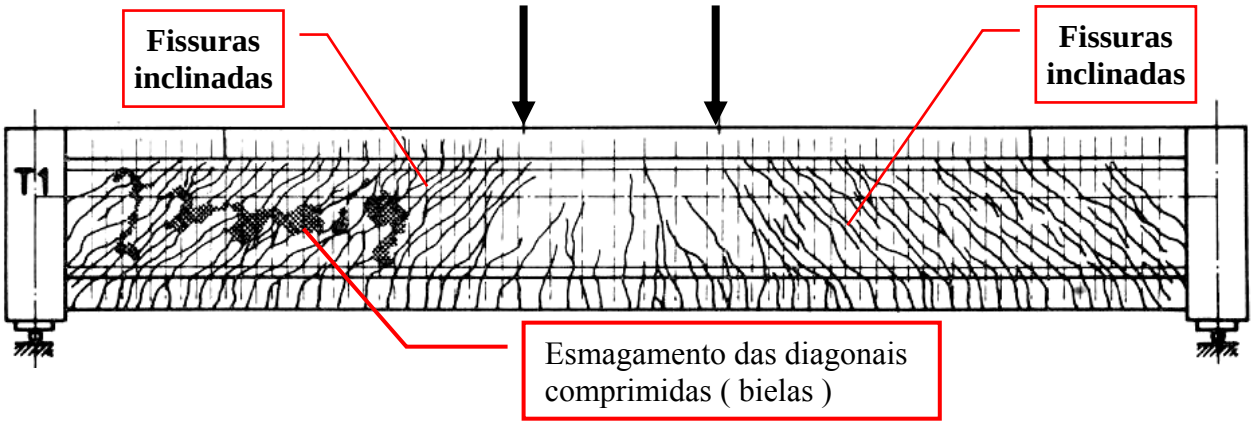
FISSURAÇÃO INCLINADA DEVIDA À FORÇA CORTANTE



Cálculo da armadura de estribos necessária :

$$\rho_{w.estribo} = \frac{\left(\tau_s - 2{,}5 \times \tau_{rd}\right)}{f_{yd.\ estribo}}$$

A formulação do CEB / 78 para a fissura inclinada e para vigas com estribos a 90 ^{o} pode ser obtida da formulação geral.

Abertura característica da fissura inclinada

$$\omega_{k\,.\,95\%} = 1{,}7 \times 1{,}2 \times \omega_m = 1{,}7 \times 1{,}2 \times \varepsilon_{sm} \times s_{rm}$$

onde :

$\omega_{k\,.\,95\%}$ = *abertura da fissura inclinada , com probabilidade de apenas 5% que haja uma fissura com abertura maior.*

ω_m = *abertura média da fissura inclinada*

O coeficiente 1,2 *leva em conta o fato de o estribo não ser ortogonal à fissura, e portanto não ser a armadura mais eficiente, o que causa uma fissura com abertura maior.*

ε_{sm} = *alongamento médio do estribo*

s_{rm} = *espaçamento médio entre fissuras*

Tensão no estribo :

$$\sigma_{estribo} = \left(\frac{V_s - V_{cd}}{b \times d} \right) \times \frac{1}{\rho_{estribo}}$$

V_S = Força cortante na seção no estado limite de utilização.

$V_{cd} = 2{,}5 \times b \times d \times \tau_{rd}$ onde : b = largura da viga ; d = altura útil da viga.

τ_{rd} = tensão que considera uma participação do concreto, a determinar a partir da curva do CEB/78 , mostrada na figura 1.

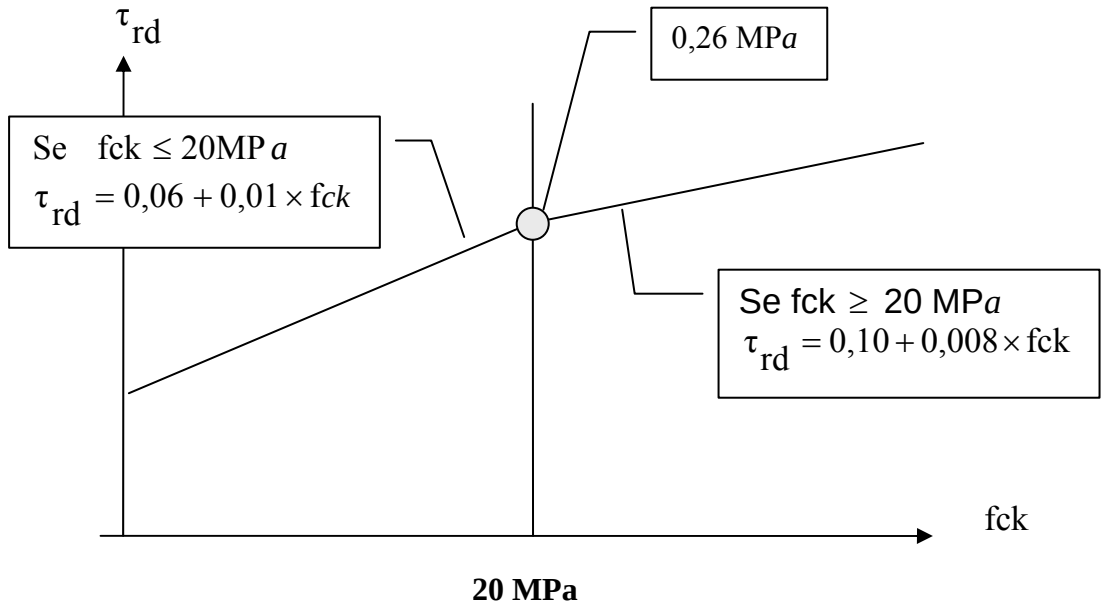


Figura 1 – CEB 78

Fazendo a substituição obtemos:

$$\sigma_{estribo} = \left(\frac{V_s}{b \times d} - \frac{V_{cd}}{b \times d} \right) \times \frac{1}{\rho_{estribo}} = \frac{\left(\tau_s - 2{,}5 \times \tau_{rd} \right)}{\rho_{estribo}} \geq 400 \left(kgf / cm^2 \right)$$

com $\tau_S = \frac{V_s}{b \times d}$.

