



**TRELIÇA TIPO WARREN OU TRELIÇA TIPO W.**

**Linha Vermelha sobre a Avenida Brasil / RJ**





Cap. III

Vigas Simples em Treliça

VIGA HOWE

CARREGAMENTO SUPERIOR

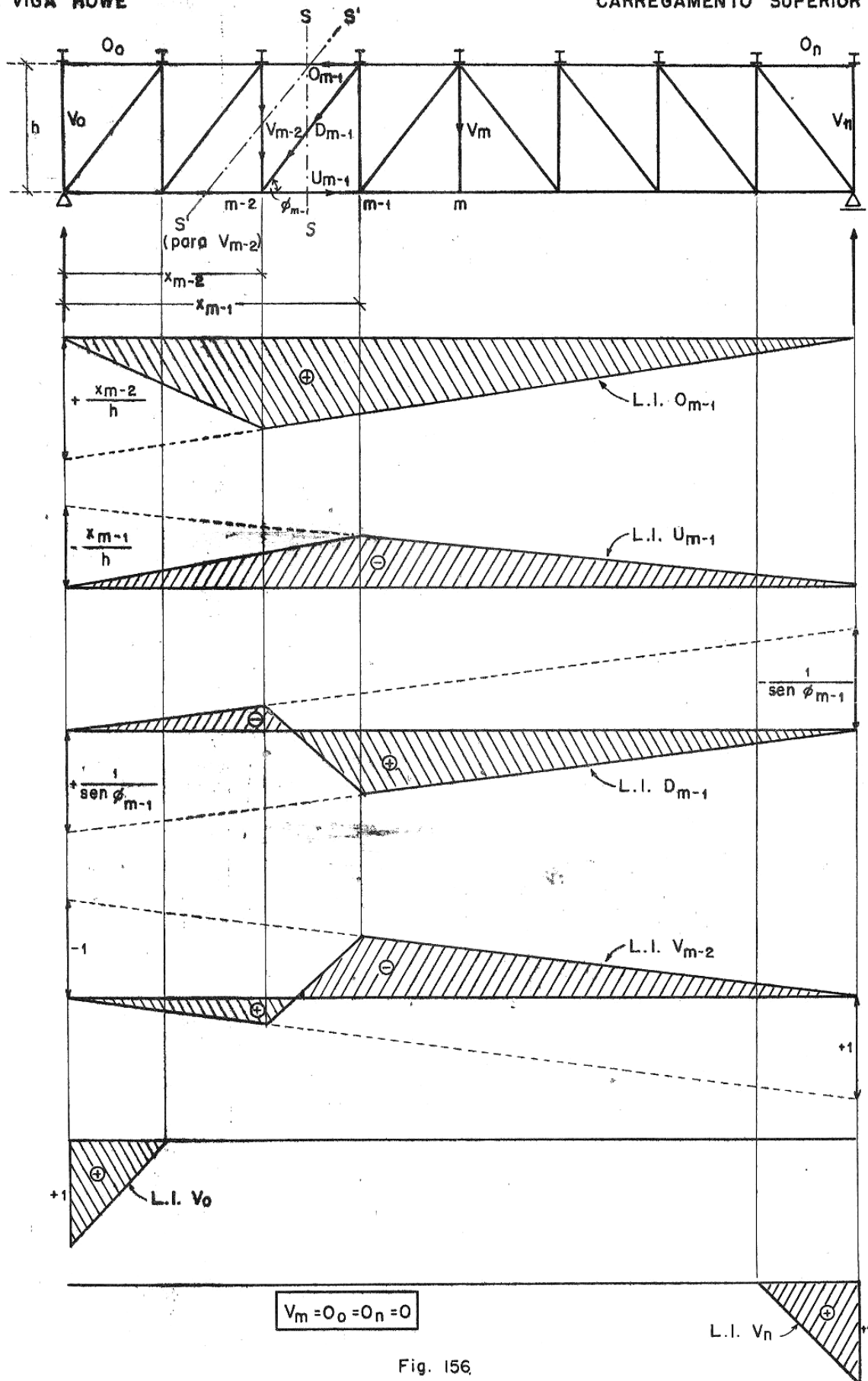


Fig. 156



## 2 - Carregamento Superior:

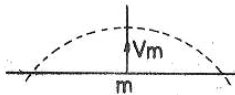
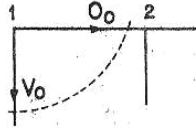


Fig. 157

Pela análise do primeiro nó superior, veremos que  $O_0 = 0$ , bem como  $O_n = 0$ , pois não há carga horizontal. Quando a carga estiver além do segundo nó,  $V_0$  será nulo; para a carga no intervalo 1-2,  $V_0$  será comprimido pela reação de apoio da viga simples 1-2. Basta, assim, marcar +1 em A e ligar ao nó vizinho.

Pela análise do nó m inferior, vemos que não podendo haver carga aí, teremos  $V_m = 0$ .

As Figs.155 e 156 mostram os diagramas para carregamento inferior e superior, respectivamente.

## Treliças Compostas.

Há treliças que podem ser decompostas em outras simples: são superposições de treliças secundárias sobre uma treliça base principal. Isto se faz para diminuir o comprimento de flambagem das barras comprimidas. A treliça da Fig.158 pode ser considerada co-

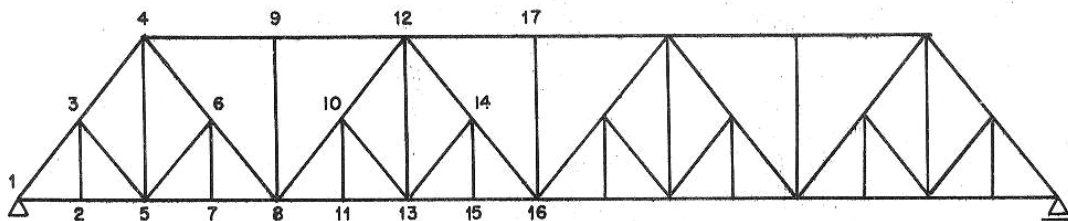


Fig. 158

como a superposição, sobre uma treliça Warren, de várias treliças triangulares.

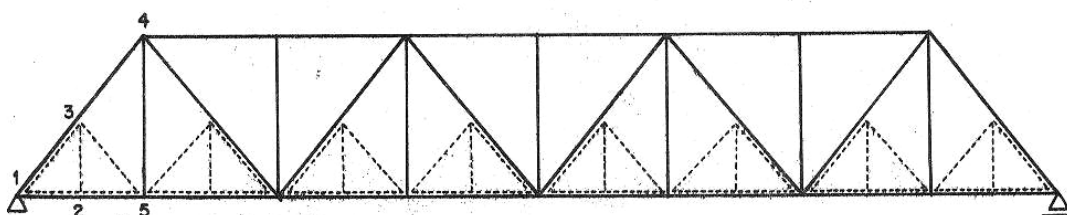


Fig. 159



Para a carga permanente, não podemos usar o Cremona, porque calcularemos os nós 1, 2, 3 e, ao chegarmos aos nós 4 ou 5, não poderemos prosseguir, pois ambos conterão mais de duas barras incógnitas. Pode-se proceder, seja pelo processo de substituição de barras, seja, mais simplesmente, pelo processo de Ritter (ou Culmann), passando uma secção SS pelas barras 4-9, 6-8, 7-8 e determinando, assim, diretamente, os esforços nessas barras. Poderemos, então, voltar ao Cremona e passar ao nó 4, onde já conhecemos, pelo próprio Cremona, a barra 3-4 e, pelo processo de Ritter ou Culmann, a barra 4-9, determinando, então, as barras 4-5 e 4-6; passaremos, depois, ao nó 5, onde conhecemos as barras 2-5, 3-5 e 4-5 e determinamos, então, as barras 5-6, 5-7. Passando ao nó 6, determinaremos 6-7 e 6-8 (aliás, 6-8 já havia sido calculada e, agora, estaremos de posse de uma verificação.) No nó 7, obteremos 7-8, já calculada, o que agora verificaremos. Do nó 9, obteremos 9-8 e 9-12; em seguida, passaremos ao nó 8 e prosseguiremos por toda a treliça.

