



ESTÁTICA DAS CONSTRUÇÕES

Isostática

O Eng. Leopoldo de Castro Moreira, calculista de pontes, foi Professor da ENE, Escola Nacional de Engenharia, da Universidade do Brasil, atual UFRJ.

Em 1964 divulgou suas notas de aula de Isostática.

Os conceitos continuam exatamente os mesmos. Totalmente válidos e aplicáveis.

Os itens abordados nessas notas de aula são:

Estruturas:

- Vigas simplesmente apoiadas, com e sem balanços.
- Vigas Gerber.
- Treliças, vários tipos.
- Arcos Tri-articulados.

Cargas :

- Carga Permanente (diagramas)
- Carga Móvel (linhas de influência)

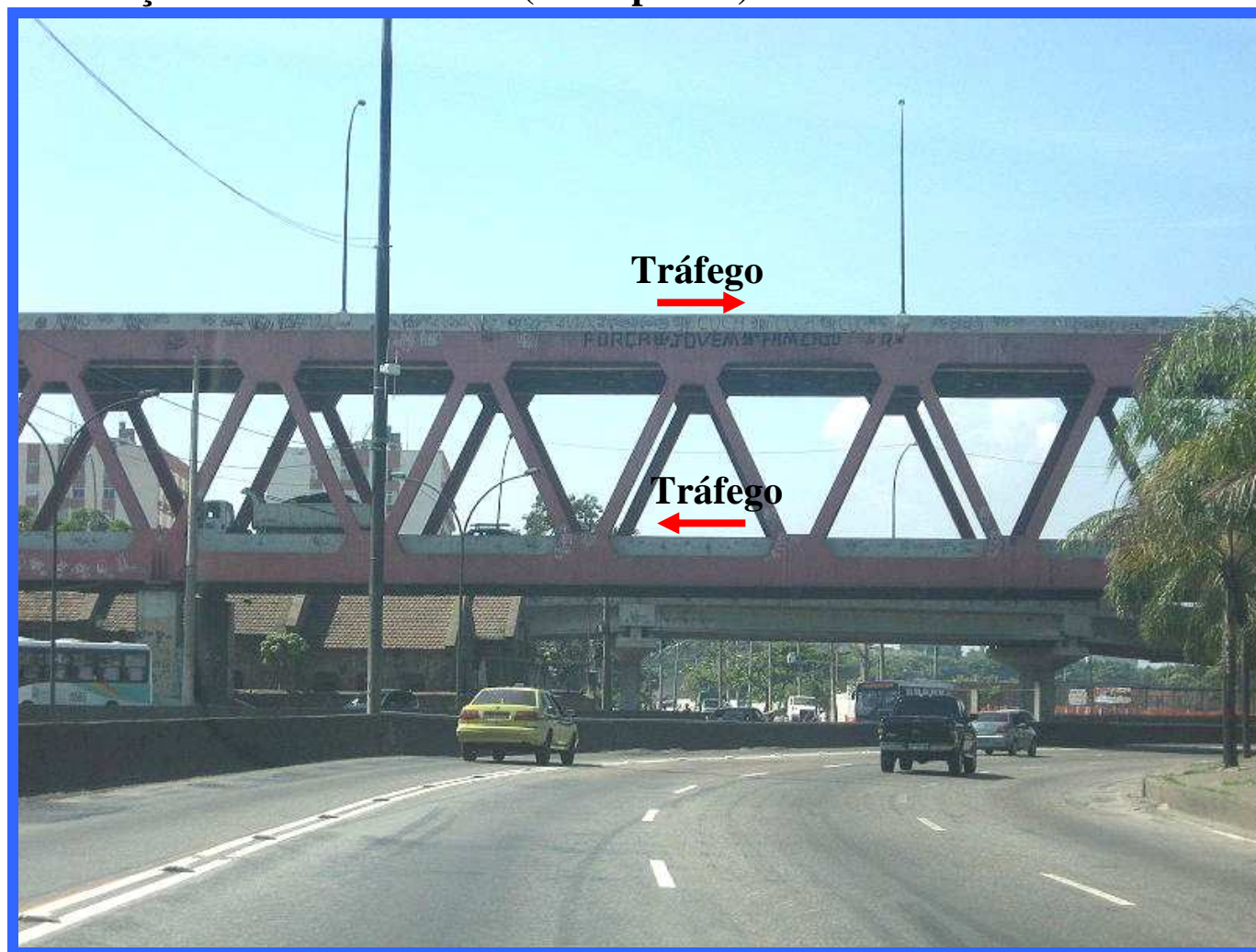
Itens especiais dessas notas de aula:

- O método da cadeia cinemática, para determinar as linhas de influência, é válido também para qualquer estrutura hiperestática.
- O estudo das treliças é muito amplo e considera vários tipos de treliça, os mais utilizados.
- Foram acrescentadas algumas fotos para ilustrar os tipos de treliça.



TRELIÇAS

Treliça da Linha Vermelha (via expressa) sobre a Avenida Brasil / RJ



Projeto Estrutural : Projectum Eng^a.



Fase de Montagem



Plano de Montagem : Projconsult Eng^a.



CAPITULO III

VIGAS SIMPLES EM TRELIÇA

Generalidades.

Uma treliça é uma estrutura composta de barras, sem rigidez à flexão, que se ligam, duas ou mais, em nós articulados, onde há, portanto, completa liberdade à rotação. Por esta mesma razão, as cargas são supostas agindo exclusivamente nos nós.

Suponhamos a treliça mais simples possível - um triângulo composto de três barras s_1 , s_2 e s_3 , que se ligam por articulações, duas a duas, nos nós k_1 , k_2 e k_3 ; suponhamos essa treliça sim-

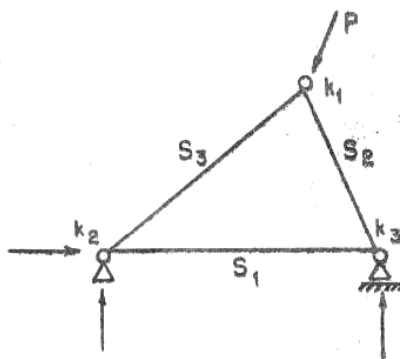


Fig. 108

plesmente apoiada em k_2 e k_3 sobre um apoio do primeiro gênero e um do segundo, respectivamente. Suponhamos, ainda, uma carga P atuando em k_1 (Fig. 95).

Chamemos de s o número de barras, k o número de nós, e t o número de reações de apoio. No nosso caso, $s = 3$, $k = 3$, $t = 3$.

Como a estrutura está em equilíbrio, cada nó também o estará; cada nó fornece duas equações de equilíbrio:

$$\sum H = 0,$$

$$\sum V = 0;$$

assim, teremos, ao todo, $2k$ equações.

Cada barra apresenta uma incógnita - sua força axial - e cada reação de apoio também é uma incógnita; assim, o número total de incógnitas será $s + t$. Para que o sistema seja isostático é preciso, portanto, que o número de incógnitas seja igual ao número de equações, ou seja

$$2k = s + t.$$

No caso do triângulo acima, $2 \times 3 = 3 + 3$; o sistema é, portanto, isostático.



Se ligarmos dois nós do triângulo (k_1 e k_2) por meio de duas novas barras, s_4 e s_5 , a um novo nó k_4 , introduziremos no

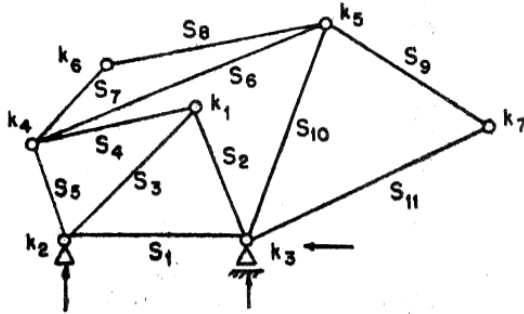


Fig. 109

mesmo duas incógnitas (duas barras) e duas equações (um nó), não alterando, portanto, a condição de isostaticidade. Poderíamos prosseguir desse modo indefinidamente (Fig.109). A treliça assim obtida seria uma treliça simples.

Pela figura, teremos:

$$\left. \begin{array}{l} s = 11 \\ k = 7 \\ t = 3 \end{array} \right\} \rightarrow 2k = 14$$

$$t = 3 \rightarrow s + t = 14.$$

Desta forma, a condição geral de isostaticidade será sempre

$$2k = s + t.$$

Esta não é, porém, uma condição suficiente. Será necessário, ainda, que as barras estejam dispostas de tal forma que não apareçam esforços infinitos; este caso se apresenta, por exemplo, para duas barras em prolongamento,

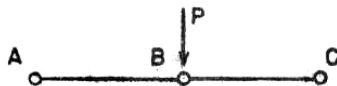


Fig. 110

com uma carga no nó e a elas normal (Fig.110).

Quando o número de incógnitas é maior que o de equações, isto é, quando tivermos

$$2k < s + t,$$

a treliça será hiperestática, e podemos distinguir, aqui, dois casos.

1º CASO: Quando o número de reações de apoio for tal que elas possam ser obtidas diretamente pelas equações de equilíbrio, a treliça é dita hiperestática internamente, e o número de barras é que é excessivo.

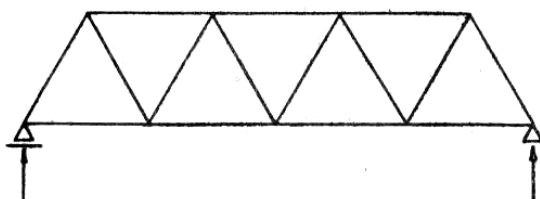


Fig. 111

Assim, por exemplo, seja isostática a treliça da Fig.111.

$$\left. \begin{array}{l} s = 15 \\ t = 3 \end{array} \right\} s + t = 18.$$



$$k = 9 \rightarrow 2k = 18.$$

Se introduzirmos mais duas barras, a treliça resultante continuará com o mesmo número de nós e de reações de apoio, mas o número de barras crescerá de duas unidades; logo, a treliça será duas vezes hiperestática:

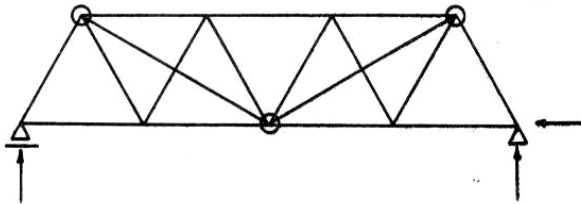


Fig. 112

$$\left. \begin{array}{l} s = 17 \\ t = 3 \end{array} \right\} \rightarrow s + t = 20,$$

$$k = 9 \rightarrow 2k = 18.$$

As reações de apoio permanecem, porém, iguais nos dois casos; por isto, dizemos que a treliça é hiperestática internamente. Se, porém, tomássemos a treliça da Fig.111 e introduzíssemos um apoio intermediário, o número de barras e nós permaneceria inalterado; o que aumentaria seria o número de reações de apoio. Dêste modo,

as reações de apoio mesmas se alterariam, e a treliça seria hiperestática externamente.

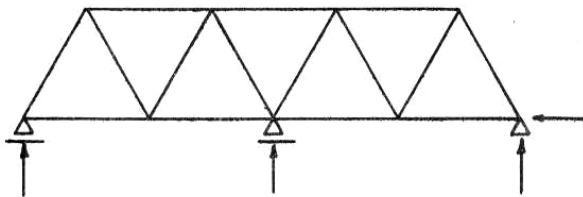


Fig. 113

$$\left. \begin{array}{l} s = 15 \\ t = 4 \end{array} \right\} \rightarrow s + t = 19,$$

$$k = 9 \rightarrow 2k = 18.$$

É evidente que a treliça pode ser hiperestática, ao mesmo tempo, interna e externamente, como a da Fig.114, onde

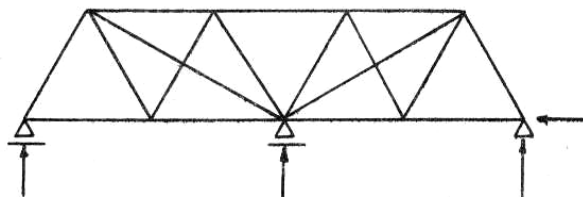


Fig. 114

$$\left. \begin{array}{l} s = 17 \\ t = 4 \end{array} \right\} \rightarrow s + t = 21,$$

$$k = 9 \rightarrow 2k = 18.$$

Pode dar-se ainda o caso em que o número de condições de apoio seja, aparentemente, maior que o necessário. Se o número de barras diminuir de outras tantas unidades, $2k$ continuará igual a $s + t$, e a treliça permanecerá isostática. É o caso da treliça da Fig. 115, onde temos:

$$\left. \begin{array}{l} s = 14 \\ t = 4 \end{array} \right\} \rightarrow s + t = 18,$$

$$k = 9 \rightarrow 2k = 18.$$

A viga se transforma em viga Gerber.

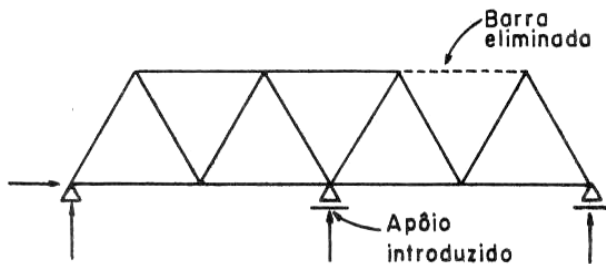


Fig. 115

a treliça não será estável, e transformar-se-á numa cadeia cinemática móvel ou mecanismo. Assim, se retirarmos uma barra da treliça da Fig.111, teremos:

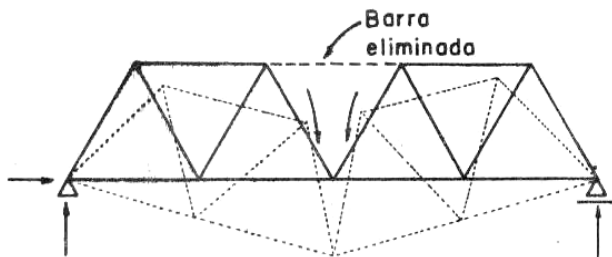


Fig. 116

a ação das cargas no sentido das setas indicadas na Fig.116.

2º CASO: Quando o número de equações é maior que o de incógnitas, isto é, quando tivermos

$$2k > s + t,$$

a treliça não será estável, e transformar-se-á numa cadeia cinemática móvel ou mecanismo. Assim, se retirarmos uma barra da treliça da Fig.111, teremos:

$$\left. \begin{array}{l} s = 14 \\ t = 3 \end{array} \right\} \rightarrow s + t = 17,$$

$$k = 9 \rightarrow 2k = 18.$$

A treliça não tem estabilidade própria, movendo-se sob

3.1 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS TRELIÇAS

Cargas Permanentes.

Entre os muitos processos para a resolução das treliças, examinaremos os seguintes:

1 - Método Analítico Geral.

Este método consiste em se estabelecer um sistema de tantas equações quantas incógnitas existirem (isto é, $2k$ ou $s + t$, respectivamente), que, resolvido, dará imediatamente as incógnitas. As equações podem ser estabelecidas, tomando-se as duas equações de projeção em cada nó:

$$\sum V = 0, \quad \sum H = 0.$$

Teremos, como exemplo, a treliça da Fig.117. Suponhamos, em primeiro lugar, todas as barras de compressão. Neste caso, como estamos considerando os nós, as setas dirigem-se para esses nós, e teremos:

$$\text{no nó } k_1: \quad \sum H = 0 \rightarrow 1) \quad -S_1 \cos \phi - S_2 + H = 0,$$

$$\sum V = 0 \rightarrow 2) \quad -S_1 \sin \phi + A = 0;$$

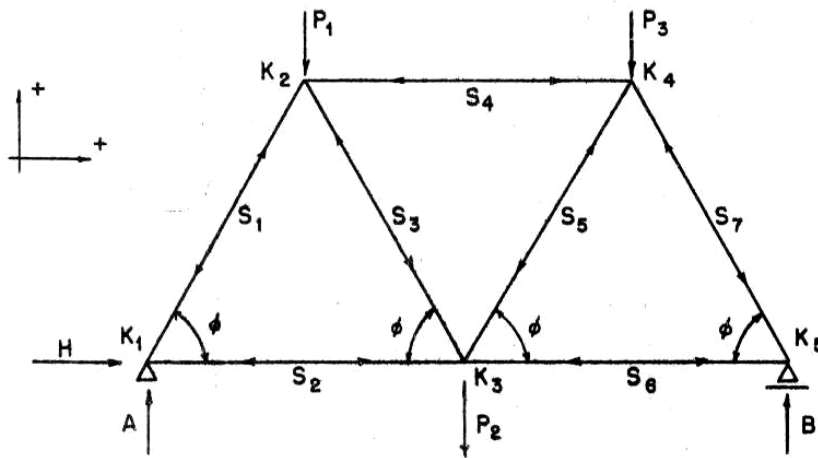


Fig. 117

no nó k_2 : $\sum H = 0 \rightarrow 3) S_1 \cos \phi - S_3 \cos \phi - S_4 = 0,$

$\sum V = 0 \rightarrow 4) S_1 \sin \phi + S_3 \sin \phi - P_1 = 0;$

no nó k_3 : $\sum H = 0 \rightarrow 5) S_2 - S_6 + S_3 \cos \phi - S_5 \cos \phi = 0,$

$\sum V = 0 \rightarrow 6) -S_3 \sin \phi - S_5 \sin \phi - P_2 = 0;$

no nó k_4 : $\sum H = 0 \rightarrow 7) S_4 + S_5 \cos \phi - S_7 \cos \phi = 0,$

$\sum V = 0 \rightarrow 8) -P_3 + S_5 \sin \phi + S_7 \sin \phi = 0;$

no nó k_5 : $\sum H = 0 \rightarrow 9) S_6 + S_7 \cos \phi = 0,$

$\sum V = 0 \rightarrow 10) B - S_7 \sin \phi = 0.$

Estas equações dão-nos \underline{H} , \underline{A} , \underline{B} e os esforços nas barras.

