \frac{(\ell - a) \cdot \ell_1}{\ell f \cos \beta}$, donde:

$$(4.111) \quad y_H \Big|_{\ell_1}^{\ell} = \frac{(\ell - a) \cdot \ell_1}{\ell f \cos \beta} \quad \begin{cases} a = 0 \rightarrow y = \frac{\ell_1}{f \cos \beta}, \\ a = \ell_1 \rightarrow y = \frac{\ell_1 \cdot \ell_2}{\ell f \cos \beta}, \\ a = \ell \rightarrow y = 0. \end{cases}$$



A linha de influência é, assim, constituída por duas retas que têm uma ordenada comum

$$\frac{\ell_1 \cdot \ell_2}{\ell f \cos \beta}$$

sobre a vertical da articulação central, e que passam pelos apoios, tendo, nos apoios opostos, ordenadas:

$$\frac{\ell_1}{f \cos \beta} \quad (\text{em } \underline{A}), \quad \frac{\ell_2}{f \cos \beta} \quad (\text{em } \underline{B}).$$

Para traçá-la, basta marcar em A a ordenada $\ell_1/f \cos \beta$, e ligar a B, unindo a A o ponto onde esta reta cortar a vertical de G. Poderíamos, em vez disto, marcar $\ell_2/f \cos \beta$ em B e ligar a A, unindo a B o ponto sobre a vertical de G (vide Fig.214 na página seguinte).

No caso de arcos simétricos,

$$\ell_1 = \ell_2 = \frac{\ell}{2}, \quad \beta = 0.$$

Esta linha de influência de H se simplifica, pois:

a ordenada de A, $\frac{\ell_1}{f \cos \beta}$, transforma-se em $\frac{\ell}{2f}$,

a ordenada de B, $\frac{\ell_2}{f \cos \beta}$, transforma-se em $\frac{\ell}{2f}$,

a ordenada sobre a vertical de G, $\frac{\ell_1 \cdot \ell_2}{\ell f \cos \beta}$, transforma-se em $\frac{\ell}{4f}$.

Basta, pois, marcar $\ell/4f$, na articulação central e ligar aos apoios (vide Fig.215).

Linha de Influência dos Momentos Fletores:

Consideremos a secção S, definida por sua abcissa x em relação ao apoio A, e por sua ordenada y, medida normalmente à linha dos encontros AB. Vamos determinar a linha de influência dos momentos fletores em S (suporemos S entre A e G). Para isto, devemos considerar a carga em três posições.

1ª) Carga entre A e S: $0 < a < x$.

Tomando os momentos das forças à direita de S, virá:

$$M_S \Big|_A^S = V_B(\ell - x) - H \Big|_{AY}^G = P \frac{a}{\ell}(\ell - x) - P \frac{a \cdot \ell_2}{\ell f \cos \beta} \cdot y;$$