#### Linhas de Influência de Treliças Compostas.

Para o estudo das linhas de influência de uma treliça composta, determinamos, em primeiro lugar, as linhas de influência da treliça base e, em seguida, verificamos as alterações devidas às treliças adicionais. Para a treliça da Fig.158, teríamos:

##### a) Membrura Superior $O_m$ :

Passando a secção SS entre os nós  $m-1$  e  $n$ , e aplicando Ritter, veremos que o esforço em  $O_m$  é o mesmo da treliça base e é dado por:

$$(3.305) \quad O_m = + \frac{M_m}{h} \quad \therefore \quad y_{O_m} = + \frac{1}{h} y_{M_m}$$

Para obtê-la, bastará marcar  $+x_m/h$  na vertical de A e ligar a B, ligando o ponto sôbre a vertical de m a A. O ponto m inferior (centro de momentos) sendo de transmissão de cargas, não há modificação para carga indireta.

##### b) Membrura Inferior $U_m$ :

Para estudar a linha de influência desta barra, decomposmos a treliça na treliça base e na adicional. Para a treliça base, obtemos, imediatamente, a linha de influência pelo método de Ritter, pois achamos

$$(3.306) \quad U_m = - \frac{M_{m-1}}{h} \quad \therefore \quad y_{U_m} = - \frac{1}{h} y_{M_{m-1}}$$

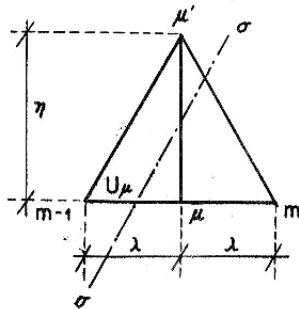


Fig. 160

Considerando agora, isoladamente, a treliça adicional  $m-1, \mu, m, \mu'$ , vemos que a força adicional na membrura  $U_\mu$  será dada por

$$U_\mu = -\frac{m\mu'}{\eta}$$

(pela secção de Ritter  $\sigma\sigma$ ), onde os momentos  $m_\mu$  se referem ao vão  $m-1, m = 2\lambda$ , pois, quando a carga estiver aquém de  $m-1$  ou além de  $m$ , não haverá influência em  $U_\mu$ . Esta expressão de  $U_\mu$  mostra-nos que

$$(3.307) \quad y_{U_\mu} = -\frac{1}{\eta} y_{m_\mu}$$

ou seja, a linha de influência de  $U_\mu$  se obtém marcando-se  $-\lambda/\eta$  (pois  $\lambda$  é a abcissa de  $\mu$ ) na vertical de  $m-1$ . Será, portanto, um triângulo de altura  $-\lambda/2\eta$  (Fig.161).

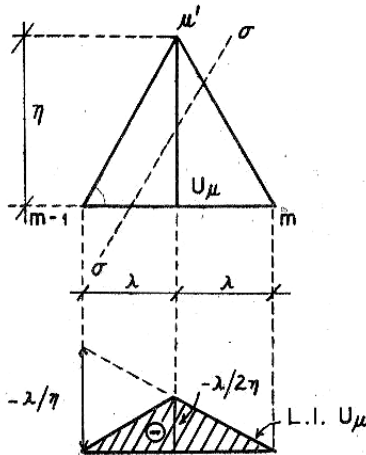


Fig. 161

Quando tivermos a treliça composta, as duas treliças trabalharão em conjunto, e bastará superpor as duas linhas de influência (a de  $U_{\bar{m}}$  e a de  $U_\mu$ ) obtendo-se a de  $U_m$ . Para a linha de influência de  $U_m$ , basta marcar, no apoio  $A$ ,

$$-\frac{x_{m-1}}{h}$$

e ligar a  $B$ ; o ponto sobre a vertical de  $m-1$  será ligado a  $A$ . Sobre a vertical de  $\mu$ , marcamos um segmento  $-\lambda/2\eta$ , e ligamos este ponto aos pontos das linhas dantes traçadas sobre as verticais de  $m-1$  e  $m$ .

c) Diagonal  $D_m^u$  (Inferior):

Decompondo ainda a treliça em duas, teremos, para a treliça base, tomando o equilíbrio à translação vertical,

$$D_{\bar{m}} = -\frac{A}{\text{sen } \phi} = +\frac{B}{\text{sen } \phi}$$

donde

$$(3.308) \quad y_{D_{\bar{m}}} = \pm \frac{1}{\text{sen } \phi} \cdot y_B$$

Para a treliça adicional isolada, teremos, pela secção  $\sigma\sigma$ , traçada entre  $\mu$  e  $m$ , estudando o equilíbrio da parte da esquerda às

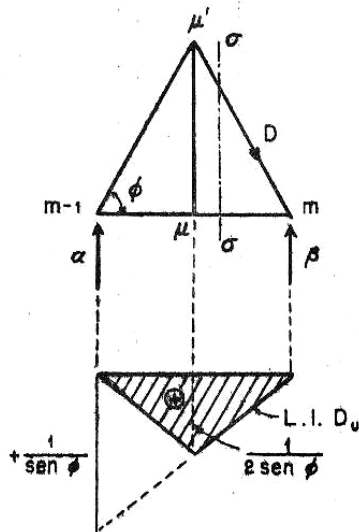


Fig. 162

ações da direita (supondo a carga  $P$  à esquerda),

$$D_{\mu} = + \frac{\beta}{\text{sen } \phi} \quad \therefore$$

$$(3.309) \quad y_{D_{\mu}} = + \frac{1}{\text{sen } \phi} \cdot y_{\beta}.$$

Basta marcar  $+\frac{1}{\text{sen } \phi}$  em  $m-1$  e ligar a  $\underline{m}$ ; como a carga entre  $m-1$  e  $\underline{m}$ , em relação à diagonal  $D_{\mu}$  é indireta, o ponto em  $\mu$  será ligado a  $m-1$ . A linha de influência será, pois, um triângulo de altura igual a

$$+ \frac{1}{2 \text{ sen } \phi}.$$

Para a linha de influência de  $D_{\mu}^u$ , basta superpor as linhas de influência para  $D_{\underline{m}}$  e  $D_{\mu}$ , isto é, marcar em  $\underline{B}$   $(+1/\text{sen } \phi)$  e ligar a  $\underline{A}$ ; em  $\underline{A}$ , marcar  $(-1/\text{sen } \phi)$  e ligar a  $\underline{B}$ . O primeiro trecho será limitado em  $\mu$ , o segundo em  $\underline{m}$ . Com efeito, o primeiro trecho deveria ir até  $m-1$  e somaríamos um triângulo de altura . . .  $+1/2\text{sen } \phi$ , com dois vértices em  $m-1$  e  $\underline{m}$  e o terceiro em  $\mu$ ; mas, esta altura deveria ser marcada a partir do chanfro de  $m-1$  a  $\underline{m}$  (devido à carga indireta) e, portanto, o terceiro vértice irá cair sobre a reta do primeiro trecho da linha de influência da treliça base, e o lado do triângulo da treliça adicional se confunde com esta reta.

d) Diagonal  $D_{\mu}'$  :

Por um raciocínio análogo ao que fizemos para a linha de influência  $D_{\mu}$ , calcularemos a de  $D_{\mu}'$  :

$$D_{\mu}' = + \frac{\alpha}{\text{sen } \phi} \quad \therefore$$

$$(3.310) \quad y_{D_{\mu}'} = + \frac{1}{\text{sen } \phi} \cdot y_{\alpha};$$

teremos, pois, um triângulo de altura igual a

$$+ \frac{1}{2 \text{ sen } \phi}.$$

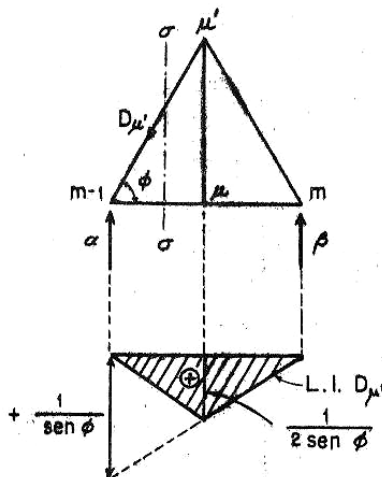


Fig. 163

e) Montante  $V_m$  :

Considerando o nó superior  $\underline{m}$ ,

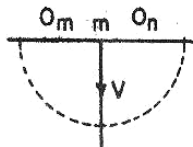


Fig. 164

onde não há carga, por ser o carregamento inferior, vemos que as cargas horizontais de  $O_n$  não podem equilibrar  $V_m$  e, portanto, devemos ter  $V_m = 0$  (analogamente,  $V_{m-2} = V_{m+2} = 0$ ).

f) Montante  $V_\mu$ :

É o montante da treliça adicional. Analizando o nó  $\mu$ , vemos que  $V_\mu$  será igual à ação (tração) de apoio das duas vigas simples  $m-1, \mu$  e  $\mu, m$  em  $\mu$ , isto é,

$$V_\mu = -\alpha_\mu \quad \therefore$$

$$(3.311) \quad \sum V_\mu = \sum \alpha_\mu$$

Será, portanto, um triângulo de altura igual a  $-1$ , e vértices em  $m-1$  e  $m$ .

