



ESTÁTICA DAS CONSTRUÇÕES

Isostática

O Eng. Leopoldo de Castro Moreira, calculista de pontes, foi Professor da ENE, Escola Nacional de Engenharia, da Universidade do Brasil, atual UFRJ.

Em 1964 divulgou suas notas de aula de Isostática.

Os conceitos continuam exatamente os mesmos. Totalmente válidos e aplicáveis.

Os itens abordados nessas notas de aula são:

Estruturas:

- Vigas simplesmente apoiadas, com e sem balanços.
- Vigas Gerber.
- Treliças, vários tipos.
- Arcos Tri-articulados.

Cargas :

- Carga Permanente (diagramas)
- Carga Móvel (linhas de influência)

Itens especiais dessas notas de aula:

- O método da cadeia cinemática, para determinar as linhas de influência, é válido também para qualquer estrutura hiperestática.
- O estudo das treliças é muito amplo e considera vários tipos de treliça, os mais utilizados.
- Foram acrescentadas algumas fotos para ilustrar os tipos de treliça.

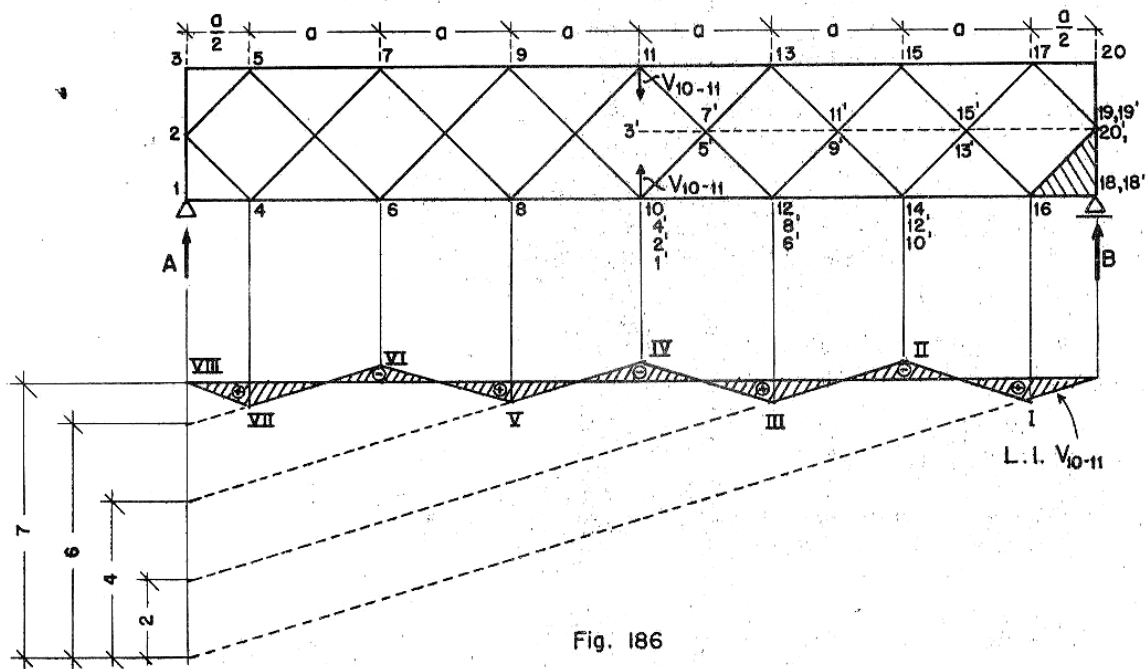


ra linha (obtendo o ponto III); no intervalo, há carga indireta, e basta ligar III a II.

d) Para a carga em 1: $U_{6-8} = 0$, e basta ligar III a 1.

3) Linha de Influência do Montante do Meio V_{10-11} :

Cortando o montante e substituindo pelas forças V_{10-11} aplicadas em 10 e 11, a treliça fica transformada em um mecanismo composto de quadriláteros deformáveis (8-11-13-10, por exemplo); só ficam fixos os triângulos extremos. Suponhamos fixo o triângulo 16-19-18; os pontos 16, 19, 18 ficando fixos, confundem-se com os correspondentes. 17 vai girar em torno de 19, fazendo $19 = 17-19$; 17 confundir-se-á com 19, da mesma forma que 208 com 19. Todos os outros pontos da figura F' são obtidos a partir destas.



Estando a carga em um certo nó K, a distância ao nó K' da figura F' pode ser dada de um modo geral por na. Podemos, assim, escrever

$$A(3a + \frac{a}{2}) - P \cdot na + V_{10-11} 2a - V_{10-11}(a + \frac{a}{2}) = 0,$$

ou:

$$A \frac{7}{2}a - Pna + V_{10-11} \frac{a}{2} = 0,$$

donde, sendo $P = 1$,

$$V_{10-11} = -7a + 2n;$$



como supuzemos tração, teremos, pela convenção que adotamos,

$$V_{10-11} = 7a - 2n.$$

Teremos, para as diversas posições da carga:

P em 18: $V_{10-11} = 0.$

P em 16: $n = 0,$ $V_{10-11} = 7A;$ basta marcar 7 em A
e ligar a B (ponto I).

P em 14: $n = 1,$ $V_{10-11} = 7A - 2;$ basta descontar 2
da linha anterior
(ponto II).

P em 12: $n = 1,$ $V_{10-11} = 7A - 2;$ idêntico ao caso an-
terior (ponto III).

P em 10: $n = 2,$ $V_{10-11} = 7A - 4;$ basta descontar 4
da ordenada da linha
primitiva (ponto IV).

P em 8: $n = 2,$ $V_{10-11} = 7A - 4;$ idêntico ao caso an-
terior (ponto V).

P em 6: $n = 3,$ $V_{10-11} = 7A - 6;$ desconta-se 6 da
ordenada da linha
primitiva (ponto VI).

P em 4: $n = 3,$ $V_{10-11} = 7A - 6;$ idêntico ao caso an-
terior (ponto VII).

P em 1: $V_{10-11} = 0;$ (ponto VIII).

Nos intervalos há carga indireta: basta ligar os pontos anteri-
ormente obtidos.

Treliças de Membruras Poligonais.

Estudaremos, a seguir, algumas treliças em que os nós das mem-
bruras não se situam sobre uma reta, mas sim sobre uma curva, for-
mando, assim, uma membrura poligonal.

1) Treliça Parabólica.

Nesta treliça, os nós se encontram sobre curvas do segundo grau,
uma das quais deve ser uma parábola, quer nas duas membruras, quer
em somente uma. As diagonais podem ser dispostas como na viga
PRATT ou como na viga HOWE.

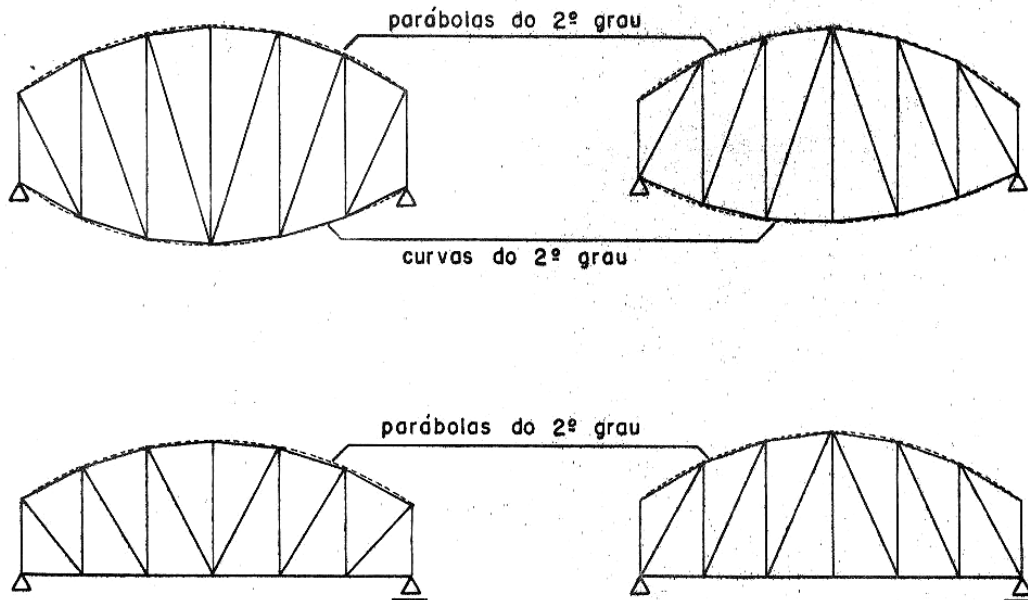


Fig. 187

Quando as duas membruras se encontram nos apoios, a viga, assim formada, é conhecida pelo nome de BOWSTRING, se uma delas fôr re-
 ta.