Se obtivermos uma certa incógnita \underline{S} positiva, isto significa que o sinal suposto de compressão no início é correto; se aparecer uma incógnita \underline{S} negativa, isto significa que supuzemos o sinal errado. No caso, o verdadeiro \underline{S} será de tração.

2 - Método de Cremona.

Este método, também conhecido como método de Maxwell ou das "figuras recíprocas", é uma solução gráfica sistematizada das equações gerais.



Cap. III

Vigas Simples em Treliça

De um modo geral, podemos resolver gráficamente cada nó, por meio de um polígono de forças fechado, visto conhecermos as direções das barras e das forças aplicadas.

Nas treliças simples, o primeiro nó só contém duas barras - duas incógnitas, portanto, que serão calculadas por um polígono fechado. Um dos nós vizinhos será estudado, em seguida, onde só haja duas barras incógnitas (pois em uma barra acabamos de calcular o esforço); neste caso, é sempre possível construir um polígono que dê a resultante das forças no nó e, em seguida, decompô-la nas duas direções incógnitas. Prosseguindo sucessivamente, chegaremos a calcular os esforços em todas as barras da treliça.

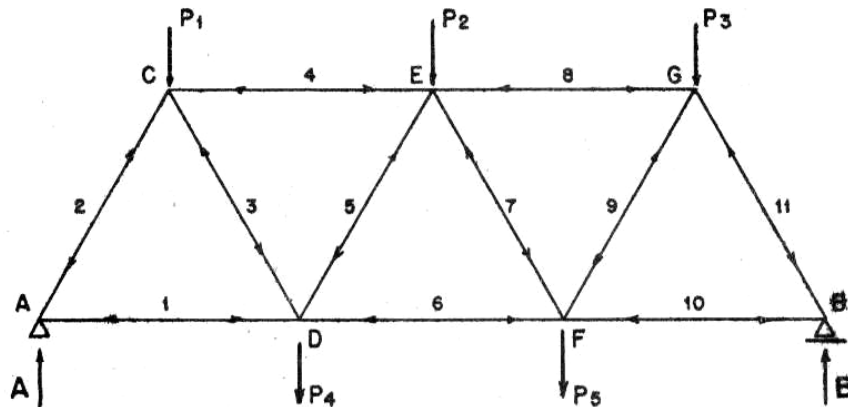


Fig. 118

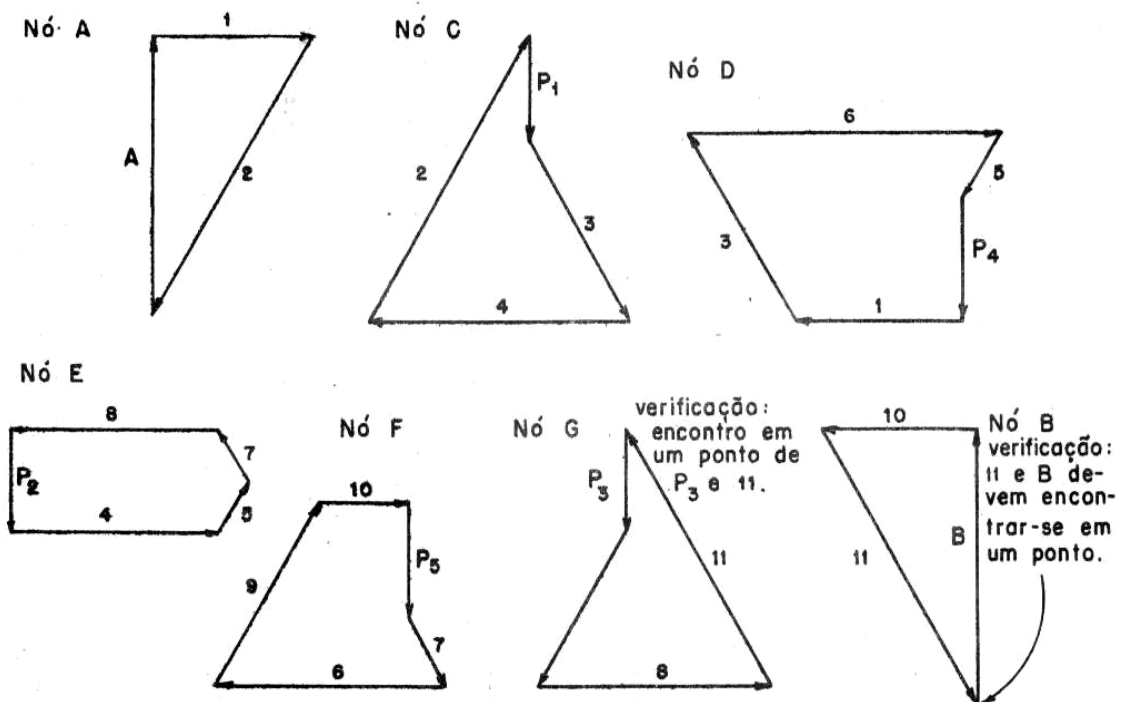


Fig. 119



Como estamos estudando os nós da treliça, se construirmos os polígonos de modo que sejam percorridos em um sentido único pelos vetores das forças, obteremos as ações das barras nos nós. Portanto, se as setas apontam para os nós, haverá compressão; se se afastarem dos mesmos, haverá tração na barra. Assim, por exemplo, teremos o diagrama da Fig.119.

O processo de Cremona é justamente uma sintetização de todos estes diagramas numa só figura. Para facilitar o traçado, devemos adotar a notação de Bow, que consiste no seguinte:

- 1 - Denominamos com números (ou letras) os espaços entre as forças aplicadas, as reações de apoio e as barras da treliça.
- 2 - Escolhemos um determinado sentido de rotação.
- 3 - Cada força aplicada, reação de apoio ou esforço em barra será designado pelos números dos espaços que ela separe; no polígono de forças, daremos um dos números a cada extremidade do vetor, de acordo com o sentido de rotação escolhido.
- 4 - Determinamos as reações de apoio por um processo qualquer (eventualmente, usaremos um funicular auxiliar).
- 5 - Construimos um polígono de forças colocando as forças aplicadas na mesma ordem que as encontramos ao percorrer a estrutura no sentido escolhido - e usando a notação do item 3.
- 6 - Começamos o traçado por um nó que só contenha duas barras, prosseguindo por um nó vizinho onde só haja duas barras desconhecidas, e assim por diante.
- 7 - Percorremos cada nó no sentido estabelecido e, nesta mesma ordem, marcamos as forças no polígono, começando pela primeira força conhecida, encontrada ao percorrer o nó no sentido estabelecido.
- 8 - As forças assim encontradas no sentido de rotação em cada nó, formarão um polígono fechado, e os sentidos das mesmas serão obtidos percorrendo o polígono na ordem estabelecida. Deste modo, vemos que cada linha do Cremona será percorrida duas vezes, em sentidos opostos, pois pertence a dois nós opostos.
- 9 - As forças que apontam para o nó pertencem a barras comprimidas, e as que se afastam do nó pertencem a barras distendidas.

Assim, por exemplo, teremos o traçado da Fig.120.

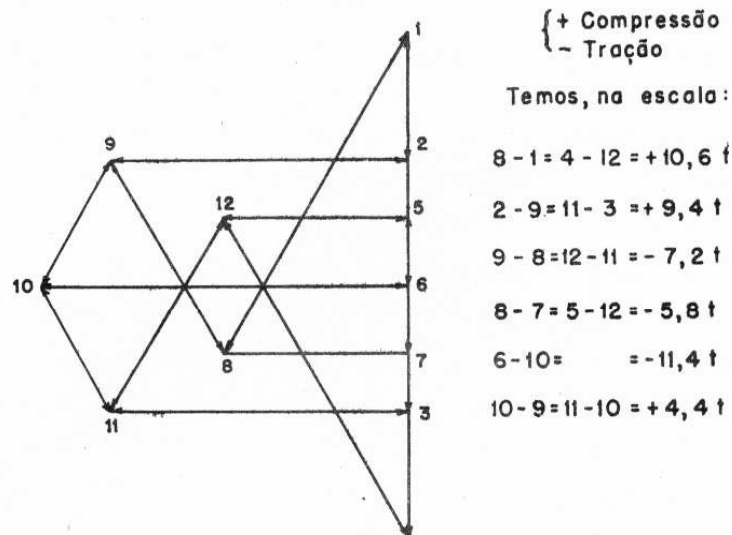
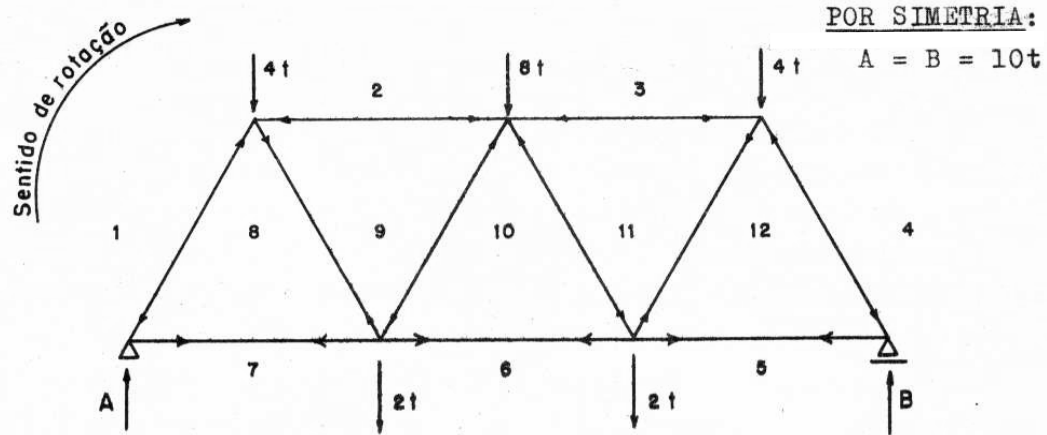


Fig. 120

A qualquer momento, podemos recompor o esforço em dada barra, percorrendo o nó correspondente no sentido de rotação, e o polígono no mesmo sentido.

O método de Cremona é muito prático quando se devem calcular os esforços em todas ou, pelo menos, em grande número de barras.

3 - Método de Culmann.

Suponhamos uma treliça qualquer. Se desejarmos determinar os esforços nas barras Q, D, U, não concorrentes, pelo método de Culmann, passaremos uma secção SS por estas três barras e estudaremos, gráficamente, o equilíbrio da parte remanescente da direita da treliça, em face da ação das forças da parte esquerda da secção.

Para isto, basta decompor a soma das forças à esquerda da secção, isto é, a força cortante na secção. Esta força cortante Q



é determinada no próprio diagrama de forças; a intensidade é determinada pela soma dos vetores representativos das forças à esquerda da secção (a reação de apoio inclusive); o ponto de aplicação, pelo cruzamento do lado do funicular correspondente à secção com a linha de fechamento do mesmo. Uma vez determinada a força cortante Q , não resta mais que decompô-la segundo as três direções não concorrentes das barras O , D e U . Para tal, decompômo-la primeiramente na direção de uma das forças (O , por exemplo) e da reta auxiliar G , que se obtém ligando o cruzamento m (da força considerada O com a força cortante Q) ao cruzamento n das outras duas forças U e D . Em seguida, decompõe-se esta força auxiliar G na direção das duas restantes U e D .

Se percorrermos o polígono fechado, assim formado, (QODU), num só sentido, obteremos as reações que a parte da direita opõe a Q (soma das forças à esquerda) e, portanto, como estamos estudando as secções das barras por SS , se a seta se dirigir para a secção, haverá compressão, e, se dela se afastar, haverá tração na barra.

Este processo é muito prático quando se desejam os esforços em apenas algumas barras da treliça, e quando se quiser trabalhar graficamente.

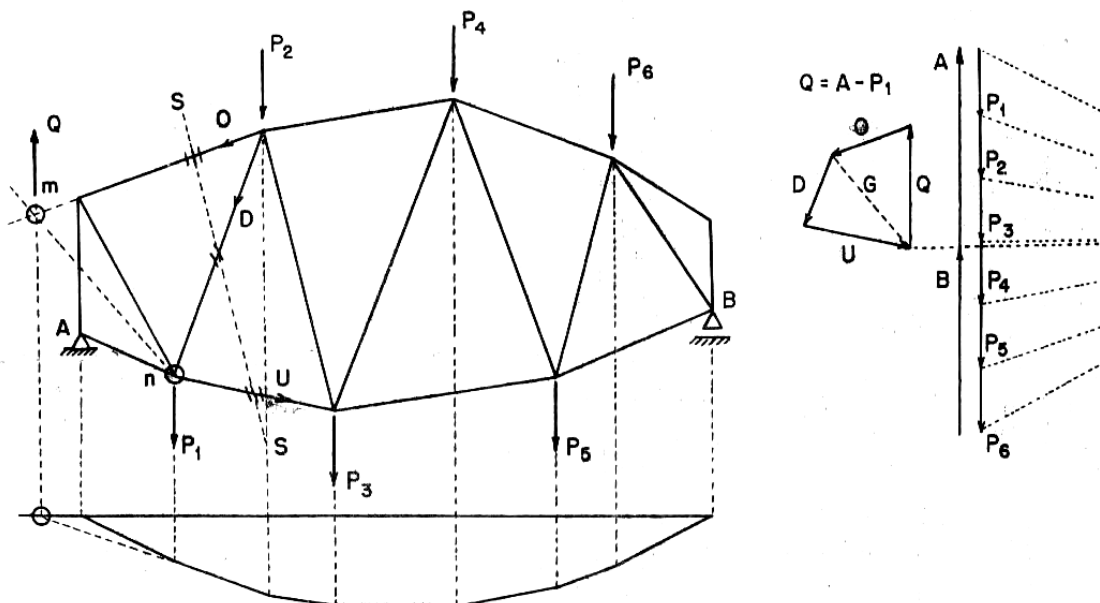


Fig. 121

4 - Método de Ritter.

Neste processo, como no de Culmann, passamos uma secção por três barras da treliça, e estudamos o equilíbrio da parte remanescente



da direita à ação das cargas da esquerda. Apenas, agora procedemos analiticamente, tomando os momentos das forças à esquerda e de cada uma das barras cortadas, sucessivamente, em relação ao ponto de encontro das outras duas. Assim, ficamos de cada vez com apenas uma incógnita (já que as barras que se encontram no centro de momentos não dão momentos). Análogamente ao processo de Culmann, estudamos aqui as barras, de modo que as forças que apontam para a secção são de compressão.

Suponhamos a treliça da Fig.122, na qual desejamos determinar os esforços nas barras. Para isto, passemos a secção SS, que corta as três barras a estudar, dividindo a treliça em duas partes.

Tomando os momentos das forças à esquerda de SS em relação ao ponto m de encontro de D_m e U_m (cuja soma é igual ao momento fletor em $m = M_m$), eles devem ser equilibrados pelos momentos dos

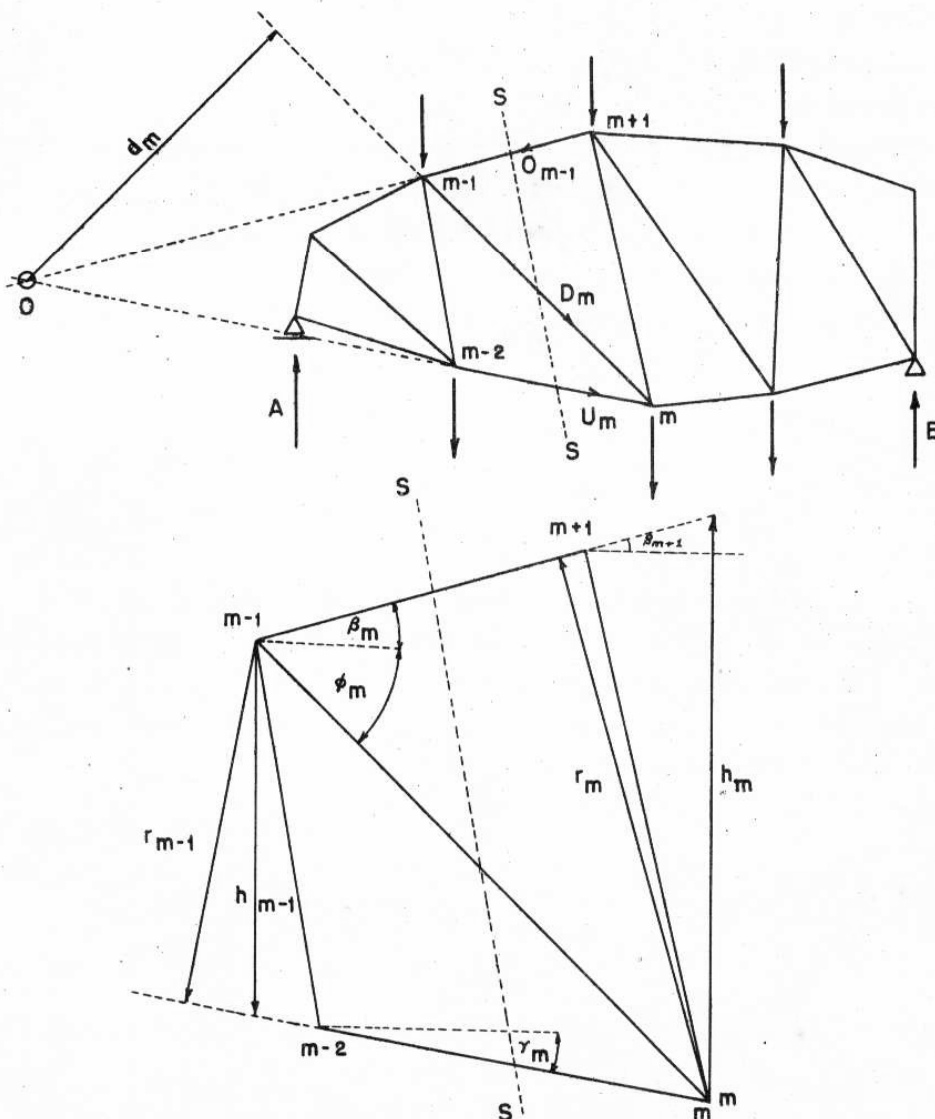


Fig. 122



esforços nas barras O_{m+1} , D_m e U_m , cortadas por SS em relação a esse mesmo ponto m . As barras D_m e U_m , que passam por m , não dão momentos em relação a esse ponto, de modo que teremos

$$M_m = O_{m+1} \cdot r_m,$$

donde

$$(3.101) \quad O_{m+1} = \frac{M_m}{r_m}.$$

Observando a figura, vemos que o momento M_m das forças da esquerda em relação a m provoca rotação no sentido dos ponteiros de um relógio; assim, o momento de O_{m+1} , para equilibrá-lo, deve provocar rotação no sentido oposto, o que só é possível com a força O_{m+1} apontando para a secção SS. Portanto, a barra O_{m+1} é comprimida, e teremos

$$(3.102) \quad O_{m+1} = + \frac{M_m}{r_m}.$$

Se tomarmos, agora, os momentos das forças à esquerda de SS em relação ao ponto $m-1$ (encontro de D_m e O_{m+1}), notando que o momento M_{m-1} tem o sentido dos ponteiros do relógio, a força U_m , para equilibrá-lo, deve afastar-se de SS, dando tração na barra. Teremos

$$M_{m-1} = U_m \cdot r_{m-1},$$

donde

$$(3.103) \quad U_m = - \frac{M_{m-1}}{r_{m-1}}.$$

Para a diagonal, tomando os momentos das forças à esquerda de SS, em relação ao ponto O (encontro de O_{m+1} e U_m), notando que o momento M_o tem sentido contrário aos ponteiros do relógio, a força na diagonal, para equilibrá-lo, deve afastar-se de SS, dando tração na barra, de modo que virá

$$M_o = D_m \cdot d_m,$$

donde

$$(3.104) \quad D_m = - \frac{M_o}{d_m}.$$

Poderemos, ainda, dar outras expressões para os esforços nas barras. Assim, pela figura, vemos que

$$r_m = h_m \cos \beta_{m+1},$$



$$r_{m-1} = h_{m-1} \cos \gamma_m .$$

Dai, substituindo nas expressões de O e de U ,

$$(3.105) \quad O_m = \frac{M_m}{h_m \cos \beta_{m+1}} ,$$

$$(3.106) \quad U_m = - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1} \cos \gamma_m} .$$

