



ESTÁTICA DAS CONSTRUÇÕES

O Eng. Leopoldo de Castro Moreira, grande calculista de pontes, foi Professor da Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil , atual UFRJ.

Em 1964 imprimiu suas excelentes notas de aula de Isostática.

Os conceitos continuam totalmente válidos e aplicáveis. Nada mudou.

O itens abordados são :

- **Vigas simplesmente apoiadas - Carga permanente e Carga móvel**
- **Vigas Gerber - Carga permanente e Carga móvel**
- **Treliças - Carga permanente e Carga móvel**
- **Pórticos tri-articulados - Carga permanente e Carga móvel**
- **Arcos - Carga permanente e Carga móvel**

O método da cadeia cinemática para determinar as linhas de influência, aqui apresentado, é válido também para estruturas hiperestáticas e pode ser facilmente aplicado também em cascas e placas.

O estudo de treliças, aqui apresentado, é muito amplo e considera muitos tipos de treliça.



DIÁRIO DE NOTÍCIAS / RJ - 28 DEZEMBRO 1952
PROFESSOR LEOPOLDO DE CASTRO MOREIRA

Paraninfos de 1952

DR. LEOPOLDO DE CASTRO MOREIRA, ELEITO PELOS ENGENHEIRANDOS DA POLITECNICA DA UNIVERSIDADE CATOLICA

Os primeiros engenheiros da Escola Politécnica da Universidade Católica escolheram para paraninfo o dr. Leopoldo de Castro Moreira.

Nascido em 4 de março de 1921, na cidade de Petrópolis, diplomou-se em



Dr. Leopoldo de Castro Moreira

1942 pela Escola Nacional de Engenharia, sendo engenheiro civil e eletricitista, tirando, ainda, tôdas as cadeiras das demais especialidades. Aluno brilhante, obteve, durante o curso, diversos prêmios escolares, inclusive de viagens ao estrangeiro.

Começou suas atividades didáticas como assistente da cadeira de "Pontes e Grandes Estruturas", regida pelo prof. Antônio Alves de Noronha,

tendo, mais tarde, em 1948, defendido tese para livre docente da mesma cadeira, apresentando, com brilhantismo,

deira, apresentando, com brilhantismo, o seu "Método Misto".

Foi professor da Escola Técnica do Exército, durante os anos de 1946 e 1947, onde regeu, interinamente, a cadeira de "Estática das Construções" e foi professor da cadeira de "Desenho Estrutural".

Foi um dos fundadores da Escola Politécnica da Universidade Católica, onde rege, atualmente, com grande eficiência, as cadeiras de "Estática das Construções", "Estruturas de Concreto", "Estruturas Diversas" e "Pontes".

Dentre as suas publicações destacam-se: "Cálculo de um quadro de oficinas" (Revista do Clube de Engenharia); "Tabelas de Hiperestática" (E.N.E.), "Exercícios de Hiperestática" (E.N.E.), "Apostilas de Pontes" (E.N.E.); teste de concurso: "Método misto".

Recentemente publicou, pelo Departamento de Apostilas da E.P.U.C., uma apostila em dois volumes de "Estática das Construções" obra que se tornou rapidamente conhecida e elogiada em todos os meios de Engenharia brasileiros.

É o dr. Leopoldo de Castro Moreira um entusiasta da Escola Politécnica, da Universidade Católica, em favor da qual não mede sacrifícios, prejudicando, até, as suas atividades de engenheiro militante.

Estão, pois, de parabens os engenheiros de 1952 da Escola Politécnica, da Universidade Católica, pela feliz e justa escolha que fizeram.



Isostática – Parte 01
Prof. Leopoldo de Castro Moreira
ENE -1964

Notas de
aula

Prof. Eduardo C. S.
Thomaz

3 / 34

ESCOLA NACIONAL DE ENGENHARIA
DA
UNIVERSIDADE DO BRASIL

ESTÁTICA DAS CONSTRUÇÕES

*Notas de Aulas do Prof.
Leopoldo de Castro Moreira*

1.º TOMO

1964

DIRETÓRIO ACADÊMICO

DEPARTAMENTO DE PUBLICAÇÕES

1964



ESTÁTICA DAS CONSTRUÇÕES

CAPÍTULO I

GENERALIDADES

A estática das construções é a parte da mecânica que estuda as estruturas. Uma estrutura compõe-se de um ou mais corpos ligados entre si e ao meio exterior, de modo a formar um conjunto estável e indeslocável – isto é, a única variação possível na forma de uma estrutura é a que fôr compatível com a deformação do material de suas diversas partes. Se supuzermos êste material como rígido, tal variação de forma será impossível.

Quando todas as partes de uma estrutura estão contidas num mesmo plano – onde, aliás, também estão todas as forças aplicadas (o plano da figura) – temos, então, uma estrutura plana, e suas partes componentes, no caso mais geral, são denominadas lâminas. Quando estas lâminas têm uma dimensão muito grande em relação às outras duas, passam-se a chamar barras; o eixo, que pode ter então uma forma qualquer, será o lugar geométrico dos centros de gravidade das secções transversais, e estas serão as secções da barra normais ao eixo. Quando êste é retilíneo, a barra será reta; e, além disto, se as secções transversais fôrem todas iguais, teremos uma barra prismática ou cilíndrica.

Se as partes da estrutura não estiverem todas contidas no mesmo plano, teremos uma estrutura espacial, que pode ser composta de barras ou de superfícies planas ou reversas. As estruturas de superfícies reversas, de grande importância na prática atual (cascas, membranas, etc.), e mesmo algumas superfícies planas (placas, vigas-parede, etc.), não serão objeto de estudo nesta cadeira, e sim de cadeiras subsequentes.

As estruturas espaciais podem ainda apresentar planos diversos bem definidos e, portanto, poderão ser resolvidas como se fôsem compostas de um dado número de estruturas planas, obtidas pela decomposição da estrutura espacial primitiva segundo êsses planos. Isto é particularmente comum no caso de estruturas espaciais compostas de barras. Em nossa cadeira, estudaremos as estruturas de barras planas e algumas dêste último tipo.



Na maioria dos casos da prática, somos, geralmente, obrigados a considerar as estruturas como compostas de barras, mesmo quando estas não estiverem muito de acôrdo com a definição dada acima, isto é, quando as dimensões das secções transversais não fôrem desprezíveis em relação aos comprimentos das barras. Faz-se isto devido à complexidade e, em certos casos, à impossibilidade da resolução de estruturas compostas de elementos de superfície.

Nas estruturas de barras, podemos ter casos em que estas apresentam rigeza apreciável à flexão, de modo a suportarem a ação de momentos, e casos em que não apresentam rigeza, e não admitem momentos, podendo suportar apenas esforços axiais. Este último é o caso das treliças.

Se considerarmos uma dada barra de uma estrutura sujeita à ação de fôrças aplicadas, veremos que atuam sôbre ela esforços externos, que podem ser momentos, fôrças concentradas ou distribuidas, e o seu próprio pêso. Todos êstes esforços são chamados ativos.

Agindo sôbre a estrutura, êstes esforços são por ela propagados ao meio exterior através dos apoios, onde provocam as chamadas reações de apoio (momentos ou fôrças), que são os esforços reativos.

Como a peça está em equilíbrio, os esforços ativos e reativos equilibram-se entre si. Na propagação dos esforços até o meio exterior, surgem, em cada secção transversal, esforços solicitantes iguais aos que se deveriam aplicar naquela secção da peça se se cortasse ali, realmente, a peça, para restabelecer o equilíbrio.

No caso mais geral, êstes esforços solicitantes podem ser reduzidos a uma fôrça \vec{K} e um momento resultante \vec{G} , os quais se podem,

ainda, supor aplicados no centro de gravidade da secção.

Se decompozermos a fôrça \vec{K} aplicada ao centro de gravidade, segundo o plano da secção e sua normal, teremos, respectivamente, a fôrça cortante Q e a fôrça normal N . O momento \vec{G} pode também ser decomposto no plano da secção e no plano a ela normal, obtendo-se, respectivamente, o momento de torção T e o momento fletor M . O conjunto dos elementos N, Q, T, M constitui as chamadas fôrças

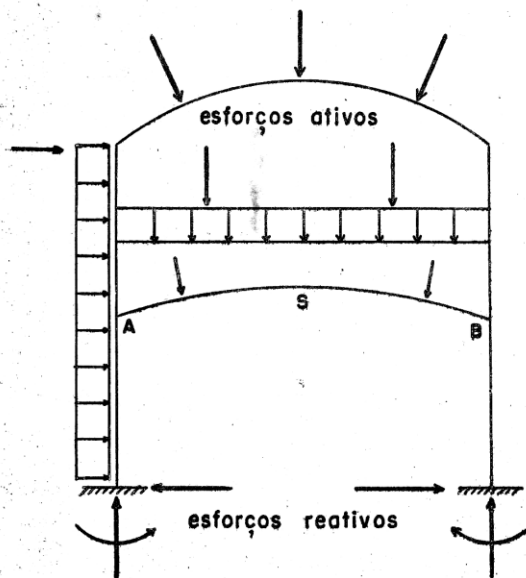


Fig. 1

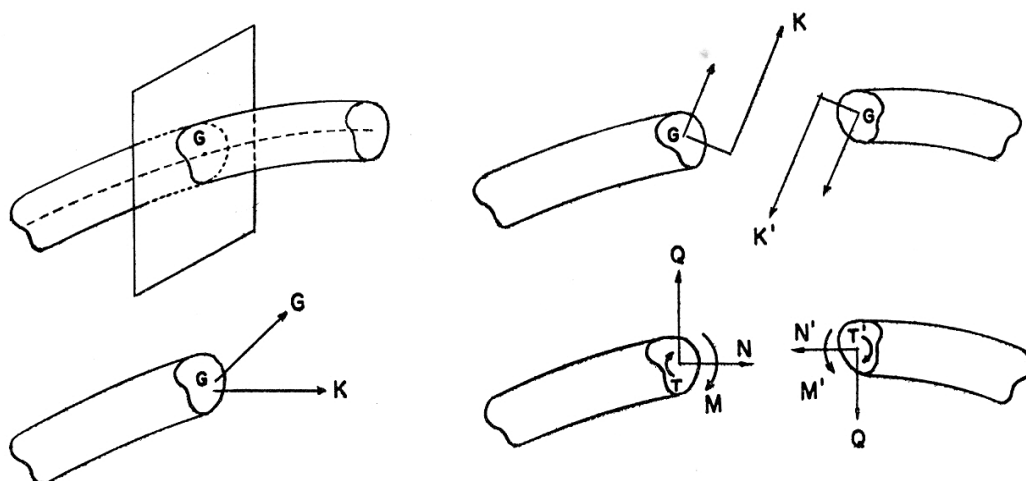


Fig. 2

seccionais. Para que haja equilíbrio, é necessário que existam, na borda oposta da secção, forças seccionais iguais e contrárias.

No caso de estruturas de barras planas com forças atuando no seu próprio plano, o momento de torsão T desaparece, restando apenas três forças seccionais M , N , Q .

Pelo que vimos, podemos dizer que a força normal e a força cortante são as projeções de todas as forças à esquerda da secção sobre as direções da normal e da secção, respectivamente. O momento fletor será o momento destas forças em relação ao centro de gravidade da secção. Podemos ainda definir a força cortante como a projeção das forças à direita com o sinal trocado.