$\rho_{estribo} = \frac{A_{estribo}}{b \times s}$ = taxa de armação de estribos na viga. Ver figura 2.

b = largura da alma da viga

s = espaçamento entre estribos

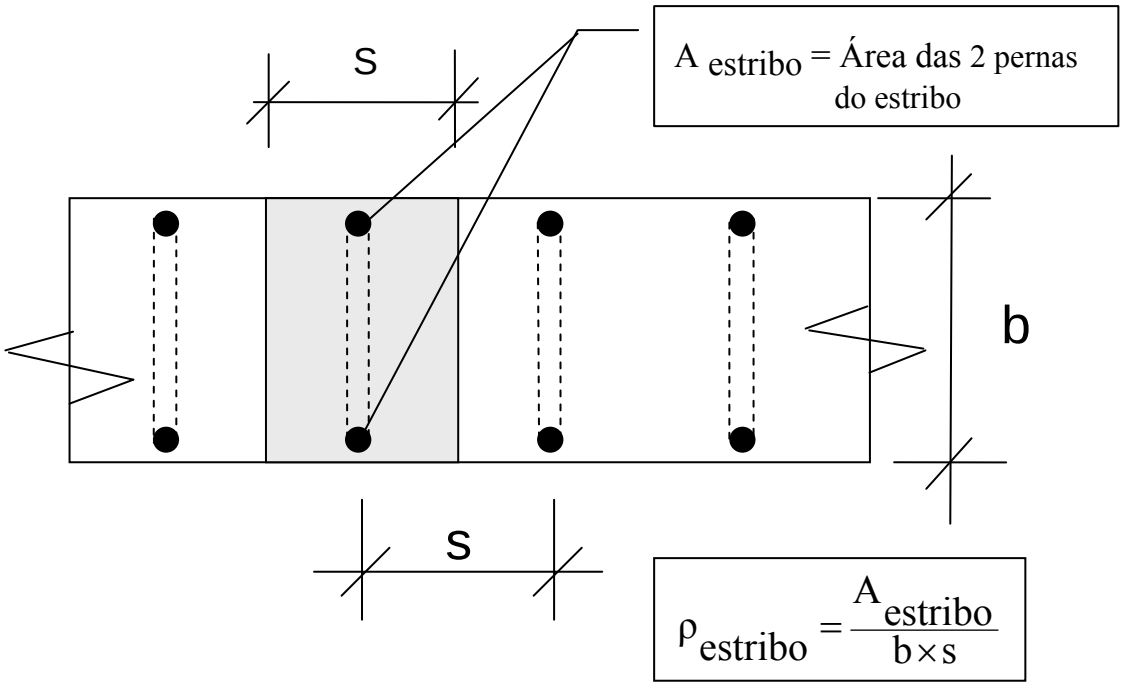


Figura 2 Em planta

Alongamento médio nos estribos :

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{médio\,no\,estribo} = \left(\frac{\sigma_{estribo}}{E_{aço}}\right) \times \left[1 - \left(\frac{V_{cd}}{V_s}\right)^2\right] \geq 0{,}40 \times \left(\frac{\sigma_{estribo}}{E_{aço}}\right)$$

Como $\tau_s = \frac{V_s}{b \times d}$ e $V_{cd} = 2{,}5 \times b \times d \times \tau_{rd}$ obtemos :

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{médio\,no\,estribo} = \left(\frac{\sigma_{estribo}}{E_{aço}}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2{,}5 \times \tau_{rd}}{\tau_s}\right)^2\right] \geq 0{,}40 \times \left(\frac{\sigma_{estribo}}{E_{aço}}\right)$$

Espaçamento médio entre as fissuras inclinadas :

Esse espaçamento é medido ao longo do estribo, isto é, na direção vertical.

$$s_{rm} = (2\times C) + (0{,}2\times S) + \left[K_1 \times K_2 \times \left(\frac{\phi_{estribo}}{\rho_r} \right) \right] \leq (d - x)$$ onde :

C = cobrimento da barra do estribo

S = espaçamento entre os estribos

$\phi_{estribo}$ = diâmetro do estribo

d = altura útil da viga

x = posição da linha neutra na flexão

ρ_r = taxa de armadura do estribo para efeito de fissuração inclinada. Ver figura 3.

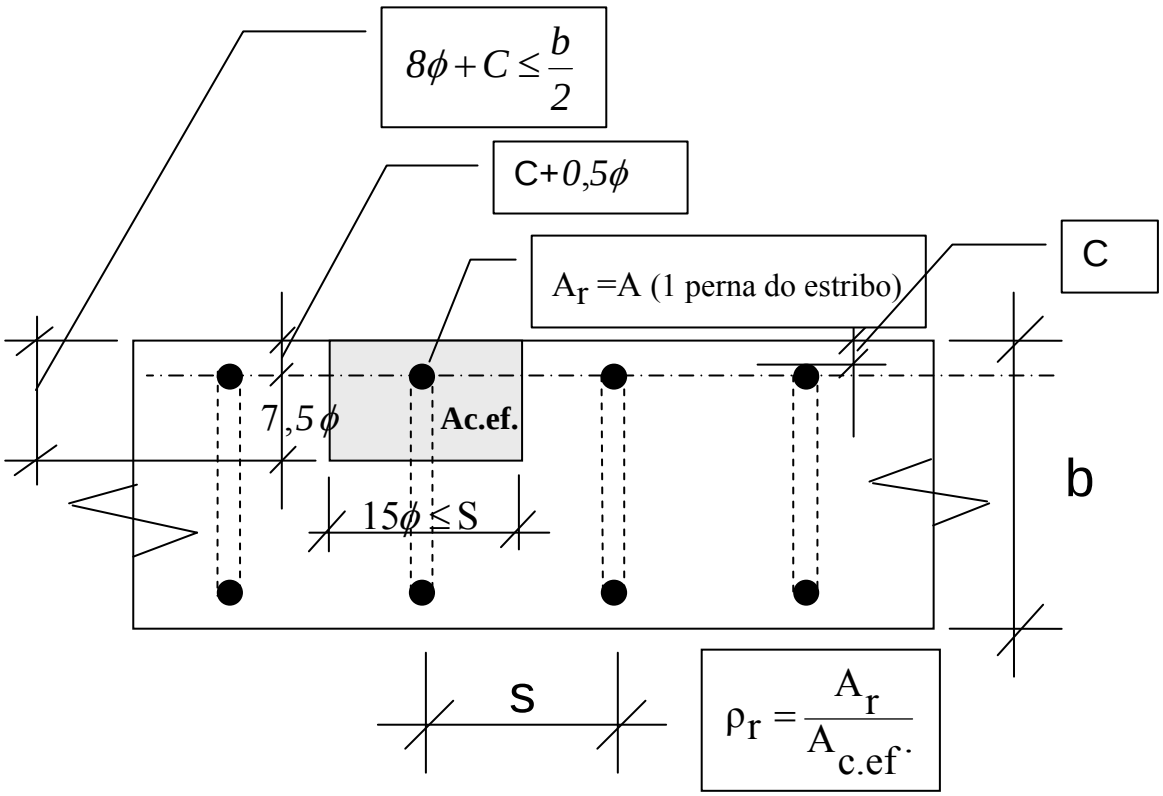


Figura 3 Em planta

$\rho_r = \frac{A_{(1\ perna\ do\ estribo)}}{A_{c.ef.}}$ conforme mostrado na **Figura 3**.

K_1 = coeficiente de aderência da barra = 0,40 para barras com nervuras e alta aderência.

K_2 = coeficiente representando a influência da forma do diagrama de tensões. Usaremos K 2 = 0,25, que corresponde a um diagrama de tensões uniforme ao longo da alma da viga.
Quando a força cortante é constante no trecho da viga onde se calcula a abertura da fissura, essa hipótese é correta.