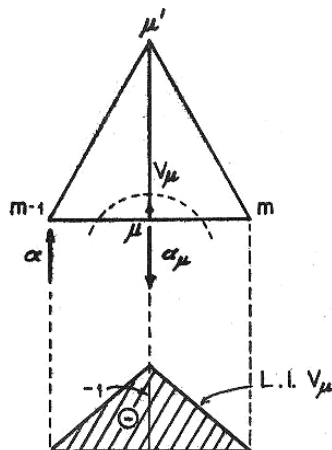


Fig. 165

g) Parte Superior da Diagonal  $D_m^0$ :

Não há alteração. Basta marcar, em  $A$ ,  $-1/\sin \phi$ , e ligar a  $B$ ; em  $B$ , marcamos  $+1/\sin \phi$  e ligamos a  $A$ , chamando para carga indireta em  $m-1$  e  $m$ .

h) Montante  $V_{m+1}$ :

Na treliça base, vemos que (pelo equilíbrio do nó  $m+1$  inferior), quando a carga está aquém de  $m$  ou além de  $m+2$ , não há esforço em  $V_{m+1}$ ; a carga no intervalo produz em  $V_{m+1}$  uma tração igual à ação das vigas simples  $m, m+1$  e  $m+1, m+2$ . Basta, pois, marcar  $-1$  em  $m+1$ , e ligar a  $m$  e  $m+2$ . Examinando o montante em questão, vemos que não há influência da treliça adicional por não haver superposição, e a linha de influência traçada também é válida para a treliça composta. Analogamente para  $V_{m-1}$  e  $V_{m+3}$ .

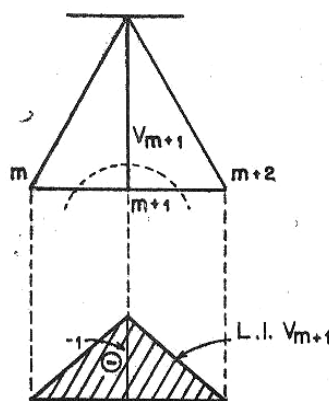


Fig. 166

As Figs. 167 e 168, nas páginas seguintes, dão as linhas de influência de uma treliça composta, tanto para o caso de carregamento inferior como para o caso de carregamento superior, com as devidas modificações.