Fig. 188

A determinação das linhas de influência não apresenta a menor dificuldade, procedendo-se pelo método geral.

Para carga permanente, estas vigas apresentam propriedades interessantes, que estudaremos a seguir. Suponhamos uma carga uniforme, atuando na treliça BOWSTRING (suposta concentrada nos nós), como indica a figura 189.

Sabemos que, na parábola,

$$h_m = \frac{4f}{l^2} x_m (l - x_m).$$

Além disto, sabemos que

$$O_m = + \frac{M_m}{h_m \cos \beta_m}, \quad U_{m+1} = - \frac{M_m}{h_m}.$$

O momento M_m para carga uniforme é:



Isostática parte 06
Prof. Leopoldo de Castro Moreira
ENE -1964

Notas de
aula

Prof. Eduardo C. S.
Thomaz

5 / 28





Isostática parte 06
Prof. Leopoldo de Castro Moreira
ENE -1964

Notas de
aula

Prof. Eduardo C. S.
Thomaz

6 / 28



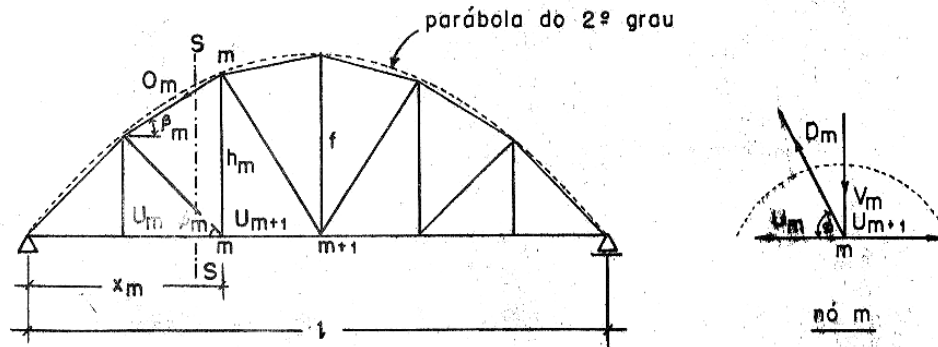


Fig. 189

$$M_m = \frac{qx_m}{2} (l - x_m).$$

Dai:

$$\begin{cases} O_m = \frac{qx_m(l - x_m)l^2}{2 \cdot 4fx_m(l - x_m)\cos \beta_m} = \frac{ql^2}{8f} \cdot \frac{1}{\cos \beta_m} \\ U_m = -\frac{qx_m(l - x_m)l^2}{2 \cdot 4fx_m(l - x_m)} = -\frac{ql^2}{8f} \end{cases}$$

O esforço na membrura retilínea é, portanto, constante, e o esforço na membrura parabólica cresce para os extremos da viga; sua projeção horizontal

$$O_m \cos \beta = \frac{ql^2}{8f}$$

é, porém, constante.

Cortando o painel pela seção SS, vemos que (translação horizontal),

$$O_m \cos \beta - U_m = D_m \cos \phi_m,$$

ou:

$$\frac{ql^2}{8f} - \frac{ql^2}{8f} = D_m \cos \phi_m \longrightarrow D_m = 0.$$

Os esforços nas diagonais são nulos.

O carregamento dando-se pela membrura parabólica, veremos, estudando o equilíbrio do nó m inferior,

$$D_m \sin \phi = V_m \longrightarrow V_m = 0.$$

Os esforços nos montantes serão, também, nulos.



Estas treliças são, por isto, muito econômicas para edifícios onde a carga permanente predomina.

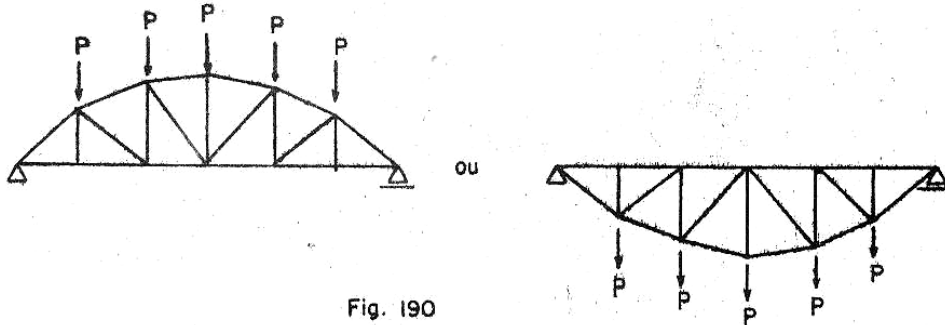


Fig. 190

2) Treliças PAULI.

Nestas treliças, os esforços em todas as barras de uma membrura são iguais.

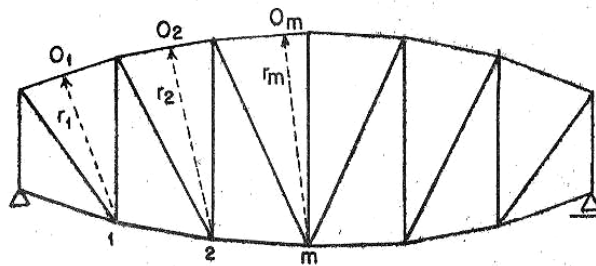


Fig. 191

Sabemos que

$$O_1 = \frac{M_1}{r_1}, \quad O_2 = \frac{M_2}{r_2}, \quad \dots, \quad O_m = \frac{M_m}{r_m}.$$

Mas,

$$O_1 = O_2 = \dots = O_m,$$

donde

$$\frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2} = \dots = \frac{M_m}{r_m} \quad \text{ou} \quad \frac{r_1}{M_1} = \frac{r_2}{M_2} = \dots = \frac{r_m}{M_m}$$

isto é, os braços de alavanca são proporcionais aos momentos.

Para se projetar uma treliça PAULI com membrura inferior reta, por exemplo, será necessário:

- 1 - para o carregamento em questão, traçar o diagrama do momento;
- 2 - dividir o vão em um certo número **par de** painéis;
- 3 - no montante do meio, com centro no nó inferior e raio igual a uma fração do vão (geralmente 1/8 a 1/10), traçar um círculo;



- 4 - com centro em cada um dos outros nós i e raios respectivamente iguais a

$$r_i = \left(\frac{M_i}{M_m} \right) r_m,$$

onde M_i foi tirado do diagrama de momentos, traçar círculos;

- 5 - do primeiro nó, tiramos tangente ao primeiro círculo até o primeiro montante; daí ao segundo círculo até o segundo montante, e assim por diante.

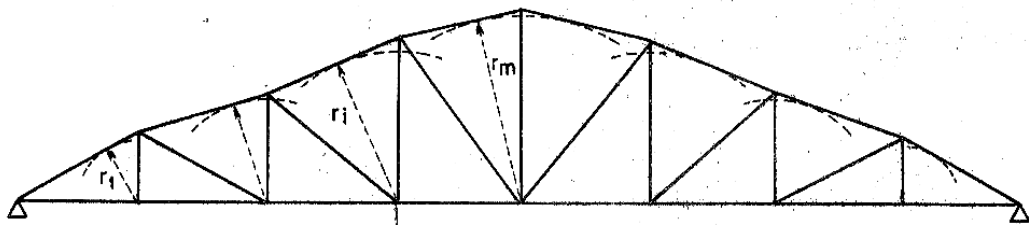


Fig. 192

Determinação das Linhas de Influência pelo Processo dos Polos Instantâneos.