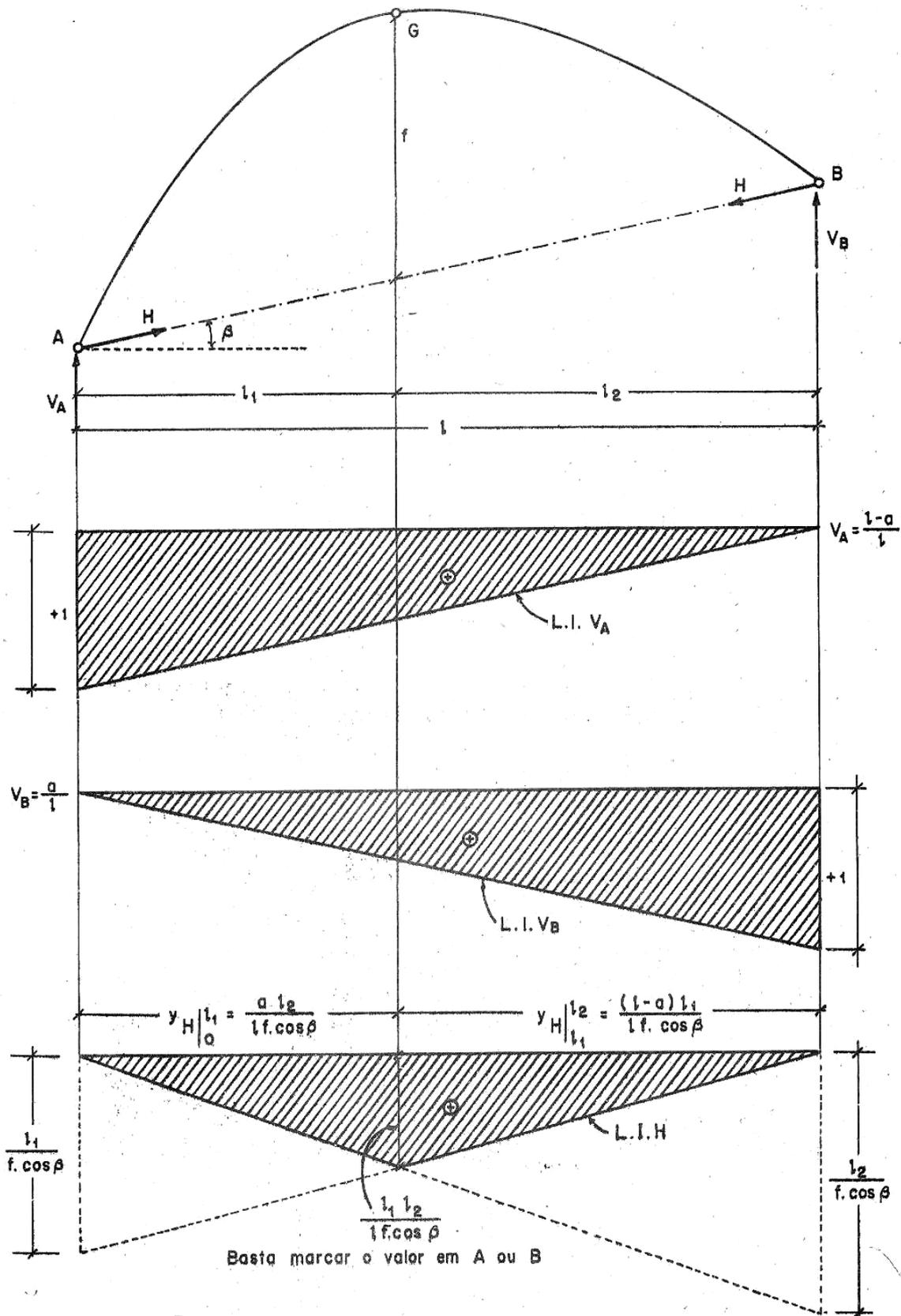
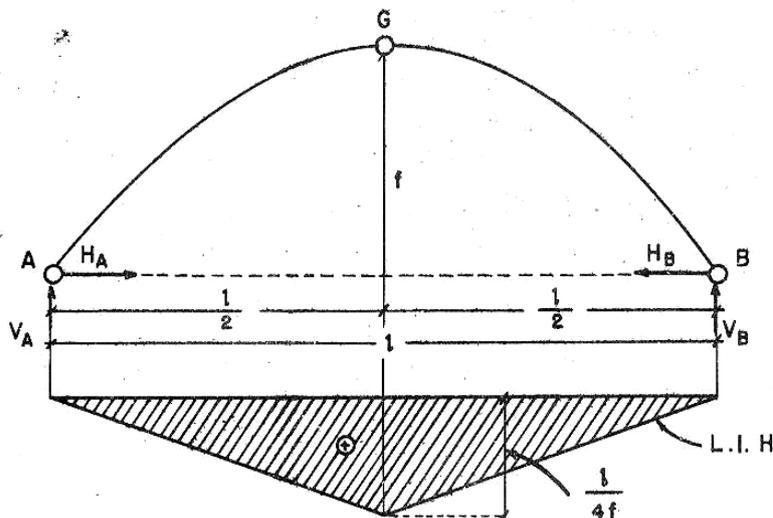


Fig. 214



daí,

Fig. 215

$$(4.112) \quad yM_S \Big|_0^x = \frac{M_S}{P} = \frac{a(l-x)}{l} - \frac{a \cdot l_2}{lf \cos \beta} y \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \rightarrow yM_S = 0, \\ a = x \rightarrow yM_S = \frac{x(l-x)}{l} - \frac{x l_2 \cdot y}{lf \cos \beta}, \\ a = l \rightarrow yM_S = (l-x) - \frac{l_2 \cdot y}{f \cos \beta}. \end{array} \right.$$

(equação de uma reta)

2º) Carga entre S e G: $x < a < l_1$.