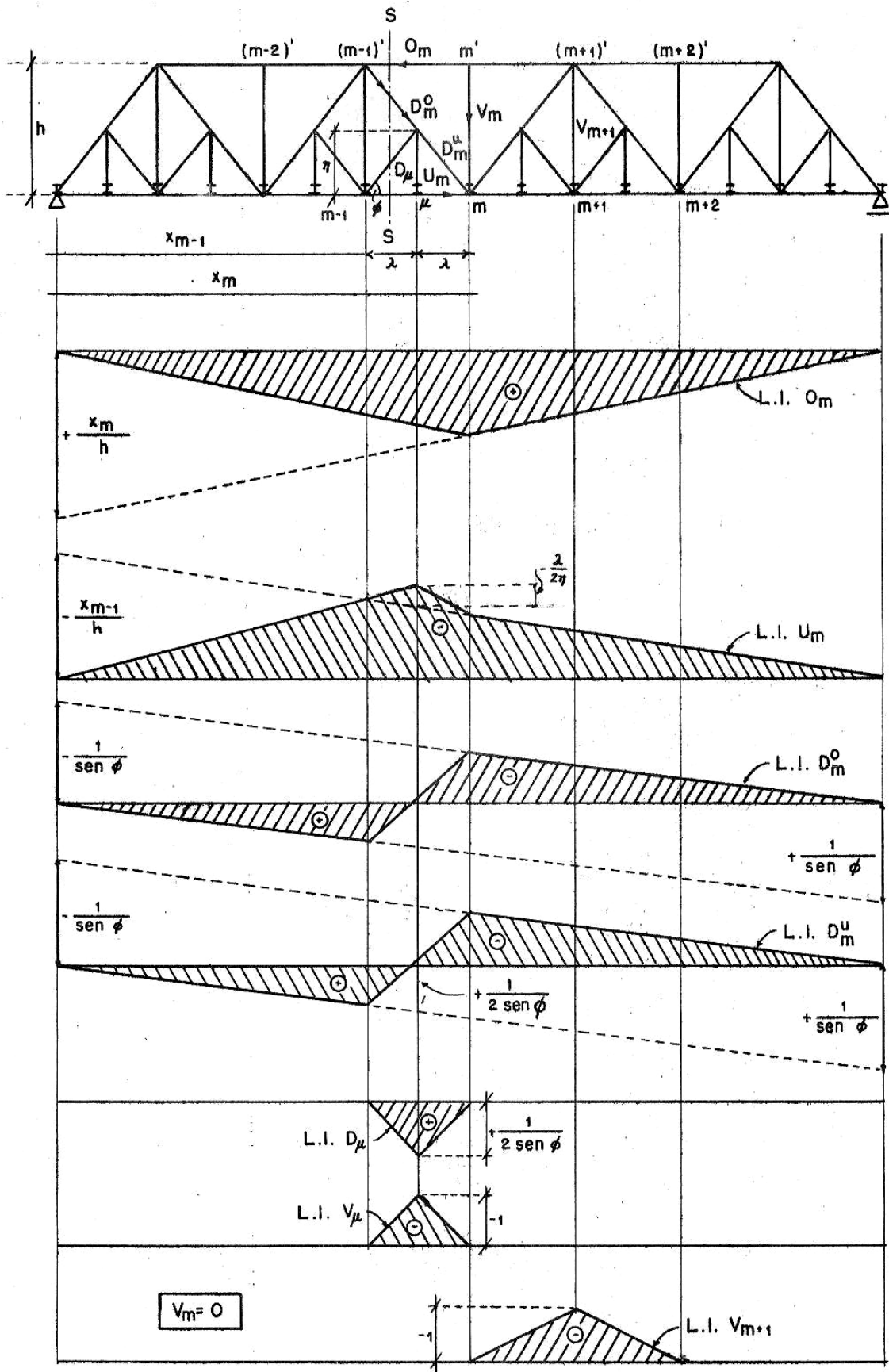


Fig. 167





Isostática parte 05  
Prof. Leopoldo de Castro Moreira  
ENE -1964

Notas de  
aula

Prof. Eduardo C. S.  
Thomaz

9 / 28



Treliça composta



TRELIÇA COMPOSTA

CARREGAMENTO SUPERIOR

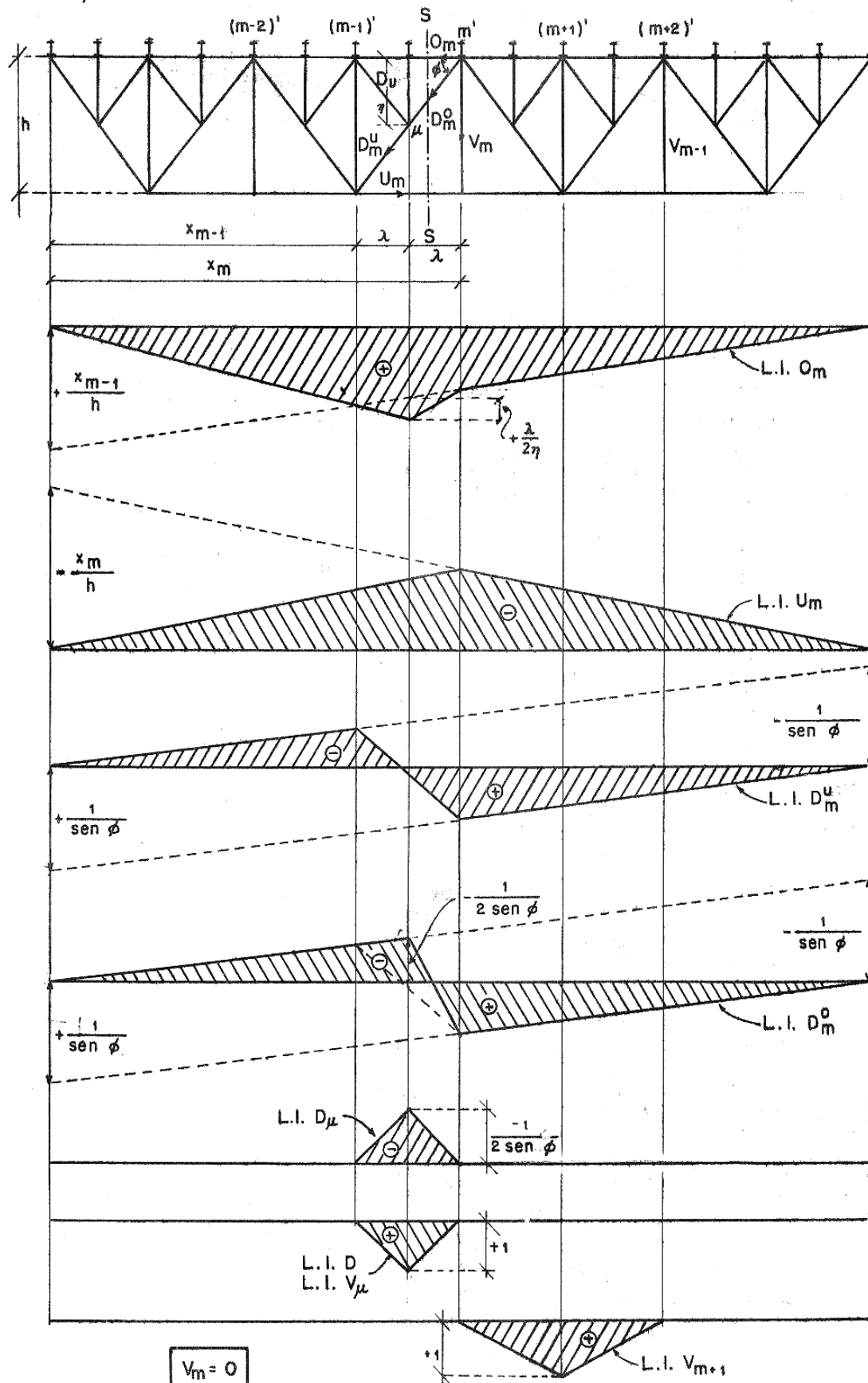


Fig. 168



Vigas em Cruz de Santo André ou em X.

As vigas principais de pontes, quando de membruras paralelas, costumam ser dos tipos estudados (Warren, Howe ou Pratt), para os vãos relativamente pequenos, e do tipo composto para vãos maiores. Isto é conveniente, pois as cargas agindo sempre no mesmo sentido (o descendente), podemos dispor as barras do modo mais prático possível.

As vigas de contraventamento, porém, devem agir para cargas que atuam nos dois sentidos, conforme o sentido do vento; devemos, portanto, empregar uma treliça simétrica, isto é, que possa sofrer inversão de cargas. Antigamente, usava-se uma viga Pratt com contradiagonais, isto é, uma viga Pratt superposta a uma Howe, como indica a Fig.169.

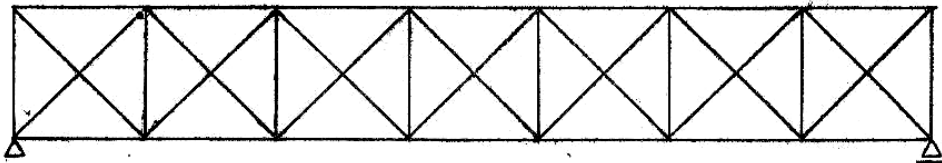


Fig. 169

Construíam-se as diagonais, geralmente, de barras chatas, com pouca resistência à flambagem, e supunha-se que, ao soprar o vento em um sentido, as diagonais comprimidas cediam à flambagem, e as

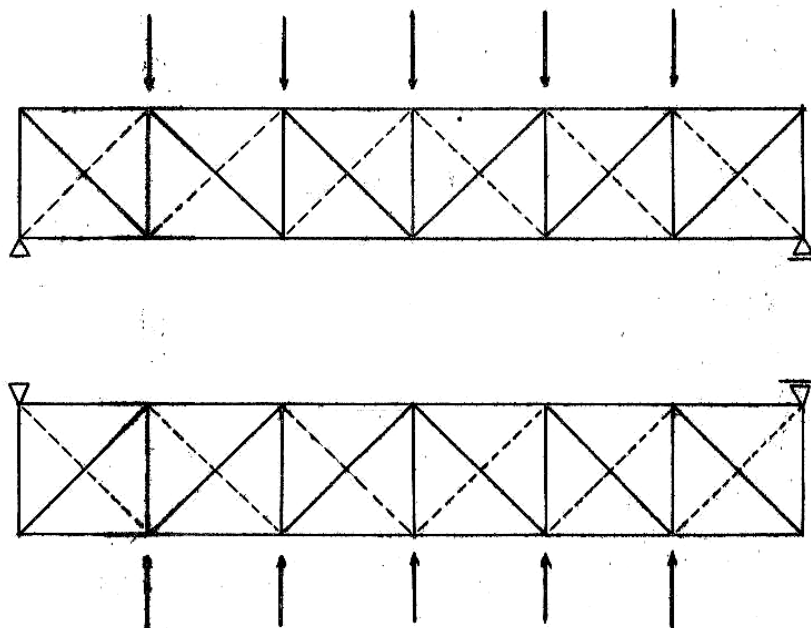


Fig. 170



## Ponte em treliça Bailey

*muito usada em situações de emergência*



[http://it.wikipedia.org/wiki/Ponte\\_Bailey#mediaviewer/File:PontBailey.jpg](http://it.wikipedia.org/wiki/Ponte_Bailey#mediaviewer/File:PontBailey.jpg)

*ou em obras provisórias*



[http://it.wikipedia.org/wiki/Ponte\\_Bailey#mediaviewer/File:Bridge\\_Bailey\\_Turin00.jpg](http://it.wikipedia.org/wiki/Ponte_Bailey#mediaviewer/File:Bridge_Bailey_Turin00.jpg)



*Ponte em treliça Bailey muito usada em situações de emergência*



**TRELIÇA BAILEY DO EXÉRCITO - PONTE SOBRE O RIO PELOTAS EM PASSO DO SOCORRO - COMPRIMENTO TOTAL - 250 METROS**

Foto : Eng. Piotr Slawinski 1966



## MINISTÉRIO DOS TRANSPORTES

DNIT - DEPARTAMENTO NACIONAL DE INFRA-ESTRUTURA DE TRANSPORTES  
RECUPERAÇÃO, REFORÇO E REABILITAÇÃO DE 11 PONTES NA RODOVIA BR-222/PA



**Ponte Sobre o Igarapé Brejo Grande**



**Ponte Sobre o Igarapé Grotão**



## MINISTÉRIO DOS TRANSPORTES

DNIT - DEPARTAMENTO NACIONAL DE INFRA-ESTRUTURA DE TRANSPORTES  
RECUPERAÇÃO, REFORÇO E REABILITAÇÃO DE 11 PONTES NA RODOVIA BR-222/PA



**Ponte Sobre o Igarapé Brejo Grande II**



**Ponte Sobre o Igarapé Flexeiro**



distendidas funcionariam isoladamente, encarregando-se de todos os esforços (sòmente a viga Pratt trabalharia), como na Fig.170.

Contudo, verificou-se, na prática, que isto não se dá. O que se passa é bem diferente, de modo que estamos diante de uma treliça altamente hiperestática (o grau de hiperestaticidade é igual ao número de contradiagonais), e, por isto, hoje em dia, ela está praticamente abandonada, preferindo-se a viga Hassler, ou em "K", ilustrada pela Fig.171.

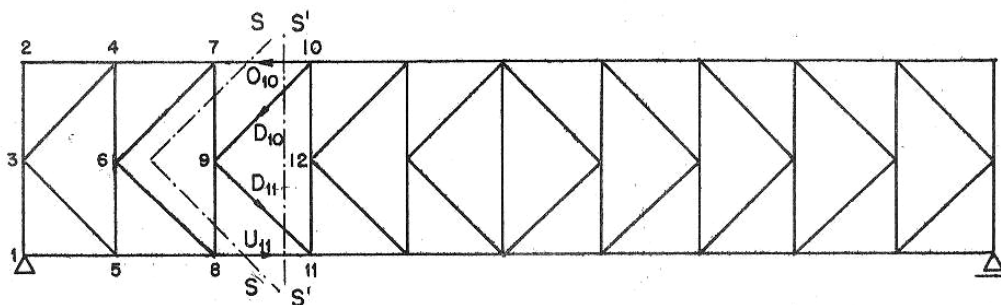


Fig. 171

Para a carga permanente, podemos aplicar um Cremona, bastando, para isto, estudar previamente o equilíbrio do nó 2. Ai, sendo as cargas verticais, a barra 2-3 vai absorver toda a compressão provocada pela carga que atua no nó, e a barra não terá esforço algum. Podemos, então, calcular no Cremona os nós, seguindo a ordem 1-2-3-4-5-6-7-8-9, etc. Se quisermos usar o Ritter, devemos passar a secção SS, segundo mostra a figura, estudando o equilíbrio à rotação; tomando para centro dos momentos os nós 8 e 7, respectivamente, obteremos os esforços em  $O_{10}$  e  $U_{11}$ . Para as diagonais  $D_{10}$  e  $D_{11}$  usaremos a secção S'S'.