Suponhamos, para exemplo, uma treliça WARREN para a qual queremos determinar as linhas de influência das barras O_m , D_m , U_{m-1} , representadas na Fig.193.

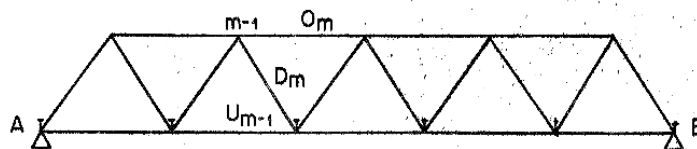


Fig. 193

Para a membrura superior O_m , procederemos como segue:

Cortamos a barra, substituindo-a pela força que nela existe, aplicada aos dois nós. Suporemos a barra comprimida; nestas condições, as forças que agem nos nós dirigem-se para elas. Ficamos, assim, em presença de uma cadeia cinemática móvel, composta das duas partes I e II que se ligam ao exterior em A e B . Já sabemos determinar os polos I/W, II/W (em A e B , respectivamente), e I/II (em m). Suponhamos a carga agindo em um ponto qualquer da membrura inferior (a transmissão da carga se dá, por hipótese, nesta membrura). Demos, agora, a este sistema em equilíbrio, um deslocamento qualquer, de modo que os pontos de aplicação das forças O_m (os dois nós superiores) se aproximem de uma quantidade (isto fará com que as forças produzam um trabalho nega-



tivo). Com isto, o ponto de aplicação de P vai deslocar-se de na sua direção e sentido (trabalho positivo), e poderemos es- crever, pelo teorema dos trabalhos virtuais:

$$-O_m \cdot \gamma + P\delta = 0,$$

donde

$$O_m = + P \frac{\delta}{\gamma}.$$

Para a linha de influência, $P = 1$ e virá:

$$(3.213) \quad y_{O_m} = + \frac{1}{\gamma} \cdot \delta,$$

isto é, a posição deformada do estrado (onde se aplica a carga $P = 1$), medindo, em relação à sua posição primitiva, os valores δ , dará, numa certa escala, a representação da linha de influência de O_m . Se determinarmos uma única ordenada da mesma, estaremos em condição de traçá-la (Fig.194).

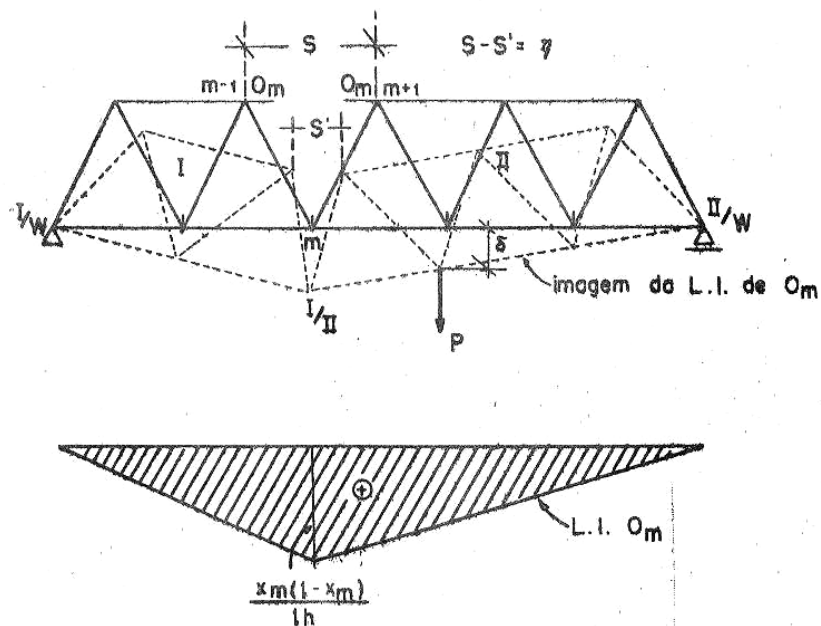


Fig. 194

Para $P = 1$ em M , teremos

$$A = 1 \cdot \frac{l - x_m}{l}; \quad B = 1 \cdot \frac{x_m}{l},$$

donde

$$M_m = \frac{l - x_m}{l} x_m;$$

$$y_{O_m} = \frac{M_m}{h} = \left| \frac{x_m(l - x_m)}{lh} \right|.$$



Para a barra U_{m-1} , procedendo análogamente ao que fizemos para O_m , teremos (supondo U_{m-1} de tração), dando um deslocamento para cima (para termos U_{m-1} e P de sinais opostos):

$$U_{m-1} \gamma - P \delta = 0 \longrightarrow U_{m-1} = P \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{I}{W}$$

ou, sendo $P = 1$,

(3.214)

$$\gamma U_{m-1} = 1 \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

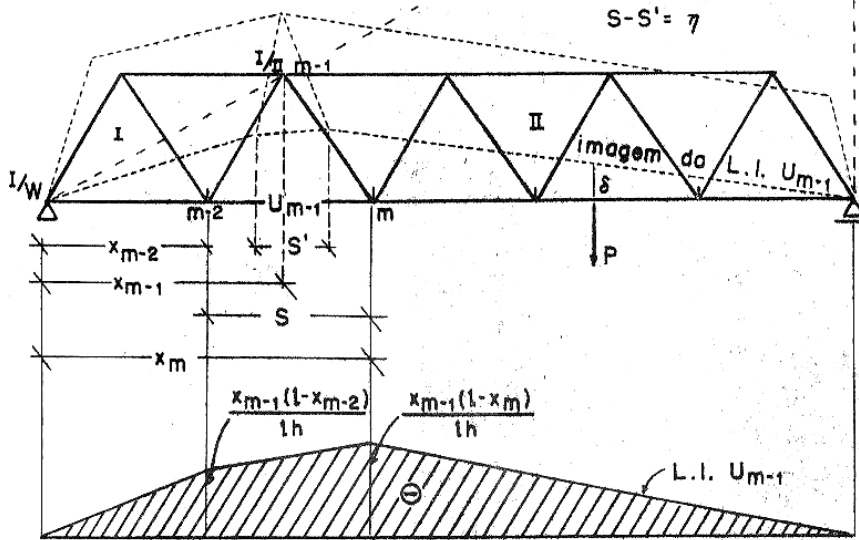


Fig. 195

Para $P = 1$ em $m-2$: $A = \frac{\ell - x_{m-2}}{\ell}$ $\left\{ \begin{array}{l} M_{m-1} = \frac{x_{m-1}(\ell - x_{m-2})}{\ell} \\ \gamma U_{m-1} = \left| \frac{x_{m-1}(\ell - x_{m-2})}{\ell h} \right| \end{array} \right.$

Para $P = 1$ em m : $A = \frac{\ell - x_m}{\ell}$ $\left\{ \begin{array}{l} M_{m-1} = \frac{x_{m-1}(\ell - x_m)}{\ell} \\ \gamma U_{m-1} = \left| \frac{x_{m-1}(\ell - x_m)}{\ell h} \right| \end{array} \right.$

Verificamos, assim, que o sentido do deslocamento deve ser sempre tal que os trabalhos das forças substitutivas da barra (e da força unitária) sejam de sinais contrários.

Para a diagonal D_m , teremos as partes 1 e 2 ligadas pelas barras 3 e 4, como indica a Fig.196.