Tomando os momentos das forças à esquerda da secção, virá:

$$M_S \Big|_S^G = V_A x - H \Big|_{AY}^G = P \frac{l-a}{l} x - P \frac{a \cdot l_2}{lf \cos \beta} y;$$

daí,

$$(4.113) \quad yM_S \Big|_x^{l_1} = \frac{M_S}{P} = \frac{x(l-a)}{l} - \frac{a l_2 \cdot y}{lf \cos \beta} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \rightarrow yM_S = x, \\ a = x \rightarrow yM_S = \frac{x(l-x)}{l} - \frac{x l_2 \cdot y}{lf \cos \beta}, \\ a = l_1 \rightarrow yM_S = \frac{l_2 x}{l} - \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot y}{lf \cos \beta} \end{array} \right.$$

(equação de uma reta)

3º) Carga entre G e B: $l_1 < a < l$.

Tomando os momentos das forças à esquerda de S, virá:



$$M_S|_G = V_A x - H|_G \cdot y = P \frac{\ell - a}{\ell} x - P \frac{(\ell - a) \cdot \ell_1}{\ell f \cos \beta} y;$$

daí,

$$(4.114) \quad y_{M_S} \Big|_{\ell_1}^{\ell} = \frac{M_S}{P} = \frac{(\ell - a)x}{\ell} - \frac{(\ell - a)\ell_1 y}{\ell f \cos \beta} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \rightarrow y_{M_S} = x - \frac{\ell_1 \cdot y}{f \cos \beta} \\ a = \ell_1 \rightarrow y_{M_S} = \frac{\ell_2 \cdot x}{\ell} - \frac{\ell_2 \cdot \ell_1 \cdot y}{\ell f \cos \beta} \\ a = \ell \rightarrow y_{M_S} = 0. \end{array} \right.$$

(equação de uma reta)

Vemos, assim, que a linha de influência consta de três trechos de reta:

A primeira, válida entre A e S, passa por A, e tem no apóio B a ordenada

$$(\ell - x) - \frac{\ell_2 \cdot y}{f \cos \beta};$$

veremos que é positiva para a posição da Fig.216;

A segunda, válida entre S e G, tem sobre a vertical de S uma ordenada comum com a primeira reta, e sobre a vertical de G uma ordenada comum com a terceira reta;

A terceira, válida entre G e B, passa por B e tem no apóio A a ordenada

$$x - \frac{\ell_1 \cdot y}{f \cos \beta};$$

veremos que é negativa para a posição da figura.

Daí o primeiro processo (analítico) para a construção da linha de influência dos momentos fletores em S:

Para a Secção entre A e G,

- 1 - Marca-se sobre a vertical de B um segmento, para baixo, igual a

$$(\ell - x) - \frac{\ell_2 \cdot y}{f \cos \beta},$$

e liga-se a A; este trecho é válido entre A e S, e corta a vertical de S no ponto D.

- 2 - Marca-se sobre a vertical de A um segmento, para cima, igual a

$$x - \frac{\ell_1 \cdot y}{f \cos \beta},$$

e liga-se a B; este trecho é válido entre G e B e corta a vertical de G em E.



Ponte em arco bi-engastado: Ponte sobre o rio das Antas .

Projeto Prof. Antonio Alves de Noronha 1950

Construção : Construtora Christiani Nielsen



Situada na RST-470 entre Bento Gonçalves e Veranópolis, no Estado do Rio Grande do Sul, Brasil, com vão livre em 186 metros,

COORDENADAS = 29 2 51.11 S 51 34 11.46 W

Um arco bi-engastado, sem articulações, é três vezes hiperestático