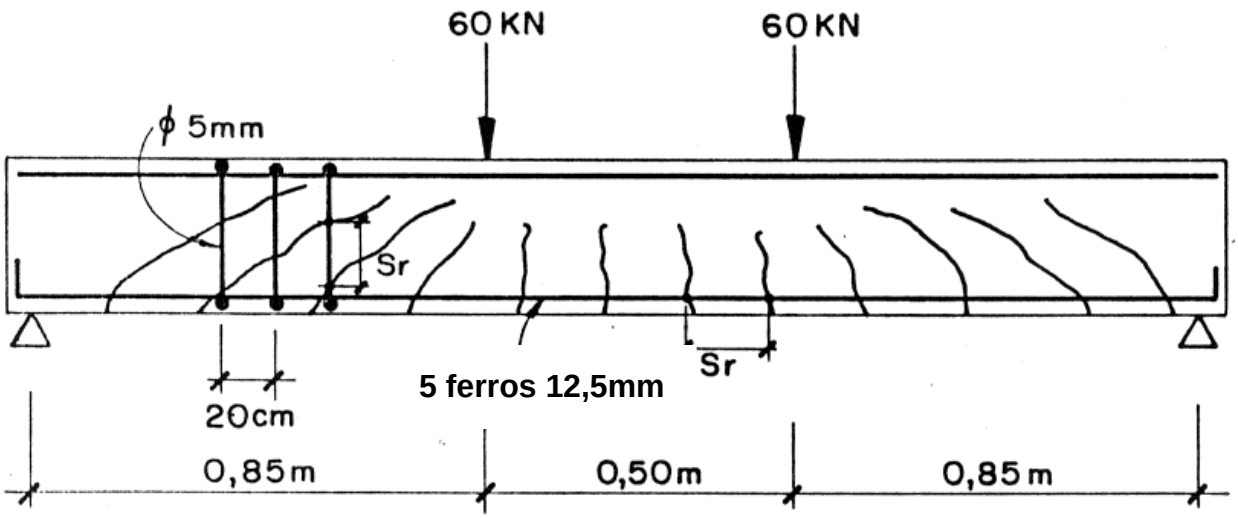
Substituindo K_1 e K_2 obtemos:

$$s_{rm} = (2 \times C) + (0{,}2 \times S) + \left[0{,}1 \times \left(\frac{\phi_{estribo}}{\rho_r} \right) \right] \leq (d - x)$$

$$\omega_{k\,.\,95\%} = 1{,}7 \times 1{,}2 \times \omega_m = 1{,}7 \times 1{,}2 \times \varepsilon_{sm} \times s_{rm}$$

Exemplo de cálculo da abertura da fissura inclinada na parte da viga próxima dos apoios
Consideremos uma viga simples conforme mostrado na figura abaixo.

Esse exemplo é um ensaio feito em laboratório na UERJ por E.C.S.Thomaz.



Vista Lateral

Seção transversal

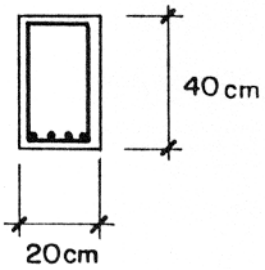


Figura 1

- Carga atuante : 2 cargas concentradas: 2P= 2 x 60kN
- Força cortante V = 60 kN
- Força cortante devida ao peso próprio:

  g = 2 (kN /m)

$$V = \frac{q \times L}{2} = \frac{2(\text{kN/m}) \times 1{,}8\text{m}}{2} = 1{,}8\ \text{kN}$$

- Força cortante total = 60 + 1,8 = 61,8 kN

- Estribos necessários

$$\rho_{w.estribo} = \frac{\left(\tau_{sd} - 2{,}5 \times \tau_{rd}\right)}{f_{yd.\ estribo}}$$

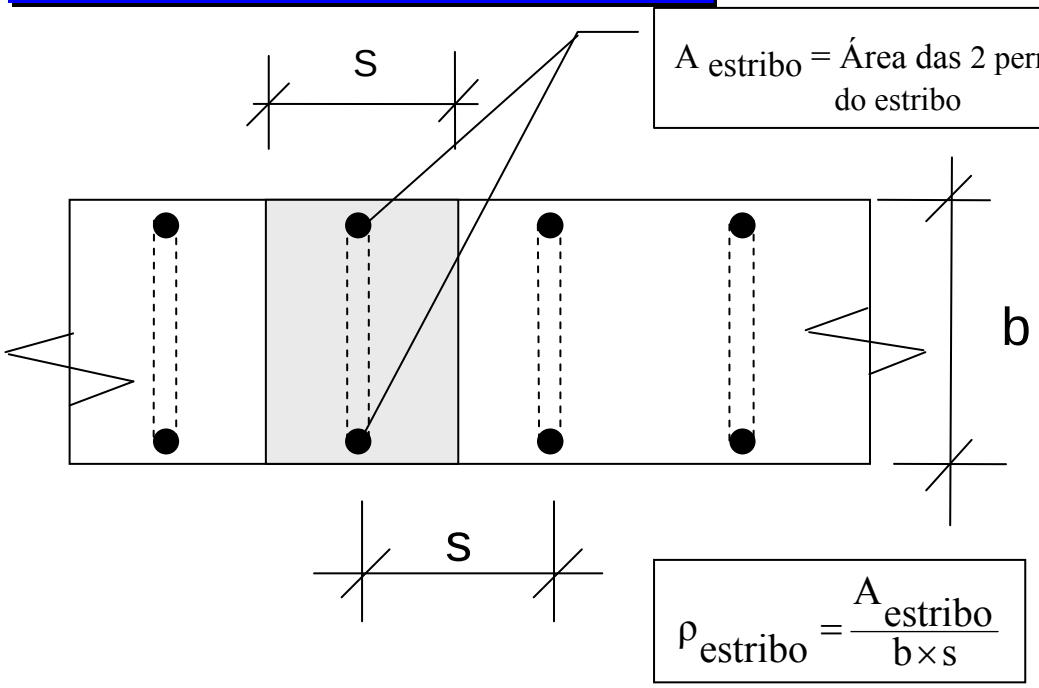
- $\tau_s = \frac{V_s}{b \times d} = \frac{61{,}8kN}{0{,}20m \times 0{,}37m} = 8350\left(kN/m^2\right) = 0{,}835MPa$

- Como $f_{ck} = 15\ MPa < 20\ MPa$:

$\tau_{rd} = 0{,}06 + 0{,}01 \times fck = 0{,}06 + 0{,}01 \times 15 = 0{,}21\ MPa$ (Ver figura 1)

$$\rho_{w.estribo.necessário} = \frac{\left(\tau_{sd} - 2{,}5 \times \tau_{rd}\right)}{f_{yd.\ estribo}} = \frac{1{,}4 \times 0{,}835(MPa) - 2{,}5 \times 0{,}21(MPa)}{500(MPa)/1{,}15} = 0{,}15\%$$

$$\rho_{w.estribo.existente} = \frac{2 \times 0{,}2cm2}{20cm \times 20cm} = 0{,}1\% < \rho_{\ w.necessário}$$ para termos fissuras maiores



$$\rho_{estribo} = \frac{A_{estribo}}{b \times s} = \frac{2 \times \left(\frac{\pi \times \left(\phi_{estribo} \right)^2}{4} \right)}{b \times s} = \frac{2 \times \left(\frac{\pi \times (0{,}5cm)^2}{4} \right)}{20cm \times 20cm} = 0{,}001 = 0{,}1\%$$