Linhas de Influência.

a) Membruras:

Passando a secção SS como mostra a Fig.172, teremos, tomando para centro de momentos o ponto m-1 e estudando o equilíbrio, que as barras da direita oferecem às ações da esquerda,

$$O_m \cdot h = M_{m-1} \longrightarrow O_m = + \frac{M_{m-1}}{h},$$

donde

$$(3.312) \quad y_{O_m} = + \frac{1}{h} y_{m-1};$$

basta, portanto, marcar  $-x_{m-1}/h$  em

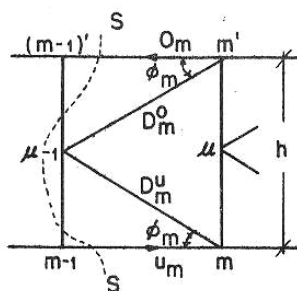


Fig. 172





A, ligar a B, e o ponto na vertical de m-1 a A.

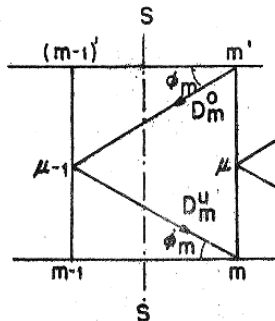


Fig. 173

b) Diagonais.

Suponhamos, em primeiro lugar, a carga à direita do painel, e passemos por êle uma secção SS, como mostra a Fig.173. Poderemos escrever:

$$D_m^O \text{sen } \phi_m + D_m^U \text{sen } \phi_m = A.$$

Pelo equilíbrio à translação horizontal do nó (-1), obteremos

$$D_m^O \text{cos } \phi_m - D_m^U \text{cos } \phi_m = 0,$$

ou

$$D_m^O = D_m^U.$$

Substituindo acima, virá (a menos de sinal),

$$|2D_m^O \text{sen } \phi_m| = |2D_m^U \text{sen } \phi_m| = A,$$

donde:

$$D_m^O = + \frac{A}{2 \text{sen } \phi_m},$$

$$y_{D_m^O} = + \frac{l}{2 \text{sen } \phi_m} y_A,$$

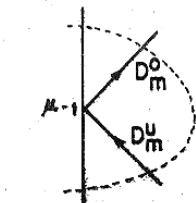


Fig. 174

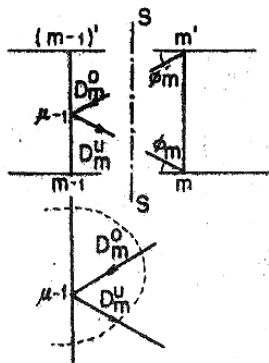


Fig. 175

e

$$D_m^U = - \frac{A}{2 \text{sen } \phi_m} \longrightarrow y_{D_m^U} = - \frac{l}{2 \text{sen } \phi_m} y_A.$$

Quando a carga estiver à esquerda do painel, com a secção SS (Fig.175), poderemos escrever

$$D_m^O \text{sen } \phi_m + D_m^U \text{sen } \phi_m = B;$$

como  $D_m^O = D_m^U$ , virá, a menos do sinal,

$$|2D_m^O \text{sen } \phi_m| = |2D_m^U \text{sen } \phi_m| = B,$$

donde

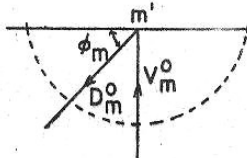
$$D_m^O = - \frac{B}{2 \text{sen } \phi_m} \longrightarrow y_{D_m^O} = - \frac{l}{2 \text{sen } \phi_m} y_B,$$

$$D_m^U = + \frac{B}{2 \text{sen } \phi_m} \longrightarrow y_{D_m^U} = + \frac{l}{2 \text{sen } \phi_m} y_B.$$



Portanto, para a linha de influência de  $D_m^o$ , basta marcar  $\frac{l}{2 \text{ sen } \phi_m}$  em A e ligar a B; marcar  $-\frac{l}{2 \text{ sen } \phi_m}$  em B e ligar a A, chanfrando para carga indireta entre m-1 e m.

c) Montantes:



1ª)  $V_m^o$ : Isolando o nó m, temos, pelo equilíbrio à translação vertical,

$$D_m^o \text{ sen } \phi_m - V_m^o = 0,$$

donde:

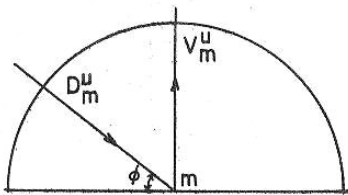
$$|V_m^o| = D_m^o \text{ sen } \phi_m \quad (\text{a menos de sinal}).$$

Mas, vemos que, se D está distendida, V estará comprimida, e vice-versa; portanto, substituindo  $D_m^o$  pelos seus valores, teremos:

$$\text{carga à direita do painel: } V_m^o = -\frac{A}{2} \longrightarrow yV_m^o = -\frac{1}{2} yA;$$

$$\text{carga à esquerda do painel: } V_m^o = +\frac{B}{2} \longrightarrow yV_m^o = +\frac{1}{2} yB.$$

Basta, portanto, marcar  $(-1/2)$  em A e ligar a B; marcar  $(+1/2)$  em B e ligar a A, e chanfrar para carga indireta entre m-1 e m.



2ª)  $V_m^u$ : Analizando o nó m, vemos que, quando a carga está aquém de m+1, poderemos fazer um raciocínio análogo ao precedente, e obteremos

$$D_m^u \text{ sen } \phi_m = |V_m^u|,$$

donde:

$$\text{carga à direita de } m+1: V_m^u = +\frac{A}{2} \longrightarrow yV_m^u = +\frac{1}{2} yA;$$

$$\text{carga à esquerda de } m-1: V_m^u = -\frac{B}{2} \longrightarrow yV_m^u = -\frac{1}{2} yB.$$

Quando a carga estiver nos painéis m-1, m e m, m+1, devemos somar a estes efeitos a ação da carga nas vigas m-1, m e m+1, m que produz uma tração em  $V_m^u$ ; esta influência é dada por um triângulo de altura  $-l$ . A linha de influência de  $V_m^u$  será obtida, assim, marcando-se  $A/2$  em A e ligando a B (válido de B até m+1), marcando-se  $-A/2$  em B e ligando a A (válido de A até m-1). A partir desta última reta, na vertical de m, marcamos um



marcamos um segmento  $-1$ , e ligamos aos pontos sôbre as ordenadas de  $m-1$  e  $m+1$  nas duas retas anteriores.

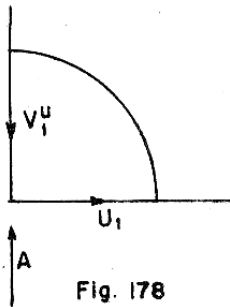


Fig. 178

d) Barras Extremas:

Pela análise do nó  $\underline{1}$  superior, chegaremos à conclusão que

$$V_1^o = 0, \quad O_1 = 0,$$

pois não há carga no nó. Da mesma forma, pela análise do nó  $\underline{1}$  inferior,

concluimos que  $U_1 = 0$  e que

$$V_1^u = A, \quad \gamma V_1^u = \gamma A.$$

A linha de influência de  $V_1^u$  se obterá marcando  $+1$  em  $\underline{A}$ , ligando a  $\underline{B}$  e chanfrando entre  $\underline{A}$  e o nó  $\underline{2}$  para carga indireta.

e) Montante do Meio  $V_n$ :

1) Suponhamos a carga à direita de  $V_{n+1}$ ; passando uma secção antes de  $\underline{n}$ , teremos, pelo equilíbrio das forças à esquerda pela parte da direita,

$$A = D_n^o \sin \phi_n + D_n^u \sin \phi_n = 2D_n^o \sin \phi_n.$$

Passando, agora, à secção à direita de  $\underline{n}$ , teremos

$$A = D_{n+1}^o \sin \phi_n + D_{n+1}^u \sin \phi_n = 2D_{n+1}^o \sin \phi_n;$$

daí:

$$D_n^o = -D_{n+1}^o$$

(de sinais contrários). Estudando, agora, o equilíbrio do nó  $\underline{n}$  superior, teremos:

$$V_n = D_n^o \sin \phi_n + D_{n+1}^o \sin \phi_n = 0,$$

pois uma é tração e a outra é compressão.