$P = 1$ em m : $A = \frac{\ell - x_m}{\ell} \longrightarrow D_m = A / \sin \phi = \left| \frac{\ell - x_m}{\ell \sin \phi} \right|$;



$P = 1$ em $m-2$: $B = \frac{x_{m-2}}{l} \rightarrow D_m = B/\text{sen } \phi = \left| \frac{x_{m-2}}{l \text{ sen } \phi} \right|$

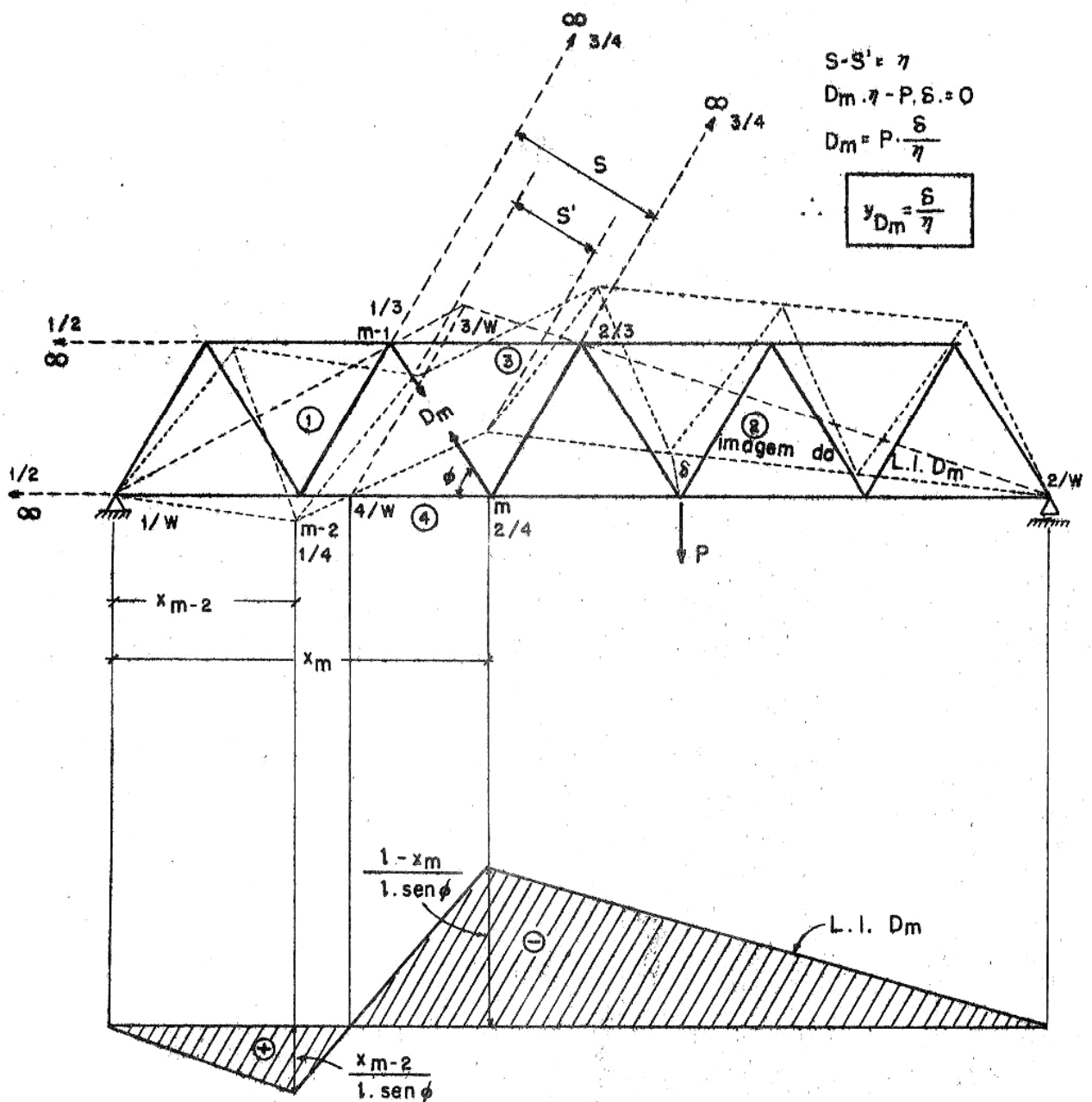


Fig. 196



LINHA DE INFLUÊNCIA DA FIG. 140 DA PAG. 95

Estrado inferior ou superior

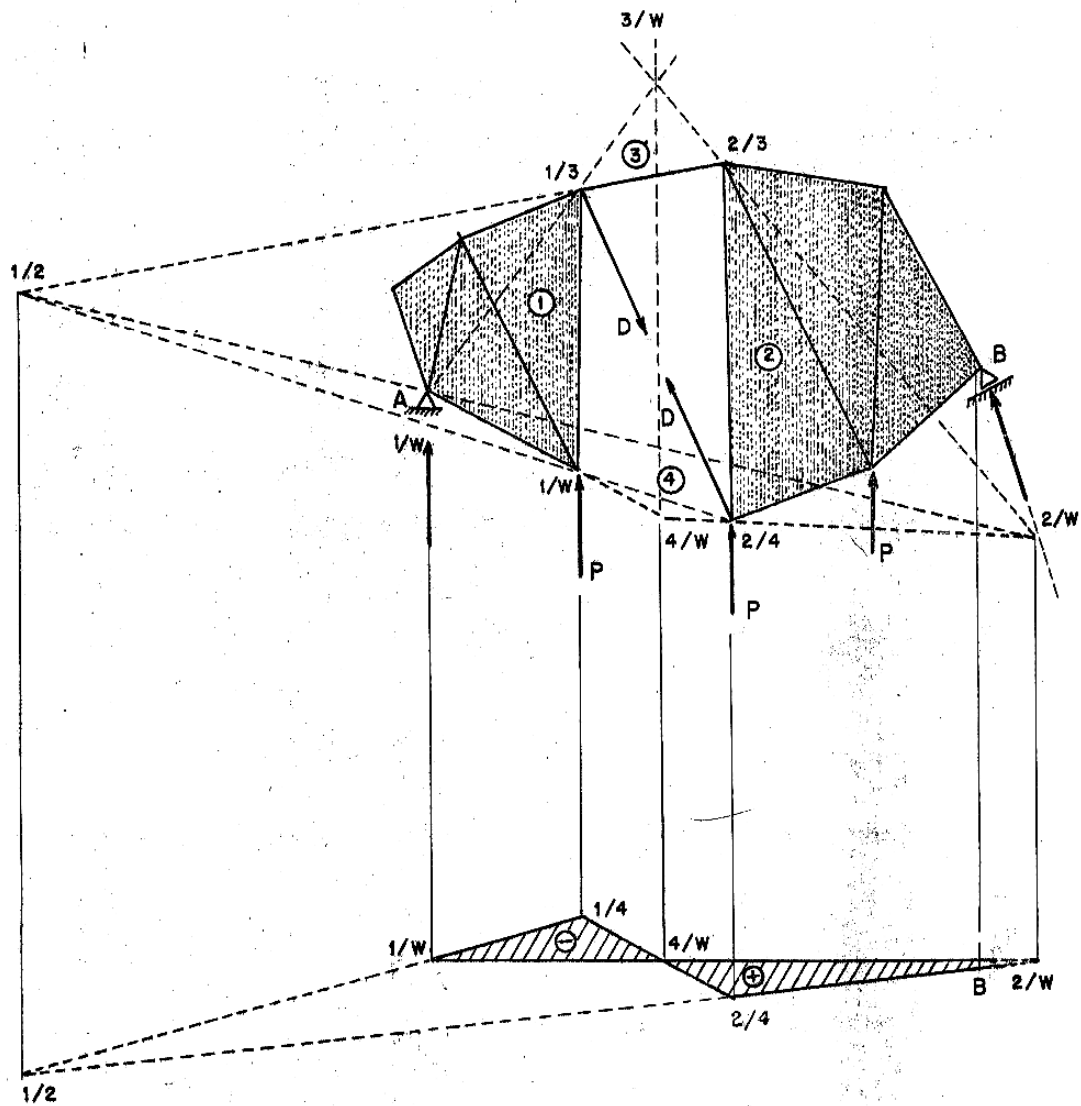


Fig. 197 A



3.4 VIGAS GERBER EM TRELIÇA

Suponhamos a viga representada pela Fig.198 abaixo. Temos aí

$$\left. \begin{array}{l} t = 5 \\ s = 69 \end{array} \right\} \longrightarrow s + t = 74$$
$$k = 36 \longrightarrow 2k = 72$$

O sistema é, portanto, duas vezes hiperestático.