Para o esforço diagonal, podemos lançar mão - em vez da equação de equilíbrio à rotação - da equação de equilíbrio à translação horizontal, isto é

$$(3.107) \quad \sum H = 0 .$$

Projetando, assim, todas as forças em uma direção horizontal, as forças exteriores não darão componentes (supuzêmo-las verticais), bem como as reações de apoio, e teremos, portanto,

$$D_m \cos \phi_m + U_m \cos \gamma_m - O_{m+1} \cos \beta_{m-1} = 0 ,$$

donde

$$D_m = \frac{1}{\cos \phi_m} \left[O_{m+1} \cos \beta_{m-1} - U_m \cos \gamma_m \right] ,$$

ou, substituindo pelos valores anteriores,

$$(3.108) \quad D_m = \frac{1}{\cos \phi_m} \left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right] .$$

Nota: Nas vigas de membruras paralelas, como o ponto de encontro das membruras está no infinito, devemos lançar mão deste processo para o cálculo da diagonal.

5 - Método da Substituição de Barras.

Os métodos até agora vistos só se aplicam ao caso de treliças simples onde podemos achar sempre um nó no qual existem duas incógnitas, ou secções que cortem três barras. Casos há, porém, em que isto não é possível; as treliças, então, são ditas complexas, e devemos lançar mão do processo de substituição de barras para a sua resolução.

Suponhamos uma treliça como a da Fig.123, constituída por um contorno hexagonal, com as três diagonais que se cruzam livremente; suponhâmo-la simplesmente apoiada e sujeita a um carregamento qualquer.

Teremos, aqui:

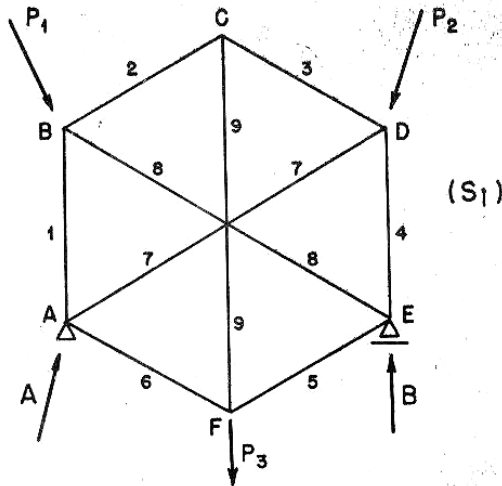


Fig. 123

$$\left. \begin{aligned} s &= 9 \\ t &= 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow s + t = 12,$$

$$k = 6 \rightarrow 2k = 12,$$

e o sistema é, pois, isostático.

Se quisermos aplicar o método de Cremona, veremos que não há nenhum nó onde só haja duas barras desconhecidas pelo qual pudéssemos começar; portanto, o processo é inadequado ao caso. Se optássemos por Culmann ou Ritter, chegaríamos à conclusão de que não seria possível passar uma secção por três barras não concorrentes. Só se poderá aplicar, portanto, à treliça o método analítico geral, ou o processo de substituição que passaremos a estudar.

Para tal fim, elimina-se uma barra, no caso a barra 7, e procede-se pelo Cremona, por exemplo. Começa-se, então, pelo nó A, onde só se desconhecem 1 e 6, os quais são, assim, determinados. Passa-se ao nó B, e determinam-se 2 e 8; depois, ao nó C, determinando-se 3 e 9; dever-se-ia, agora, passar ao nó D, mas, aí chegando, nota-se que há uma fôrça a decompor numa só direção incógnita, a 4. Introduce-se, então, uma barra auxiliar $FD = a$, que, aliás, é necessária para conservar a estabilidade do sistema. Pode-se, então, determinar 4 e a no nó E; as fôrças aí existentes devem dar como componente a fôrça da barra 5; e, no nó F, haverá uma verificação, pois aí todas as fôrças são conhecidas.

Chamemos S_1^0 aos esforços que acabamos de determinar na treliça assim modificada; portanto, na barra a, teremos S_a^0 .

Em seguida, tomemos a mesma treliça e introduzamos, como carregamento, um par de fôrças $P = F$ nos extremos da antiga barra 7, que foi eliminada (em AeD) e na dire-

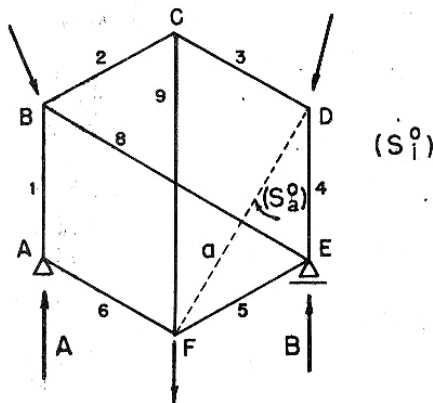


Fig. 124

Em seguida, tomemos a mesma treliça e introduzamos, como carregamento, um par de fôrças $P = F$ nos extremos da antiga barra 7, que foi eliminada (em AeD) e na dire-



ção desta barra. Por meio de um novo Cremona, determinemos os esforços nas várias barras; sejam eles S_i^1 ; na barra a, teremos S_a^1 .

Se, em vez de $P = 1$, houvésemos aplicado, nos mesmos pontos e direção, uma força $P = X$, valor que representa o esforço, na barra

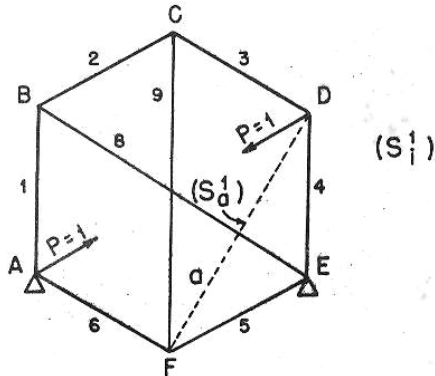


Fig. 125

suprimida, para o carregamento dado, e que é ainda desconhecido, os esforços nas barras seriam XS_i^1 ; em a, seria XS_a^1 .

Pelo princípio da superposição dos efeitos, teremos os esforços S_i na estrutura real, com o carregamento real, dados pela superposição dos esforços na estrutura

modificada, sujeita às cargas reais e às cargas $P = X$, ou seja:

$$(3.109) \quad S_i = S_i^0 + X_1 \cdot S_i^1.$$

Se aplicarmos esta expressão à barra a, acharemos o esforço real nela exercido, e que deve ser nulo, visto esta barra não existir na realidade; então,

$$S_a = S_a^0 + X_1 \cdot S_a^1 = 0,$$

donde

$$(3.110) \quad X_1 = -\frac{S_a^0}{S_a^1},$$

que é o valor do esforço na barra 1; nas demais barras, poderemos obter os esforços, quer aplicando a expressão acima para S_i , quer aplicando em A e D, na direção AD, forças X, na estrutura real, onde suprimimos a barra 1, e aplicando o Cremona.

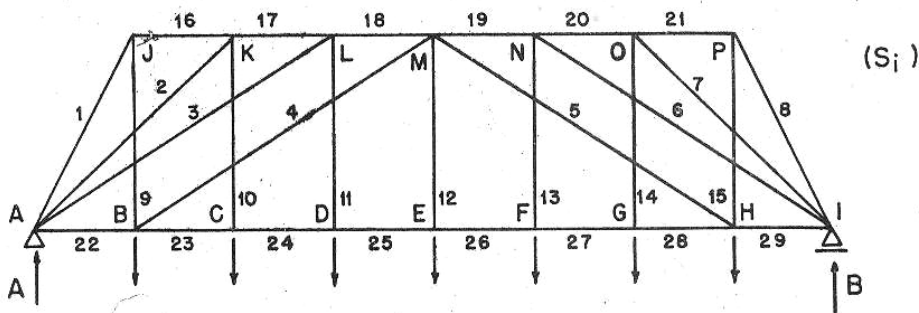


Fig. 126



Casos há em que é necessário proceder à substituição de mais de uma barra. Seja, por exemplo, a treliça da Fig.126. Temos aqui:

$$\left. \begin{aligned} s &= 29 \\ t &= 3 \end{aligned} \right\} s + t = 32,$$

$$k = 16 \rightarrow 2k = 32,$$

e a treliça é isostática. Não podemos resolvê-la pelo Cremona nem por qualquer outro método simples. Retiremos, então, as barras 2 e 3 e substituamo-las por duas barras fictícias, a e b (MC e MD, respectivamente), fazendo o mesmo do outro lado, com c e d.

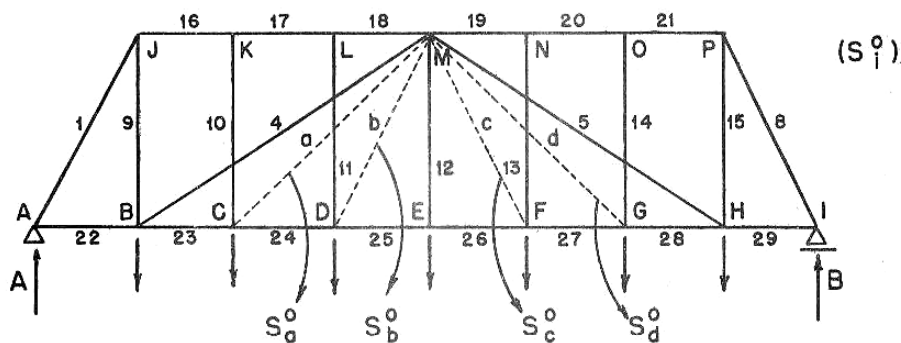


Fig. 127

Sob a ação das cargas exteriores, por meio de um Cremona, achamos os esforços S_i^0 em cada barra (em a, b, c, d serão, respectivamente, S_a^0 , S_b^0 , S_c^0 , S_d^0). Tomando o sistema assim modificado, e carregando, sucessivamente, com

$$X_1 = 1, \quad X_2 = 1, \quad X_3 = 1, \quad X_4 = 1$$

na direção de 2, 3, 6, 7, respectivamente, (barras suprimidas), os esforços serão, respectivamente:

$$S_i^1, \quad S_i^2, \quad S_i^3, \quad S_i^4.$$

Nas barras fictícias estes esforços serão, nos quatro casos,

$$\begin{aligned} S_i^1 &\rightarrow (S_a^1, S_b^1, S_c^1, S_d^1), \\ S_i^2 &\rightarrow (S_a^2, S_b^2, S_c^2, S_d^2), \\ S_i^3 &\rightarrow (S_a^3, S_b^3, S_c^3, S_d^3), \\ S_i^4 &\rightarrow (S_a^4, S_b^4, S_c^4, S_d^4). \end{aligned}$$

(Vide Fig.128).

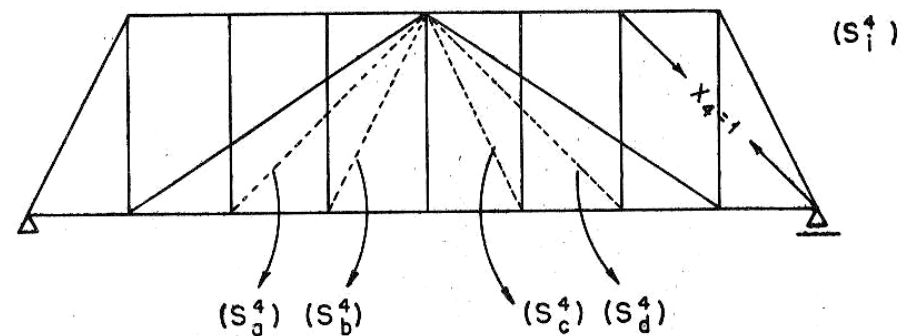
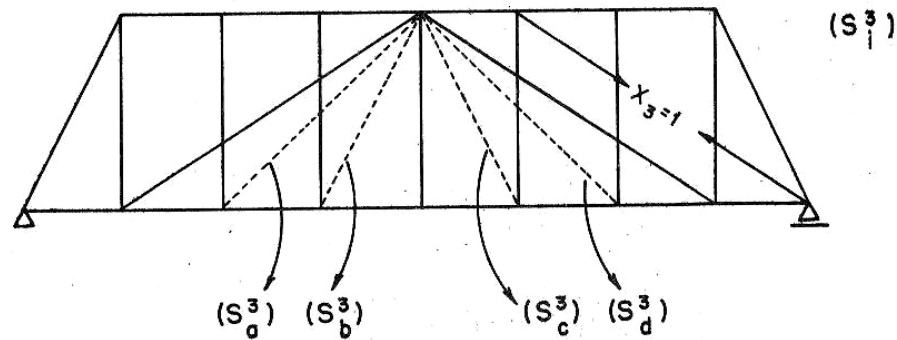
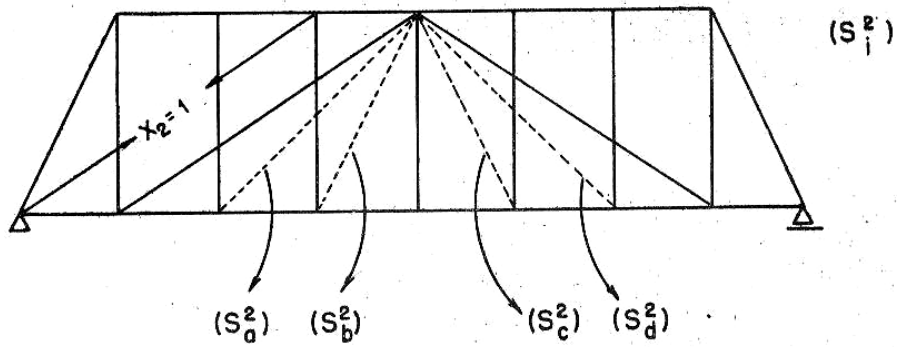
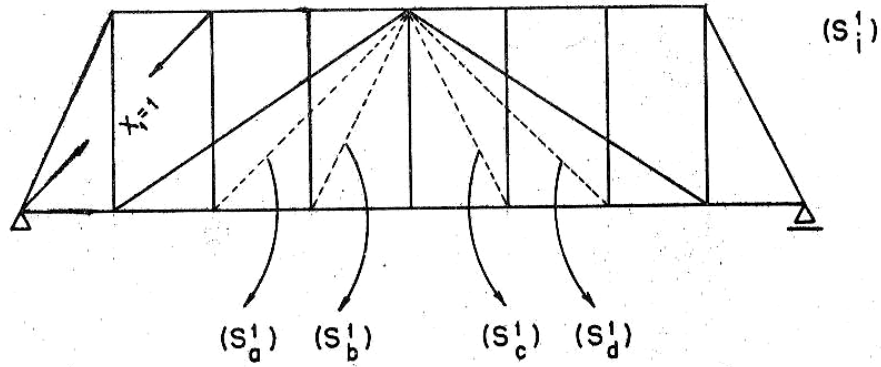


Fig. 128



Pelo princípio da superposição dos efeitos, o esforço em uma barra qualquer da estrutura primitiva será dado por

$$(3.111) \quad S_i = S_i^0 + S_i^1 X_1 + S_i^2 X_2 + S_i^3 X_3 + S_i^4 X_4.$$

Os esforços nas barras fictícias a, b, c, d serão dados pelas mesmas expressões e, como serão nulos, teremos:

$$(3.112) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_a = S_a^0 + S_a^1 X_1 + S_a^2 X_2 + S_a^3 X_3 + S_a^4 X_4 = 0, \\ S_b = S_b^0 + S_b^1 X_1 + S_b^2 X_2 + S_b^3 X_3 + S_b^4 X_4 = 0, \\ S_c = S_c^0 + S_c^1 X_1 + S_c^2 X_2 + S_c^3 X_3 + S_c^4 X_4 = 0, \\ S_d = S_d^0 + S_d^1 X_1 + S_d^2 X_2 + S_d^3 X_3 + S_d^4 X_4 = 0. \end{array} \right.$$

Dêste sistema, tiramos os valores dos X_1, X_2, X_3, X_4 que, na expressão acima, permitem calcular S_i .