2) Análogamente, provaríamos que  $V_n = 0$  para a carga antes de  $n-1$ .

3) Para a carga em  $\underline{n}$ , teremos, passando a secção antes de  $\underline{n}$ , ainda

$$A = 2D_n^o \sin \phi_n.$$

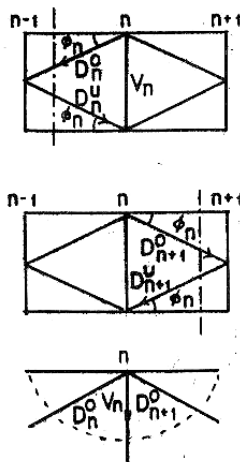


Fig. 179

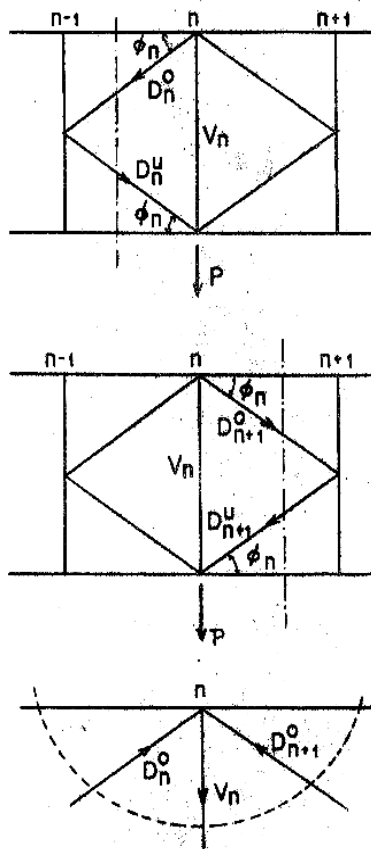


Fig. 180

Com a secção entre  $\underline{n}$  e  $\underline{n+1}$ , virá, estudando o equilíbrio da parte da esquerda,

$$B = 2D_{n+1}^0 \text{ sen } \phi_n.$$

Pelo equilíbrio do nó  $\underline{n}$  superior,

$$V_n = D_n^0 \text{ sen } \phi_n + D_{n+1}^0 \text{ sen } \phi_n,$$

ou:

$$V_n = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = -\frac{P}{2} \text{ (tração).}$$

Quando a carga estiver no intervalo  $\underline{n-1, n}$  e  $\underline{n, n+1}$ , agirá em  $\underline{n}$  pela reação  $\pi$  nas vigas  $\underline{n-1, n}$  e  $\underline{n, n+1}$  e, portanto,

$$V_n = -\frac{\pi}{2} \quad yV_n = -\frac{1}{2} y\pi;$$

é, pois, um triângulo com base  $\underline{n-1, n+1}$  e altura  $-1/2$  em  $\underline{n}$ .

Para carregamento superior (ver Fig.182), teremos as seguintes modificações:

$C_m, U_m, D_m^0, D_m^u$  não sofrerão modificação alguma;

$V_m^u$  não terá a modificação para a carga nos painéis adjacentes, que virá, porém, introduzida em  $V_m^0$  (de compressão, logo, marcando +1 na vertical de  $\underline{m}$ );

$V_1^u$ : não haverá o chanfro de carga indireta;

$V_u$ : será de compressão;

$V_1$ : teremos, analisando o nó  $\underline{1}$  superior, quando a carga estiver no painel  $\underline{1-2}$ , uma compressão em  $V_1^0$  igual à ação da viga  $\underline{1-2}$ ; basta, pois, marcar +1 em  $\underline{A}$  e ligar a  $\underline{2}$ .

As Figs.181 e 182, nas páginas seguintes, mostram as linhas de influência de uma viga Hassler, tanto para o caso de carregamento inferior como para o caso de carregamento superior, com as devidas modificações.