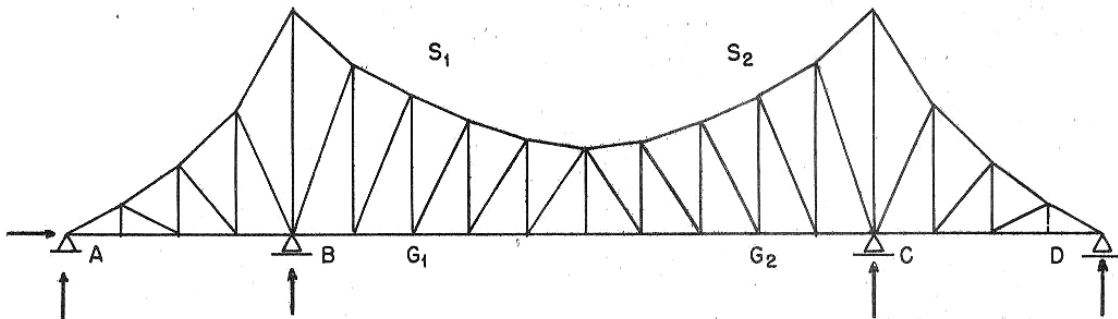


Fig. 198

Se retirarmos duas barras do sistema, êle se transformará num outro, isostático. Retiremos, então, as barras S_1 e S_2 ; o sistema resultante (isostático) será composto por uma viga simplesmente apoiada AB , com o extremo em balanço BG_1 , da viga simplesmente apoiada CD com o extremo CG_2 em balanço, e da viga simplesmente apoiada G_1G_2 que se apoia nas articulações G_1 e G_2 , nos extremos em balanço das outras duas vigas. É, portanto, uma viga Gerber, análoga à representada na Fig. 199 abaixo.

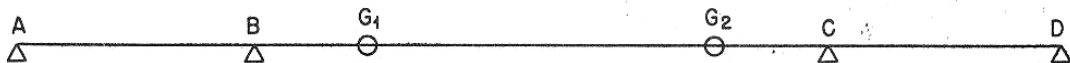


Fig. 199

O cálculo desta viga para carga permanente se faz por um dos processos conhecidos (Cremona, Ritter, etc.), desmembrando-se a viga Gerber nos vários sistemas simples que a compõem e substituindo-se, para o cálculo das vigas com extremos em balanço, as vigas simplesmente apoiadas, nos extremos destes balanços, pelas suas ações (que são cargas concentradas).

O traçado das linhas de influência não oferece tão pouca nenhuma dificuldade. Pode ser efetuado por um dos processos conhecidos, geralmente o de Ritter, bastando levar em consideração que o momento que aparece nas expressões dos esforços nas barras, ou nas linhas de influência destes esforços,



$$S = K \cdot M, \quad \text{ou} \quad y_s = K \cdot y_M,$$

é o momento nas vigas Gerber de alma cheia de iguais vãos; portanto, as linhas de influência dos esforços nas barras serão proporcionais às linhas de influência dos momentos (ou, em certos casos, das forças cortantes ou reações de apoio) destas vigas equivalentes.

Assim, na viga Gerber que vínhamos estudando, vamos traçar algumas linhas de influência. Para a viga simplesmente apoiada $G_1 G_2$ as linhas de influência são as de uma treliça simplesmente apoiada, não apresentando, pois, novidade alguma. Tracemos, agora, as linhas de influência para as barras O_{m+1} , U_m , D_m do primeiro vão, e O_{n-1} , U_n , D_{n-1} do balanço BG_1 .

1) Membrura O_m :

Passando a secção SS pelo painel, vemos que

$$O_m \cdot r_m = M_m \longrightarrow O_m = + \frac{M_m}{r_m} = + \frac{M_m}{h_m \cos \beta_m}.$$

Para a linha de influência, teremos:

$$(3.401) \quad y_{O_m} = + \frac{1}{h_m \cos \beta_m} \cdot y_{M_m}$$

Para a linha de influência de M_m (viga Gerber $ABG_1 G_2 CD$), marcaríamos $+x_m$ em \underline{A} , ligaríamos a \underline{B} , prolongando até à vertical de G_1 e daí até G_2 . Para a linha de influência de O_m , devemos, portanto, marcar $+x_m/h_m \cos \beta_m$ em \underline{A} , ligar a \underline{B} e prolongar até G_1 , e daí até G_2 . O ponto sobre a vertical de \underline{m} será ligado a \underline{A} .

2) Membrura U_m :

Analogamente, teremos:

$$U_m \cdot h_{m-2} = M_{m-2} \longrightarrow U_m = - \frac{M_{m-2}}{h_{m-2}}.$$

A linha de influência de U_m será, pois, a de M_{m-2} multiplicada por $-1/h_{m-2}$, donde o seu traçado: marcamos $-x_{m-2}/h_{m-2}$ em \underline{A} , ligamos a \underline{B} até G_1 e daí, até G_2 ; o ponto em $m-2$ será ligado a \underline{A} .

3) Diagonal D_m :

Quando a carga está à direita de \underline{m} , teremos:

$$A \cdot a = D_m \cdot r_d \longrightarrow D_m = + A \frac{a}{r_d}.$$



A linha de influência de \underline{A} se obtém marcando +1 em \underline{A} , ligando a \underline{B} até G_1 e daí até G_2 ; a linha de influência do trecho de D_m além de \underline{m} ,

$$(3.402) \quad y_{D_m} = + \frac{a}{r_d} \cdot y_A,$$

será obtida, marcando-se $+a/r_d$ em \underline{A} , ligando a \underline{B} até G_1 e daí a G_2 .

Para a carga à esquerda de $m-2$, teremos:

$$B \cdot b = D_m \cdot r_d \longrightarrow D_m = + B \frac{b}{r_d},$$

donde

$$(3.403) \quad y_{D_m} = + \frac{b}{r_d} \cdot y_B.$$

Basta, pois, marcar $+b/r_d$ em \underline{B} e ligar a \underline{A} , sendo válido de \underline{A} a $m-2$. Entre $m-2$ e \underline{m} , há carga indireta — basta chanfrar. Como verificação, os dois ramos da linha de influência devem cortar-se sobre a vertical de \underline{i} .

4) Passando a secção SS' pelo painel, veremos que:

$$O_{n-1} \cdot r_{n-1} = M_{n-1} \longrightarrow O_{n-1} = \frac{M_{n-1}}{r_{n-1}} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-2} \cos \beta_n},$$

donde

$$(3.404) \quad y_{O_{n-1}} = \frac{1}{h_{n-2} \cos \beta_n} \cdot y_{M_{n-1}}.$$

A linha de influência dos M_{n-1} é obtida marcando-se $-z_{n-2}$ em G_1 e ligando a G_2 e $n-2$. Para a linha de influência de M_{n-1} , deveremos marcar $-z_{n-2}/h_{n-2} \cos \beta_n$ em G_1 e ligar a $n-2$ e G_2 .

5) Vemos ainda que

$$U_n \cdot h_{n-1} = M_{n-1} = M_n;$$

mas,

$$M_n = 0,$$

logo,

$$(3.405) \quad U_n = 0.$$

6) D_{n-1} : Para a carga à esquerda de $n-2$, não haverá força alguma à direita de D_{n-1} e, portanto, teremos

$$D_{n-1} = 0.$$

Para a carga no ponto \underline{n} , poderemos escrever:

$$D_{n-1} \cdot \bar{r}_d = P \cdot e \longrightarrow D_{n-1} = + P \frac{e}{\bar{r}_d}.$$



Para a carga entre $n-2$ e \underline{n} , e \underline{n} (ou G_1) e G_2 , haverá carga indireta. Basta, pois, marcar $+c/r_d$ em G_1 e ligar a $n-2$ e G_2 .

Para um montante, procederíamos análogamente (vide Fig.200, à página 148.)

Para a linha de influência de U_n do exemplo da Fig.202, à página 152, devemos considerar o carregamento indireto entre $n-2$ e \underline{n} .