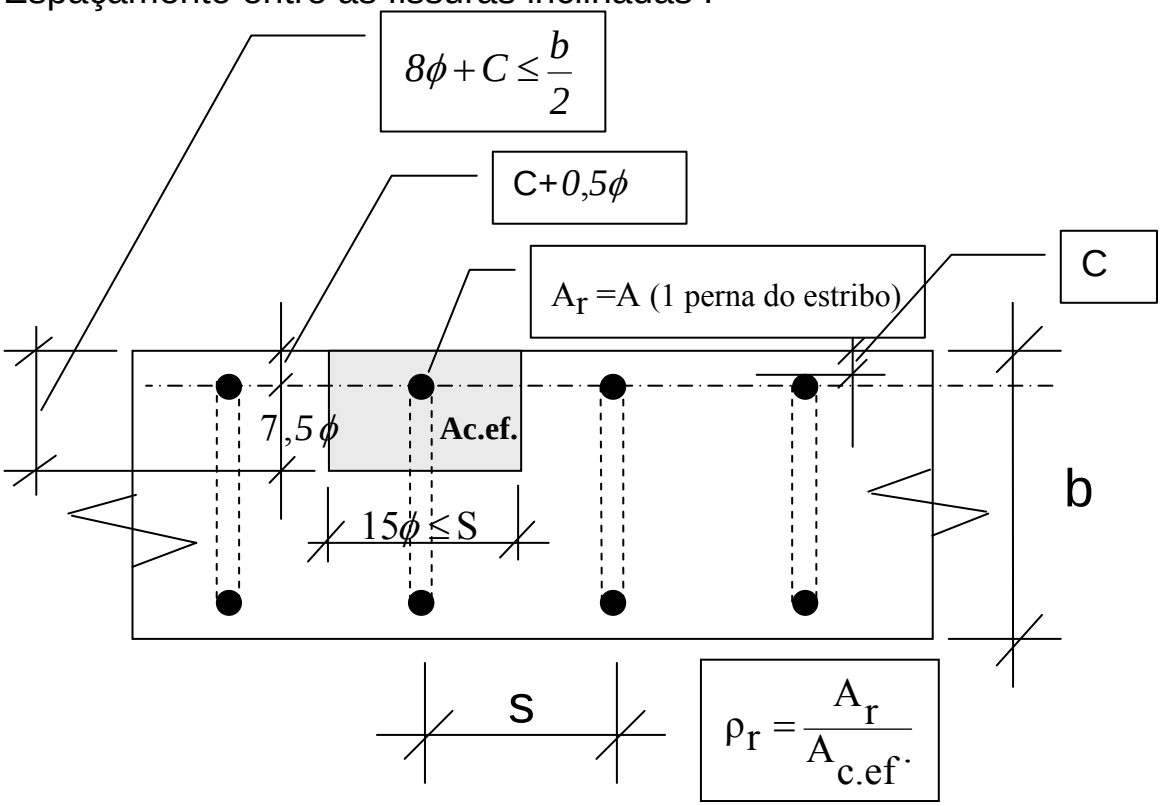
Essa taxa de armadura de estribo é menor que a taxa necessária e também que taxa mínima que é de 0,14%.

Essa quantidade reduzida de estribos foi usada no ensaio feito no laboratório para que a abertura da fissura fosse grande.

$$\sigma_{estribo} = \frac{(\tau_s - 2{,}5 \times \tau_{rd})}{\rho_{estribo}} = \frac{0{,}835 - 2{,}5 \times 0{,}21}{0{,}001} = 310 \left(kgf / cm^2 \right)$$

$$\sigma_{estribo} = 310 \left(kgf / cm^2 \right)$$

Espaçamento entre as fissuras inclinadas :



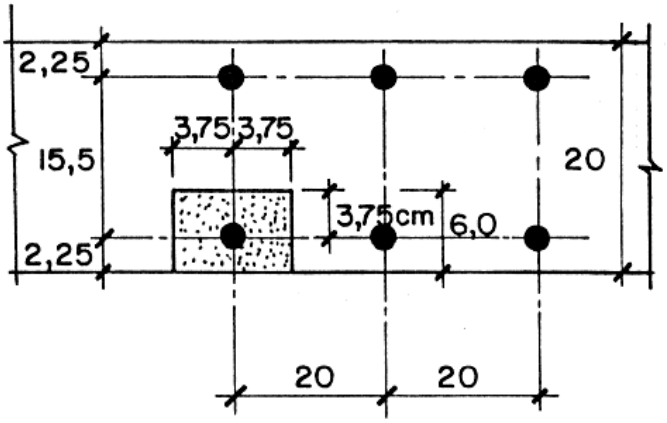
C = 2, cm

S= 20 cm

15 ϕ = 15 x 0,5cm = 7,5cm

$$8\phi + C = 8 \times 0{,}5cm + 2{,}0cm = 6{,}0cm \leq \frac{b}{2} = \frac{20cm}{2} = 10cm$$

$A_{c.\,ef.}$ = 7,5cm x 6,0 cm = 45 cm^2



$$\rho_r = \frac{A_r}{A_{c.ef}} = \frac{\frac{\pi \times (0{,}5cm)^2}{4}}{45cm^2} = 0{,}0044$$

$$s_{rm} = 2 \times C + 0{,}2 \times (S \text{ ou } 15\phi) + \left[0{,}1 \times \left(\frac{\phi_{estribo}}{\rho_r} \right) \right] \leq (d - x)$$

Como S= 20cm e 15ϕ=7,5cm, usar 7,5cm.

$$s_{rm} = (2 \times 2{,}0cm) + (0{,}2 \times 7{,}5cm) + \left[0{,}1 \times \left(\frac{0{,}5cm}{0{,}0044} \right) \right] = 4cm + 1{,}5cm + 11{,}5cm = 17cm$$

Verificar se $s_{rm} \leq (d - x)$

f ck = 15 MPa e pela Norma NBR6118 ,

$$Ec(MPa) = 5600\sqrt{fck(MPa)} = 5600\sqrt{15} = 21700\,MPa = 22\,GPa$$

$$n = \frac{2100000\ \left(kgf/cm^2\right)}{217000\ \left(kgf/cm^2\right)} = 9{,}7$$

$$\mu = \frac{A_{aço\ de\ flexão}}{b \times d} = \frac{5 \times 1{,}23 cm^2}{20cm \times 37cm} = 0{,}0083 = 0{,}83\ \%$$

$$k_x = \mu \times n \times \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{n \times \mu}} \right]$$

$$k_x = 0{,}0083 \times 9{,}7 \times \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{0{,}0083 \times 9{,}7}} \right] = 0{,}329$$

Zona comprimida : x = 0,329 . 37cm = 12,2 cm ;

d – x =37cm -12.2cm =24,8cm

$s_{rm} = 17cm \le (d - x) = 24{,}8cm$ OK

$$s_{rm} = 17cm$$

Alongamento médio nos estribos :