Para resistir a estes esforços solicitantes, cada elemento do material da barra de área ΔF oporá uma força elementar ΔK , que será o esforço resistente e que pode nascer devido à coesão do material. Ao limite da relação $\Delta K/\Delta F$, quando ΔF tende para zero, dá-se o nome de tensão.

Estas tensões podem ser decompostas segundo o plano da secção (tensões de cisalhamento), e segundo sua normal (tensões normais). Estas últimas podem ser de compressão ou de tração.

Devido ao aparecimento destas tensões, as posições relativas dos elementos do material das barras se modificam, e a estrutura se deforma. Cada ponto da barra, devido à deformação, sofre um deslocamento, que pode sempre ser decomposto em três componentes:

- uma translação vertical (v),
- uma translação horizontal (n),
- uma rotação (ϕ).

Deve-se notar, ainda, que, além das forças exteriores, há outras causas de deformações e tensões, tais como variações de temperatura, retração do material, deformação lenta, recalque de apoios, etc.

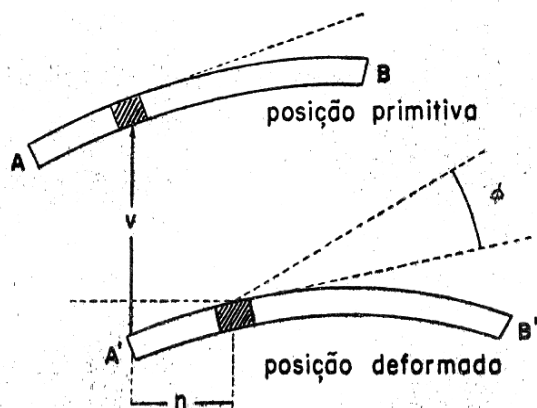


Fig. 3

Os efeitos, porém, serão os mesmos, quer as causas sejam forças aplicadas, quer sejam agentes desta natureza.

Na cadeira de Resistência dos Materiais, estudaremos a distribuição das tensões e as deformações delas resultantes, uma vez conhecidas as forças seccionais que as produzem.

Na cadeira de Estática das Construções, estudaremos como

se calcula este estado de tensões e deformações, o que resulta, em última análise, no cálculo das forças seccionais ao longo de cada ponto da estrutura. Se marcarmos num gráfico a distribuição destas forças seccionais ao longo da estrutura, teremos as linhas de estado ou os diagramas de cada força seccional. Aprenderemos, assim, a calcular em cada ponto as forças seccionais devidas à carga permanente, e as forças seccionais "maxima maximorum" para um dado conjunto de cargas móveis, que a estrutura possa suportar na sua posição mais desfavorável.

Na cadeira de Estabilidade das Construções, veremos como determinar, pelo meio mais econômico, o justo dimensionamento da peça, de modo que estas forças seccionais "maxima maximorum", assim obtidas, provoquem tensões que não possam, em hipótese alguma (levado em conta um coeficiente de segurança), sobrepujar a coesão e provocar o colapso pela ruptura. Veremos ainda que, em certos casos, as deformações também devem ser limitadas, o que, muitas vezes, é condição determinante para o dimensionamento da peça.



CAPÍTULO II

VIGAS SIMPLES DE ALMA CHEIA

2.1 CARGAS PERMANENTES

As vigas simples de alma cheia são estruturas que se ligam ao meio exterior por um apoio do primeiro gênero e um do segundo, podendo o seu eixo ter uma forma qualquer (Fig.4). São estruturas

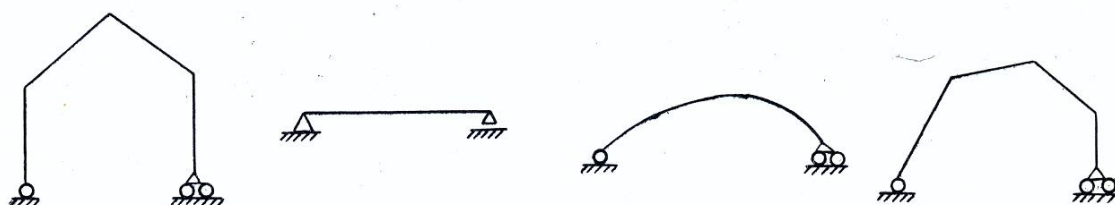


Fig. 4

isostáticas ou estáticamente determinadas, pois podemos resolvê-las com o simples auxílio das equações de equilíbrio da mecânica:

$$\sum M = 0,$$

$$\sum V = 0,$$

$$\sum H = 0.$$

No caso mais geral, a resolução consiste, em primeiro lugar, em determinarmos por meio destas equações as reações de apoio, e, uma vez conhecidas estas, calcularmos as forças seccionais em qualquer secção, de acordo com as suas próprias definições, ou seja:

Momento Fletor M : Tomam-se os momentos de todas as forças à esquerda da secção em relação ao seu centro de gravidade. Nestas forças estão incluídas as reações de apoio, pois sempre supomos os apoios retirados e substituídos por suas reações, o que não altera o equilíbrio do sistema. Por convenção, considera-se positivo o momento fletor quando distende as fibras inferiores das barras deitada (aquelas cuja inclinação com a horizontal é menor que 45 graus), e as fibras da direita das barras de pé (aquelas cuja inclinação com a horizontal é maior do que 45 graus); no caso contrário, diz-se que o momento fletor é negativo. Nos diagramas de momentos fleto-

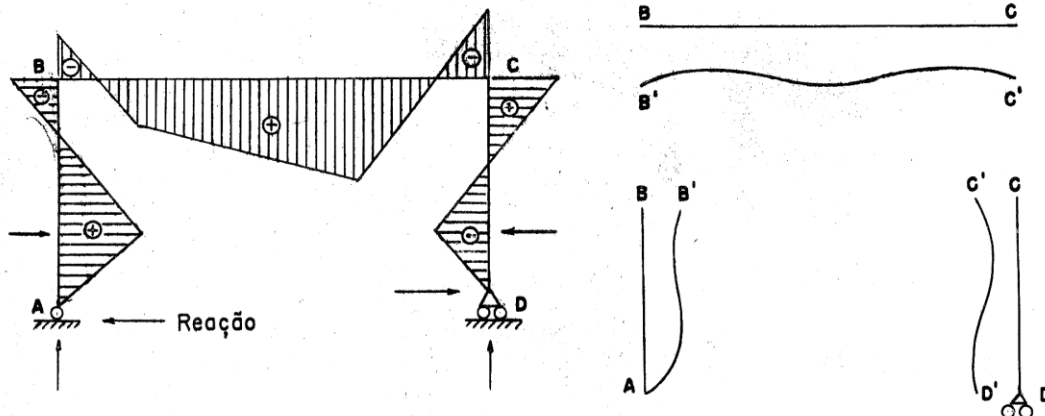


Fig. 5

res, costuma-se marcar o momento positivo ao lado da fibra distendida.

Fôrça Normal N : Toma-se a soma das projeções de todas estas fôrças sobre a direção da normal à secção. Considera-se positiva quando produz compressão na secção, e negativa quando produz tração.

Fôrça Cortante Q : Toma-se a soma das projeções sobre a direção da secção das fôrças à esquerda, ou a das fôrças à direita com o sinal trocado. Considera-se positiva a fôrça cortante quando dirigida para cima, à esquerda da secção nas barras deitadas, e dirigida para a esquerda, abaixo da secção para as barras de pé. Costuma-se marcar Q positivo abaixo nas barras deitadas e à direita nas barras de pé.

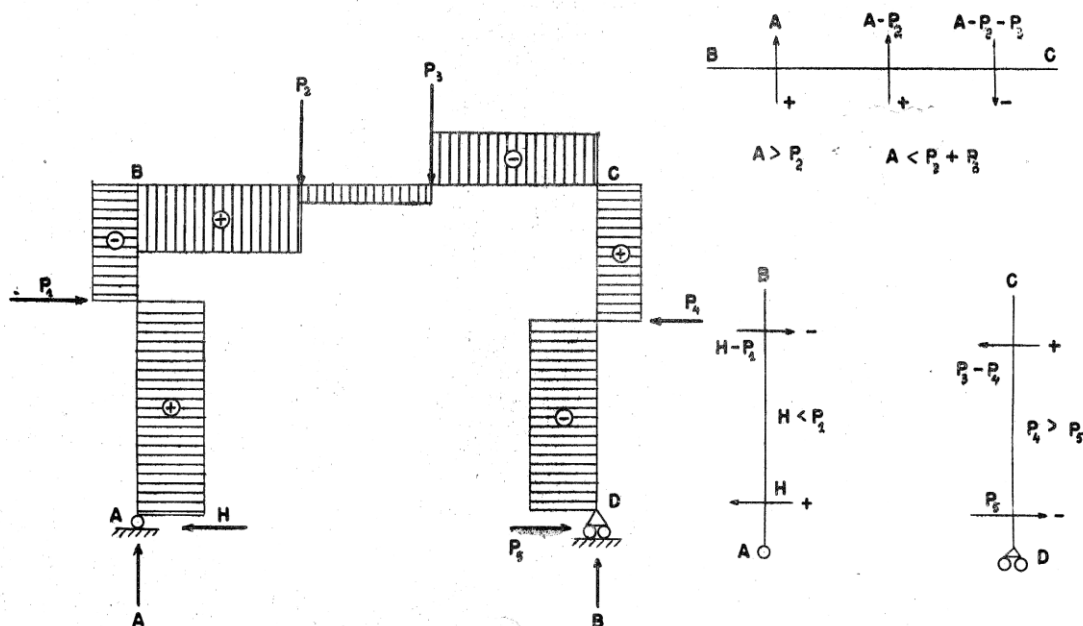


Fig. 6



Vigas Retas Simplesmente Apoiadas.

O caso de vigas simples de alma reta é o mais importante, e será estudado mais extensamente em nosso curso. Em primeiro lugar, verificaremos algumas propriedades muito importantes.

Suponhamos uma viga reta, sujeita a um carregamento vertical variável qualquer (Fig.7). Consideremos a seção S dessa viga, de abcissa x_s . As reações de apoio serão:

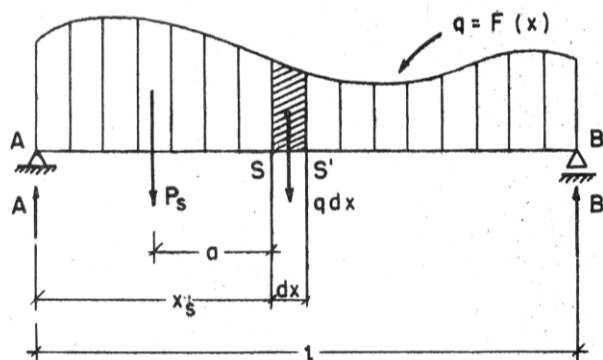


Fig. 7

$$A = \frac{1}{l} \int_0^l q(l-x) \cdot dx,$$

$$B = \frac{1}{l} \int_0^l qx \cdot dx.$$

A carga total que existe entre A e S é

$$P_s = \int_0^{x_s} q \cdot dx.$$

A força cortante em S será: $Q_s = A - P_s$.

Considerando, agora, uma seção S', distante dx à direita de S, a força cortante nesta seção será

$$Q_{s'} = A - P_s - q \cdot dx = Q_s - q \cdot dx;$$

então,

$$Q_{s'} - Q_s = dQ = -q \cdot dx,$$

donde

$$(2.101) \quad -q = \frac{dQ}{dx}.$$

Esta primeira propriedade pode ser expressa da seguinte forma: a derivada da força cortante em relação à abcissa é igual à carga com o sinal trocado.