Para a linha de influência de D_{n-1} , vemos que:

$$D_{n-1} \cdot r_d = M_i \longrightarrow |D_{n-1}| = \frac{M_i}{r_d}.$$

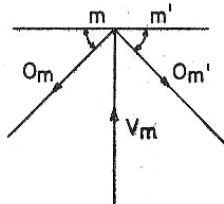
Quando a carga estiver à direita de \underline{i} , antes de G_1 , haverá tração em D_n ; quando a carga estiver em G_1 , esta tração será dada pelo momento

$$M_i = Z_i \longrightarrow D_{n-1} = -\frac{Z_i}{r_d}.$$

Marcamos, portanto, em G_1 este valor; entre G_1 e G_2 haverá carga indireta.

Quando a carga estiver em \underline{i} , teremos $M_i = 0$ e $D_{n-1} = 0$. Portanto, ligamos o ponto G_1 a \underline{i} , prolongamos até \underline{n} e ligamos a $n-2$, devido ao carregamento indireto.

Para o montante V_m teremos, estudando o equilíbrio do nó superior \underline{m}' ,



$$V_m = O_m \sin \beta_m + O_{m'} \sin \beta_{m'}$$

mas,

$$O_m r_m = M_m \longrightarrow |O_m| = \frac{M_m}{r_m} = \frac{M_m}{h_m \cos \beta_m},$$

$$O_{m'} r_{m'} = M_m \longrightarrow |O_{m'}| = \frac{M_m}{r_{m'}} = \frac{M_m}{h_m \cos \beta_{m'}}.$$

Ambas de tração para a carga à direita de \underline{m} ; portanto, V_m será de compressão:

$$V_m = \frac{M_m}{h_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{M_m}{h_m} \operatorname{tg} \beta_{m'} = \frac{M_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \beta_{m'}).$$

A linha de influência de M_m é obtida marcando-se $-z_m$ em G_1 e ligando a \underline{B} e G_2 . Para a linha de influência de V_m marcaremos $+z_m/h_m(\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \beta_{m'})$ em G_1 , ligando a \underline{B} e G_2 (é compressão).

Podemos ter uma idéia da forma da linha de influência de uma barra qualquer pelo processo cinemático. Por exemplo, para a diagonal D_m (Fig.203, pg.154) teríamos, cortando D_m e substituindo pelas forças que aí existiam: $D_m \cdot \eta = P \cdot \delta$, donde $D_m = -P \cdot \delta / \eta$, e $|y_{D_m}| = 1/\eta \cdot \delta$.



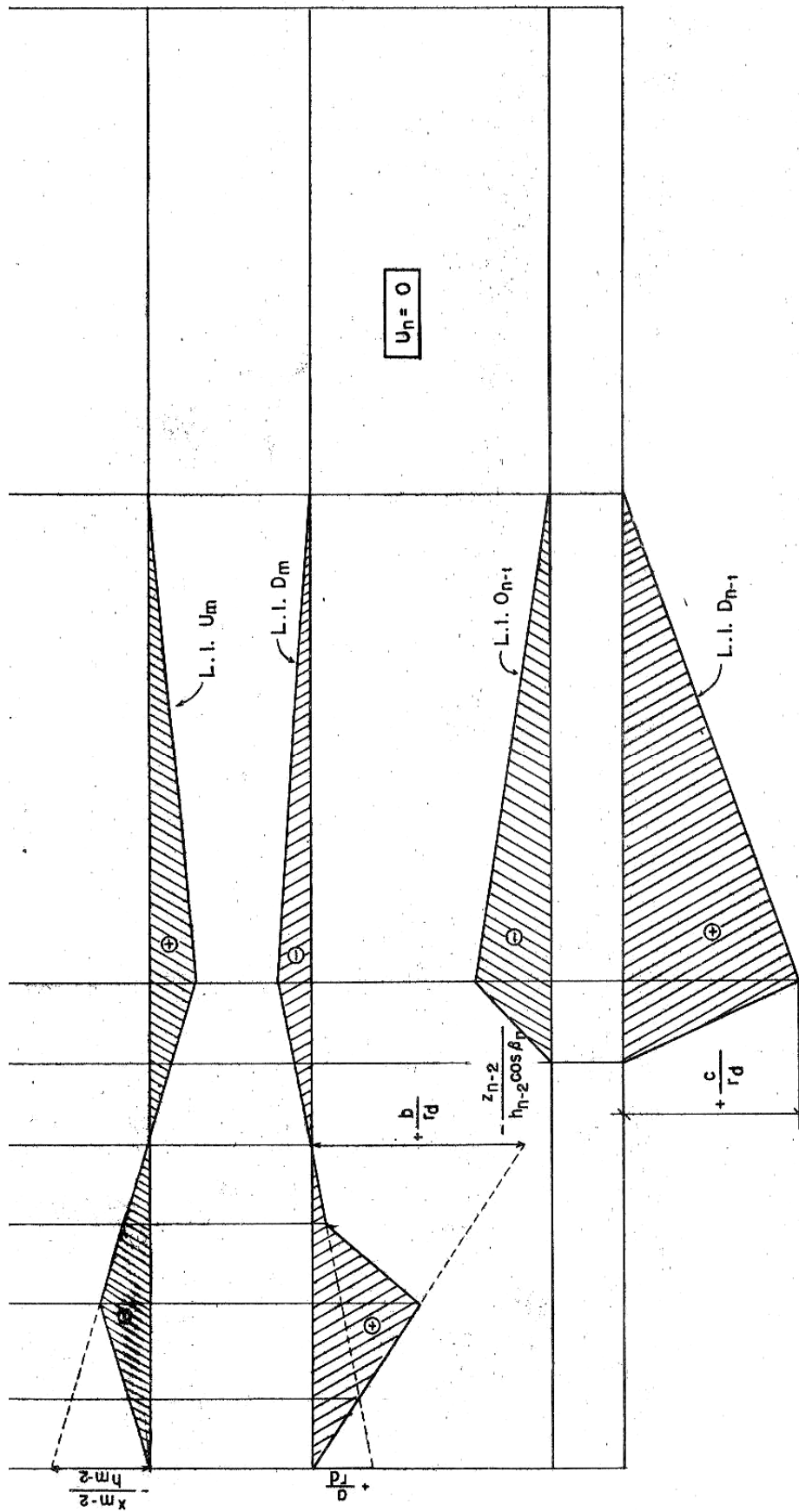


Fig. 200 (2ª parte)