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{médio\ no\ estribo} = \left(\frac{\sigma_{estribo}}{E_{aço}} \right) \times \left[1 - \left(\frac{2{,}5 \times \tau_{rd}}{\tau_s} \right)^2 \right] \ge 0{,}40 \times \left(\frac{\sigma_{estribo}}{E_{aço}} \right)$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{médio\ no\ estribo} = \left(\frac{310}{2100\ 000} \right) \times \left[1 - \left(\frac{2{,}5 \times 0{,}21MPa}{0{,}835} \right)^2 \right] = 0{,}090\ ‰$$

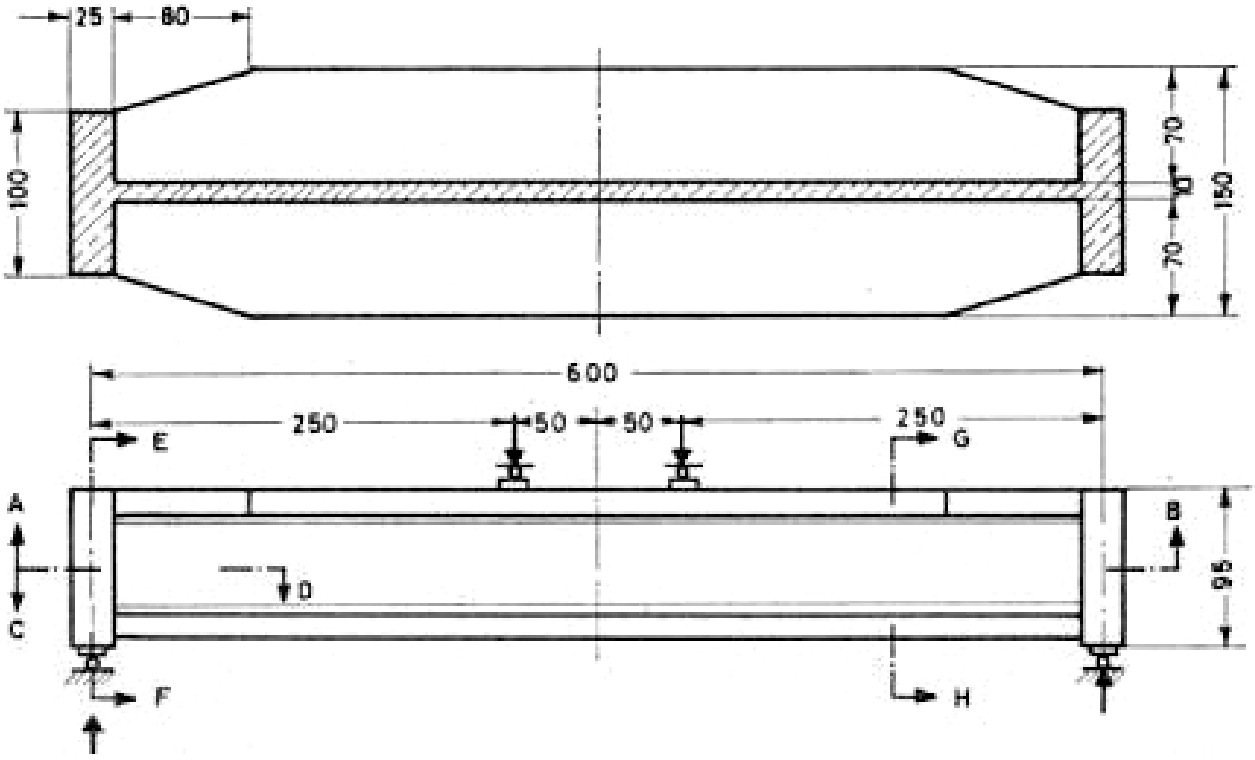
$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{médio\ no\ estribo} = \left(\frac{310}{2100\ 000} \right) \times [0{,}60] = 0{,}090\ ‰$$

$$\omega_{k\,.\,95\%} = 1{,}7 \times 1{,}2 \times \varepsilon_{sm} \times s_{rm} = 1{,}7 \times 1{,}2 \times (0{,}09(mm/m)) \times 0{,}17m = 0{,}03mm$$

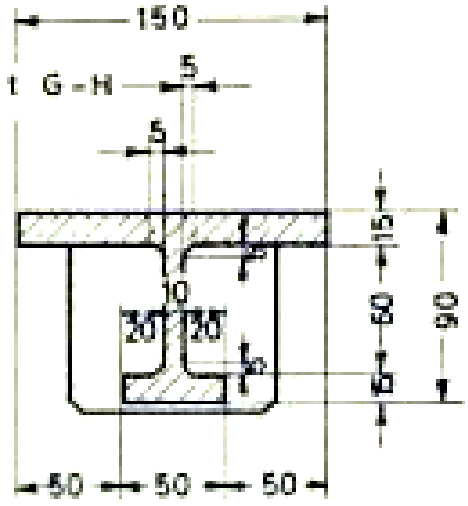
A abertura máxima da fissura inclinada observada na viga era ω máx < 0,05 mm

Outro Exemplo : Ensaio de Fritz Leonhardt Viga T1 HEFT 152

Faremos aqui a comparação entre as aberturas de fissura medidas nos ensaios de [26] e as calculadas pelo CEB 78 e por G. Rehm assim como as calculadas pela NBR6118 -2002



Vigas T1



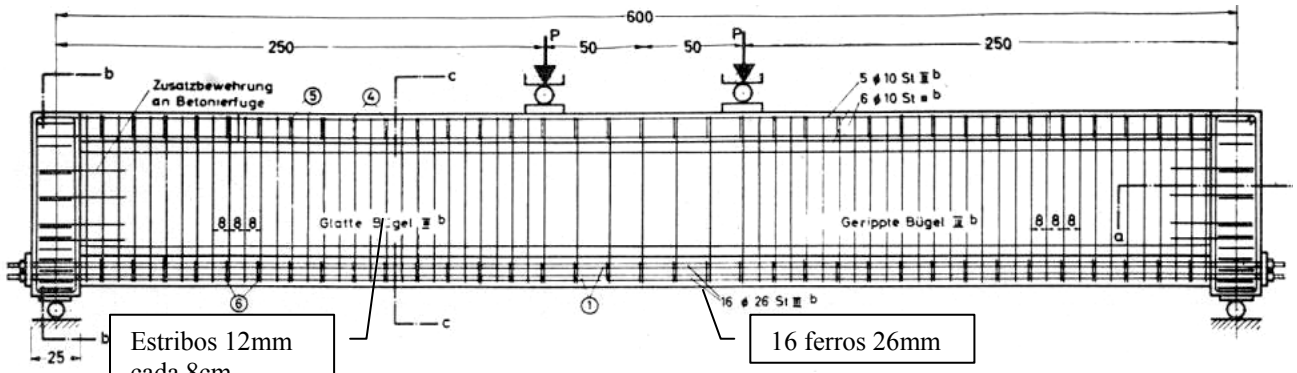
Seção transversal

Forma das vigas T1

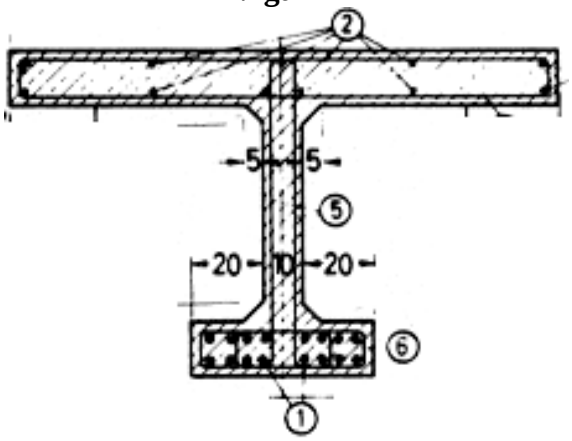
A armadura da viga era composta de 16 barras de 26mm na armadura de flexão e de estribos com 12mm de diâmetro e espaçamento de 8cm.