Poderíamos, também, introduzir na estrutura primitiva, onde eliminaríamos a, b, c, d, as forças X_1, X_2, X_3, X_4 e calcular os esforços por meio de um Cremona.

6 - Método das Cadeias Cinemáticas.

Suponhamos uma cadeia indeformável simples, constituída por três barras em forma de triângulo, a, b, c. Suponhamos, ainda, que este triângulo se desloque para uma nova posição $a'b'c'$, infinitamente próxima. Se ligarmos os pontos correspondentes aa' , bb' , cc' , e, pelo meio destes segmentos, levantarmos perpendiculares, estas cruzar-se-ão num ponto P (desde que a figura seja indefor-

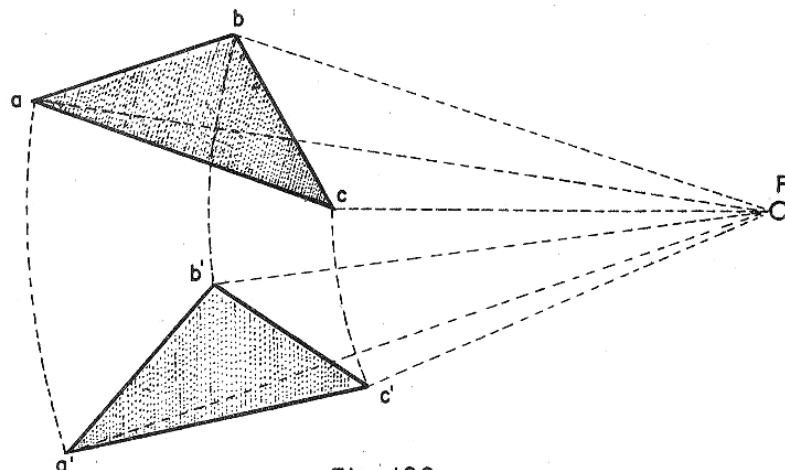


Fig. 129



mável); este ponto será, portanto, o centro instantâneo de rotação da figura. Com centro em P , podemos traçar arcos de círculo aa' , bb' , cc' , de raios, respectivamente, $r_a = aP$, $r_b = bP$, $r_c = cP$, que serão os raios de rotação de cada ponto em torno de P , quando a treliça passa da posição abc para a nova $a'b'c'$.

As velocidades dos pontos a , b , c serão vetores tangentes a estes raios:

$$v_a, \quad v_b, \quad v_c,$$

e, sendo ω a velocidade angular de rotação, poderemos escrever

$$v_a = \omega \cdot r_a, \quad v_b = \omega \cdot r_b, \quad v_c = \omega \cdot r_c.$$

Marquemos estes vetores normalmente aos raios da figura. Como é constante, poderemos escrever

$$(3.113) \quad \frac{v_a}{r_a} = \frac{v_b}{r_b} = \frac{v_c}{r_c} = \omega.$$

Se rebatermos cada um destes vetores sobre o respectivo raio, obteremos os pontos a_1 , b_1 , c_1 , que serão os vértices de um novo triângulo (F').

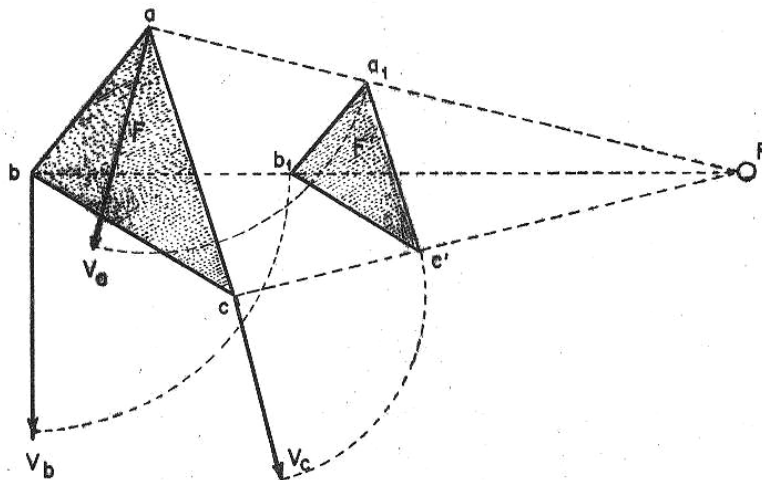


Fig. 130

Como

$$\begin{aligned} \overline{aa_1} &= v_a, & \overline{bb_1} &= v_b, & \overline{cc_1} &= v_c, \\ \overline{aP} &= r_a, & \overline{bP} &= r_b, & \overline{cP} &= r_c, \end{aligned}$$

poderemos escrever

$$(3.114) \quad \frac{aa_1}{aP} = \frac{bb_1}{bP} = \frac{cc_1}{cP};$$



portanto, os dois triângulos abc e $a_1b_1c_1$ serão semelhantes, e o centro de homotetia é o centro instantâneo de rotação, P .

Portanto, se, conhecido o centro instantâneo de rotação, marcarmos as velocidades de cada ponto, as rebatermos sobre os respectivos raios, e obtivermos uma figura semelhante à primitiva, sabermos imediatamente que a figura primitiva era indeformável.

Conhecendo, ainda, o centro instantâneo de rotação, e a velocidade de um ponto, ou apenas as velocidades de dois pontos, poderemos obter imediatamente a velocidade de outro qualquer ponto.

Portanto, se tomássemos $v_a = \overline{aP} = \overline{aa_1}$, os três pontos coincidiriam com o centro instantâneo de rotação.

Suponhamos, agora, uma cadeia deslocável simples; por exemplo, um quadrilátero $abcd$. Se dermos um deslocamento qualquer a este sistema, aparecerão velocidades (compatíveis com o movimento) em cada nó, v_a, v_b, v_c, v_d que são normais aos raios respectivos; portanto, se as rebatermos de 90 graus, teremos os pontos a_1, b_1, c_1 e d_1 e as direções desses raios. Como a figura é deformável, cada barra girará em torno de seu centro instantâneo de rotação; com efeito, veremos que os raios se encontram, dois a dois, formando, pois, quatro centros instantâneos, um para cada barra:

$$P_{ab}, P_{ac}, P_{cd}, P_{bd}.$$

Em relação ao polo P_{ab} , por exemplo, teremos os raios de \underline{a} e de \underline{b} , respectivamente:

$$r_{a(ab)}, r_{b(ab)},$$

e poderemos escrever, sendo ω_{ab} a velocidade angular de rotação de ab em torno de P_{ab} ,

$$\frac{v_a}{r_{a(ab)}} = \frac{v_b}{r_{b(ab)}} = \omega_{ab},$$

ou

$$(3.115) \quad \frac{aa_1}{a \cdot P_{ab}} = \frac{bb_1}{b \cdot P_{ab}}.$$

Os triângulos abP_{ab} e $a_1b_1P_{ab}$ serão semelhantes, e as retas ab e a_1b_1 serão paralelas.

Analogamente, ac e a_1c_1 , cd e c_1d_1 , db e d_1b_1 serão paralelas duas a duas. Portanto, a figura $a_1b_1c_1d_1$ (F') terá lados paralelos à figura primitiva $abcd$ (F). Mas, não serão semelhantes, pois não há um único centro de homotetia.

Concluimos, assim, que, se, ao darmos um movimento a uma cadeia

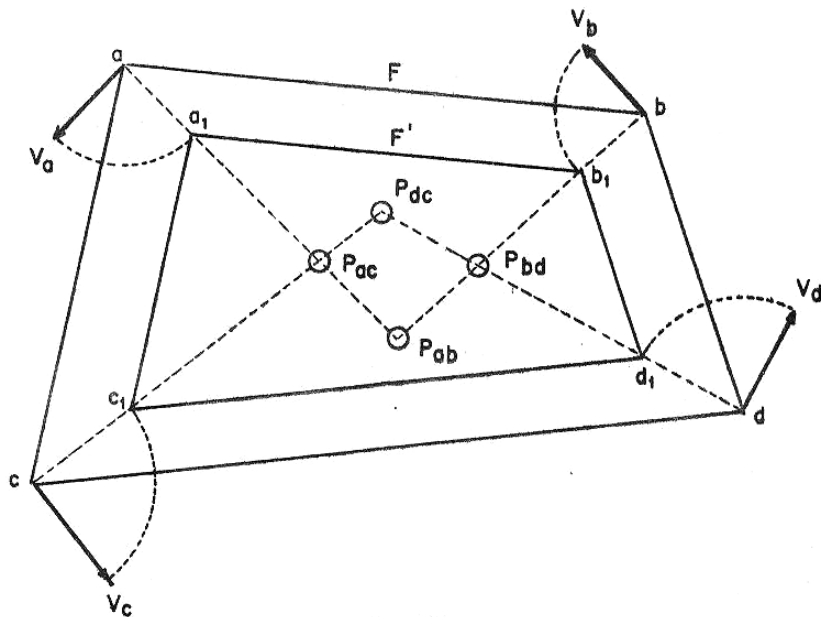


Fig. 131

cinemática, rebatermos as velocidades de 90 graus, obteremos uma figura de lados paralelos à primitiva. Se esta figura fôr semelhante à primitiva, a cadeia será indeformável; se não fôr semelhante, será deformável.

Suponhamos, agora, um quadrilátero articulado, solicitado por forças quaisquer P_a, P_b, P_c, P_d nos nós a, b, c, d , que este-

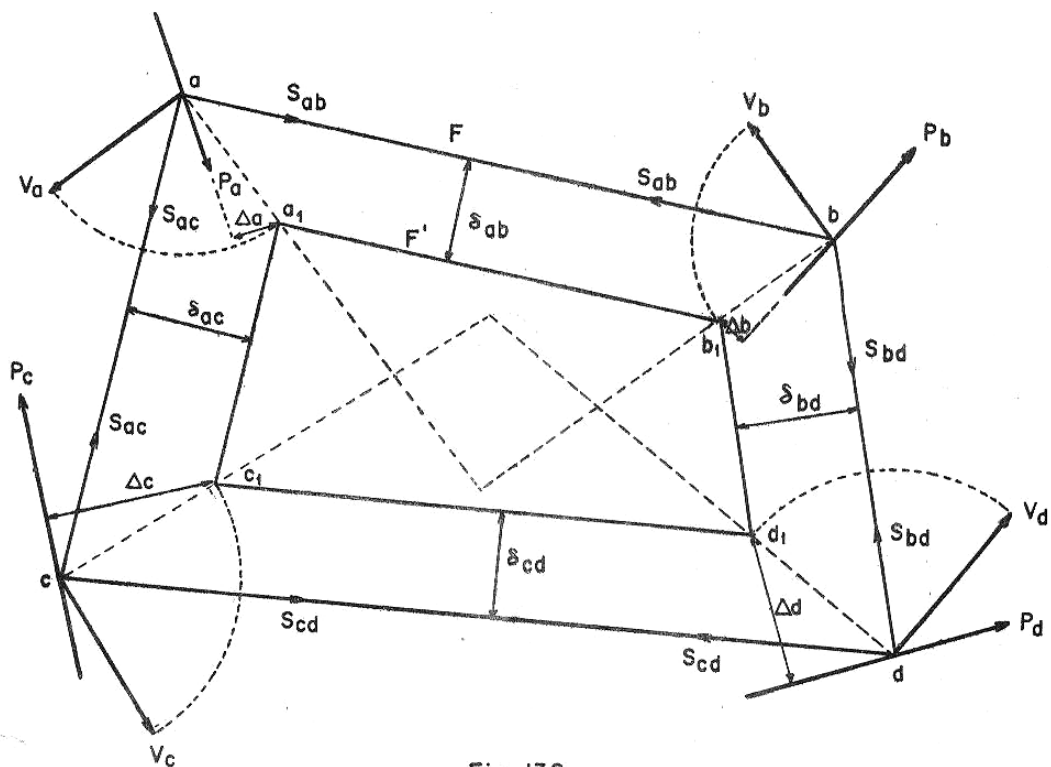


Fig. 132



jam em equilíbrio. Imprimamos a êle um movimento qualquer que não seja produzido por nenhuma destas fôrças. Se tivermos traçado a figura \underline{F}' , de lados paralelos, estaremos em condições de marcar (por rotação de 90 graus no sentido dos ponteiros do relógio dos segmentos aa_1 , etc.) as velocidades dos nós v_a, v_b, v_c, v_d .

Chamemos de δ_{ab} a distância do lado ab do quadrilátero \underline{F} ao seu correspondente a_1b_1 em \underline{F}' (análogamente para $\delta_{ac}, \delta_{cd}, \delta_{db}$).

Sejam, ainda, $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \Delta d$ as distâncias dos pontos a_1, b_1, c_1, d_1 , de \underline{F}' , às fôrças P_a, P_b, P_c, P_d , que estão aplicadas nos nós correspondentes, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$, do quadrilátero.

Denominemos, enfim, $S_{ab}, S_{ac}, S_{cd}, S_{bd}$ às fôrças que aparecem nas barras ab, ac, cd e bd , devido ao carregamento P_a, P_b, P_c, P_d . Como o sistema está em equilíbrio, cada nó também o estará; considerando o nó \underline{a} , e aplicando as equações de equilíbrio à rotação em tórno do ponto a_1 , teremos

$$(3.116) \quad + S_{ab} \cdot \delta_{ab} - S_{ac} \cdot \delta_{ac} - P_a \cdot \Delta a = 0.$$

Raciocinando análogamente para os outros nós, virá:

$$\text{nó } \underline{b}: \quad - S_{ab} \cdot \delta_{ab} + S_{bd} \cdot \delta_{bd} - P_b \cdot \Delta b = 0,$$

$$\text{nó } \underline{c}: \quad + S_{ac} \cdot \delta_{ac} - S_{cd} \cdot \delta_{cd} + P_c \cdot \Delta c = 0,$$

$$\text{nó } \underline{d}: \quad + S_{cd} \cdot \delta_{cd} - S_{bd} \cdot \delta_{bd} - P_d \cdot \Delta d = 0.$$

Somando membro a membro estas quatro equações, teremos

$$- P_a \cdot \Delta a - P_b \cdot \Delta b + P_c \cdot \Delta c - P_d \cdot \Delta d = 0,$$

ou seja

$$(3.117) \quad \sum P \cdot \Delta = 0.$$

Então, se tivermos uma cadeia cinemática, sujeita a um sistema de fôrças em equilíbrio, e a ela imprimirmos um deslocamento arbitrário, a equação acima verificar-se-á sempre. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que Δ é a distância entre os nós da figura \underline{F}' , de lados paralelos, e as fôrças aplicadas nos nós correspondentes da cadeia primitiva.

Na realidade, isto nada mais é que a expressão do teorema dos trabalhos virtuais. Com efeito, chamando de α_a ao ângulo entre a velocidade v_a e a fôrça P_a , aplicada no nó \underline{a} , o trabalho



virtual da fôrça P_a será

$$(3.118) \quad \mathcal{Z}(P_a) = P_a \cdot v_a \cos \alpha,$$

pois que $v_a \cos \alpha$ é a projeção de v_a (espaço percorrido no tempo unitário). Mas, da Fig.133, tiramos

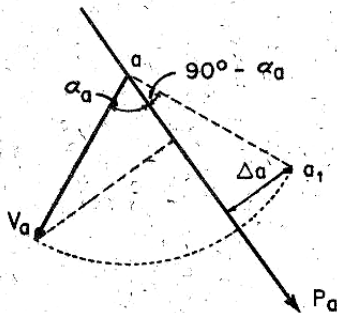


Fig. 133

$$\Delta a = \overline{aa_1} \sin(90^\circ - \alpha),$$

ou, como

$$\overline{aa_1} = v_a,$$

teremos

$$\Delta a = v_a \cos \alpha.$$

Portanto, o trabalho virtual da fôrça P_a será:

$$(3.119) \quad \mathcal{Z}(P_a) = P_a \cdot \Delta a.$$

A expressão (3.117) é a expressão do teorema dos trabalhos virtuais ou das velocidades virtuais. Dizemos virtuais porque as fôrças que produzem trabalho não são as mesmas que produzem o deslocamento.

Suponhamos uma cadeia cinemática de quatro barras, o chamado mecanismo de Reuleaux. Se o conjunto sofrer um deslocamento, os pontos 2 e 4 descreverão trajetórias circulares em tórno de 1 e 3, respectivamente.

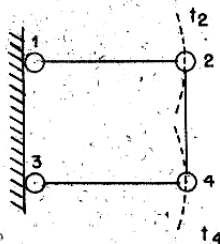


Fig. 134

Se, agora, ligarmos 1 e 4 por duas barras ao ponto 5, os pontos 5 e 4 ao ponto 6, os pontos 6 e 2 ao ponto 7, teremos, ainda um conjunto com um grau de liberdade: o ponto 7 se deslocará segundo uma trajetória t_7 .

Se ligarmos o ponto 7 ao solo, por meio de uma barra $s = 7-8$, o ponto 7 (em relação a 8) deveria deslocar-se apenas segundo a trajetória t_7 ; como não é possível ao ponto 7 percorrer ao mesmo tempo ambas as trajetórias, permanecerá fixo. O sistema assim constituído será indeformável, e constituirá uma treliça (Fig.135).

Se esta treliça estiver sujeita a um grupo de cargas, surgirão esforços nas diversas barras. Assim, na barra 7-8 surgirá a fôrça S_{7-8} .