O momento fletor em S e em S' será, respectivamente,

$$M_s = Ax_s - P_s \cdot a,$$

$$M_{s'} = A(x_s + dx) - P_s(a + dx) - \frac{q \cdot dx^2}{2},$$

ou, desprezando o infinitamente pequeno de ordem superior,

$$M_{s'} = (Ax_s - P_s a) + (A - P_s)dx = M_s + Q_s dx.$$



$$M_{S_1} - M_S = dM_S = Q_S dx,$$

ou seja,

$$(2.102) \quad Q_S = \frac{dM_S}{dx},$$

o que constitui a segunda propriedade, que pode ser enunciada da seguinte maneira: a derivada do momento fletor em relação à abscissa é a fôrça cortante.

Destas propriedades tiramos as seguintes conclusões, muito importantes:

(1) Nos trechos onde não há cargas,

$$q = 0,$$

$$dQ = 0 \rightarrow Q = A, \quad (\text{constante}),$$

$$dM = A \cdot dx \rightarrow M = Ax + B \quad (\text{variação linear}),$$

isto é, a fôrça cortante é constante e o momento fletor varia linearmente (Fig.8).

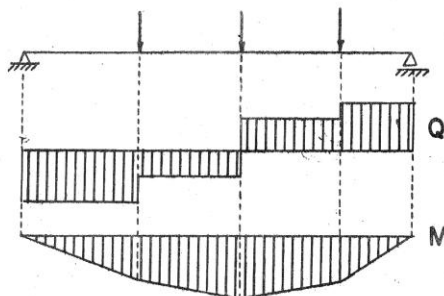


Fig. 8

(2) Quando a carga q é uniformemente distribuída,

$$q = A, \quad (\text{constante}),$$

$$dQ = A \cdot dx \rightarrow Q = Ax + B, \quad (\text{variação linear}),$$

$$dM = Ax \cdot dx + B \cdot dx \rightarrow M = Ax^2 + Bx + C \quad (2^\circ \text{ grau}).$$

Portanto, a fôrça cortante varia linearmente, e o momento fletor, segundo uma lei do segundo grau (Fig.9).

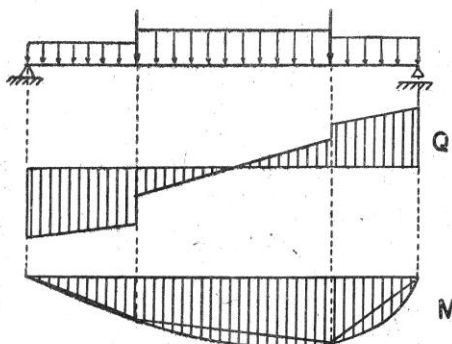


Fig. 9



(3) Nos pontos onde há cargas concentradas, Q varia bruscamente, e o diagrama de momentos apresentará pontos angulosos.

(4) No caso de cargas verticais, como a força cortante é igual à soma das forças da esquerda, ou da direita com o sinal trocado, se a secção se confundir com o apoio, as únicas forças à esquerda ou à direita, conforme o caso, serão as próprias reações de apoio, e, então,

$$(2.103) \quad \begin{cases} A = Q_A, \\ B = -Q_B, \end{cases}$$

isto é, a força cortante na secção imediatamente à direita do apoio esquerdo é igual à reação desse apoio, e a força cortante na secção imediatamente à esquerda do apoio direito é igual à reação desse apoio com o sinal trocado.

Cargas Concentradas.

No estudo das cargas concentradas, temos quatro casos a considerar, como segue.

(1) Uma só carga.

Este é o caso ilustrado pelo diagrama da Fig.10. Pelas equações de equilíbrio, temos

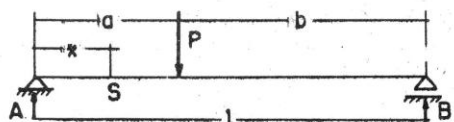


Fig. 10

$$\begin{aligned} \sum H &= 0 \rightarrow H = 0, \\ \sum V &= 0 \rightarrow A + B = P, \\ \sum M_B &= 0 \rightarrow Al - Pb = 0. \end{aligned}$$

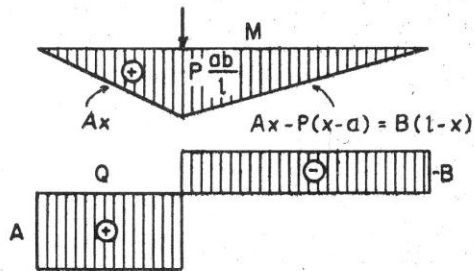


Fig. 11

As reações serão

$$\begin{aligned} A &= P \frac{b}{l}, \\ B &= P \frac{a}{l}. \end{aligned}$$

O momento em um ponto qualquer S de abscissa x será:

$$\begin{cases} 0 < x < a \rightarrow M = Ax = P \frac{b}{l} x, \\ a < x < l \rightarrow M = Ax - P(x - a) = P \frac{b}{l} x - Px + Pa = \\ \qquad \qquad \qquad = B(l - x), \\ x = a \rightarrow M = P \frac{ab}{l}. \end{cases}$$

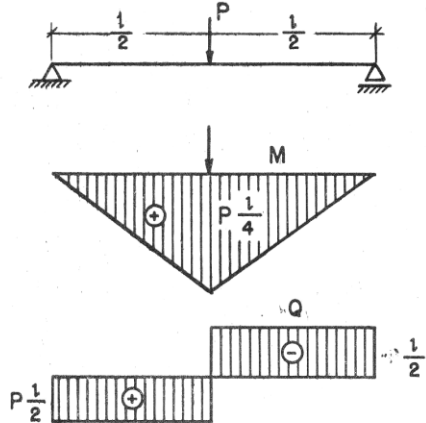
As forças cortantes em S serão:

$$0 < x < a \rightarrow Q = A = P \frac{b}{l},$$



$$a < x < l \rightarrow Q = A - P = \frac{Pb}{l} - P = -\frac{Pa}{l};$$

dai os diagramas da Fig.11. Se a carga concentrada estiver no meio da viga, tem-se:



da viga, tem-se:

$$a = b = \frac{l}{2},$$

$$M = \frac{Pab}{l} = \frac{Pl}{4},$$

$$A = B = \frac{P}{2},$$

e os diagramas serão como se vê na Fig.12.

Fig. 12

(2) Várias cargas.

Pelo princípio da superposição dos efeitos, temos:

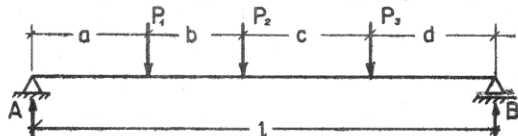


Fig. 13

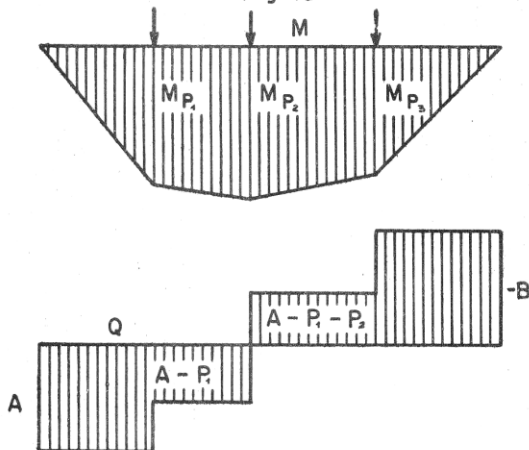


Fig. 14

$$A = \sum P \frac{b}{l},$$

$$B = \sum P \frac{a}{l}.$$

Como, entre as cargas, o diagrama dos momentos é composto de retas, bem como o de forças cortantes, basta acharmos os valores sob as cargas:

$$M_{P1} = Aa,$$

$$M_{P2} = A(a + b) - P_1b,$$

$$M_{P3} = A(a + b + c) - P_1(b + c) - P_2c = Bd,$$

$$Q|_0^a = A,$$

$$Q|_a^b = A - P_1,$$

$$Q|_b^c = A - P_1 - P_2,$$

$$Q|_c^d = A - P_1 - P_2 - P_3 = -B.$$

Dai os diagramas indicados na Fig.14.

(3) Carga uniformemente distribuída.

Por simetria, teremos:

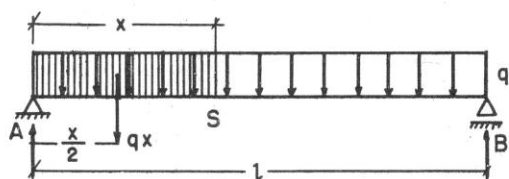
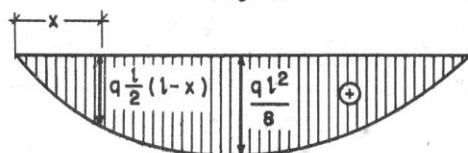


Fig. 15



Parábola do 2º grau

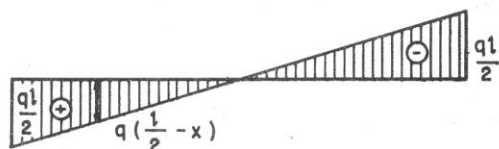


Fig. 16

$$x = \frac{l}{2}, \quad M = q \frac{l^2}{8}, \quad Q = 0.$$

Dai os diagramas da Fig.16.

(4) Várias cargas concentradas e distribuidas.

Estudaremos, agora, uma propriedade que facilita enormemente o traçado dos diagramas neste caso. Consideremos uma viga simples

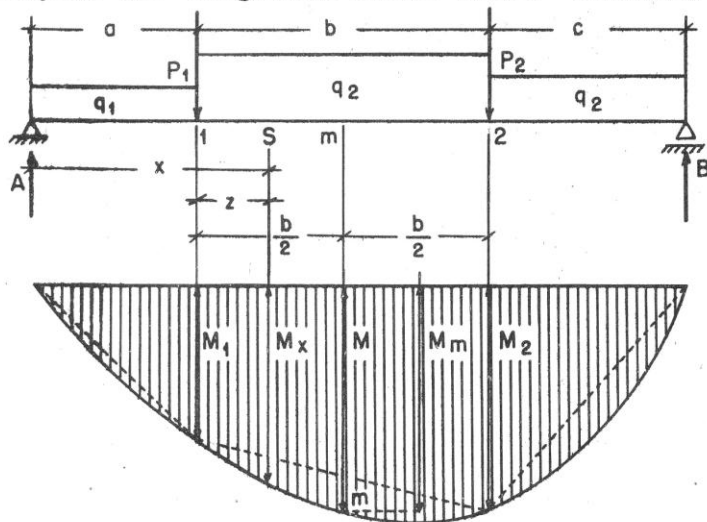


Fig. 17

com várias cargas concentradas e uniformemente distribuidas, como se vê na Fig.17. Temos as reações A e B; as forças seccionais no ponto 1 de aplicação da carga concentrada P1 serão:

$$M_1 = Aa - q_1 \frac{a^2}{2},$$

$$Q_1 = A - q_1 a.$$

O momento no ponto S, de abcissa x, será:

$$M_S = Ax - q_1 a \left(x - \frac{a}{2}\right) - P_1(x - a) - q_2 \frac{(x - a)^2}{2},$$

ou, com a abcissa auxiliar $z = x - a$, virá:

$$M_S = A(a + z) - q_1 a \left(z + \frac{a}{2}\right) - P_1 z - q_2 \frac{z^2}{2},$$



$$\text{ou } M_s = \left[Aa - q_1 \frac{a^2}{2} \right] + \left[A - q_1 a \right] z - \left[P_1 z + q_2 \frac{z^2}{2} \right],$$

ou ainda,

$$(2.104) \quad M_s = M_1 + Q_1 z - S(x) \Big|_1^x,$$

o que pode ser expresso nas seguintes palavras: o momento em um ponto qualquer é igual ao momento em um ponto à esquerda do considerado, mais o produto da força cortante nesse mesmo ponto à esquerda pela distância entre os dois pontos e menos o momento estático em relação ao ponto considerado de todas as cargas compreendidas entre os dois pontos.