Em uma metade da viga os estribos tinham nervura. Na outra metade, os estribos não tinham nervura.

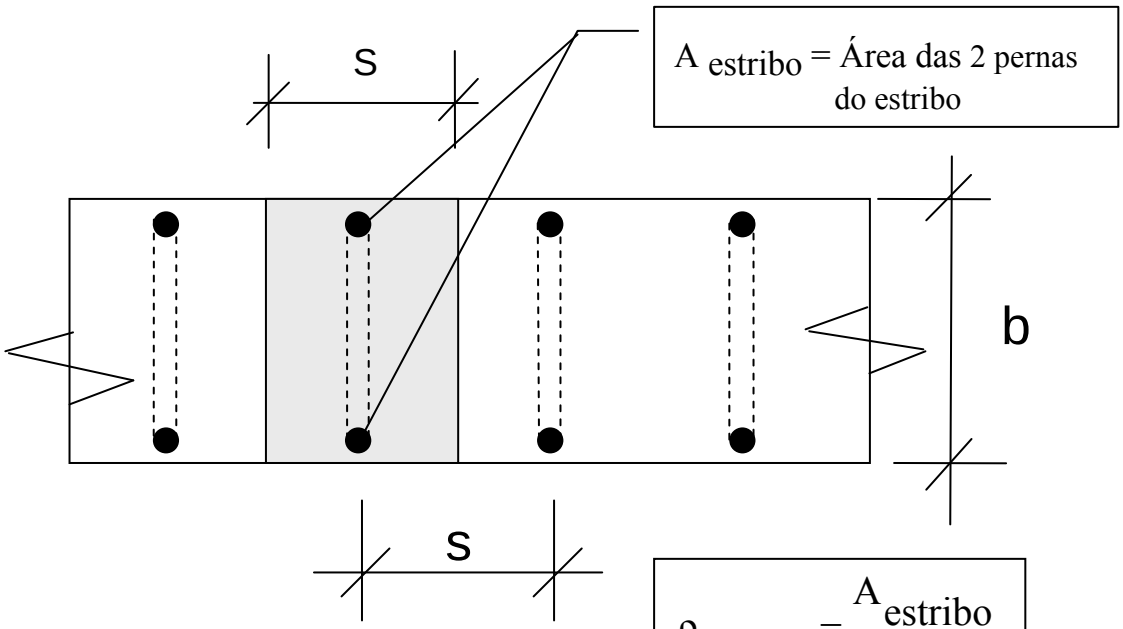
A fissuração inclinada não foi diferente entre as duas metades da viga. **Isso faz supor que o importante nos estribos é a ancoragem nas suas extremidades, nos ganhos e dobras.**



Viga T1



Armadura – seção transversal



$A_{estribo}$ = Área das 2 pernas do estribo

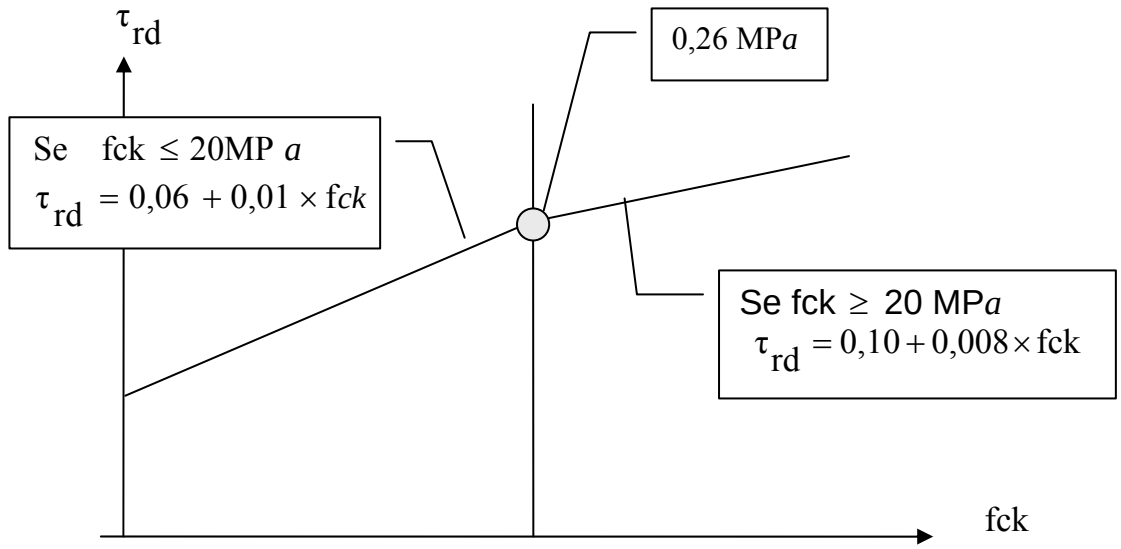
$$\rho_{estribo} = \frac{A_{estribo}}{b \times s}$$

$$\rho_{estribo} = \frac{A_{estribo}}{b \times S} = \frac{2 \times \left(\frac{\pi \times \left(\phi_{estribo} \right)^2}{4} \right)}{b \times S} = \frac{2 \times \left(\frac{\pi \times (1{,}2cm)^2}{4} \right)}{10cm \times 8cm} = 0{,}0283 = 2{,}83\%$$

Exercício :

Calcular a abertura de fissura inclinada para uma força cortante de 503 kN, e compará-la com a abertura medida na viga.