Suprimamos, agora, a barra 7-8, substituindo-a por duas fôrças

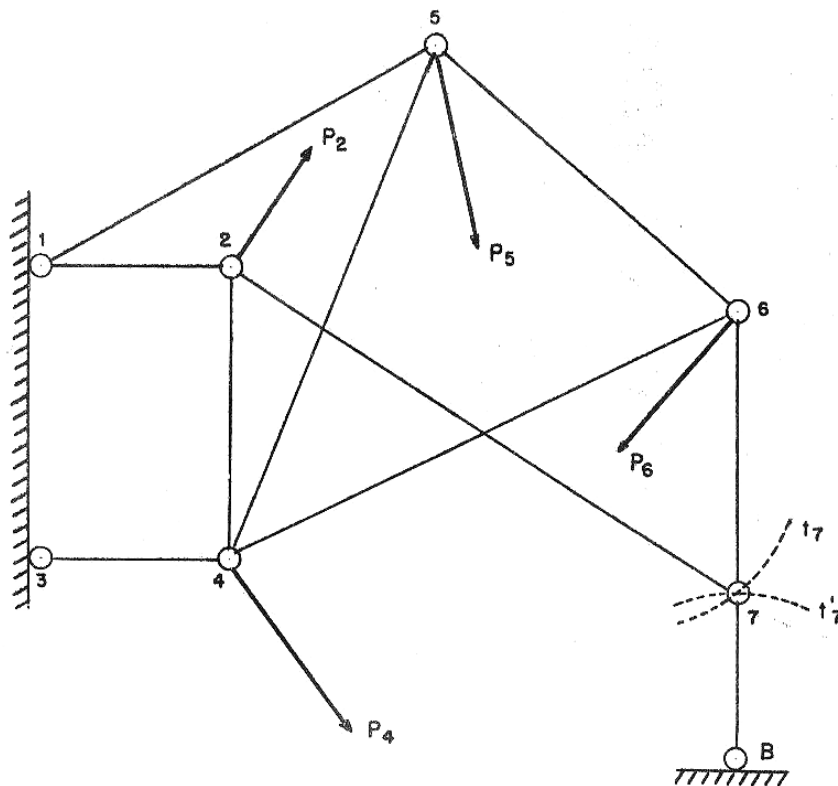


Fig. 135

iguais a S_{7-8} , atuando nos pontos $\underline{7}$ e $\underline{8}$; com isto, a estrutura transforma-se novamente em cadeia cinemática com um grau de liberdade. Demos a esta cadeia cinemática um pequeno deslocamento. Os pontos $\underline{1}$ e $\underline{3}$ ficando fixos, os pontos $\underline{1'}$ e $\underline{3'}$ confundir-se-ão com eles. O ponto $\underline{2}$ gira em torno de $\underline{1}$, que é o seu centro instantâneo de rotação; a velocidade de $\underline{2}$ será normal à reta $1-2$; rebatendo este vetor, de 90 graus, obteremos um ponto $\underline{2'}$ sobre a reta $1-2$. Escolhemos, arbitrariamente, a velocidade de $\underline{2}$ (que condicionará o deslocamento), isto é, escolhemos arbitrariamente o ponto $\underline{2'}$ entre $\underline{1}$ e $\underline{2}$ e sobre $1-2$.

Analogamente, o ponto $\underline{4}$ terá para centro instantâneo de rotação o ponto $\underline{3}$; assim, o ponto $\underline{4'}$ estará sobre $3-4$. Para obtê-lo, tiramos $2'-4'$ paralela a $2-4$ (pois, como sabemos, as figuras têm lados paralelos); o ponto onde esta reta cortar $3-4$ será o ponto $\underline{4'}$.

O deslocamento do ponto $\underline{5}$ está ligado ao deslocamento de $\underline{1}$ e $\underline{4}$; portanto, para achar o ponto $\underline{5}$, basta tirar por $\underline{1'}$ e $\underline{4'}$ paralelas a $1-5$ e $4-5$, respectivamente.

Analogamente, o ponto $\underline{6}$, ligado a $\underline{5}$ e $\underline{4}$, dará o ponto $\underline{6'}$, tirando-se por $\underline{5'}$ e $\underline{4'}$ paralelas a $5-6$ e $4-6$; o ponto $\underline{7'}$, tirando-se por $\underline{2'}$ e $\underline{6'}$ paralelas a $2-7$ e $6-7$.

Para obtermos os centros instantâneos de rotação, como a figura



\underline{F}' resulta do rebatimento das velocidades, basta ligarmos os extremos da barra aos pontos correspondentes da figura \underline{F} ; os pontos de encontro dessas retas darão os centros instantâneos de rotação. Assim, o centro instantâneo de rotação de 5-6 será dado pelo ponto de encontro de 5-5' e 6-6'.

Chamando de Δ às distâncias dos pontos da figura \underline{F}' às forças aplicadas nos nós correspondentes da cadeia primitiva, teremos, aplicando o teorema dos trabalhos virtuais,

$$(3.120) \quad \sum P \cdot \Delta = 0,$$

ou, no caso,

$$P_5 \Delta_5 - P_2 \Delta_2 + P_4 \Delta_4 + P_6 \Delta_6 - S_{7-8} \Delta_{7-8} = 0,$$

donde vem

$$(3.121) \quad S_{7-8} = \frac{-P_2 \Delta_2 + P_5 \Delta_5 + P_4 \Delta_4 + P_6 \Delta_6}{\Delta_{7-8}}.$$

Se tivéssemos $\Delta_{7-8} = 0$, S_{7-8} viria infinito, e isto significaria uma indeterminação algébrica: as duas trajetórias de $\underline{7}$,

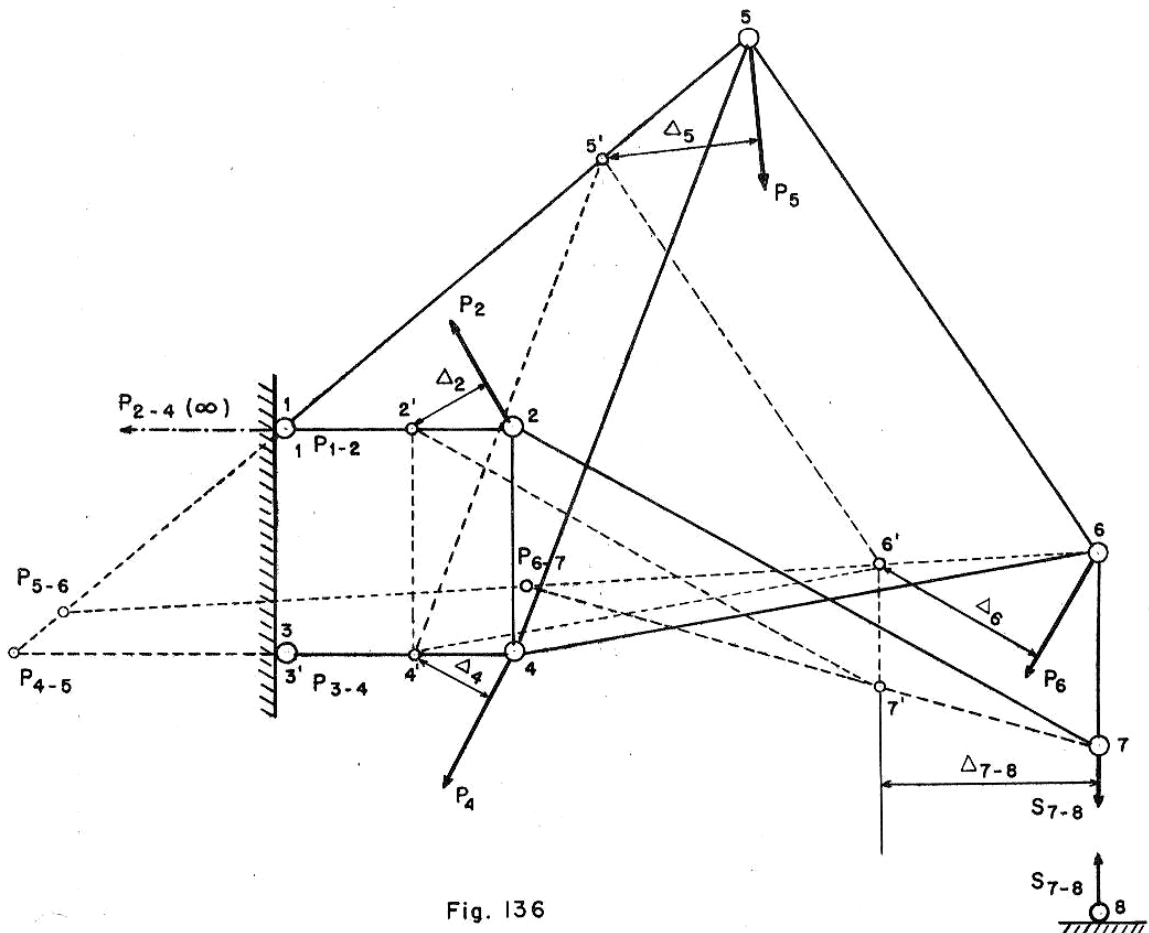


Fig. 136



(t_7 e t_7') seriam tangentes.

Aplicações: Suponhamos, em primeiro lugar, a treliça da Fig. 137, com um número ímpar de painéis (cinco), sujeita a um certo carregamento P_2, P_3, P_4, P_5 . Temos, aqui:

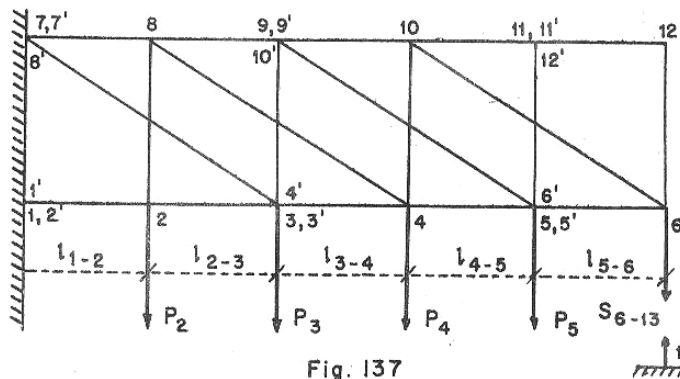


Fig. 137

$$\left. \begin{array}{l} t = 6 \\ s = 20 \end{array} \right\} s + t = 26,$$

$$k = 13 \rightarrow 2k = 26,$$

e a treliça é isostática.

Para calcularmos o esforço S_{6-13} , na barra 6-13, retiremos

esta barra, substituindo-a pelas forças S_{6-13} aplicadas em 6 e 13. A treliça transforma-se numa cadeia cinemática. Dando-se um deslocamento a esta cadeia, virá o seguinte:

Os pontos 1 e 7 não se deslocam; os pontos 1' e 7' coincidem com eles. O ponto 2 gira em torno de 1, e 8 em torno de 7; portanto, 2' estará sobre 1-2. Escolhamos a distância $1-2 = l_{1-2}$; neste caso, 2' coincidirá com 1 e 1'; análogamente, se fizermos $7-8 = 1-2$, 8' coincidirá com 7 e 7'. O ponto 3 está ligado a 2 e 7; assim, tirando por 2' uma paralela a 2-3, e por 7' uma paralela a 7-3, acharemos o ponto 3' coincidindo com 3. 9 estará ligado a 8 e 3; por 3' tiraremos uma paralela a 3-9 e, por 8' uma paralela a 8-9; acharemos 9' coincidindo com 9. 4 está ligado a 2 e 8; tirando por 2' uma paralela a 2-4 e, por 8', uma paralela a 8-4, acharemos 4' coincidindo com 3. 10 está ligado a 4 e 9; tirando por 4' uma paralela a 4-10 e, por 9', uma paralela a 9-10, acharemos 10' coincidindo com 9. 5 está ligado a 3 e 9; tirando por 3' uma paralela a 3-5 e, por 9', uma paralela a 9-5, acharemos 5' coincidindo com 5. 11 está ligado a 10 e 5; tirando por 5' uma paralela a 5-11 e, por 10, uma paralela a 10-11, acharemos 11' coincidindo com 11. 6 está ligado a 4 e 10; tirando por 4' uma paralela a 4-6 e, por 10, uma paralela a 10-6, acharemos 6' coincidindo com 5. O ponto 12 está ligado a 11 e 6; tirando por 11' paralela a 11-12 e, por 6', uma paralela a 6-12, acharemos 12' coincidindo com 11.

Teremos, assim,

$$\Delta_2 = l_{1-2}; \quad \Delta_3 = 0; \quad \Delta_4 = l_{3-4}; \quad \Delta_5 = 0;$$



$$\Delta_{6-13} = \ell_{5-6},$$

e, aplicando o teorema dos trabalhos virtuais, virá

$$P_2 \cdot \ell_{1-2} + P_4 \cdot \ell_{3-4} - S_{6-13} \cdot \ell_{5-6} = 0,$$

donde

$$(3.122) \quad S_{6-13} = \frac{P_2 \cdot \ell_{1-2} + P_4 \cdot \ell_{3-4}}{\ell_{5-6}}.$$

Se os painéis fôrem iguais, tem-se

$$\ell_{1-2} = \ell_{3-4} = \ell_{5-6},$$

e virá

$$(3.123) \quad S_{6-13} = P_2 + P_4.$$

Se supuzermos uma treliça análoga à precedente, mas com um número par de painéis, teremos, procedendo análogamente ao caso anterior, a figura F' de acôrdo com a Fig.138.

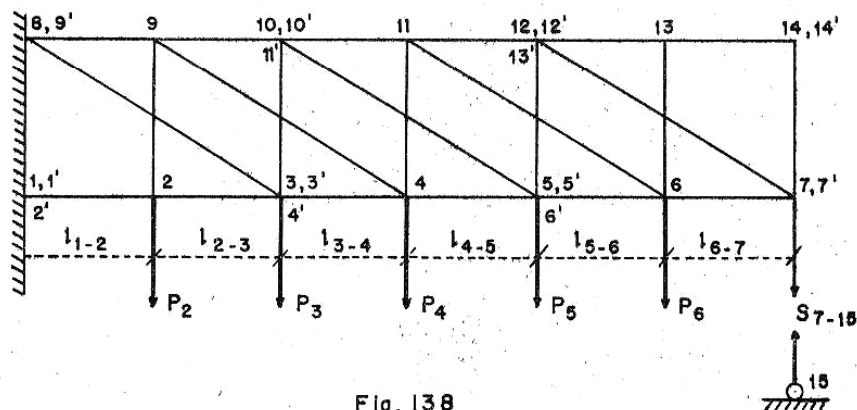


Fig. 138

Teremos, assim:

$$\Delta_2 = \ell_{1-2}, \quad \Delta_5 = 0,$$

$$\Delta_3 = 0, \quad \Delta_6 = \ell_{5-6},$$

$$\Delta_4 = \ell_{3-4}, \quad \Delta_7 = \ell_{7-15}.$$

Aplicando o teorema dos trabalhos virtuais, teremos

$$P_2 \cdot \ell_{1-2} + P_4 \cdot \ell_{3-4} + P_6 \cdot \ell_{5-6} - S_{7-15} \cdot 0 = 0,$$

donde

$$(3.124) \quad S_{7-15} = \frac{P_2 \ell_{1-2} + P_4 \ell_{3-4} + P_6 \ell_{5-6}}{0} = \infty.$$

Há, assim, uma indeterminação algébrica: as trajetórias do ponto



7, em relação a 14 e a 15, são tangentes.

A estrutura é isostática, mas não tem estabilidade; isto dar-se-á sempre que o número de painéis fôr par.

7 - Método dos Polos Instantâneos de Rotação.

Suponhamos ainda uma cadeia cinemática móvel, formando um mecanismo de Reuleaux, composta de quatro barras 1, 2, 3, 4; suponhamos que a barra 4 é fixa, e chamemo-la de W (meio exterior).

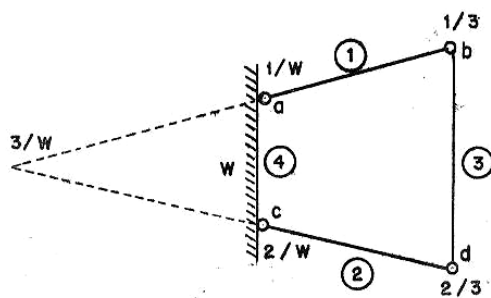


Fig. 139

Se dermos um deslocamento à cadeia, as barras mover-se-ão, umas em relação às outras. A barra 1 deslocar-se-á em relação a W em torno de a, que é, portanto, o polo instantâneo de rotação $1/W$. Do mesmo modo, 2 gira, em relação a W, em torno do

polo $2/W$ (ponto c). A barra 3, tendo um ponto comum com 1, girará, em relação a esta, em torno do polo $1/3$ (ponto b); do mesmo modo, o movimento de 3 em relação a 2 dar-se-á em torno do ponto d, que é o polo $2/3$. Temos, assim, os deslocamentos de dois pontos da barra 3 em relação a W: pontos b e d; o polo de 3 será, portanto, dado (em relação a W) pelo encontro dos prolongamentos das barras 1 e 2 (polo $3/W$).

Vemos, assim, que os polos $1/3$, $1/W$, $3/W$ estão na mesma reta, bem como os polos $2/3$, $2/W$, $3/W$ também estão sobre uma mesma reta. (De um modo geral, os polos A/B , A/C , B/C estão sobre uma mesma reta.)

Os polos $1/W$, $1/3$, $2/W$, $2/3$ são ditos polos reais; o polo $3/W$ é o polo imaginário, ou de Foppl.

Suponhamos uma treliça isostática qualquer, na qual queremos determinar o esforço na barra D para um certo carregamento P_1 , P_2 e P_3 . Sejam A e B as reações. Chamemos de W o meio exterior, e de 1 e 2 as duas partes da treliça de cada lado do painel onde está a barra D. Chamemos ainda de 3 e 4 as barras cd e ef. Suprimamos a barra D, substituindo-a pelas duas forças D que existiam nessa barra.