Se considerarmos, agora, o meio \underline{m} do trecho \underline{b} , teremos

$$M_m = \bar{M} + m,$$

ou

$$M_m = \frac{M_1 + M_2}{2} + m,$$

donde

$$m = M - \frac{M_1 + M_2}{2},$$

ou, aplicando a propriedade vista acima,

$$\text{em } \underline{m}: \quad M_m = M_1 + Q_1 \frac{b}{2} - P_1 \frac{b}{2} - q_2 \frac{b^2}{8},$$

$$\text{em } \underline{2}: \quad M_2 = M_1 + Q_1 b - P_1 b - q_2 \frac{b^2}{2};$$

daí,

$$\frac{M_1 + M_2}{2} = M_1 + Q_1 \frac{b}{2} - P_1 \frac{b}{2} - q_2 \frac{b^2}{4},$$

e

$$m = M_m - \frac{M_1 + M_2}{2},$$

donde

$$m = M_1 + Q_1 \frac{b}{2} - P_1 \frac{b}{2} - q_2 \frac{b^2}{8} - M_1 - Q_1 \frac{b}{2} + P_1 \frac{b}{2} + q_2 \frac{b^2}{4},$$

ou:

$$(2.105) \quad m = q_2 \frac{b^2}{8},$$

que é a flexa de uma parábola obtida como diagrama de momentos de uma viga simples de mesmo vão \underline{b} e com a mesma carga q_2 .

Concluimos, então, que, no caso em que há várias cargas concentradas e distribuídas uniformemente, basta calcular os momentos nos pontos singulares, isto é, nos pontos onde há cargas concentradas, ou onde há mudança de carga uniforme; ligando-se estes pontos, obtém-se a linha de base (poligonal). A partir desta linha de base, marcam-se parábolas nos intervalos, obtidas pela consideração de



outras tantas vigas simples de mesmos vãos e mesmas cargas.

Uma vez obtido o diagrama de momentos, há um processo gráfico muito prático para obter as forças cortantes. Suponhamos uma viga

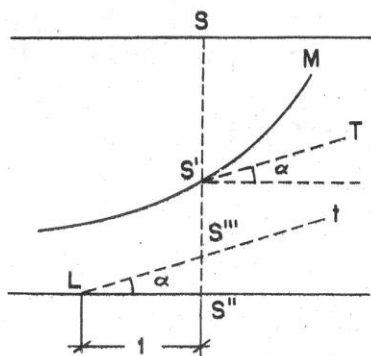


Fig. 18

e carregamento cujo diagrama de momentos seja o da Fig.18 ao lado. Marquemos à esquerda de S (ponto considerado), um segmento LS'', igual à unidade na escala em que a viga é desenhada. Pelo ponto L assim obtido, tracemos a reta Lt, paralela à tangente S'T à curva dos momentos no ponto considerado; determinamos, assim, sobre a vertical de S, o segmento S''S'''.

Chamando de α o ângulo entre a tangente ST e o eixo da viga, teremos que

$$S''S''' = IS'' \cdot \text{tg} \alpha = 1 \cdot \text{tg} \alpha = \text{tg} \alpha;$$

mas,

$$\text{tg} \alpha = \frac{dM_S}{dx} = Q_S;$$

logo,

$$(2.106)$$

$$S''S''' = Q_S,$$

e o segmento S''S''' dará, na escala das forças, a medida gráfica da força cortante no ponto S considerado.

Como sabemos que, onde só houver carga uniforme, a força cortante é representada por uma reta inclinada, basta que marquemos por este processo os valores das forças cortantes nos pontos singulares e liguemos os pontos assim obtidos por meio de retas. Devemos lem-

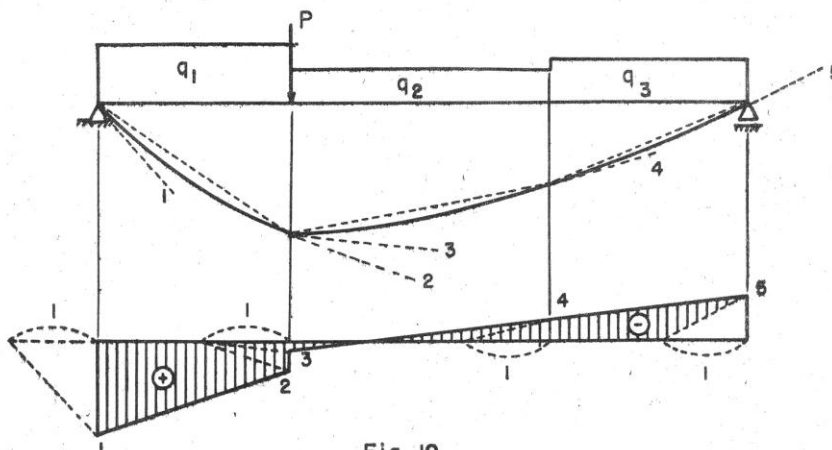


Fig. 19



brar que, sob as cargas concentradas, a força cortante assume dois valores correspondentes às suas derivadas (à direita e à esquerda) dos momentos, ou seja, às duas tangentes.

Processo Gráfico para o Traçado do Diagrama dos Momentos.

Pela grafostática, podemos obter muito facilmente o diagrama de momentos e de forças cortantes de uma viga simplesmente apoiada. Para tal, traçamos um polígono de forças numa certa escala com um polo qualquer O e uma distância polar H . Ligando os pontos a e b , em que o funicular corta as verticais dos apoios A e B , obtemos a linha de fechamento. Num ponto qualquer S , sendo η a distância vertical entre esta linha ab e o funicular, o momento será dado por

$$(2.107) \quad M_S = \eta \cdot H.$$

(H e η devem ser medidos, um na escala de forças e o outro na escala de comprimentos). Se traçarmos pelo polo O uma paralela a ab , obteremos, no polígono de forças, o ponto Δ . As reações de apoio serão dadas por

$$A = \overline{C\Delta} \quad \text{e} \quad B = \overline{D\Delta}.$$

Traçando por Δ uma paralela ao eixo da viga, e também, pelos extremos dos vetores, paralelas até às forças respectivas, obtere-

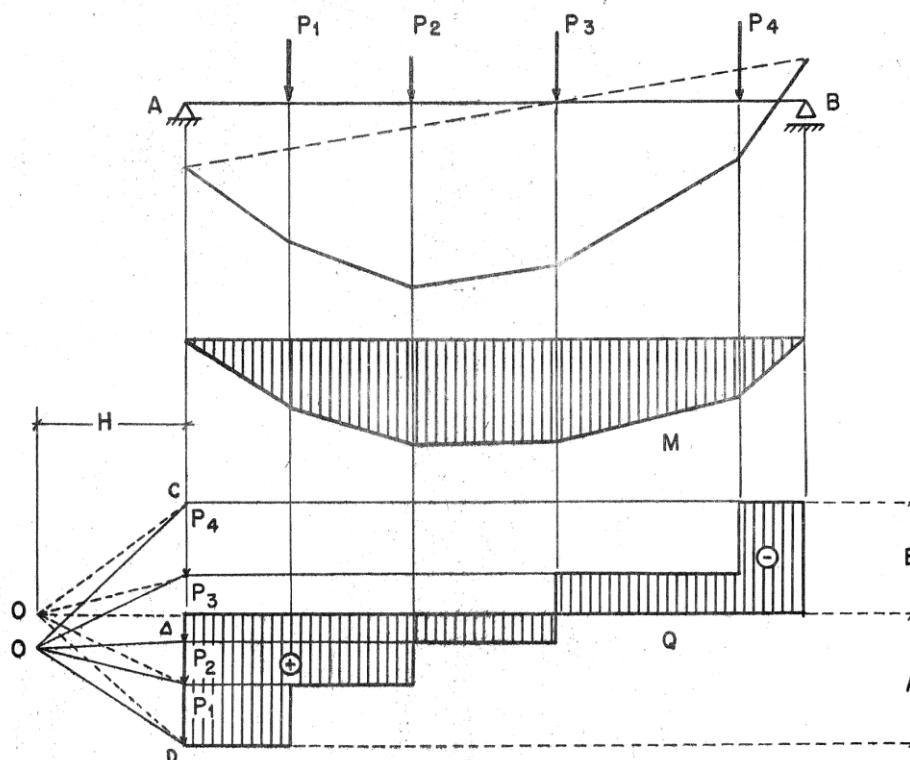


Fig. 20



mos o diagrama de fôrças cortantes, devendo ser medidas a partir da reta traçada por Δ como origem.

No caso de haver cargas distribuidas, estas serão divididas em elementos os menores possíveis, considerando-se cada um dêles como uma carga concentrada.

Carregamento Indireto.

Casos há em que as cargas não se transmitem diretamente à viga simples, e sim por intermédio de vigas de distribuição. É o caso das pontes, onde as cargas

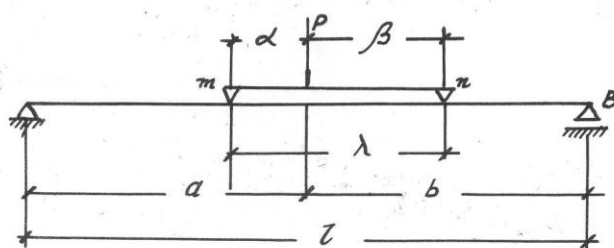


fig. 21

vão diretamente ao estrado; êste descarrega nas longarinas que, por sua vez, se apoiam nas vigas principais. Teremos, então, por exemplo, um diagrama como o da Fig. 21 ao lado.

A carga P se transmitem à viga AB por meio de suas componentes em m e n , que são, respectivamente.

$$P_m = P \frac{\beta}{\lambda}, \quad P_n = P \frac{\alpha}{\lambda}.$$

As reações de apóio A e B serão as mesmas, quer a carga P se transmita direta ou indiretamente à viga AB :

$$A = P \frac{b}{l} \quad B = P \frac{a}{l}.$$

Vejamos, agora o que acontece com os diagramas. Para o diagrama dos momentos, notamos, em primeiro lugar, que, entre os pontos A e m não há carga alguma, de modo que os momentos de A até m serão os mesmos nos dois casos; análogamente entre n e B . O diagrama de momentos nos trechos Am e nB se confundem, portanto nos casos de carga direta ou indireta.