VIGA GERBER EM TRELIÇA (2)
 OUTRO EXEMPLO

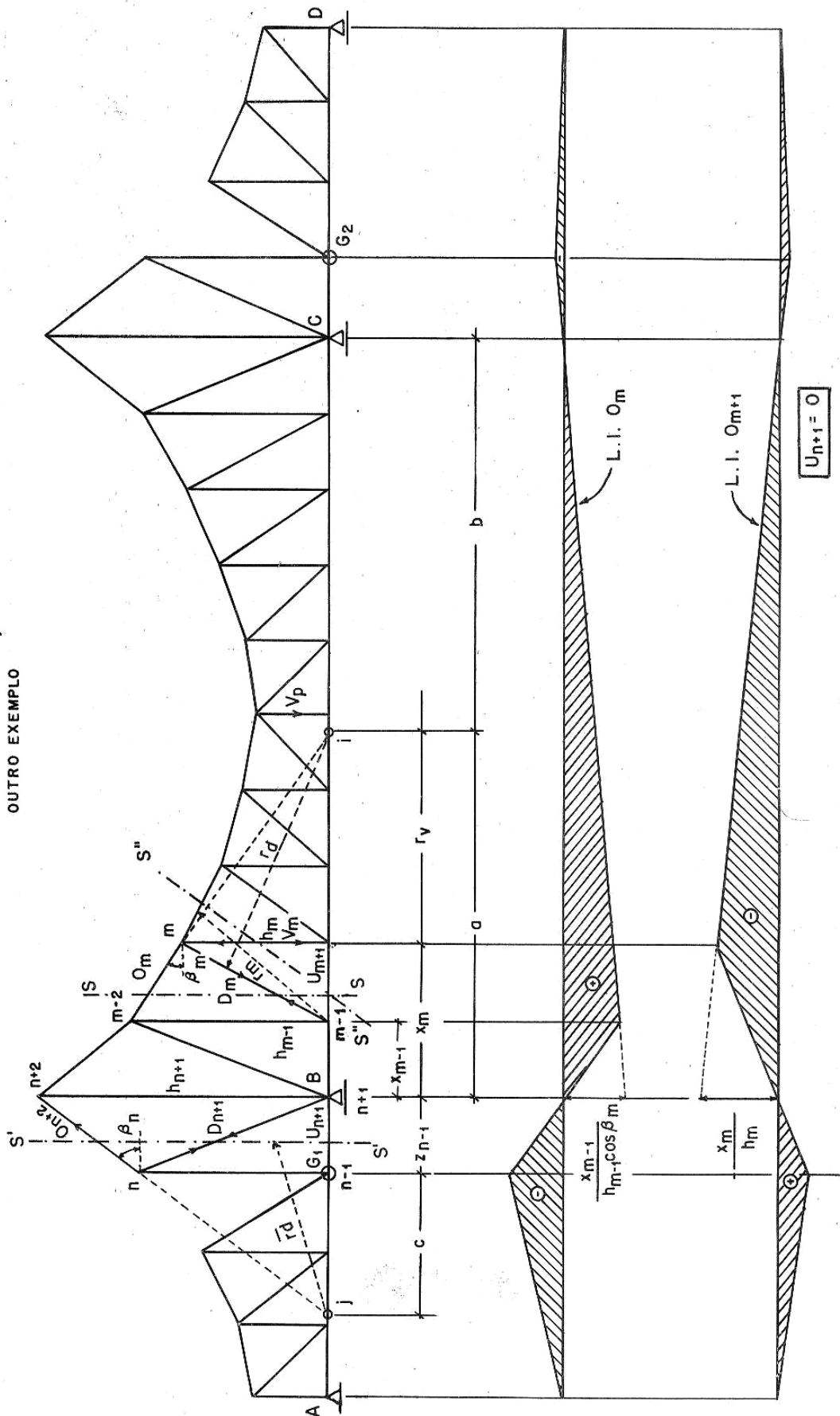


Fig. 201 (1ª parte)

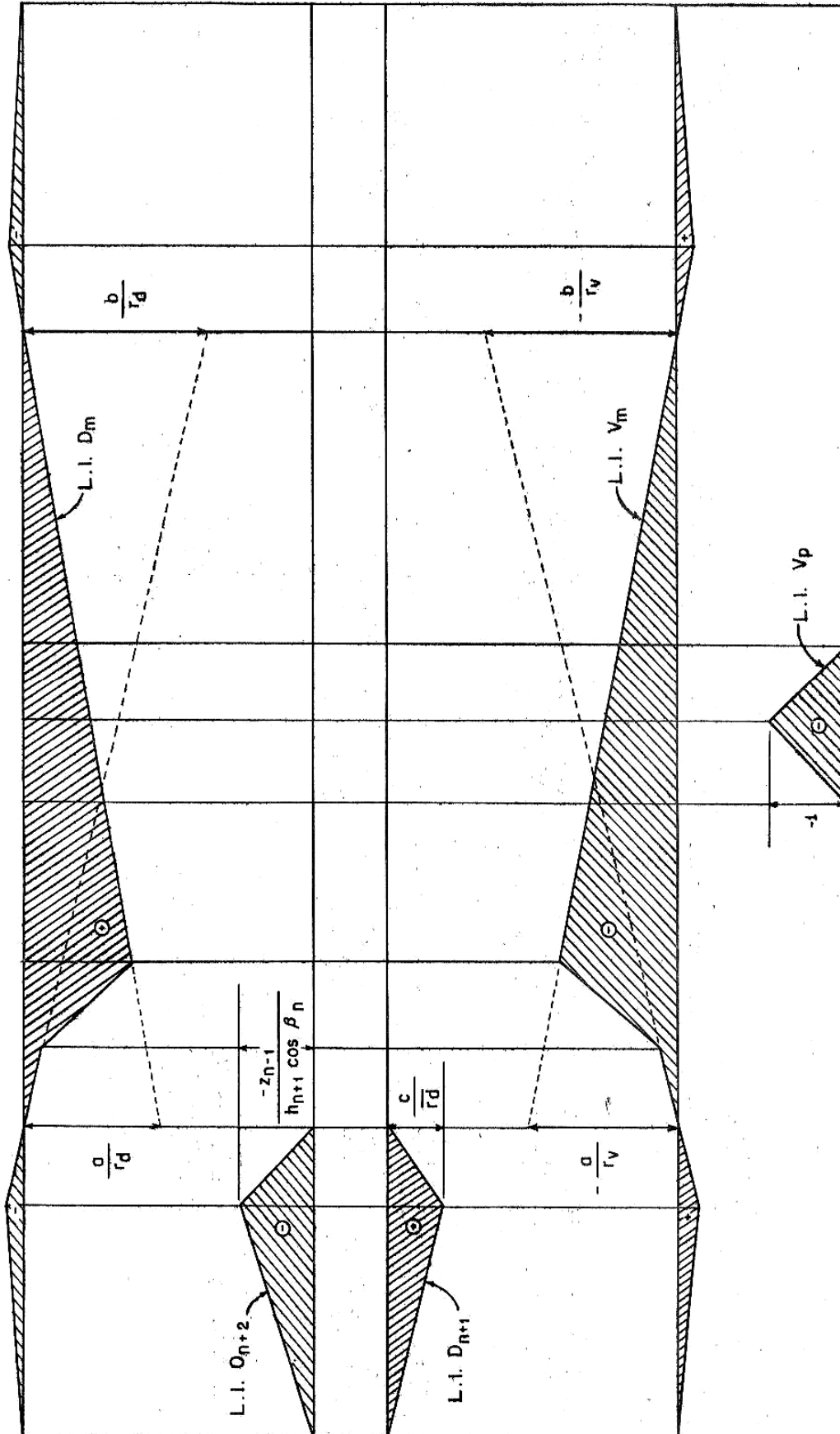


Fig. 201 (2ª parte)