A carga aplicada na viga era 2P = 943 kN e o peso total da viga = 63kN



$$\tau_S = \frac{V_S}{b \times d} = \frac{503kN}{0{,}10m \times 0{,}751m} = 6698 \left(kN/m^2 \right) = 6{,}7MPa$$

Resistência à compressão em prisma de 10cmx10cmx53cm era:

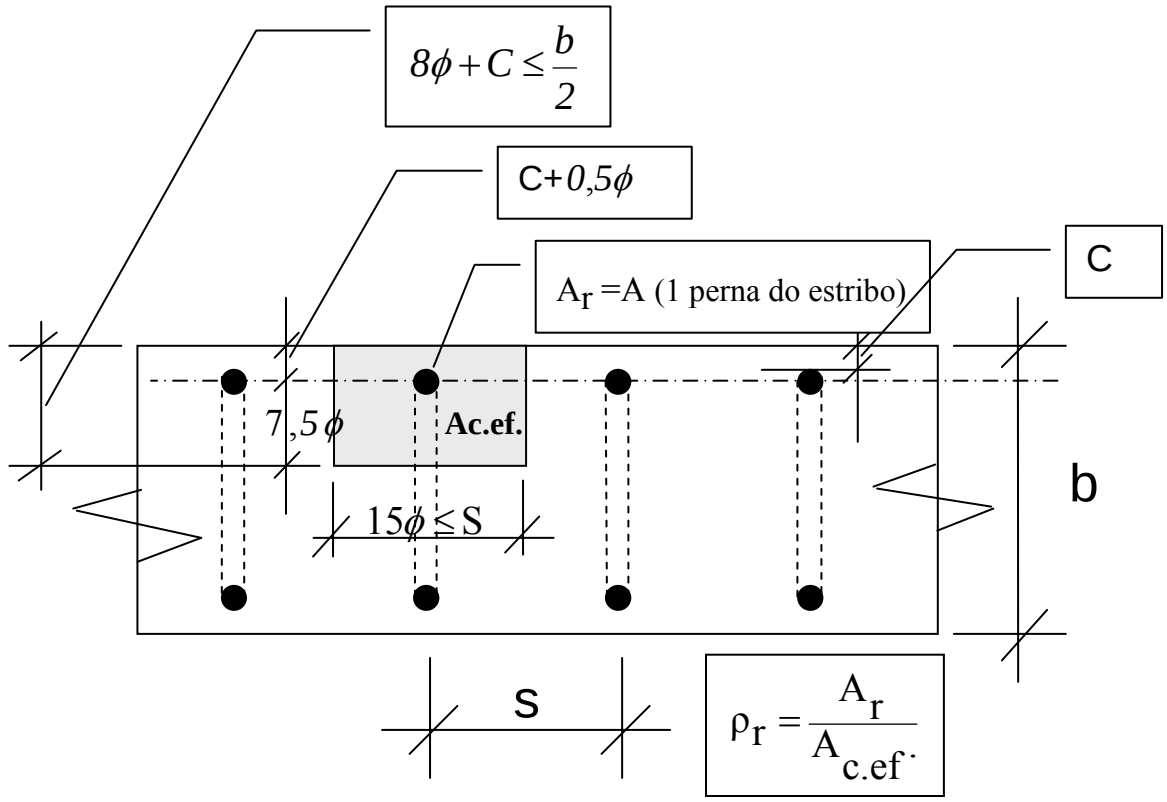
fc_{prisma} = 242 kgf / cm^2 = 24,2 MPa

logo: $\tau_{rd} = 0{,}10 + 0{,}008 \times 24{,}2 = 0{,}294MPa$

$$\sigma_{estribo} = \frac{(\tau_S - 2{,}5 \times \tau_{rd})}{\rho_{estribo}} = \frac{6{,}7 - 2{,}5 \times 0{,}294}{0{,}0283} = 210{,}8MPa = 2108 \left(kgf/cm^2 \right)$$

$$\sigma_{estribo} = 2108\left(kgf/cm^2\right)$$

Espaçamento entre as fissuras inclinadas :



C = 2,0 cm

S = 8 cm

b =10cm

15 ϕ = 15 x 1,2cm = 18cm

$$8\phi + C = 8 \times 1{,}2cm + 2{,}0cm = 11{,}6cm > \frac{b}{2} = \frac{10cm}{2} = 5cm$$

Usar a largura =10cm

$$A_{c.\,ef.} = 8{,}0cm \times 5{,}0\ cm = 40\ cm^2$$

$$\rho_r = \frac{A_{1\ perna\ do\ estribo}}{A_{c.ef.}} = \frac{\frac{\pi \times (1{,}2cm)^2}{4}}{40cm^2} = 0{,}02826 = 2{,}83\ \%$$

$$s_{rm} = 2\times C + 0{,}2\times(S \text{ ou } 15\phi) + \left[0{,}1\times\left(\frac{\phi_{estribo}}{\rho_r}\right)\right] \le (d-x)$$

Como S= 8cm e 15ϕ=18cm, usar 8cm.

$$s_{rm} = (2\times 2{,}0cm) + (0{,}2\times 8{,}0cm) + \left[0{,}1\times\left(\frac{1{,}2cm}{0{,}0283}\right)\right] = 4cm + 1{,}6cm + 4{,}2cm = 9{,}8cm$$

Devemos verificar se $s_{rm} \le (d-x)$

f ck = 15 MPa e pela Norma NBR6118 ,

$$Ec(MPa) = 5600\sqrt{fck(MPa)} = 5600\sqrt{15} = 21700\,MPa = 22\,GPa$$

Zona comprimida : x = 34,1 cm ;
d – x = 48,4cm
$s_{rm} = 9{,}8cm < (d-x) = 48{,}4cm$ OK
$s_{rm} = 9{,}8cm$

O espaçamento médio entre as fissuras, medido sobre os estribos, na direção vertical, foi de 10cm, coincidindo com a previsão do CEB / 78.

Alongamento médio nos estribos :

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{médio\,no\,estribo} = \left(\frac{\sigma_{estribo}}{E_{aço}}\right)\times\left[1-\left(\frac{2{,}5\times\tau_{rd}}{\tau_s}\right)^2\right] \ge 0{,}40\times\left(\frac{\sigma_{estribo}}{E_{aço}}\right)$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{médio\,no\,estribo} = \left(\frac{2108}{2100\,000}\right)\times\left[1-\left(\frac{2{,}5\times 0{,}294MPa}{6.7}\right)^2\right] = 0{,}890\,‰$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{médio\,no\,estribo} = 0{,}890\,‰$$