Entre os pontos m e n de aplicação das duas cargas concentradas P_m e P_n , não há, tão pouco, carga alguma aplicada à viga AB , Assim, o diagrama de momento neste trecho é uma reta que deverá passar nos pontos de intersecção dos dois ramos do diagrama de carga direta, com as verticais de m e n (portanto aí os momentos têm o mesmo valor nos dois casos). Daí a construção gráfica. Traça-se o diagrama básico de carga direta, e "chanfra-se" nos pontos de transmissão de carga (Fig. 22).

Para as fôrças cortantes, devemos notar que, no trecho Am , não havendo carga, a fôrça cortante é igual ao caso de carregamento direto (e igual a A). Análogamente, no trecho nB ($Q = -B$); portanto, nesses trechos, os dois diagramas se confundem.

Em m de-

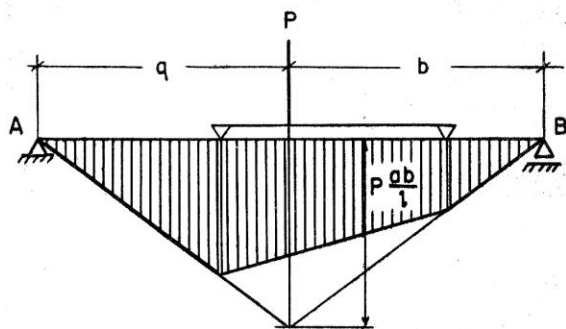


Fig. 22

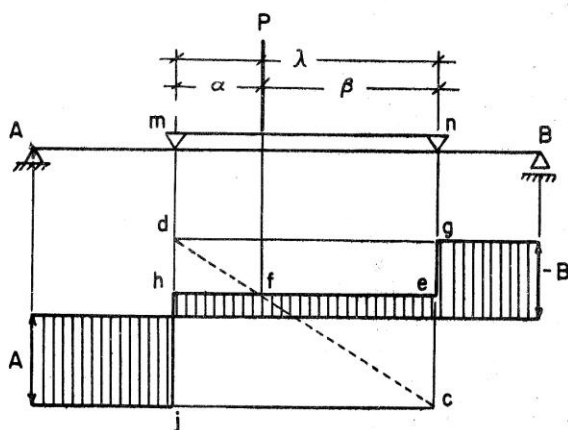


Fig. 23

vemos descontar de A a parcela $Pm = P\beta/\lambda$, obtendo, portanto, $Q = A - Pm$, o que é válido até n. Há um processo gráfico que consiste em prolongarmos o trecho do diagrama da força cortante de Am até à vertical de n (em c) e a do trecho nB até à vertical de m (em d), ligando-se estes pontos. Assim, obtida cd, esta reta corta a vertical de P num ponto f; o diagrama das forças cortantes no trecho mn passa por este ponto f e é uma reta horizontal (porquanto não há carga neste trecho).

Com efeito, os triângulos cgd e cef são semelhantes, e podemos escrever

$$\frac{ce}{cg} = \frac{ef}{gd}, \quad \text{donde} \quad ce = cg \frac{ef}{dg},$$

ou seja,
 (2.108)

$$ce = P \frac{\beta}{\lambda} = hj.$$

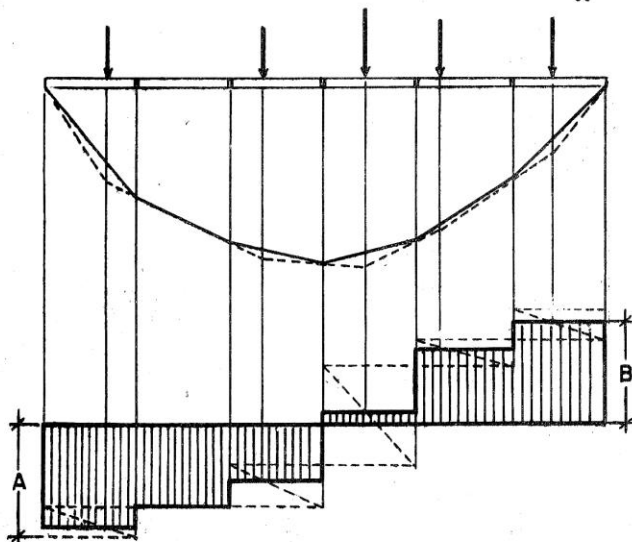


Fig. 24

Se houvesse várias cargas concentradas com várias vigas de distribuição, proceder-se-ia do mesmo modo, chanfrando-se o diagrama básico de carga direta nas verticais dos pontos de transmissão de cargas, para os momentos, e aplicando-se o processo visto acima para as forças cortantes (Fig.24).

Devemos notar que, quando há mais de uma car-



Cap. II Vigas Simples e Alma Cheia Pag.17

ga entre dois pontos de transmissão, devemos, para achar os cortantes determinar antes a resultante dessas cargas, o que pode ser feito por um processo análogo (Fig.24 e 25).

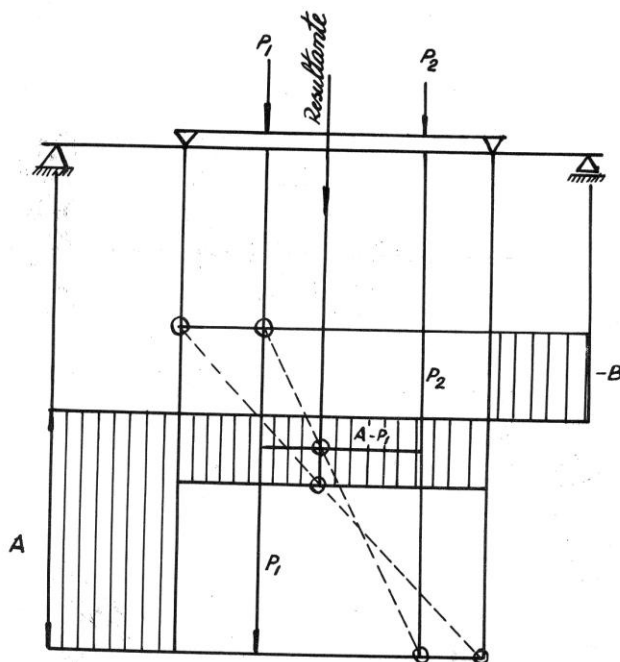


fig. 25

Par cargas distribuídas, procede-se análogamente: para as forças cortantes, as horizontais passam pelo meio dos painéis.

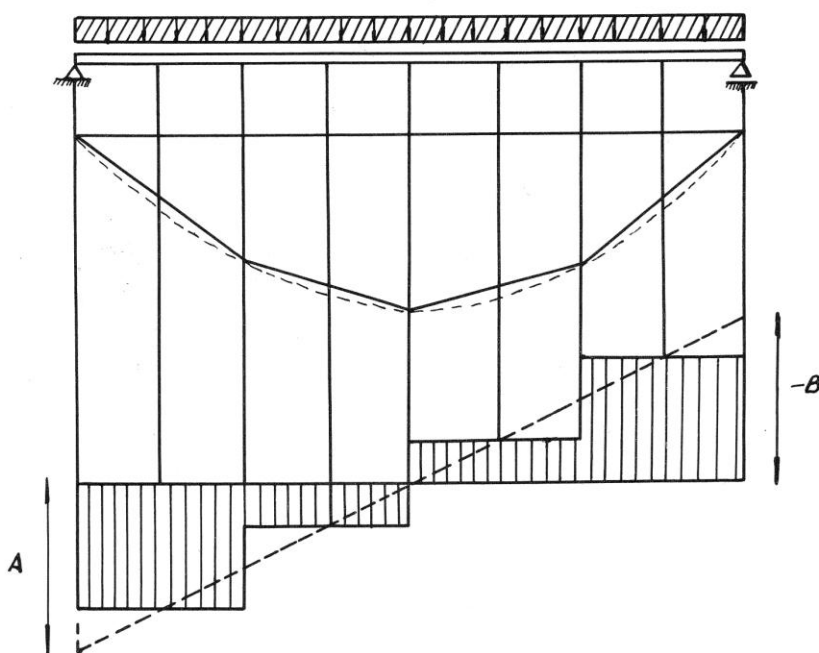


fig. 26



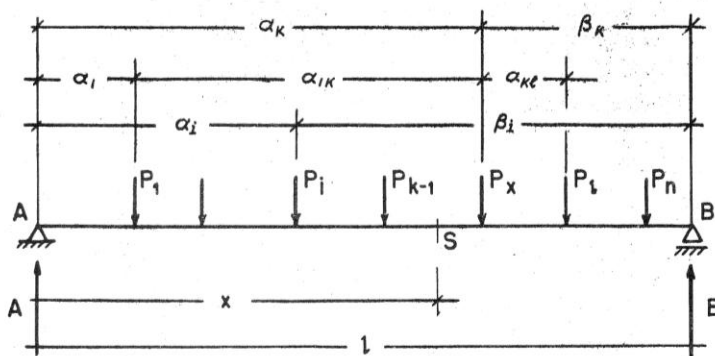
2.2 CARGAS MÓVEIS

Processos para Determinar as Fôrças Solicitantes Máximas.

I - Momento Fletor Máximo.

(a) Traçado de Weyrauch.

Suponhamos um conjunto de cargas $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$, pertencentes a um certo trem de cargas, isto é, que se podem deslocar sobre



a viga em conjunto, guardando sempre constantes as distâncias entre si. Sendo α_k a distância (constante) entre as cargas P_k e P_ℓ , e α_k a distância (variável) da carga P_k ao apoio da esquerda, teremos:

Fig. 27

abscissa de $P_1 \rightarrow \alpha_1$,

abscissa de $P_i \rightarrow \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_{1i} = \alpha_1 + C$ ($C = \text{constante}$),

abscissa de P_i em relação a $B \rightarrow \beta_i = l - \alpha_i = -\alpha_1 + C'$

($C' = \text{constante}$).

A única variável é, portanto, a abscissa α_1 da primeira carga P_1 , pois todas as demais a ela estão ligadas. Consideremos certa seção S , de abscissa x . O problema consiste em sabermos qual a posição do trem de cargas que vai produzir nesta seção S o maior momento fletor.

Temos as reações

$$A = \frac{1}{l} \sum_1^n P_i \beta_i,$$

$$B = \frac{1}{l} \sum_1^n P_i \alpha_i.$$

Supondo que a última carga antes de S é P_{k-1} , o momento em S virá a ser

$$M_S = Ax - \sum_1^{k-1} P_i (x - \alpha_i),$$

ou

$$M_S = \frac{x}{l} \sum_1^n P_i \beta_i - \sum_1^{k-1} P_i (x - \alpha_i).$$

Para acharmos o máximo, derivemos M_S em relação à variável α_1 e anulemos a derivada:



$$\frac{dM_S}{d\alpha_1} = \frac{x}{l} \sum_1^n P_i (-1) - \sum_1^{k-1} P_i (-1),$$

$$\frac{dM_S}{d\alpha_1} = \sum_1^{k-1} P_i - \frac{x}{l} \sum_1^n P_i.$$

Como vemos, a derivada é independente da variável. Procuremos determinar o máximo por outro processo, pois não há máximo analítico. Observemos o seguinte:

1 - O máximo só pode ocorrer quando uma das cargas estiver sobre a secção.

2 - Quando α_1 crescer (positivamente) $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } M_S \text{ cresce} \longrightarrow \frac{dM_S}{d\alpha_1} > 0, \\ \text{se } M_S \text{ decresce} \longrightarrow \frac{dM_S}{d\alpha_1} < 0; \end{array} \right.$

quando α_1 decrescer $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } M_S \text{ cresce} \longrightarrow \frac{dM_S}{d\alpha_1} < 0, \\ \text{se } M_S \text{ decresce} \longrightarrow \frac{dM_S}{d\alpha_1} > 0, \end{array} \right.$

e vice-versa.