VIGA GERBER EM TRELIÇA

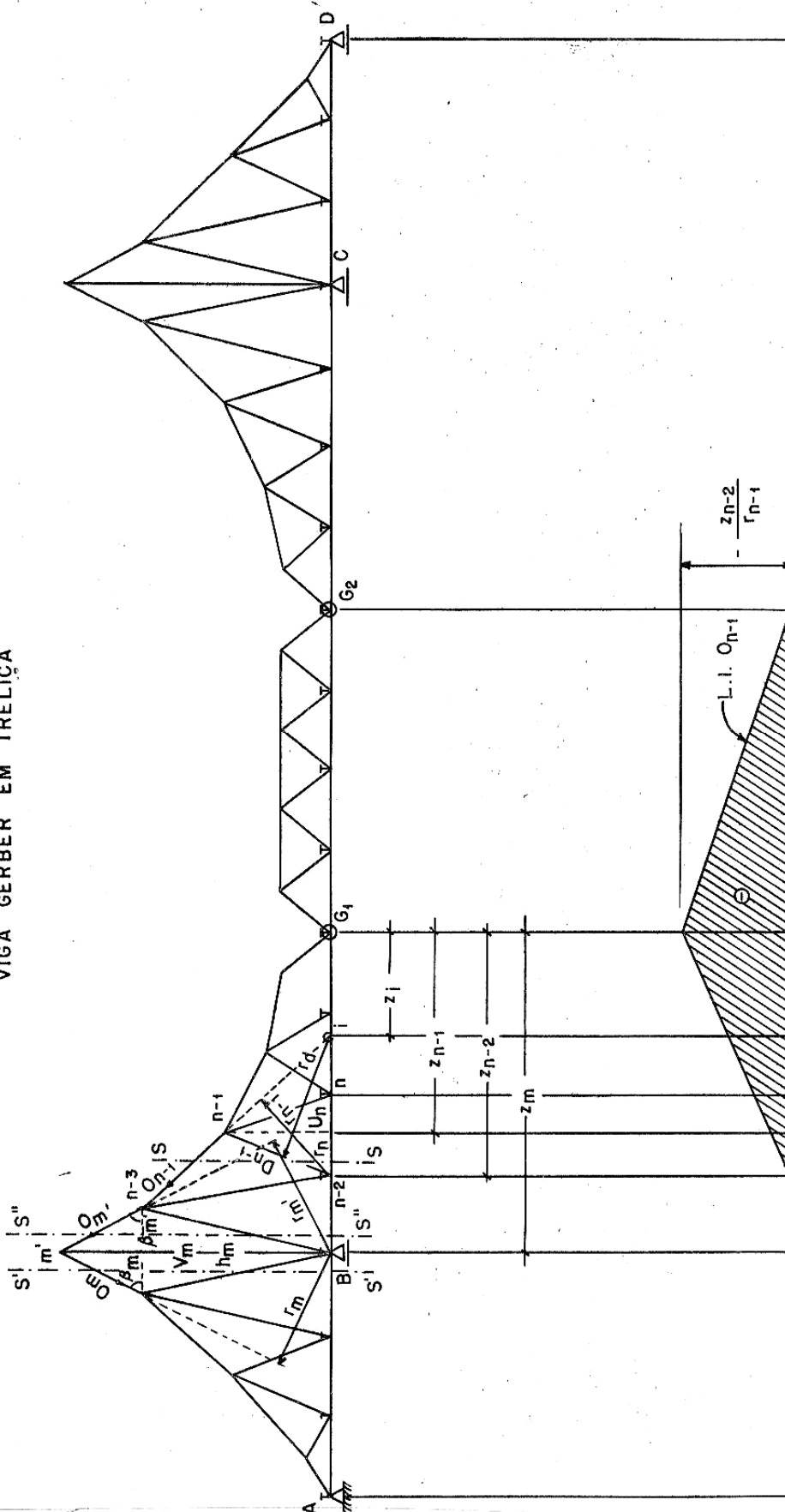


Fig. 202 (1ª parte)

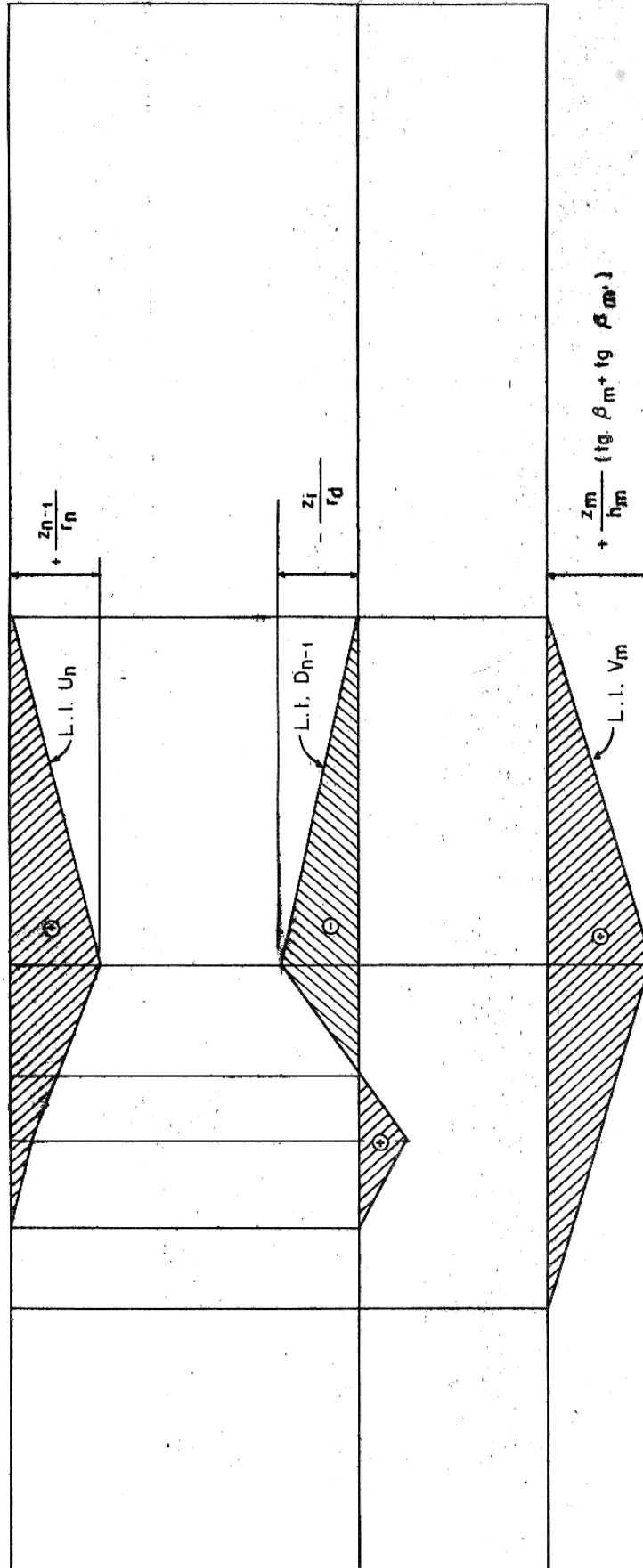


Fig. 202 (2ª parte)



VIGA GERBER EM TRELIÇA (4)
PROCESSO CINEMÁTICO

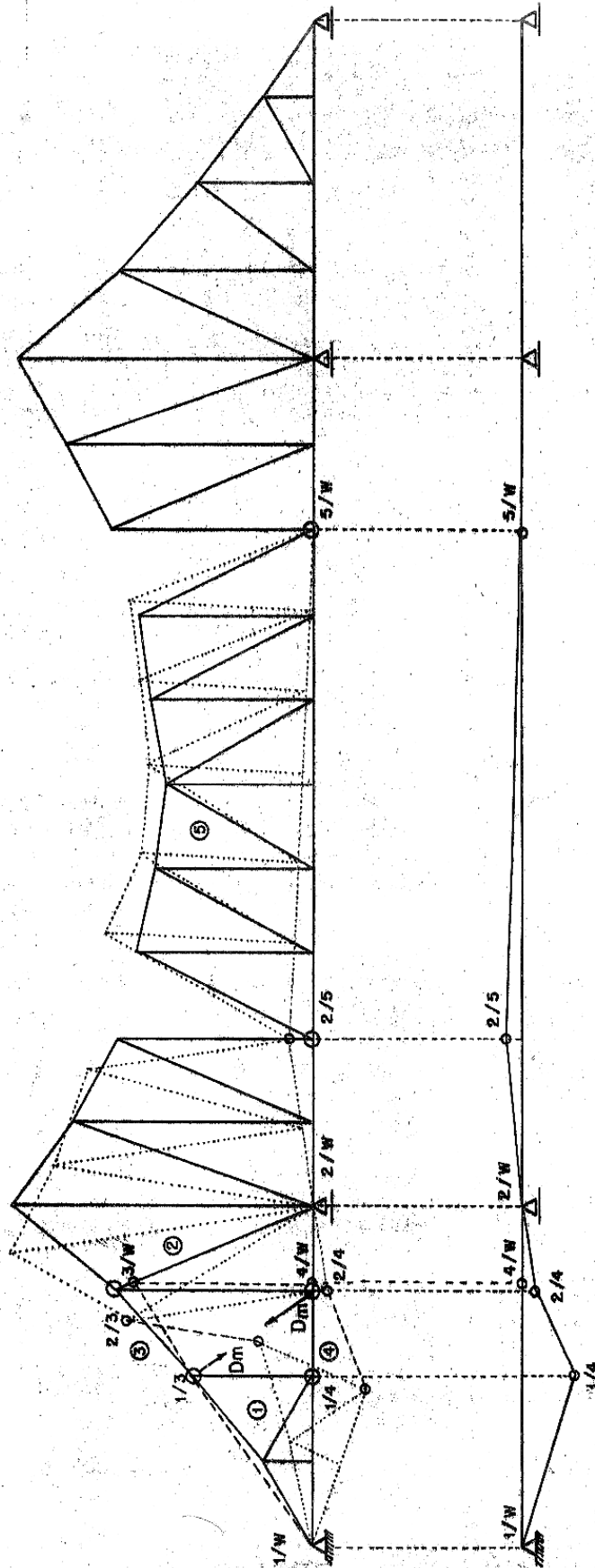


Fig. 203