Cap. III

Vigas Simples em Treliça

VIGA HASSLER

CARREGAMENTO INFERIOR

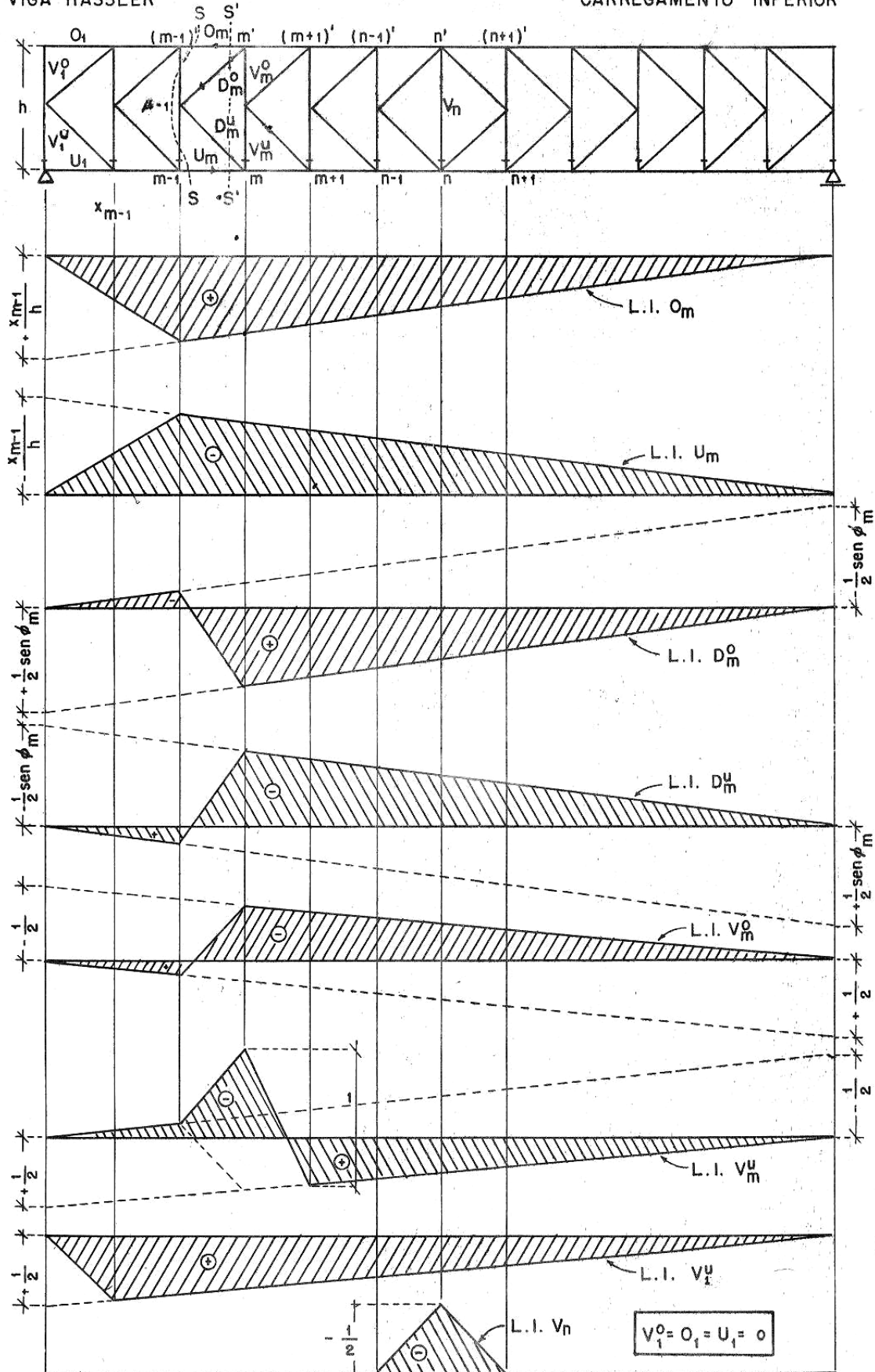


Fig. 181



## TRELIÇA K $\equiv$ TRELIÇA HASSLER



**Característica : Redução do comprimento de flambagem do montante vertical comprimido.**

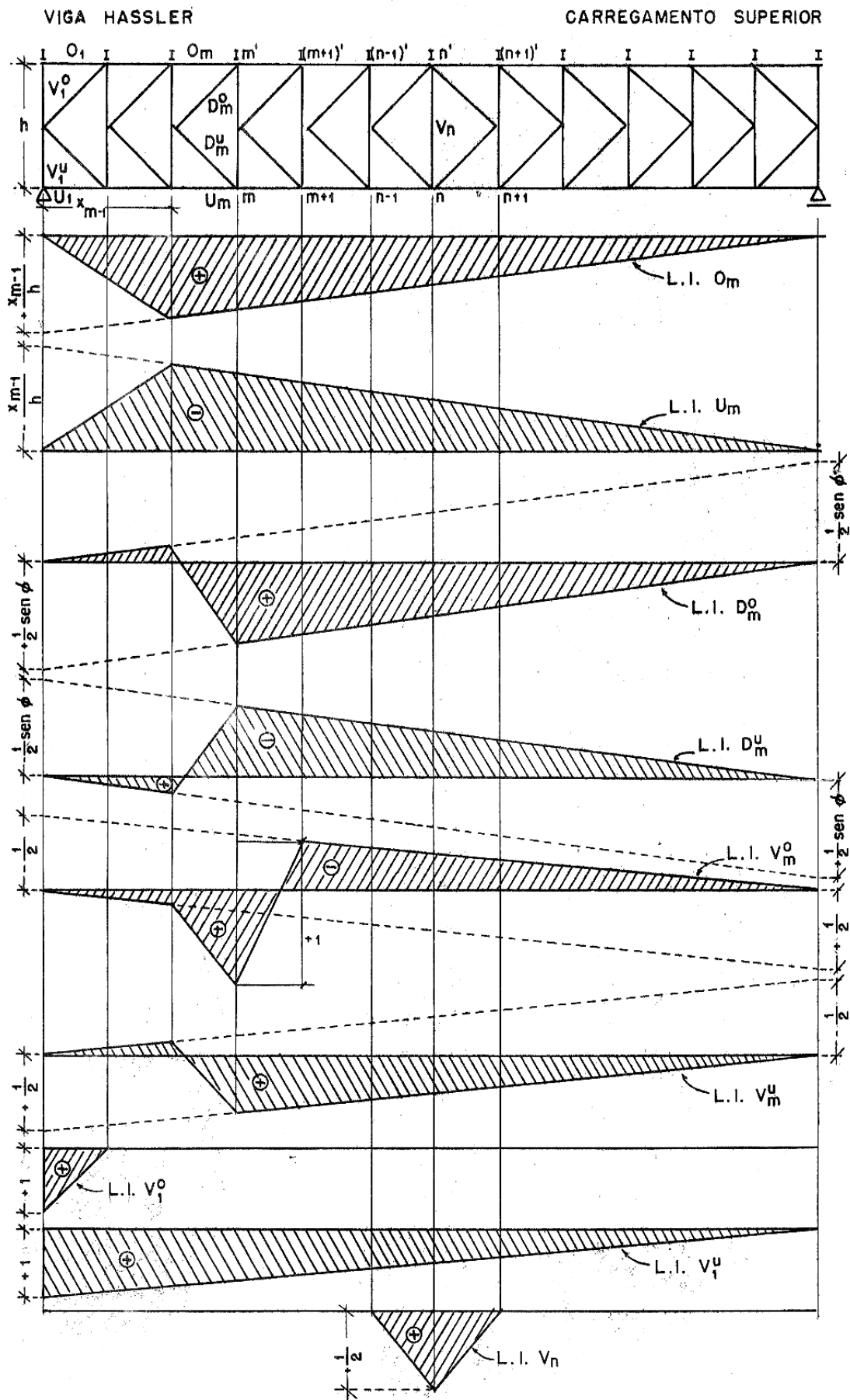


Fig. 182



Treliça em "X".

Suponhamos a treliça abaixo (carregamento inferior):

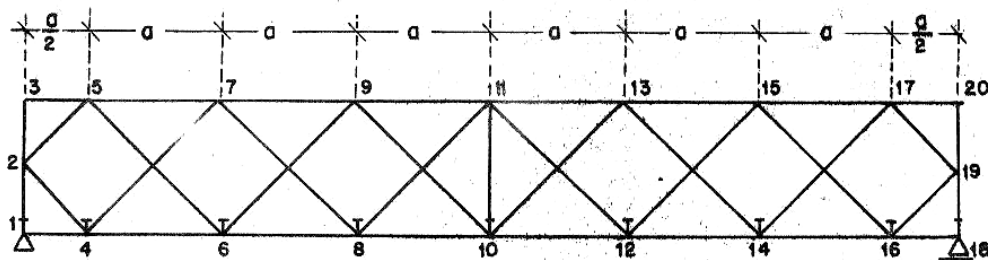


Fig. 183

1) Linha de influência da diagonal  $D_{8-11}$ .

Usemos o processo cinemático para determinar esta linha de influência. Para isto, cortemos a diagonal 8-11, substituindo-a por duas forças  $D_{8-11}$  iguais ao esforço que existia nesta diagonal, e aplicadas, respectivamente, em 8 e 11. Consideremos a parte da direita (9-10-18-20) como fixa, e demos um deslocamento à parte da esquerda, tendo previamente substituído o apoio A por sua reação A.

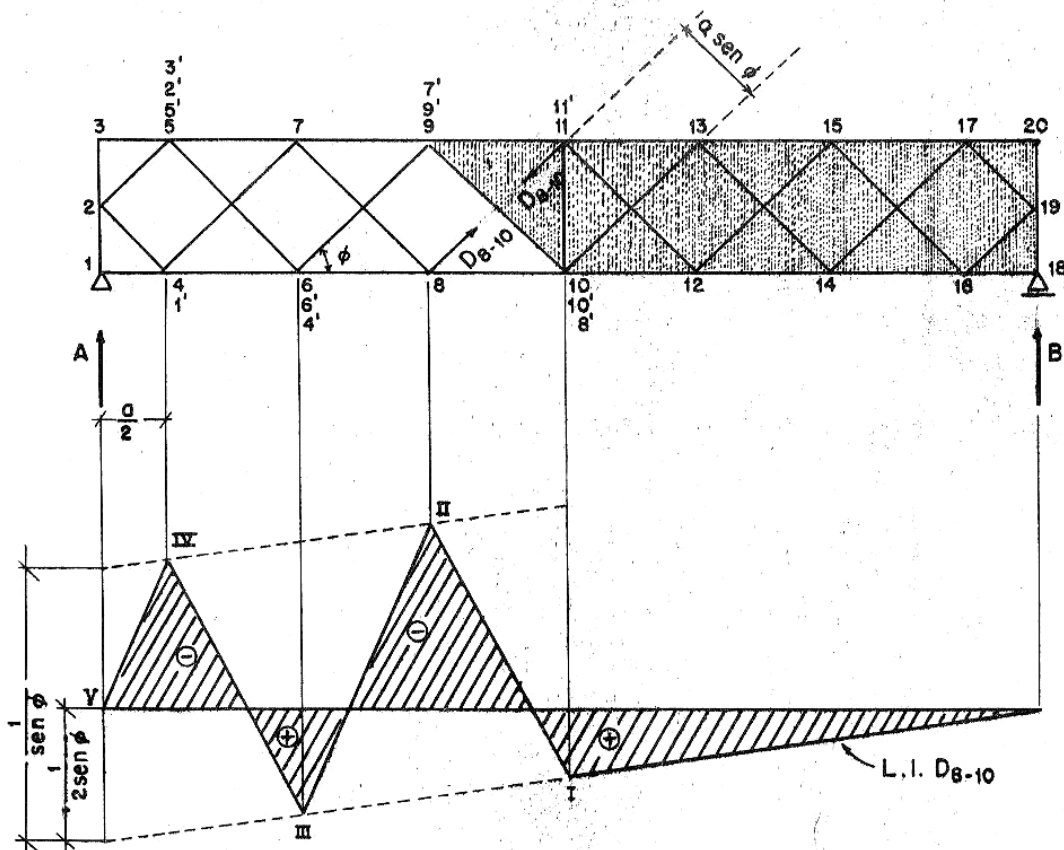


Fig. 184





Isostática parte 05  
Prof. Leopoldo de Castro Moreira  
ENE -1964

Notas de  
aula

Prof. Eduardo C. S.  
Thomaz

25 / 28

## TRELIÇA EM X





Os pontos 9-10-11 permanecem fixos. Portanto, os pontos da figura F' (9', 10', 11') coincidirão com os correspondentes da figura primitiva. O ponto 8 gira em torno de 10. Se dermos o deslocamento com uma velocidade tal que a velocidade de 8 seja representada (rebatida) pelo vetor 8-10, o ponto 8' coincidirá com 10. Como 6 está ligado a 9 e 8, 6' será obtido tirando por 9' e 8' paralelas a 6-9 e 8-6, isto é, 6' coincidirá com 6. Pelo mesmo processo, acharemos 9' coincidindo com 9, 4' com 6, 5' com 5, 2' com 5, 3' com 5, 1' com 1.