3 - Suponhamos que é a carga P_k sobre \underline{S} que produz o máximo momento em \underline{S} ; quando o grupo de cargas caminha para a esquerda, como a carga P_k ainda não chegou em \underline{S} , M_S vai crescendo; então,

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ decresce} \\ M_S \text{ cresce} \end{array} \right\} \frac{dM_S}{d\alpha_1} < 0, \text{ ou } \sum_1^{k-1} P_i - \frac{x}{l} \sum_1^n P_i < 0.$$

4 - Quando P_k ultrapassa \underline{S} , M_S passa a decrescer:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ decresce} \\ M_S \text{ decresce} \end{array} \right\} \frac{dM_S}{d\alpha_1} > 0, \text{ ou } \sum_1^k P_i - \frac{x}{l} \sum_1^n P_i > 0.$$

5 - Daí tiramos:

$$\sum_1^{k-1} P_i < \frac{x}{l} \sum_1^n P_i < \sum_1^k P_i,$$

ou, então,

$$\frac{\sum_1^{k-1} P_i}{\sum_1^n P_i} < \frac{x}{l} < \frac{\sum_1^k P_i}{\sum_1^n P_i},$$



donde provém a conclusão: a posição do grupo de cargas que produz na secção S o máximo momento fletor é definida pela desigualdade (2.109) e se dará para a carga P_k sôbre a secção S.

Daí tira-se um traçado gráfico devido a Weyrauch:

- 1 - Desenha-se a viga AB em uma certa escala e, pelo apoio B, levanta-se uma vertical, marcando-se sôbre esta vetores proporcionais às cargas P_1, \dots, P_n ; a partir de P_1 em baixo, obtendo-se, assim, o ponto C.
- 2 - Ligam-se os pontos A e C e, pela secção S, levanta-se uma vertical até D sôbre AC.
- 3 - Por D tira-se uma horizontal até BC em F.
- 4 - O vetor que contiver F será a carga que, sôbre S, dará o máximo momento.
- 5 - Se F cair no intervalo de duas cargas, qualquer uma delas dará, indiferentemente, o momento máximo em S, quando colocada sôbre S.

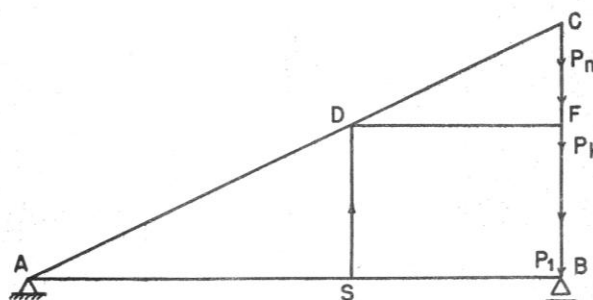


Fig. 28

No exemplo da Fig.28, P_k será a carga que, colocada sôbre S, determinará o máximo momento. Com efeito, os triângulos ASD e ABC são semelhantes, e podemos escrever

$$\frac{AS}{AB} = \frac{DS}{BC},$$

o que nos dá, porquanto $DS = BF$,

$$\frac{x}{l} = \frac{BF}{\sum_1^n P_i};$$

mas, pela figura, vemos que

$$\sum_1^{k-1} P_i < BF < \sum_1^k P_i,$$

donde, finalmente,

$$(2.202) \quad \frac{\sum_1^{k-1} P_i}{\sum_1^n P_i} < \frac{x}{l} < \frac{\sum_1^k P_i}{\sum_1^n P_i}.$$

Nota: Todo o raciocínio que fizemos só é válido na hipótese de não entrarem nem saírem cargas do conjunto P_1-P_n da viga, quando a carga P_k estiver em S. Pode aconte-



cer que, ao colocarmos a carga P_k sôbre S , saiam algumas cargas da região da viga, ou nela entrem novas cargas. Neste caso, devemos proceder por tentativas, achando os valores máximos por meio de um Weyrauch para cada conjunto de cargas, e comparar os resultados.

(b) Processo do Funicular.

Quando o trem de cargas é muito grande em relação ao comprimento da viga, será quase certo que, uma vez achada a carga que produz em S o máximo momento, entrem ou saiam cargas da viga; o número de tentativas será muito grande. Por isto, neste caso, costuma-se lançar mão do segundo processo:

- 1 - Desenha-se, em uma certa escala, o grupo de cargas. Se houver cargas distribuidas, dividem-se estas em cargas concentradas elementares.
- 2 - Com uma distância polar H , traça-se um polígono de forças e o respectivo funicular.

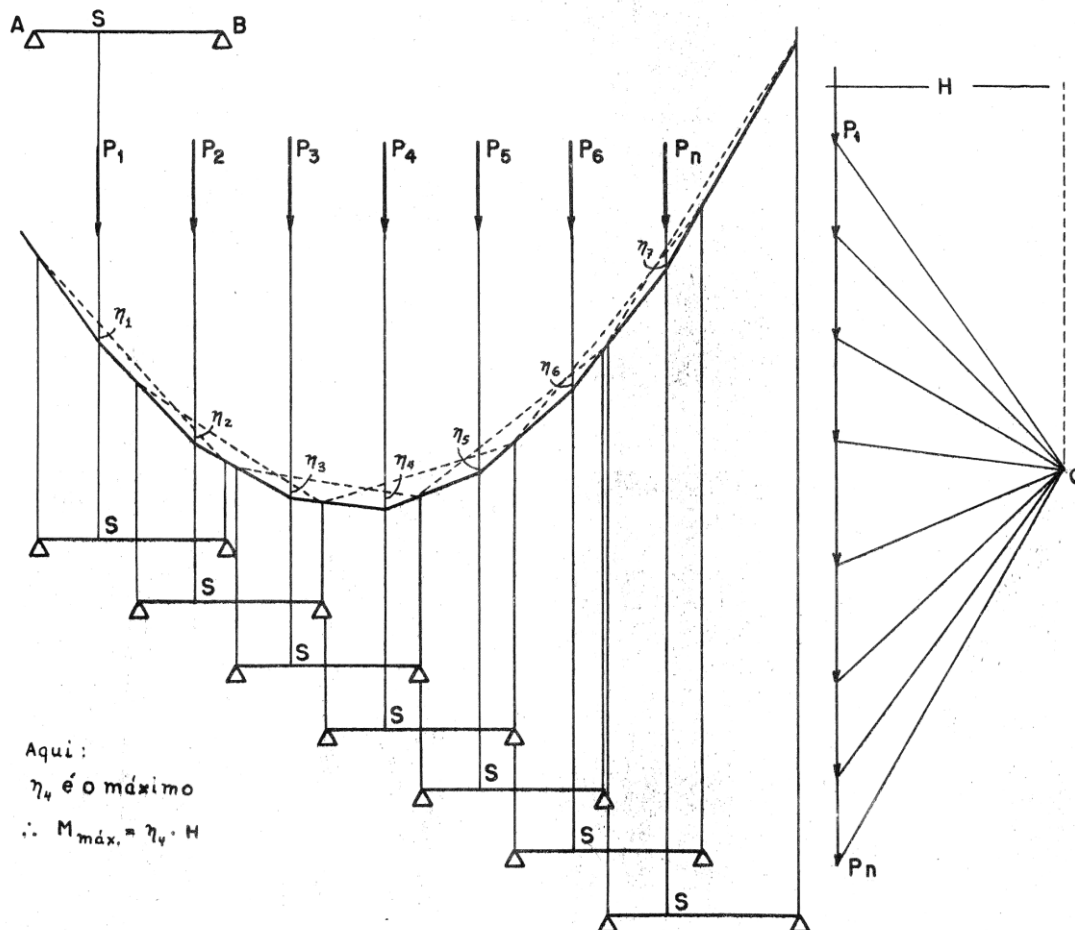


Fig. 29

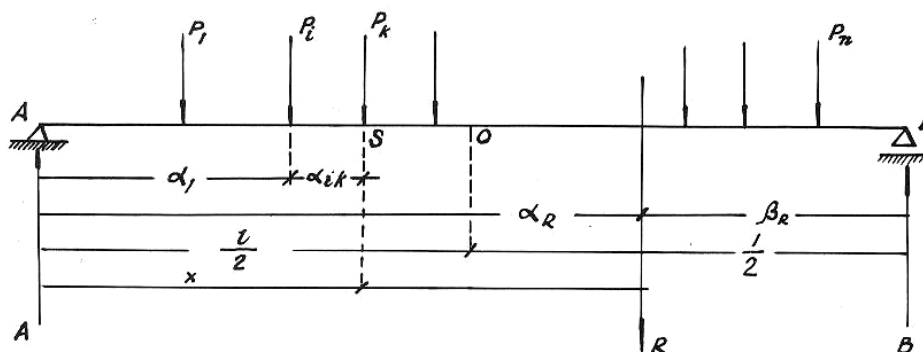


- 3 - Desenha-se a viga com a secção S sôbre uma certa carga (costuma-se fazer isto em papel transparente); pelos apoios A e B', levantam-se verticais de fechamento A'B'.
- 4 - Mede-se a ordenada z entre o funicular e esta linha.
- 5 - Repete-se a operação para a secção sôbre cada uma das cargas do conjunto.
- 6 - Escolhe-se o maior z_{max} .
- 7 - O momento máximo será dado por $M_{max} = H \cdot z_{max}$.

(c) Teorema de Barré e Culmann.

O traçado de Weyrauch permite-nos determinar qual a carga que produz, em uma dada secção, o máximo momento.

O teorema de Barré e Culmann permite resolver o problema inverso, isto é, determinar qual a secção de uma viga em que determinada carga produz o máximo momento. Notemos logo que êste teorema é aplicável nas mesmas condições que o Weyrauch.



Seja R a resultante do conjunto de cargas; suas abcissas, relativas aos apoios A e B serão α_r e β_r . Suponhamos que seja S a secção onde P_k produz o máximo momento; a abcissa de S é x. A distância entre P_k e R é s.

As reações de apoio serão

$$A = \frac{R\beta_r}{l}, \quad B = \frac{R\alpha_r}{l}.$$

Na posição apresentada na Fig. 30, o momento em S será

$$M_s = Ax - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \alpha_{ik} = \frac{R\beta_r}{l} x - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \alpha_{ik}.$$

O segundo termo $(-\sum_{i=1}^{k-1} P_i \alpha_{ik})$ é constante; portanto, o máximo da expressão de M_s será condicionado pelo máximo do primeiro termo:



$$\frac{R\beta_r \cdot x}{l} = x\beta_r \frac{R}{l} = x\beta_r \cdot C \quad (C = \text{constante}).$$

Vemos pela figura que

$$x + s + \beta_r = l,$$

donde

$$x + \beta_r = l - s = C^0 \quad (= \text{constante}),$$

porquanto l e s são constantes. Como o produto de x e β_r e a sua soma são constantes, o máximo será obtido para

$$x = \beta_r.$$

Daí a conclusão: a secção em que a carga P_k determina o máximo momento na viga é aquela cuja distância à resultante do grupo de cargas é dividida ao meio pelo centro da viga.

II - Fôrça Cortante Máxima.