O conjunto 1 só pode mover-se, em relação a W, em torno de a, que será o polo $1/W$. Da mesma forma, obteremos os polos

$$1/3 \text{ (c), } 2/3 \text{ (d), } 1/4 \text{ (e), } 2/4 \text{ (f).}$$

Pelo que vimos, o polo $1/2$ estará sobre as retas cd e ef,

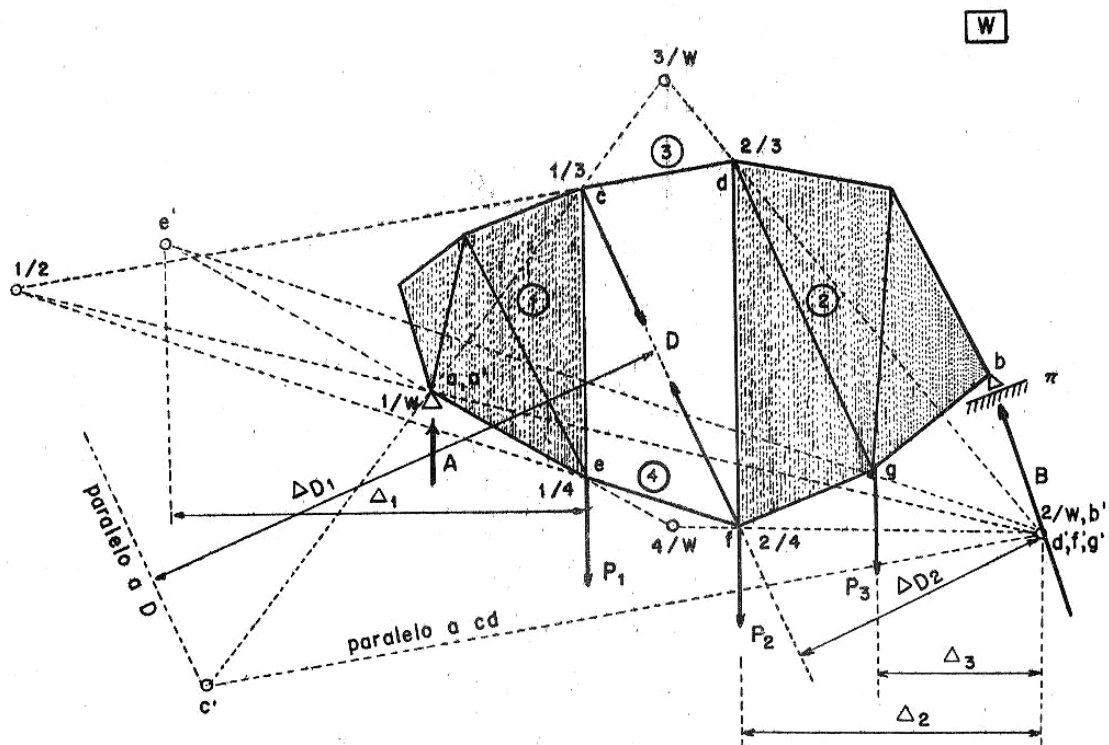


Fig. 140

respectivamente: $1/3 - 2/3$ e $1/4 - 2/4$.

O ponto b da parte 2 só pode deslocar-se segundo o plano de apoio π ; o raio da trajetória de b será, portanto, a direção da reação de apoio B (normal a π).

O polo $2/W$ deve estar sobre a reta $1/W - 1/2$ e sobre o raio da trajetória de b , isto é, sobre B .

O polo $3/W$ estará sobre as retas $1/W - 1/3$ e $2/W - 2/3$; análogamente, $4/W$ estará sobre $1/W - 1/4$ e $2/W - 2/4$.

O polo $3/4$ estando, ao mesmo tempo, sobre $1/3 - 1/4$ e sobre $2/3 - 2/4$, estará no infinito (ce e df sendo paralelos); como $3/4$ também estará sobre $3/W - 4/W$, esta reta será paralela aos montantes ce e df.

No movimento do sistema, a sendo fixo, a' se confundirá com ele (polo $1/W$); o ponto d girará em torno de $2/W$; fazendo $d - 2/W$ igual à velocidade de d , d'' vai confundir-se com $2/W$; análogamente, f' , b' , g' confundir-se-ão também com $2/W$.

Estando c ligado a a e d , obtém-se c' tirando por a' uma paralela a ac e, por d' , uma paralela a dc. Análogamente, obtém-se e' tirando por a' uma paralela a ea, e por f' uma paralela a ef.



Aplicando o teorema dos trabalhos virtuais, como temos

$$\begin{aligned}\Delta_A &= 0, & \Delta_{P_2} &= \Delta_2, \\ \Delta_B &= 0, & \Delta_D &= \Delta_{D_1} \text{ (em relação a } \underline{1}), \\ \Delta_{P_1} &= \Delta_1, & \Delta_D &= \Delta_{D_2} \text{ (em relação a } \underline{2}),\end{aligned}$$

virá

$$-P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + D \cdot \Delta_{D_1} + D \cdot \Delta_{D_2} = 0,$$

donde

$$(3.125) \quad D = \frac{P_1\Delta_1 - P_2\Delta_2 - P_3\Delta_3}{\Delta_{D_1} + \Delta_{D_2}}$$

3.2 LINHAS DE INFLUENCIA DAS TRELIÇAS

Carregamento Inferior.

Suponhamos uma treliça qualquer, para a qual desejamos traçar as linhas de influência das barras O_{m+1} , D_m e U_m .

Passando uma secção SS que corte as três barras, teremos, pelo processo de Ritter,

$$O_{m+1} \cdot r_m = M_m,$$

mas, temos que

$$r_m = h_m \cos \beta_{m+1},$$

donde virá

$$(3.201) \quad O_{m+1} = + \frac{M_m}{r_m} = + \frac{M_m}{h_m \cos \beta_{m+1}};$$

$$U_m \cdot r_{m-1} = M_{m-1},$$

e, como temos que

$$r_{m-1} = h_{m-1} \cos \gamma_m,$$

teremos

$$(3.202) \quad U_m = - \frac{M_{m-1}}{r_{m-1}} = - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1} \cos \gamma_m}.$$

O efeito elástico é

$$O_{m+1} = E = P \cdot f(\alpha);$$

daí a linha de influência:



$$y_{O_{m+1}} = \frac{E}{P} = f(\alpha) = \frac{O_{m+1}}{P},$$

ou, então,

$$(3.203) \quad y_{O_{m+1}} = + \frac{1}{h_m \cos \beta_{m+1}} \cdot \frac{M_m}{P} = \frac{1}{h_m \cos \beta_{m+1}} \cdot y_{M_m},$$

isto é, a linha de influência de O_{m+1} é a do momento em \underline{m} multiplicada pelo fator

$$+ \frac{1}{h_m \cos \beta_{m+1}}.$$

Para a linha de influência de M_m , marcávamos x_m na vertical de \underline{A} ; para a de O_{m+1} bastará marcar, na vertical de \underline{A} , o segmento

$$+ \frac{x_m}{h_m \cos \beta_{m+1}},$$

e proceder análogamente à linha de influência de M_m , isto é, ligar a \underline{B} , e o ponto onde corta a vertical de \underline{m} , ligar a \underline{A} .

Para a linha de influência de U_m , teremos, análogamente,

$$y_{U_m} = \frac{E}{P} = f(\alpha) = \frac{U_m}{P},$$

donde obteremos

$$(3.204) \quad y_{U_m} = - \frac{1}{h_{m-1} \cos \gamma_m} \cdot \frac{M_{m-1}}{P} = - \frac{1}{h_{m-1} \cos \gamma_m} \cdot y_{M_{m-1}},$$

isto é, basta marcar sôbre a vertical de \underline{A} o segmento

$$- \frac{x_{m-1}}{h_{m-1} \cos \gamma_m}.$$

Note-se que o ponto \underline{m} é de transmissão de cargas, de modo que a linha de influência de O_{m+1} não sofre alteração; mas, o ponto $m-1$ não o é (centro de momentos para U_m), de modo que a linha de influência de U_m deve ser chanfrada sôbre as verticais dos dois pontos de transmissão vizinhos: $m-2$ e \underline{m} .

Para a diagonal, teremos que, se a carga estiver à direita de \underline{m} , a reação \underline{A} será

$$A = P \frac{\ell - a}{\ell}.$$

Tomando os momentos em relação a \underline{O} (ponto de encontro de O_{m+1} e U_m), virá

$$A \cdot a = D_m \cdot d_m \rightarrow D_m = - \frac{a}{d_m} \cdot A;$$

daí a linha de influência:



$$(3.205) \quad y_{D_m} = -\frac{a}{d_m} \cdot \frac{A}{P} = -\frac{a}{d_m} \cdot y_A.$$

Para y_A , marcaríamos +1 sôbre a vertical de A; para D_m , marcaremos $-a/d_m$ na vertical de A e ligaremos a B (válido de m a B). Se a carga estiver à esquerda de $m-2$, B será

$$B = P \frac{a}{l}.$$

Tomando os momentos em relação a O, virá (equilíbrio da parte da direita à ação das fôrças da parte da esquerda):

$$B \cdot b = D_m \cdot d_m \rightarrow D_m = + B \frac{b}{d_m};$$

daf,

$$y_{D_m} = \frac{b}{d_m} \cdot \frac{B}{P} = + \frac{b}{d_m} \cdot y_B.$$

Marcaremos na vertical de B, não +1 (para a linha de influência de B), mas $+b/d_m$, e ligaremos a A (válido de $m-2$ a A).

Quando P estiver entre $m-2$ e m, a solicitação é indireta, e basta chanfrar a linha de influência nas verticais dêstes dois pontos.

As duas retas que compõem a linha de influência de D_m encontram-se sôbre a vertical de O; com efeito, seja x a distância do ponto de encontro até a; pelos triângulos semelhantes, temos:

$$\frac{a/d_m}{b/d_m} = \frac{x}{x+l} \quad \frac{a}{d_m} (x+l) = \frac{b}{d_m} x,$$

ou:

$$ax + al = bx \rightarrow (b-a)x = la \rightarrow lx = al,$$

e $a = x$, como queríamos demonstrar. Portanto, basta marcar $-a/d_m$ em A, ou $+b/d_m$ em B, e ligar ao outro apôio, levando até à vertical de O; e ligaremos êste ponto ao outro apôio.

Observe-se que a linha de influência da diagonal apresenta um trecho positivo e outro negativo (Fig.141); o ponto em que ela se anula é chamado o ponto de inversão de cargas.

Carregamento Superior.

Faremos um raciocínio análogo ao anterior, notando que os pontos de transmissão de cargas são, agora, $m-1$ e $m+1$, de modo que o chanfro se fará na linha de influência de O_{m+1} , e os limites de validade de D_m serão $m-1$ e $m+1$, alterando-se, portanto, o ponto de inversão de cargas (V.Fig.142).