Aplicando o teorema dos trabalhos virtuais, virá:

a) Carga P à direita de 10: Neste caso, P não produz trabalho, e teremos

$$A \cdot \frac{a}{2} + D_{8-11} a \cdot \sin \phi = 0,$$

donde

$$D_{8-11} \Big|_{10}^{18} = - \frac{A}{2 \sin \phi}.$$

O sinal (-) significa que, como havíamos suposta a barra 8-11 distendida, ela será comprimida. Pela nossa convenção, teremos, na realidade,

$$D_{8-11} \Big|_{10}^{18} = + \frac{A}{2 \sin \phi}.$$

A linha de influência da diagonal, para a carga à direita de 10, será a de A multiplicada por  $+1/2 \sin \phi$ . Basta, pois, marcar na vertical de A um segmento igual a  $+1/2 \sin \phi$ .

b) Quando a carga estiver em 8, teremos:

$$A \cdot \frac{a}{2} + D_{8-11} a \cdot \sin \phi - P_a = 0;$$

como  $P = 1$ , virá

$$D_{8-11} \Big|_{(8)} = - \frac{\frac{A}{2} - 1}{\sin \phi},$$

ou, levando em conta o sinal,

$$D_{8-11} \Big|_{(8)} = + \frac{A}{2 \sin \phi} - \frac{1}{\sin \phi}.$$

Isto significa que a ordenada no ponto 8 é a mesma da linha anterior (do trecho 10-8), somada algebricamente ao valor  $-1/\sin \phi$ . Basta, pois, descontar, a partir da primeira linha (ponto I), um



segmento igual a  $-l/\text{sen } \phi$ , obtendo-se o ponto II. No intervalo 8-10, a carga é indireta, e basta ligar I a II.

c) Para a carga em 6, teremos:

$$A \cdot \frac{a}{2} + aD_{8-11} = 0 \longrightarrow D_{8-11}(6) = + \frac{A}{2 \text{ sen } \phi};$$

a ordenada está na primeira linha (do trecho 8-18): ponto III;  
no intervalo 6-8 a carga é indireta, e basta ligar II a III.

d) Para a carga em 4, teremos:

$$A \cdot \frac{a}{2} + D_{8-11} a \cdot \text{sen } \phi - P_a = 0,$$

$$|D_{8-11}|(4) = + \frac{A}{2 \text{ sen } \phi} - \frac{l}{\text{sen } \phi}.$$

Devemos descontar, da primeira linha, o segmento  $-l/\text{sen } \phi$  (ponto IV).

e) Para a carga em 1, teremos:  $A = P$ , e  $D_{8-11} = 0$  (ponto V). No intervalo 1-4 há carga indireta: basta ligar V a IV.

2) Linha de Influência da Membrura  $U_{6-8}$ :

Cortemos a barra 6-8, substituindo-a pelas forças que aí existiam, aplicadas em 6 e 8:

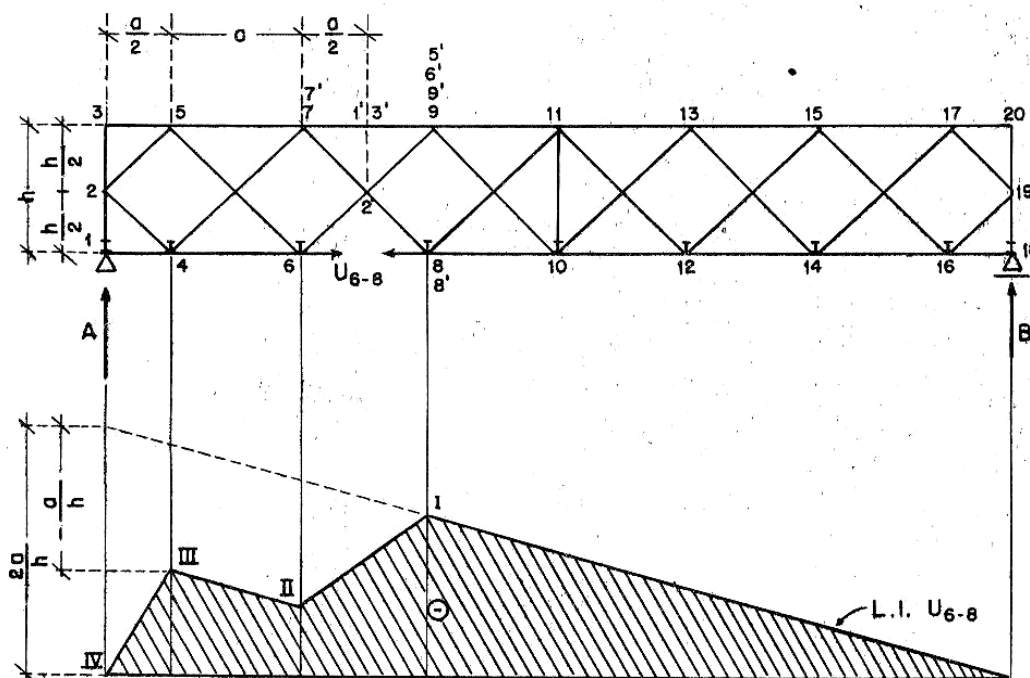


Fig. 185



A parte fixa será a da direita (7-8-18-20). Os pontos 7-8-9 são fixos, e 7', 8', 9' coincidem com êles.  $\underline{6}$  gira em tórno de  $\underline{9}$ ; fazendo a velocidade de  $\underline{6}$  igual a 6-9,  $\underline{6}'$  coincidirá com  $\underline{9}$ . Daí, tiramos todos os outros pontos da figura F':  $\underline{5}'$  é obtido tirando-se por  $\underline{6}'$  uma paralela a 6-5 e, por  $\underline{7}'$ , uma paralela a 7-5, isto é,  $\underline{5}'$  estará em  $\underline{9}$ .  $\underline{4}'$  estará em  $\underline{7}$ .  $\underline{2}'$  será obtido tirando-se, por  $\underline{5}'$ , uma paralela a 5-2 e, por  $\underline{4}'$ , a 4-2;  $\underline{3}'$  será obtido tirando-se por  $\underline{5}$  uma paralela a 3-5 e, por  $\underline{2}'$ , a 2-3; e, finalmente, obteremos  $\underline{1}'$  tirando por  $\underline{2}'$  uma paralela a 1-2 e, por  $\underline{4}'$ , a 1-4, isto é,  $\underline{1}'$  e  $\underline{3}'$  se confundem.

a) Enquanto a carga estiver entre 8 e 18:

Poderemos escrever, pelos trabalhos virtuais,

$$A \cdot 2a - V_{6-8}h = 0 \longrightarrow V_{6-8} = A \frac{2a}{h}.$$

Como supuzemos  $V_{6-8}$  de tração, iremos ter, realmente, tração, e poderemos escrever, de acôrdo com a nossa convenção,

$$V_{6-8} \Big|_8^{18} = - A \frac{2a}{h}.$$

Basta marcar em  $\underline{A}$  um segmento  $-2a/h$  e ligar a  $\underline{B}$ .

b) Quando a carga estiver em 6, teremos:

$$A \cdot 2a - U_{6-8}h - Pa = 0,$$

donde:

$$U_{6-8} = A \frac{2a}{h} - P \frac{a}{h},$$

ou, levando em consideração o sinal e que  $P = 1$ ,

$$U_{6-8}(6) = - A \frac{2a}{h} + \frac{a}{h};$$

devemos retirar  $a/h$  da ordenada dada pela reta anterior, obtendo o ponto II; no intervalo 6-8 há carga indireta, e basta ligar I a II.

c) Para a carga em 4, teremos:

$$A \cdot 2a - U_{6-8}h - Pa = 0,$$

$$U_{6-8}(4) = - A \frac{2a}{h} + \frac{a}{h}.$$

Como para o ponto  $\underline{6}$ , devemos retirar  $a/h$  da ordenada da primei-