(a) O problema consiste na determinação da posição do trem de cargas que produz, em dada secção S de abscissa x , o máximo esforço cortante.

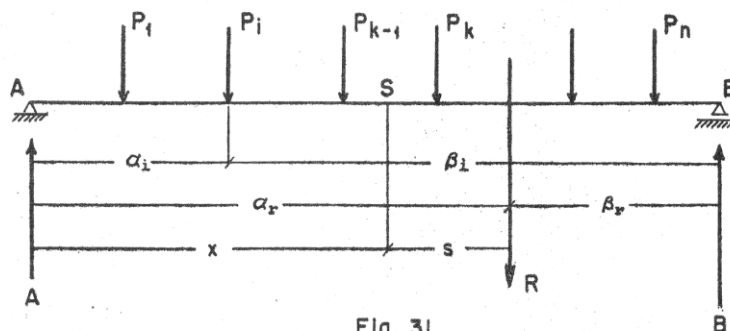


Fig. 31

Temos as reações de apoio

$$A = \frac{1}{l} \sum_1^n P_i \beta_i, \quad B = \frac{1}{l} \sum_1^n P_i \alpha_i.$$

O esforço cortante em S será

$$Q_s = A - \sum_1^{k-1} P_i,$$

$$Q_s = \frac{1}{l} \sum_1^n P_i \beta_i - \sum_1^{k-1} P_i,$$

$$Q_s = \frac{1}{l} \sum_1^n P_i (C^0 - \alpha_i) - \sum_1^{k-1} P_i.$$

Derivando em relação à variável α_1 , virá

$$\frac{dQ_s}{d\alpha_1} = -\frac{1}{l} \sum_1^n P_i,$$



expressão independente da variável α_1 , o que mostra não haver máximo analítico. Temos que recorrer a outro processo para determinar o máximo.

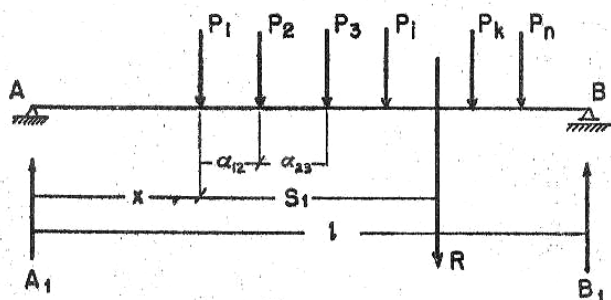


Fig. 32

Suponhamos, em primeiro lugar, a carga P_1 em \underline{S} (imediatamente à direita de \underline{S}), e vejamos o valor da força cortante Q_S (Fig.32). (Note-se que S_1 será a distância entre a primeira carga e a resultante).

Aqui, a reação será

$$A_1 = R \frac{\beta_R}{l};$$

mas

$$\beta_R = l - (x + S_1),$$

donde

$$A_1 = \frac{R}{l} [l - (x + S_1)];$$

portanto,

$$Q_1 = A_1 = \frac{R}{l} [l - (x + S_1)].$$

Suponhamos, agora, que o trem de carga se deslocou da quantidade α_{12} para a esquerda, ficando a carga P_1 à esquerda de \underline{S} , e a carga P_2 imediatamente à direita de \underline{S} . Ter-se-á, então, o diagrama da Fig.33.

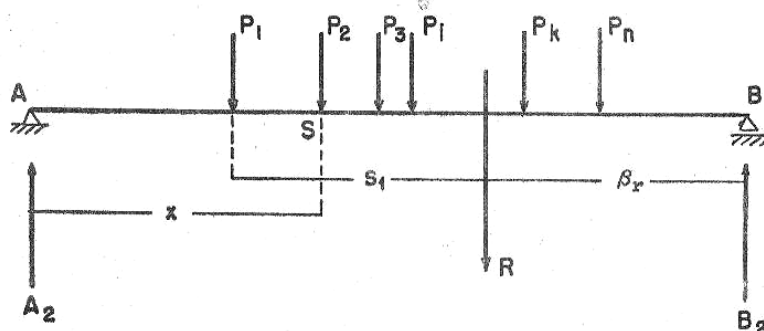


Fig. 33

A reação será

$$A_2 = \frac{R}{l} \beta_R;$$

mas, neste caso,

$$\beta_R = l - (x + S_1 - \alpha_{12}) = l - (x + S_1) + \alpha_{12},$$

donde

(2.203)

$$A_2 = \frac{R}{l} [l - (x + S_1) + \alpha_{12}]$$

e



$$(2.204) \quad Q_2 = A_2 - P_1 = \frac{R}{\ell} \left[\ell - (x + S_1) + \alpha_{12} \right] - P_1.$$

Se o trem caminhasse para a esquerda de mais α_{23} , as cargas P_1 e P_2 ficariam à esquerda de \underline{S} , e P_3 imediatamente à direita, e teríamos

$$\beta_R = \ell - (x + S_1 - \alpha_{12} - \alpha_{23}),$$

$$\beta_R = \ell - (x + S_1) + (\alpha_{12} + \alpha_{23}),$$

donde

$$A_3 = \frac{R}{\ell} \beta_R = \frac{R}{\ell} \left[\ell - (x + S_1) + (\alpha_{12} + \alpha_{23}) \right];$$

e, como

$$Q_3 = A_3 - P_1 - P_2,$$

virá

$$(2.205) \quad Q_3 = \frac{R}{\ell} \left[\ell - (x + S_1) + (\alpha_{12} + \alpha_{23}) \right] - (P_1 + P_2),$$

e assim por diante.

Podemos dispor estas expressões da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{R}{\ell} \left[\ell - (x + S_1) \right] &&= Q_1 \\ Q_2 &= \frac{R}{\ell} \left[\ell - (x + S_1) \right] - \left[P_1 - \frac{R}{\ell} \alpha_{12} \right] &&= Q_1 - \Delta_2 \\ Q_3 &= \frac{R}{\ell} \left[\ell - (x + S_1) \right] - \left[(P_1 + P_2) + \frac{R}{\ell} (\alpha_{12} - \alpha_{23}) \right] &&= Q_1 - \Delta_3 \\ &\dots \dots \dots \\ Q_k &= \frac{R}{\ell} \left[\ell - (x + S_1) \right] - \left[\sum_1^{k-1} P_i - \frac{R}{\ell} \sum_2^k \alpha_{k-1,k} \right] &&= Q_1 - \Delta_k \end{aligned}$$

Concluimos daí que a fôrça cortante para uma certa carga imediatamente à direita de \underline{S} é dada por uma diferença de duas parcelas, a primeira das quais é constante e igual à fôrça cortante para a primeira carga imediatamente à direita de \underline{S} , e a segunda é variável, do tipo

$$\Delta_k = \sum_1^{k-1} P_i - \frac{R}{\ell} \sum_2^k \alpha_{k-1,k}.$$

Portanto, se todos os termos Δ fôrem positivos, será a primeira carga que dará o máximo de fôrça cortante em \underline{S} . Se algum destes Δ fôr negativo (e, no caso de mais de um ser negativo, o de maior valor absoluto), então será a carga correspondente que dará o máximo para a fôrça cortante.

Na prática, são as primeiras cargas dos trens tipo usuais que produzem o máximo para fôrça cortante; uma estatística mostrou que cerca de 80% de vêzes é a primeira carga, 18% a segunda, 2% as terceira e quarta. Vemos, ainda, que, desde que não saia nem entre



carga na viga, a carga que dá o máximo da força cortante, em cada secção, também dará o máximo em qualquer outra secção.

(b) Processo gráfico.

Da dedução precedente, resulta um processo gráfico muito cômodo para a determinação do máximo da força cortante:

- 1 - Em certa escala, desenha-se a viga AB e, pelo apóio B da direita, levanta-se uma vertical BB' .
- 2 - Sobre BB' marcam-se vetores proporcionais às cargas, em ordem inversa, de modo que a última fique em baixo, e a primeira em cima (ponto C).
- 3 - Liga-se A a C .
- 4 - Dispõe-se sobre a viga o trem de cargas a partir do apóio A , a começar pela primeira.
- 5 - Pelos extremos dos vetores (em BB') representativos, das cargas, tiram-se paralelas a AC até encontrar as verticais dos vetores correspondentes (traçados no item 4) em E_2, E_k, \dots, E_n .
- 6 - Determinam-se, assim, segmentos sobre esses vetores, medidos até o eixo da viga ED , que são exatamente os Δ já estudados e que, por construção, serão positivos para baixo e negativos para cima do eixo da viga.
- 7 - Portanto, se algum destes pontos E (determinados no item 5) estiver acima do eixo da viga, será esta carga que dará - quando imediatamente à direita de S - o máximo de força cortante em S . Se houver mais de um ponto acima do eixo da viga, o determinante será aquele que estiver mais em cima. Se todos os pontos estiverem abaixo do eixo da viga, será a primeira carga que dará o máximo.

$$BC = \sum_1^n P_i = R_0$$

$$AD_k = \sum_2^k \alpha_{k-1, k}$$

$$F_k E_k = \sum_1^{k-1} P_i$$

A Fig.34 é uma construção feita pelo processo acima. Temos

$$D_k E_k = F_k E_k - F_k D_k$$

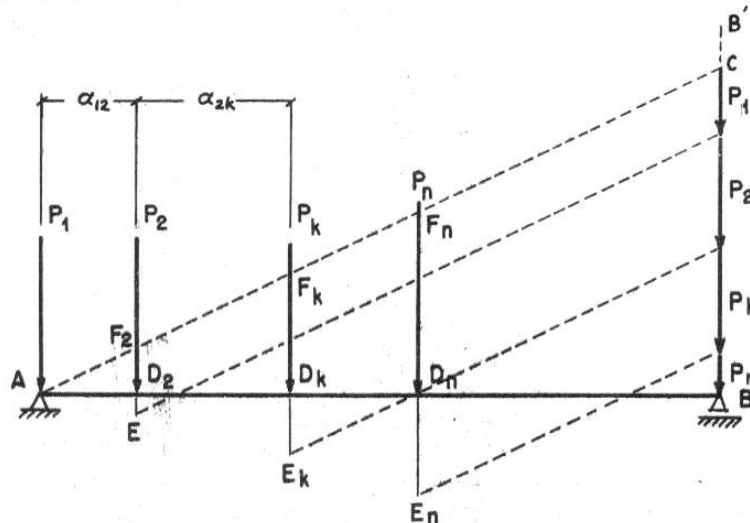


Fig. 34

Pelos triângulos semelhantes AD_kF_k e ABC , temos

$$F_k D_k = BC \frac{AD_k}{AB} \quad \text{ou} \quad F_k D_k = \frac{R}{l} \sum_2^k \alpha_{k-1,k};$$

daí virá

$$(2.206) \quad D_k E_k = \sum_1^{k-1} P_i - \frac{R}{l} \sum_2^k \alpha_{k-1,k} = \Delta_k$$

(c) Processo do Funicular.

O processo anterior só pode ser aplicado quando não entra nem sai carga alguma na viga durante a pesquisa do máximo; o processo seguinte, além de eliminar esta desvantagem, permite a determinação direta do máximo.