CARREGAMENTO INFERIOR

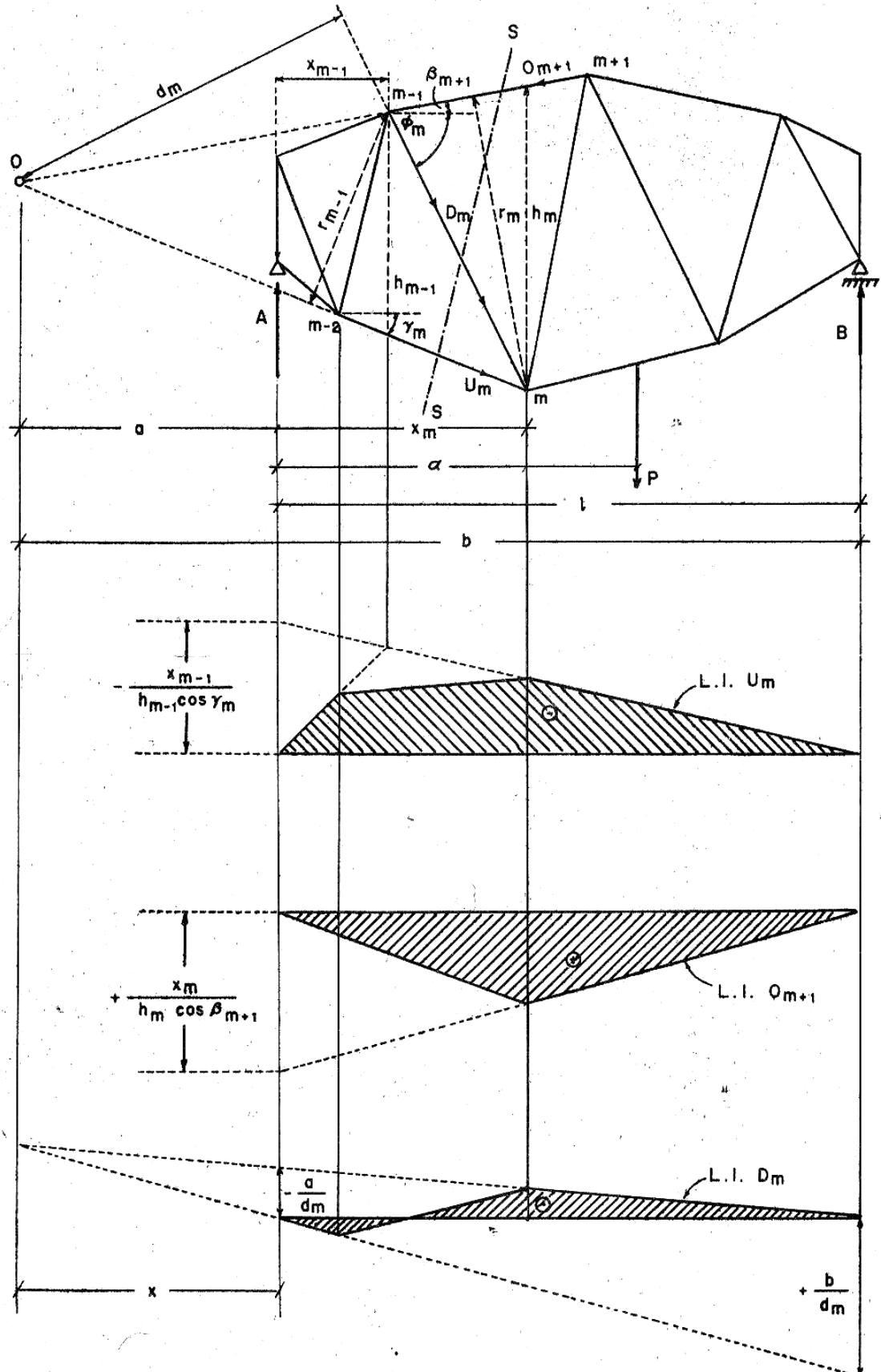


Fig. 141



CARREGAMENTO SUPERIOR

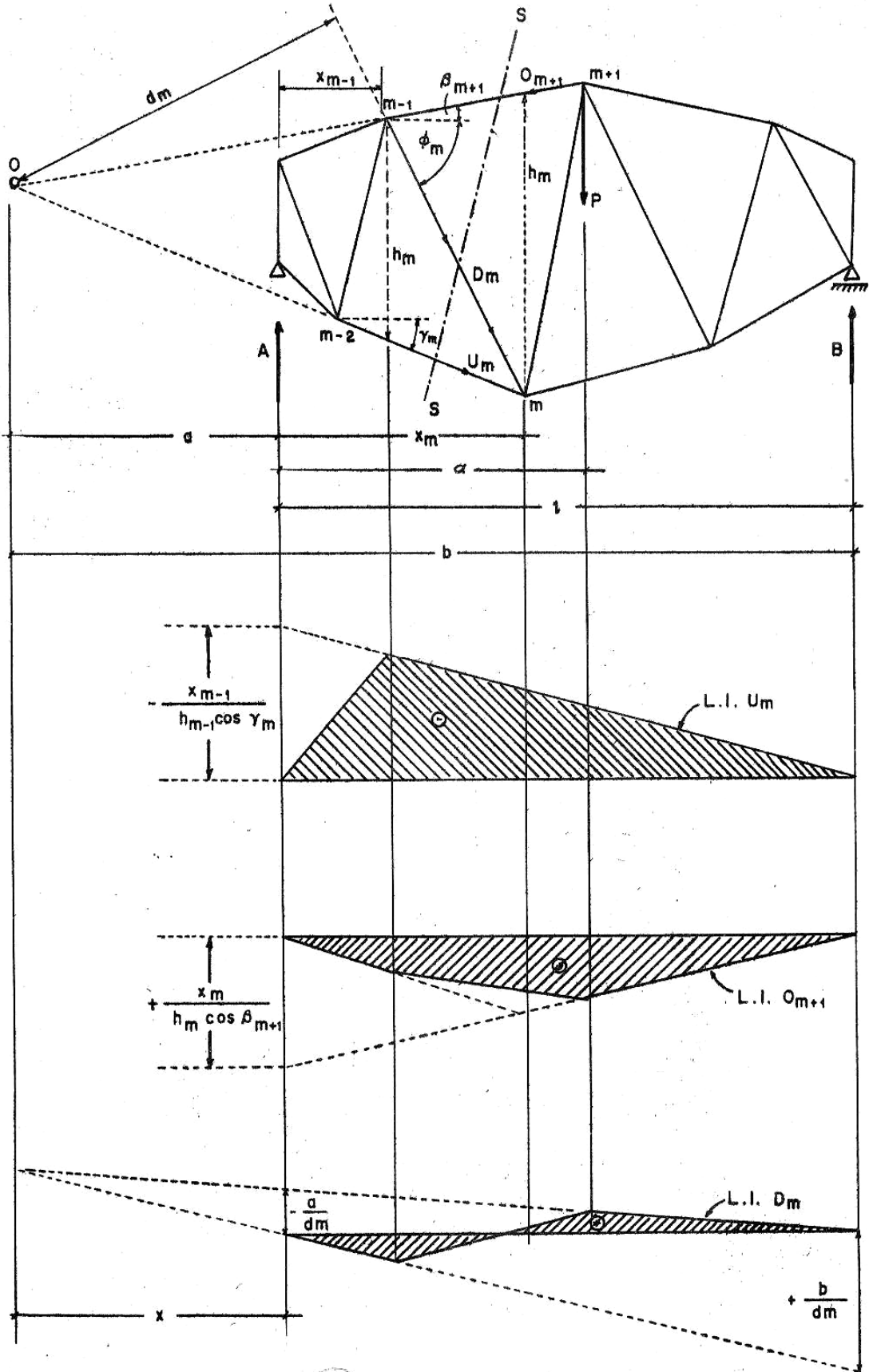


Fig. 142



Isostática parte 04
Prof. Leopoldo de Castro Moreira
ENE -1964

Notas de
aula

Prof. Eduardo C. S.
Thomaz

37 / 47





VIGA COM MONTANTES VERTICAIS

CARREGAMENTO SUPERIOR

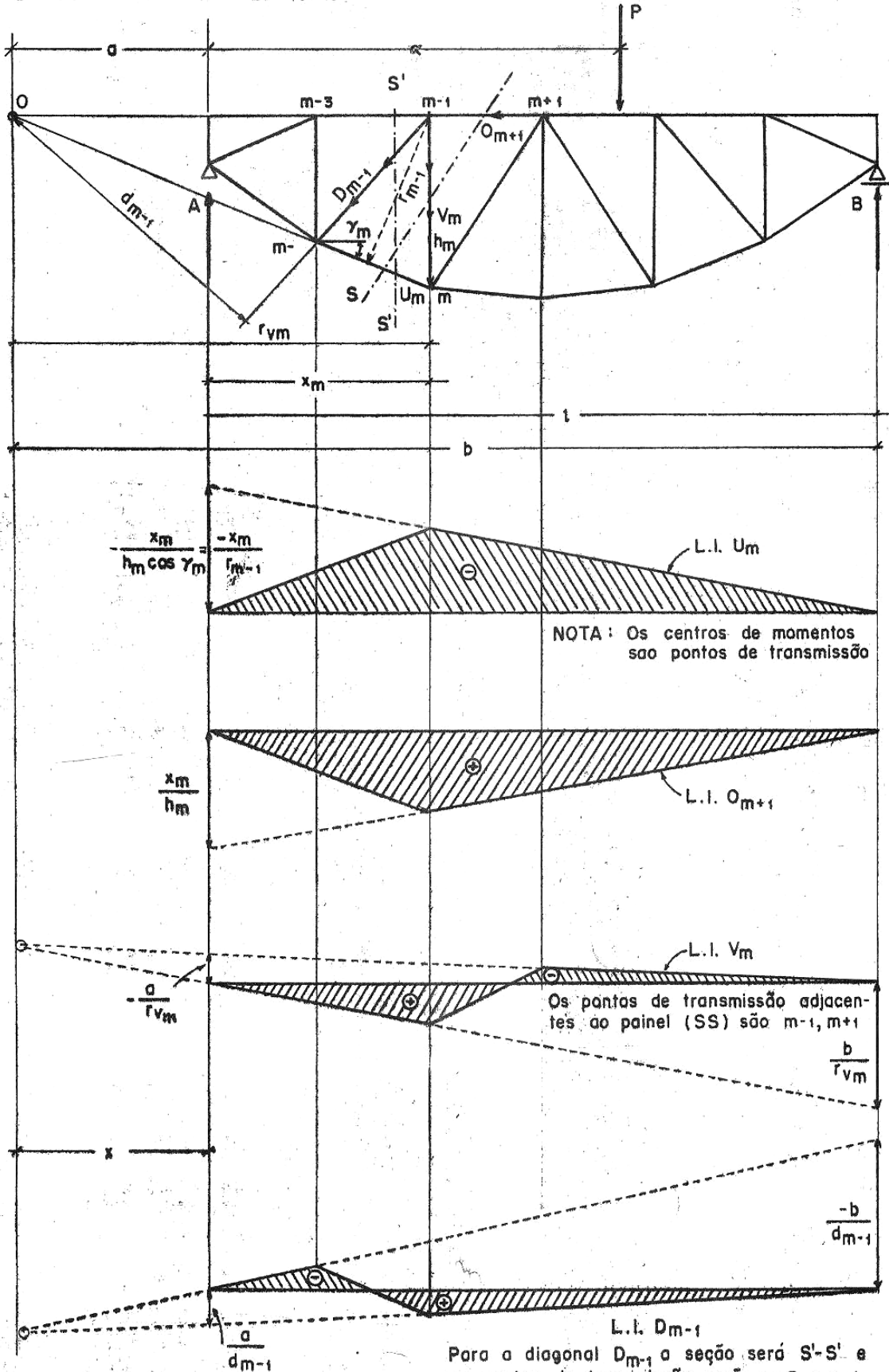


Fig. 143



VIGA COM MONTANTES VERTICAIS

CARREGAMENTO INFERIOR

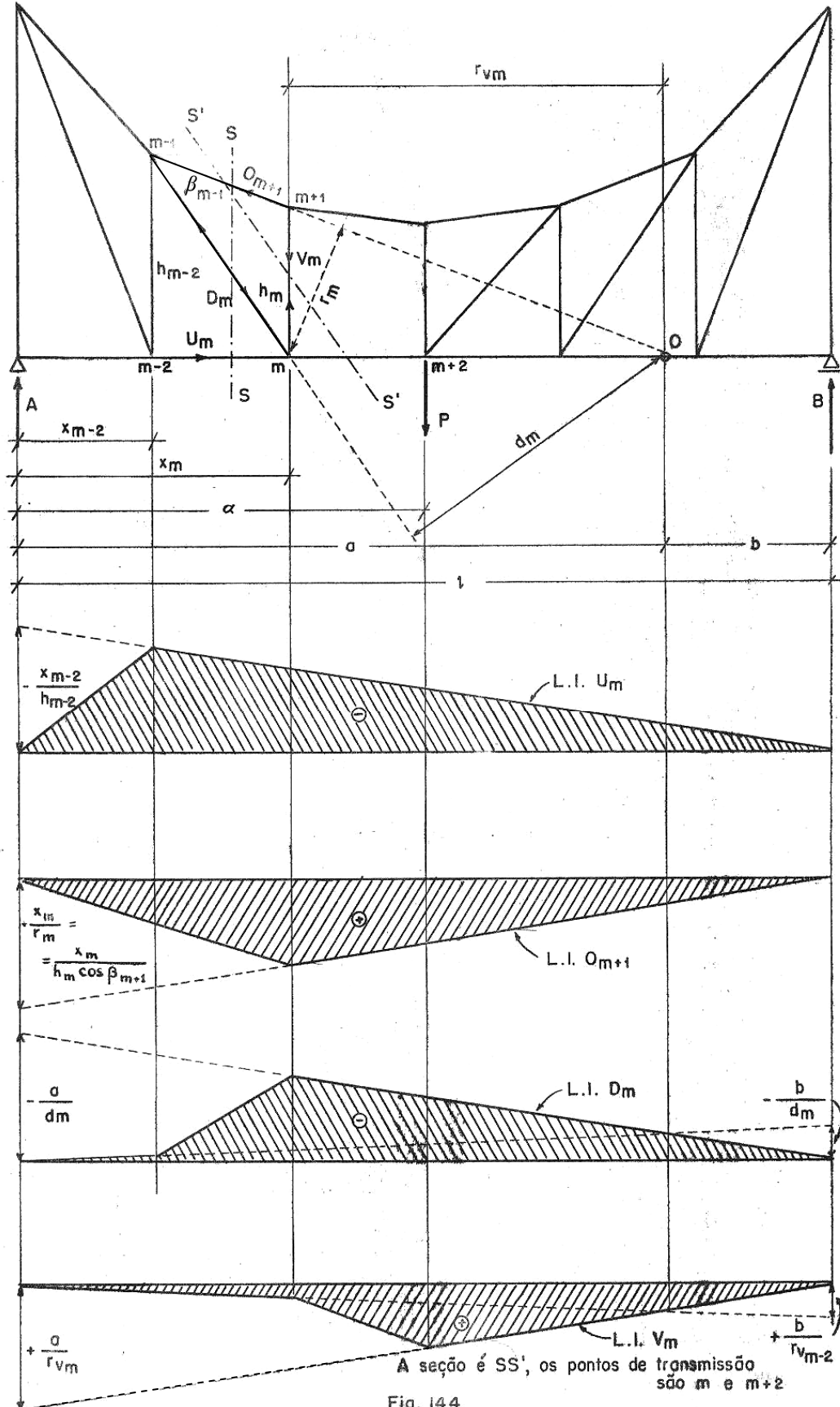


Fig. 144



3.3 APLICAÇÃO ÀS TRELIÇAS DA PRÁTICA

Treliças Simples.

a) Vigas Warren ou Vigas W:

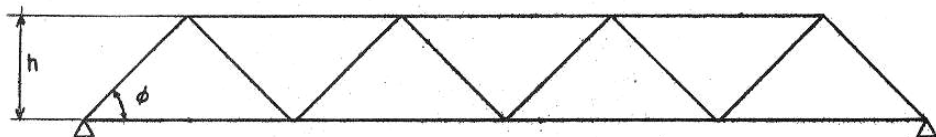


Fig. 145

O ângulo ϕ costuma ser de 45 ou de 30 graus.

Se a viga estiver carregada com cargas permanentes iguais, em todos os nós, as diagonais que se encontram abaixo da viga trabalham à tração; as que se encontram acima da viga, trabalham à compressão. As forças das diagonais são iguais, duas a duas, com diferença de sinal — uma de tração, outra de compressão; por isto, as vigas W são indicadas para materiais que trabalhem igualmente à tração e à compressão (madeira, por exemplo). Para cargas permanentes, podemos lançar mão do Cremona, Ritter ou Culmann. Para as linhas de influência das membruras, teremos, pelo método geral,

$$O_{m+1} \cdot h = M_m \longrightarrow O_{m+1} = \frac{M_m}{h},$$

donde

$$(3.301) \quad y_{O_{m+1}} = + \frac{1}{h} y_{M_m},$$

e

$$U_m \cdot h = M_{m-1} \longrightarrow U_m = - \frac{M_{m-1}}{h},$$

donde

$$(3.302) \quad y_{U_m} = - \frac{1}{h} y_{M_{m-1}},$$

com o chanfro devido à transmissão indireta em O , para estrado superior, e em U , para estrado inferior.

Para as diagonais, lançamos mão da equação de equilíbrio à translação vertical. Assim, para a carga à direita de m , só haverá a reação A à esquerda de SS , e, estudando o equilíbrio da parte da direita, virá

$$D_m \text{ sen } \phi_m = A \longrightarrow D_m = \frac{-A}{\text{sen } \phi_m},$$

donde

$$(3.303) \quad y_{D_m} = - \frac{1}{\text{sen } \phi_m} \cdot y_A.$$



VIGA WARREN

CARREGAMENTO INFERIOR

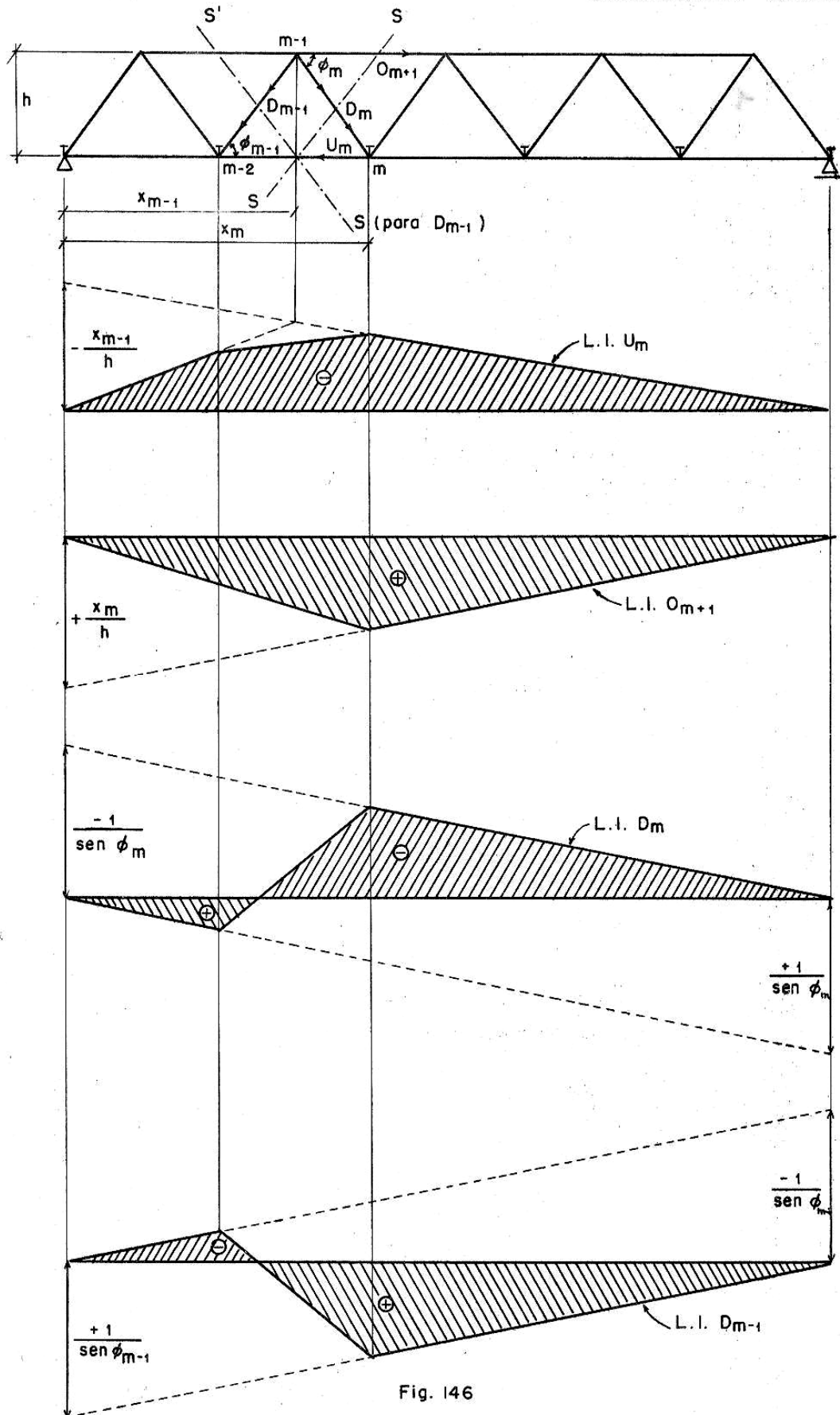


Fig. 146



VIGA WARREN

CARREGAMENTO SUPERIOR

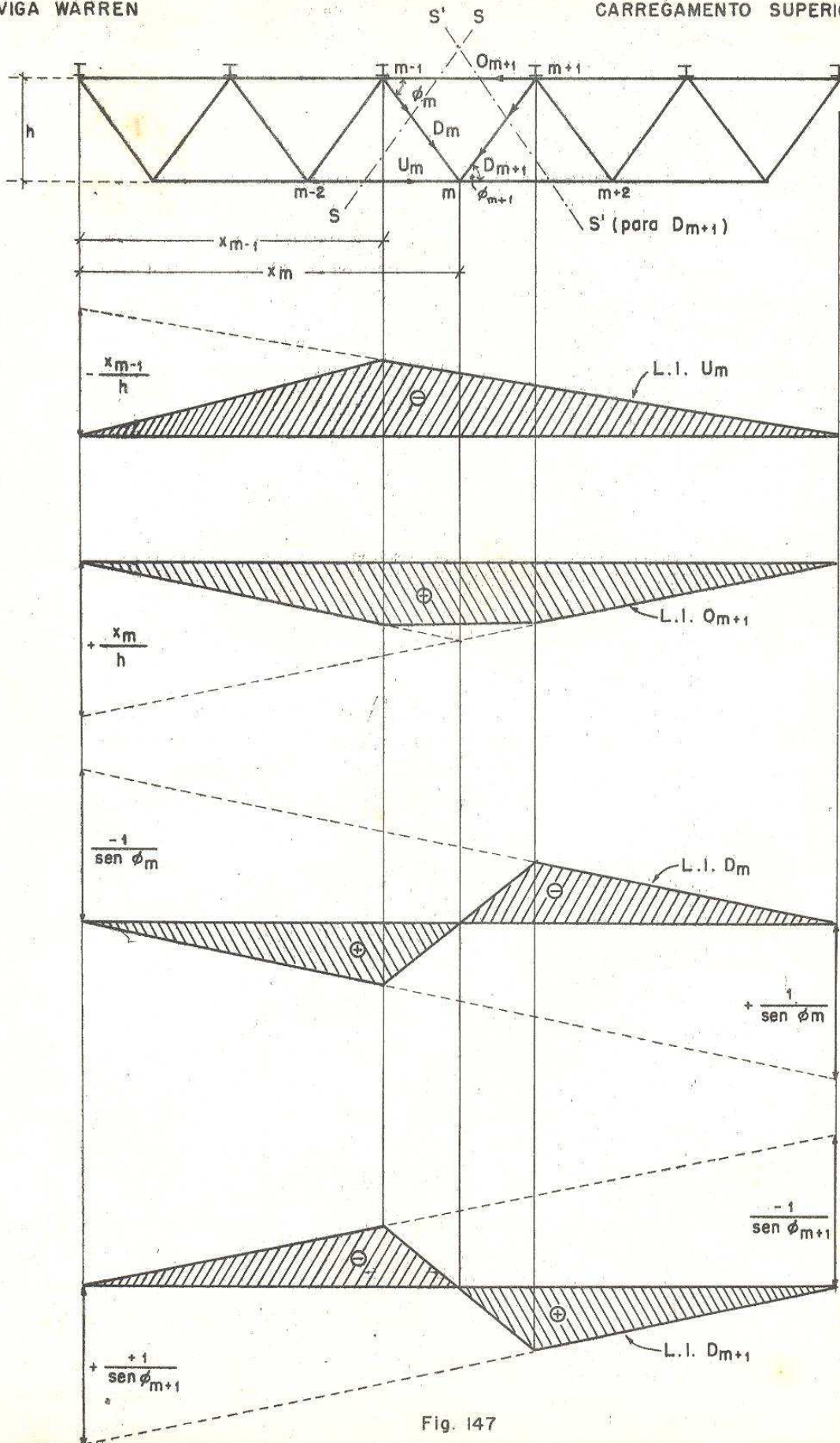


Fig. 147



Para a carga P à esquerda de m , só haverá a reação B à direita de SS , e, estudando o equilíbrio da parte da esquerda, teremos:

$$D_m \text{ sen } \phi_m = B \longrightarrow D_m = \frac{B}{\text{sen } \phi_m},$$

donde

$$(3.304) \quad \nabla D_m = + \frac{1}{\text{sen } \phi_m} \cdot \nabla A.$$

Basta, portanto, marcar em A o valor $-1/\text{sen } \phi_m$, e, em B , o valor $+1/\text{sen } \phi_m$, fazendo o chanfro de carga indireta.