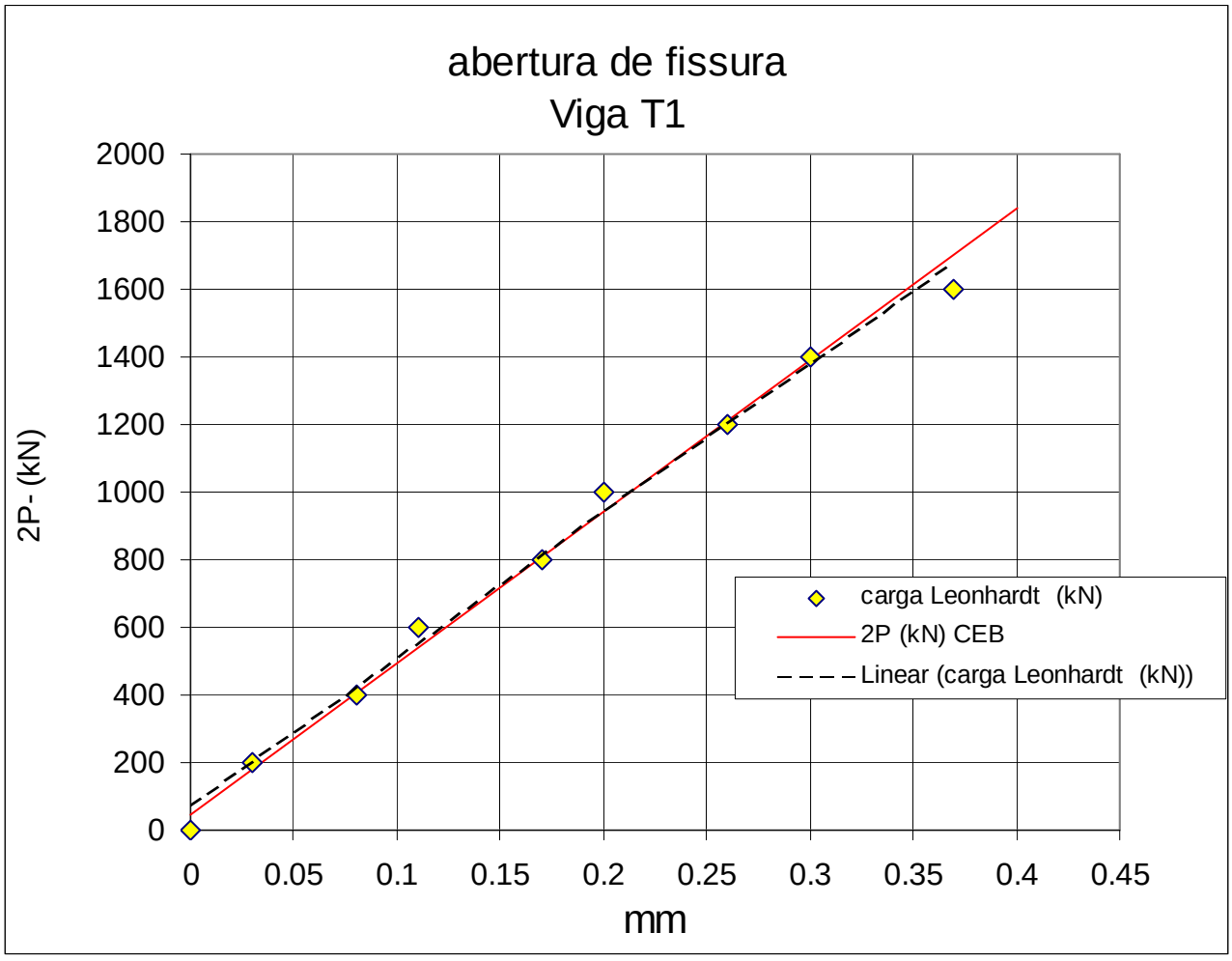
O alongamento medido no estribo para a força cortante de 503 kN foi de 0,95‰ .

A abertura máxima da fissura inclinada, segundo o CEB 1978 , vale :

$$\omega_{k\,.\,95\%} = 1{,}7 \times 1{,}2 \times \varepsilon_{sm} \times s_{rm} = 1{,}7 \times 1{,}2 \times (0{,}89\,‰) \times 0{,}098\text{m} = 0{,}18\text{mm}$$

A fissura máxima inclinada, medida na viga ensaiada, foi de 0,20mm , para a força cortante de 503kN.

A carga aplicada na viga era 2P = 943 kN e o peso total da viga = 63kN
A concordância é muito boa.



A concordância é boa e permite a estimativa correta da abertura da fissura inclinada.

Referências

1. Lobo Carneiro, Fernando Luiz – Teoria da fissuração das peças de concreto armado – Revista Estrutura Nos 26 e 27 - 1960 – Trabalho realizado no INT/RJ

2. Lobo Carneiro, Fernando Luiz , Maria Cascão F. de Almeida- Critérios adotados por diferentes normas para análise da fissuração em obras de concreto armado e protendido.

3. Code Modele CEB-FIP pour les Structures en Béton – 1978

4. Gallus Rehm – Zur Frage der Rissbegrenzung im Stahlbeton-Betonbau-Betonud Stahlbetonbau 63 – 1968 - nº 8 pag.175 - 182.

5. Rao P.S. Die Grundlagenzur Berechniung der bei statisch unbestimmtenStahlbetonkonstruktione im plastichen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte – D.A.fStb, Heft 177 -1966

6. NB1/78 Norma brasileira para projeto e execução de obras de concreto armado.

7. Leonhardt – Vorlesungen über Massivbau- Vol. 4 – Construções de Concreto.

8. A.W.Beeby- Concrete in the Oceans Cracking and Corrosion - International Symposium on Offshore Structures – Rilem-FIP-CEB-1979 –Rio de Janeiro.

9. Rolf Lenschow – Serviceability state of marine structures with emphasis on cracking – International Symposium on Offshore Structures – Rilem-FIP-CEB-1979 –Rio de Janeiro.

10. Horst Falkner – Zur Frage der Rissbildung durch Eigen-und Zwangspannunen infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen - D.A.f.Stb-Heft 208

11. Mörsch, Emil – Brücken aus Stahlbeton und Spannbeton- Entwurf und Konstruktion – Sechste Auflage -1958

12. H. Stoffers – Cracking due to Shrinkage and temperature variation in walls- Heron Vol. 23 -1978

13. CEB Bulletin D´Information nº 89 Fissuration – Mars 1973

14. ACI Stanadrd 318-71 – Building Code Requirements for Reinforced Concrete.

15. ACI Committee Report – Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete – ACI 318-71

16. CEB-70 Comite Europeen du Beton.

17. Programa Crack – Promon Engenharia – Eng. Ernani Diaz.

18. Y. Goto – Cracks formed in concrete around deformed tension bars. Journal ACI, Proc. Vol. 68 (1971) – Nr 4 - pag. 244 – 251

19. Thomaz, Eduardo - Haguenauer ,Cristina - Estudo de Fissuração de Cisalhamento em Vigas de Concreto Armado, RBE - Revista Brasileira de Engenharia, Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, Caderno de Engenharia Estrutural, Vol.11/N.1, 10/93.

20. Haguenauer, Cristina – Thomaz, Eduardo - Estudo de Campos Comprimidos de Concreto Armado com Aplicação em Vigas - Parede, RBE - Revista Brasileira de Engenharia, Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, Caderno de Engenharia Estrutural, Vol.10/N.2, 3/93.

21. Norma NBR6118 – 2002 Projeto de Estruturas de Concreto – ABNT 2002

22. CEB-FIP Model Code 1990 – Bulletin D´Information Nº 203

23. homaz, Eduardo , Haguenauer ,Cristina - Estudo de Fissuração de Cisalhamento em Vigas de Concreto Armado, RBE - Revista Brasileira de Engenharia, Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, Caderno de Engenharia Estrutural, Vol.11/N.1, 10/93.

24. Haguenauer, Cristina, Thomaz Eduardo - Estudo de Campos Comprimidos de Concreto Armado com Aplicação em Vigas - Parede, RBE - Revista Brasileira de Engenharia, Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, Caderno de Engenharia Estrutural, Vol.10/N.2, 3/93.

25. Norma NBR6118 – 2002 Projeto de Estruturas de Concreto – ABNT 2002

26. CEB-FIP Model Code 1990 – Bulletin D´Information Nº 203

27. Fritz Leonhardt – René Walther – Stuttgart – Versuche an Plattenbalken mit hoher Schubbeanspruchung –(Ensaios em viga T com grandes solicitações tangenciais) Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - Heft 152.