- 1 - Desenha-se a viga AB em uma certa escala e, pelo apoio da direita, levanta-se uma vertical BB' para baixo.
- 2 - Sobre esta vertical marcam-se vetores proporcionais às cargas, começando pela primeira.
- 3 - Dispõem-se as cargas do trem em ordem inversa sobre a viga, de modo que P_1 coincida com o apoio B .
- 4 - Tomando A como polo, traça-se um polígono funicular, tendo para polígono de forças as cargas dispostas no item 2. Obtem-se, assim, o funicular BC .
- 5 - A força cortante numa dada secção S , quando a primeira carga está em S , é dada pelo segmento η da vertical de S compreendido entre o funicular BC e o eixo.
- 6 - A força cortante em S , quando a carga P_k está em S , é obtida marcando-se a distância α_{1k} (entre a



primeira carga e P_k) à esquerda de \underline{S} , medindo-se o segmento η_1 entre o funicular e o eixo da viga neste ponto (S_1), e subtraindo-se deste valor todas as cargas desde P_1 até P_{k-1} , isto é

$$Q_k = \eta_1 - \sum_1^{k-1} P_i.$$

7 - Por comparação, obtem-se, diretamente, o máximo da força cortante.

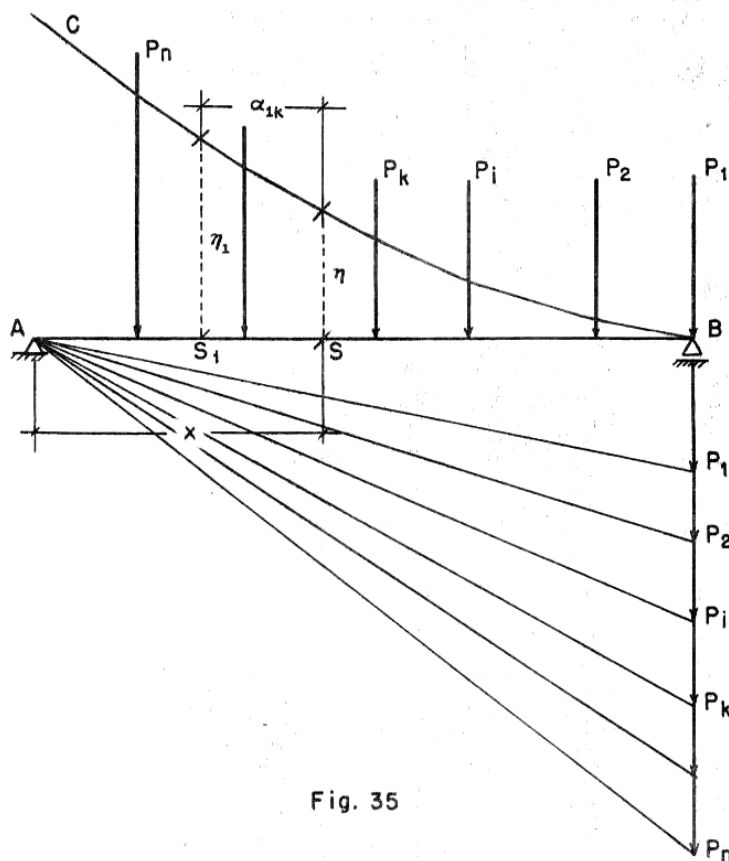


Fig. 35

Com efeito, coloquemos o trem de cargas sobre a viga na sua posição real, com P_1 em \underline{S} (Fig.36).

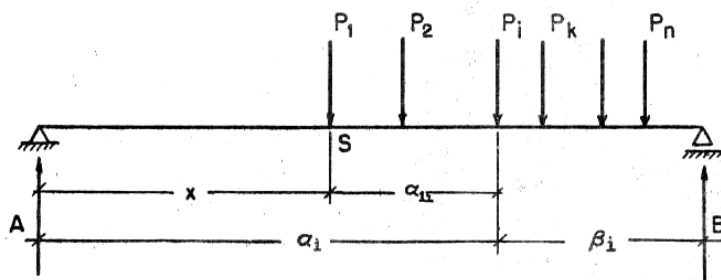


Fig. 36



A reação de apóio e a força cortante em S serão:

$$Q_{S1} = A = \frac{1}{l} \sum_1^n P_i \beta_i,$$

onde $\beta_i = l - (x + \alpha_{1i})$. Consideremos, agora, a carga P_k em S (Fig.37). Tomando o momento estático de todas as forças em rela-

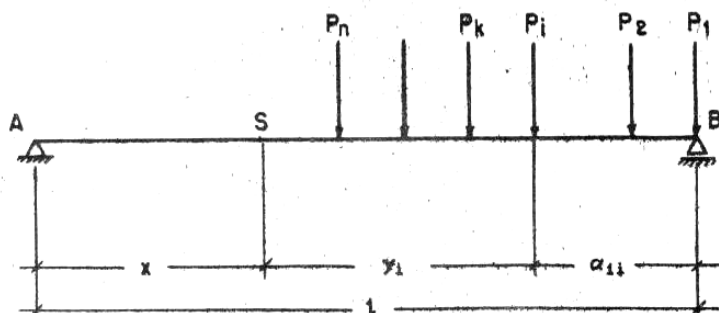


Fig. 37

ção à secção S, teremos

$$M_{estS} = \sum_1^n P_i \gamma_i ;$$

mas, pela figura, vemos que

$$\gamma_i = l - (x + \alpha_{1i});$$

logo,

$$\gamma_i = \beta_i,$$

e

$$M_{estS} = \sum_1^n P_i \beta_i.$$

Considerando, agora, o funicular, sabemos, pela grafostática, que o mesmo momento estático é dado por

$$M_{estS} = H \cdot \eta,$$

onde H é a distância polar que, no caso é o vão $H = l$. Assim,

$$M_{estS} = l \cdot \eta,$$

ou

$$l \cdot \eta = \sum_1^n P_i \beta_i,$$

donde

$$\eta = \frac{1}{l} \sum_1^n P_i \beta_i ;$$

portanto,

(2.207)

$$\eta = Q_{S1} = A ,$$



o que demonstra a nossa afirmação do item 5.

Consideremos, agora, a carga P_k em \underline{S} (Fig. 38). Quando P_k está em \underline{S} , P_1 estará em S_1 , distante α_{1k} de \underline{S} . A força cortante em S_1 será igual à reação de apoio A e dada pelo segmento η_1 do funicular:

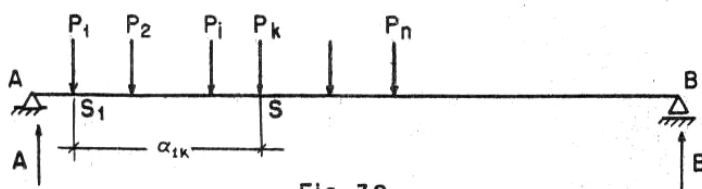


Fig. 38

$$A = Q_{S_1} = \eta_1 .$$

A força cortante em \underline{S} será

$$Q_{S_k} = A - \sum_1^{k-1} P_i ,$$

ou

(2.208)

$$Q_{S_k} = \eta_1 - \sum_1^{k-1} P_i ,$$

o que demonstra a afirmação do item 6.

Carregamento Indireto.

1 - Momento Fletor Máximo.

Devemos distinguir dois casos:

- a) - a secção considerada está sob um ponto de transmissão de cargas.

Nêste caso, como o máximo se dará para uma carga sobre a secção, ela cairá também no ponto de transmissão, e podemos proceder exatamente como no caso do carregamento direto.

- b) - a secção está entre dois pontos de transmissão.

Nêste caso, não se pode prever de antemão qual o caso que dará o máximo, e deve-se estudar os máximos para a carga sobre os dois pontos de transmissão vizinhos à secção, e escolher o máximo por comparação.

2 - Fôrça Cortante Máxima.

- a) - Se a secção está sob um ponto de transmissão, procedemos como para o caso de carga direta.

- b) - Se a secção está entre dois pontos de transmissão, pode-se experimentar a carga nos dois pontos vizinhos de transmissão. É, porém, mais prático, introduzirmos uma adaptação no processo do funicular:

I - Traçamos o funicular como para o caso de carregamento direto.



II - Consideramos cada trecho entre dois pontos de transmissão de cargas como uma pequena viga simples, e para cada uma delas traçamos um funicular análogo ao anterior, com as cargas que sôbre êle caibam. (Se as distâncias entre os pontos de transmissão fôrem constantes, basta traçar um só funicular auxiliar.)

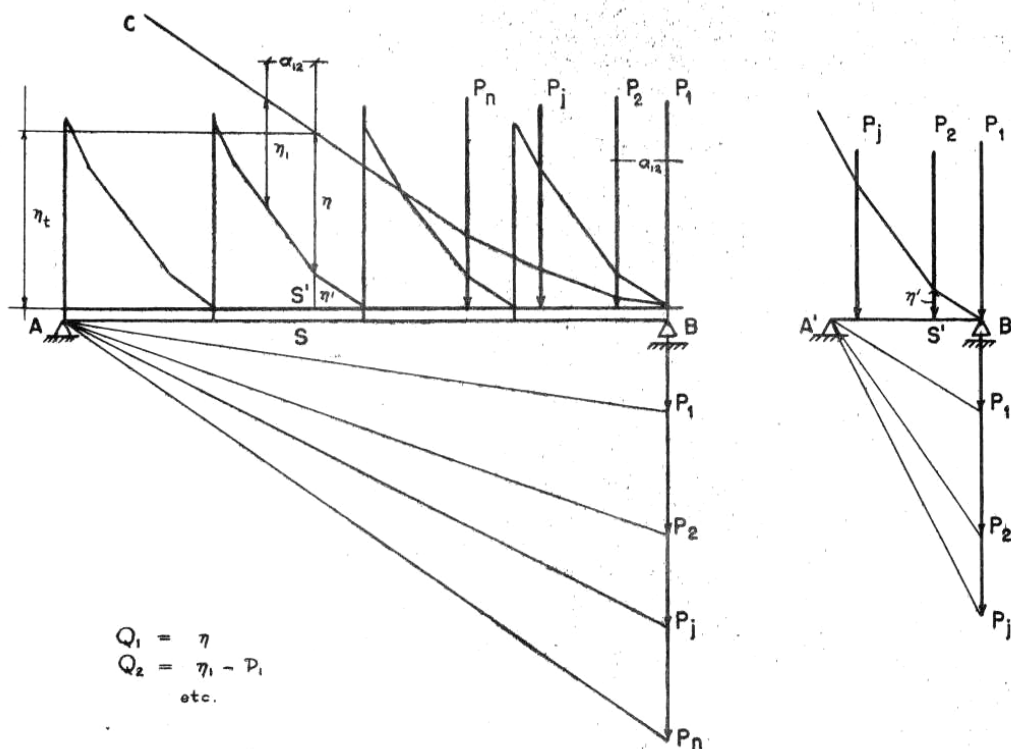


Fig. 39

III - Superpõem-se os funiculares auxiliares sôbre o primitivo nas posições correspondentes.

IV - As fôrças cortantes serão medidas como no caso do carregamento direto, com a única diferença de que os segmentos η serão medidos entre os dois funiculares: o primitivo e o auxiliar correspondente.

Com efeito, a reação de apoio A' da viga de distribuição $A'B'$ será igual à fôrça cortante $Q_{S,1}$ na secção S' (correspondente a S) para P_1 em S' , que é igual à ordenada η' do funicular auxiliar.

A fôrça cortante em S , para transmissão indireta, é igual à da transmissão direta η_t , subtraída a reação da viga de transmissão $A' = \eta'$, donde