As Figs. 146 e 147 mostram os diagramas para carregamentos inferior e superior, respectivamente.

b) Vigas Pratt ou Vigas N:

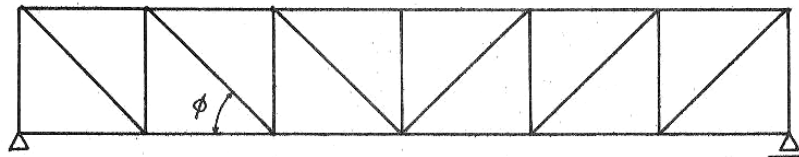


Fig. 148

Para cargas permanentes iguais, as diagonais trabalharão todas à tração, sendo, portanto, estas vigas indicadas para estruturas metálicas, pois as peças menores (os montantes) trabalham à compressão, diminuindo o perigo de flambagem.

As linhas de influência, para as membruras, diagonais e montantes, são calculadas pelo método geral (as diagonais, conforme vimos para a viga Warren, e os montantes análogamente). Há, porém, algumas barras que merecem menção especial.

1 - Carregamento Inferior:

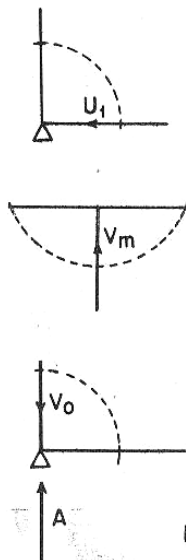


Fig. 149

U_1 - Se isolarmos o nó A , veremos que todas as cargas são verticais; logo, não podem equilibrar a horizontal U_1 ; portanto, esta deve ser nula, assim como U_n ; $U_1 = U_n = 0$.

V_m - Se isolarmos o nó da membrura superior, veremos que as cargas horizontais não podem equilibrar a vertical V_m (não há carga aplicada); logo, temos $V_m = 0$.

V_0 - Para a carga à direita do primeiro painel, isolando-se o nó A , veremos que $V_0 = +A$; para a carga em A , teremos $V_0 = 0$



Cap. III

Vigas Simples em Treliça

VIGA PRATT

CARREGAMENTO INFERIOR

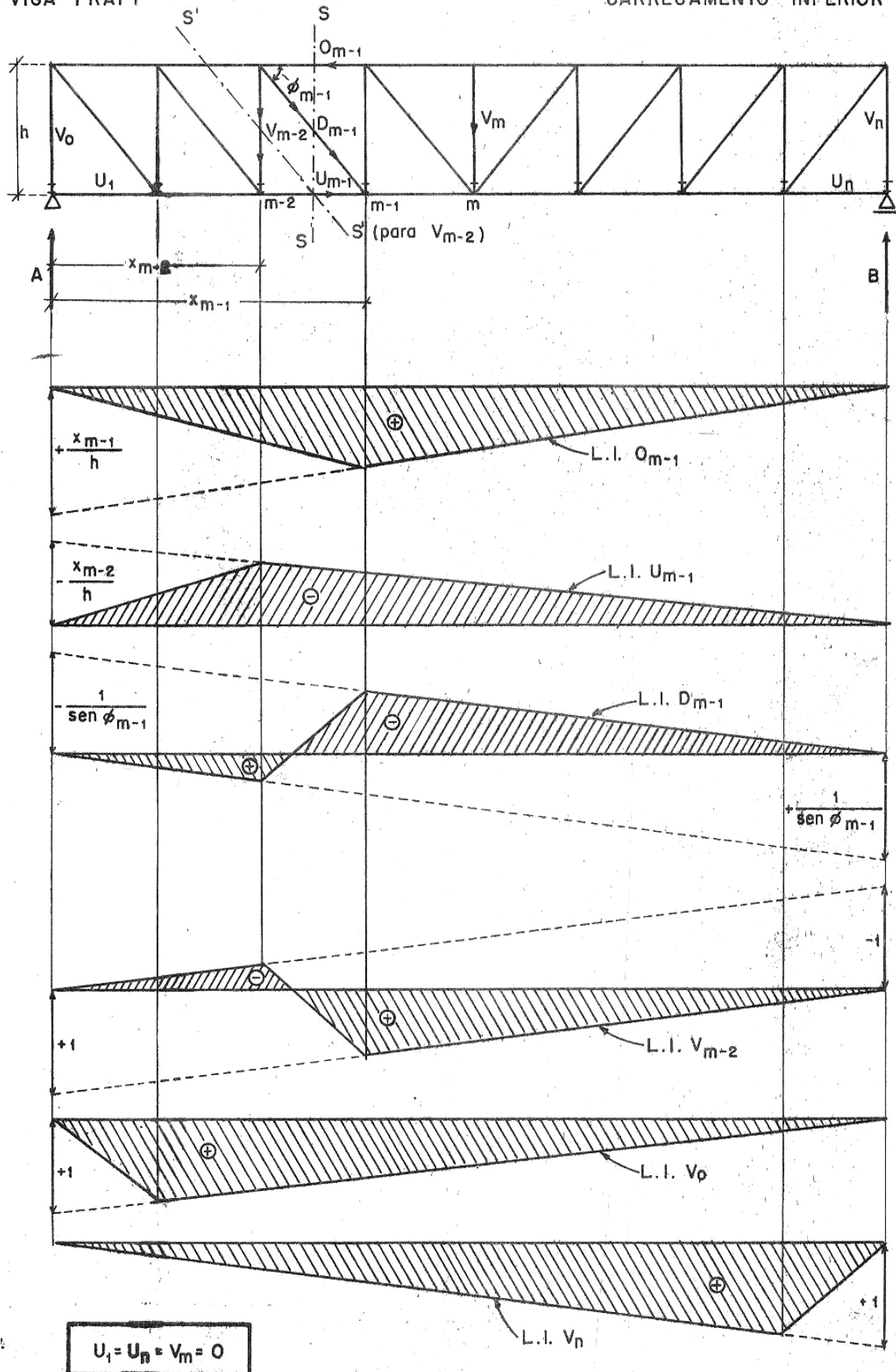


Fig. 150



VIGA PRATT

CARREGAMENTO SUPERIOR

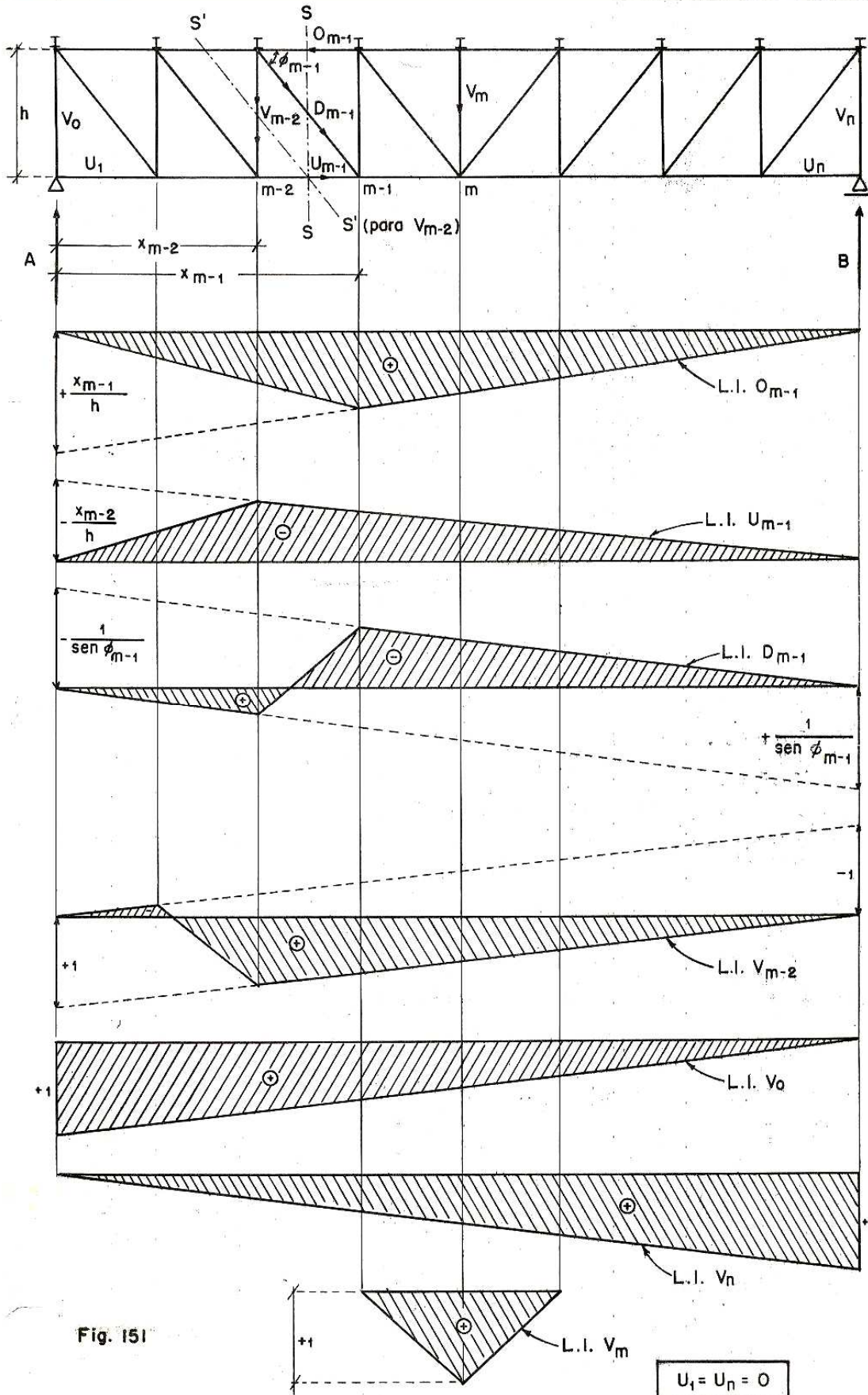


Fig. 151

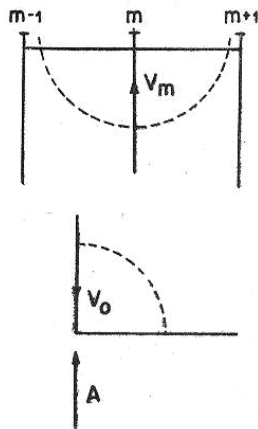


Fig. 152

2 - Carregamento Superior:

U_1 - Aqui teremos, ainda, $U_1 = U_n = 0$, pelas mesmas razões do caso anterior.

V_m - Isolando o nó superior, veremos que, para a carga nos painéis $m-1$, m , $m+1$, a carga provocará uma compressão em V_m igual à reação do apoio m das vigas simples $(m-1), m$ e $m, (m+1)$; assim, basta marcar $+1$ em m e ligar a $m-1$ e $m+1$; quando a carga estiver aquém de $m-1$ ou além de $m+1$, não dará ação em V_m .

V_0 - Isolando-se o nó A , vê-se que $V_0 = +A$, e não há transmissão indireta, visto que os pontos de transmissão estão na membrura superior. Basta, assim, marcar $+1$ no apoio A e ligar a B .

As Figs. 150 e 151 mostram os diagramas para carregamento inferior e superior, respectivamente.

As Figs. 150 e 151 mostram os diagramas para carregamento inferior e superior, respectivamente.

c) Vigas Howe ou em N invertido:

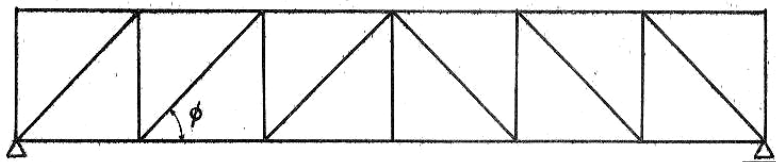


Fig. 153

Para cargas permanentes iguais, as diagonais trabalharão todas à compressão; por isto, estas treliças são indicadas para materiais que trabalhem melhor à compressão que à tração (concreto, por exemplo.)

As linhas de influência calculam-se pelo processo normal. Devemos, entretanto, mencionar algumas barras especiais.

1 - Carregamento Inferior:

Pela análise do primeiro nó da membrura superior, vemos que, não havendo carga aplicada aí, teremos $V_0 = O_0 = 0$, tal como $V_n = O_n = 0$. Isolando o nó m inferior, veremos que, quando a carga estiver antes de $m-1$ e depois de $m+2$, $V_m = 0$; no intervalo, haverá em V_m uma tração igual à reação das vigas simples $m-1, m$ e $m, m-2$; basta, pois, marcar -1 em m e ligar a $m-1$ e $m+1$.

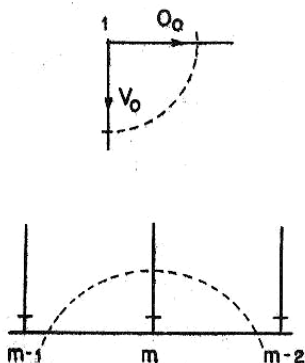


Fig. 154



VIGA HOWE

CARREGAMENTO INFERIOR

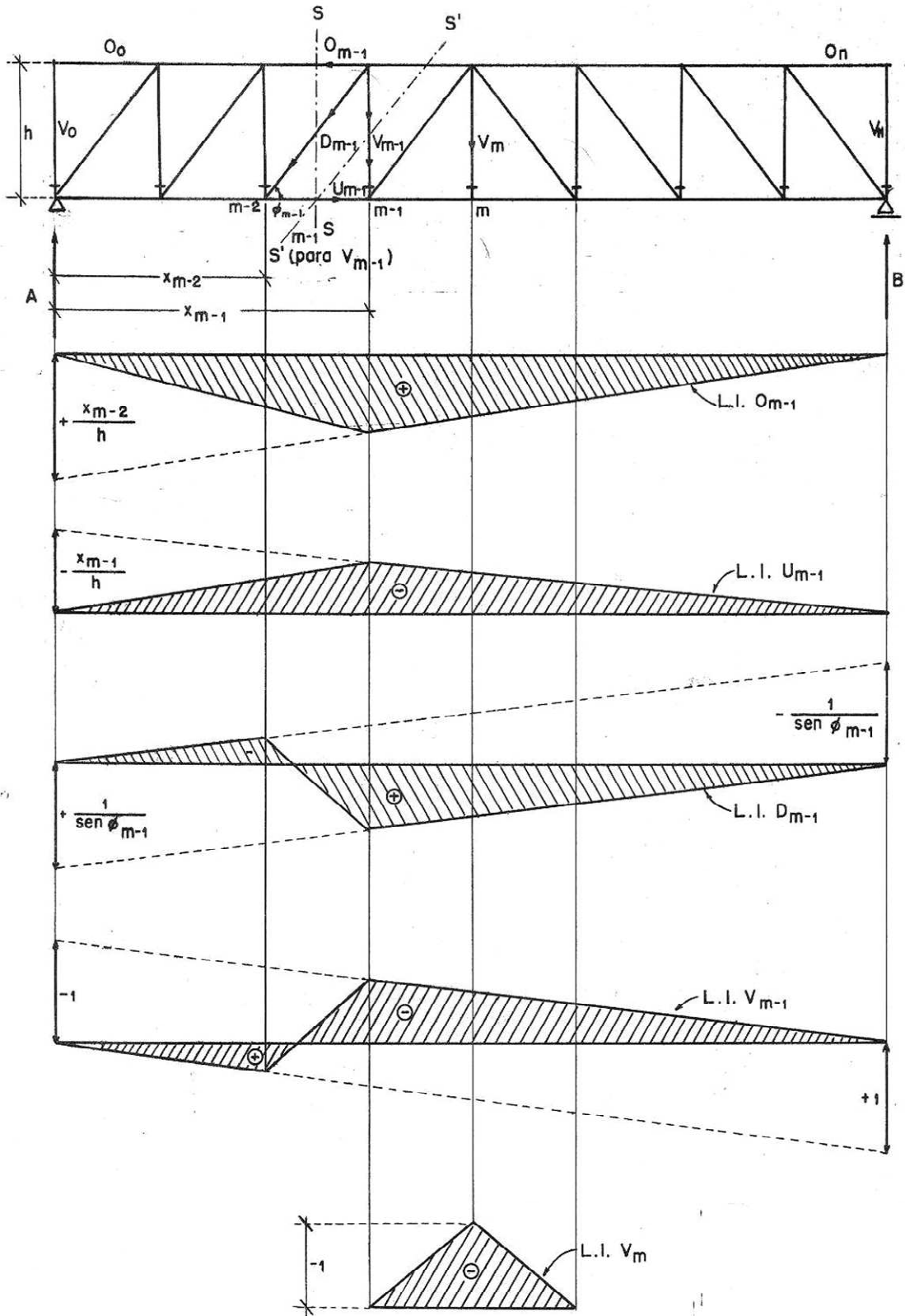


Fig. 155