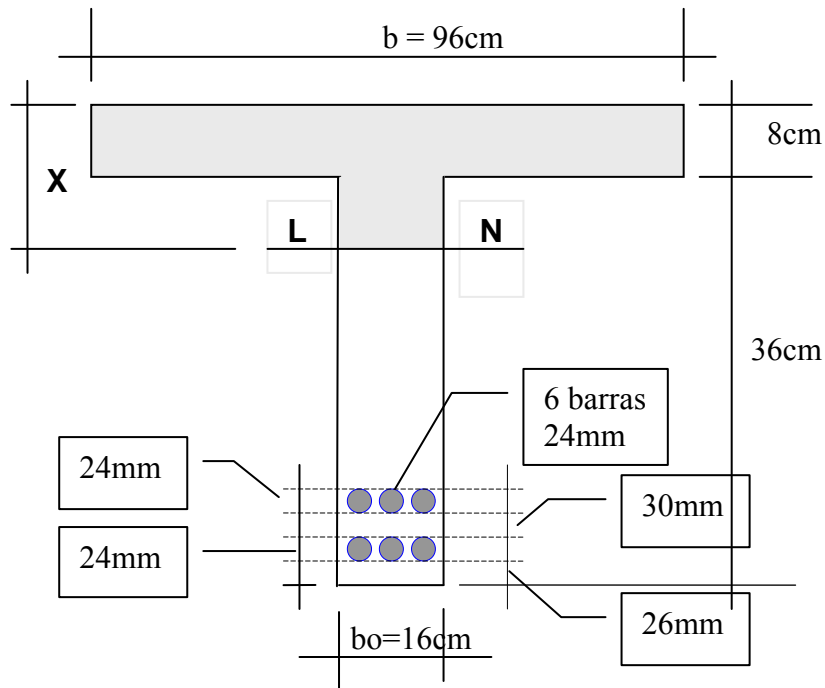




**EXEMPLO** : Cálculo da abertura de fissura das Vigas TA10 e TA11 ensaiadas por Prof. Fritz Leonhardt e divulgadas no Deutscher Ausschus für Stahlbeton Heft 275 ( Caderno alemão de concreto Armado)



Aço das barras longitudinais de flexão:

$$\sigma_{0,2\%} = 4000 \text{ (kgfcm}^2\text{)}$$

$$\sigma_{\text{limite linearidade}} = 3000 \text{ (kgfcm}^2\text{)}$$

$\phi$  = diâmetro da barra = 24mm

A aço = área de uma barra = 4,52 cm<sup>2</sup>

Concreto

$$\beta_w = 322 \text{ (kgf / cm}^2\text{)} \quad \text{Viga TA10} \rightarrow f_c = 27.3 \text{ MPa}$$

$$\beta_w = 333 \text{ (kgf / cm}^2\text{)} \quad \text{Viga TA11} \rightarrow f_c = 28.3 \text{ MPa}$$

$$E_c(\text{MPa}) \cong 5600\sqrt{f_{ck}(\text{MPa})} = 5600\sqrt{28.3} = 2979 \text{ MPa} = 29.8 \text{ GPa}$$

Peso Próprio:  $A_c = 0,1344 \text{ m}^2$

$$g = 0,1344 \text{ m}^2 \times 2500 \text{ g/m}^3 = 336 \text{ kgf/m}$$

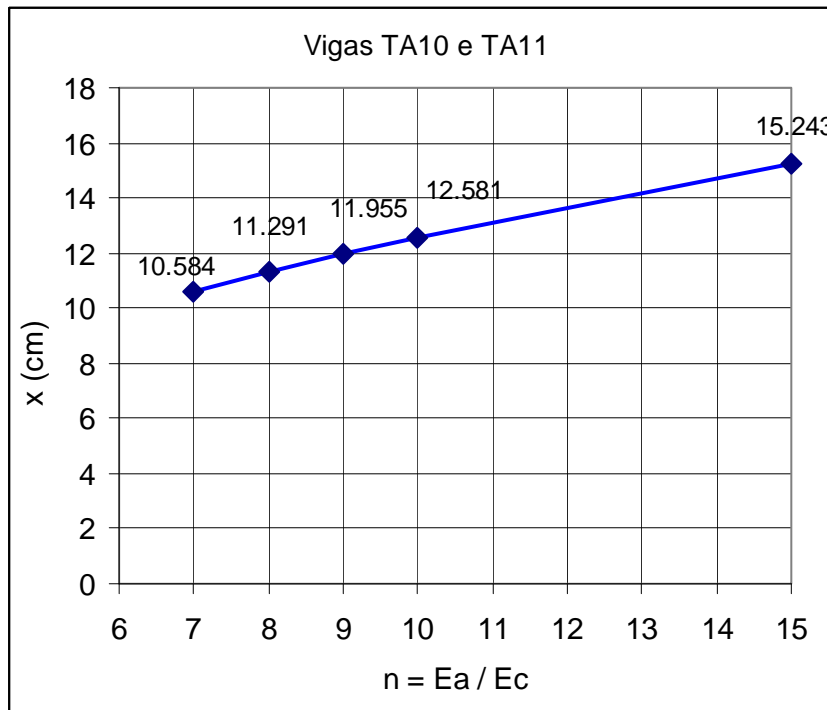
$$M_{\text{centro do vão}} = M_g = \frac{g \times L^2}{8} = \frac{0,336(\text{t/m}) \times (3,0)^2}{8} = 0,378 \text{ tm} = 3,78 \text{ ( kN.m)}$$



$$n = \frac{E_{\text{aço}}}{E_{\text{concreto}}} = \frac{210 \text{ GPa}}{29.8 \text{ GPa}} = 7$$

$$b \times h_{\text{laje}} \times \left( X - \frac{h_{\text{laje}}}{2} \right) + b_o \times (X - h_{\text{laje}}) \times \frac{(X - h_{\text{laje}})}{2} = n \times A_{\text{aço}} \times (d - X)$$

$$96 \times 8 \times \left( X - \frac{8}{2} \right) + 16 \times (X - 8) \times \frac{(X - 8)}{2} = n \times 27,12 \times (37,5 - X)$$



Podemos considerar a resultante de compressão

$$Z = 37.5 \text{ cm} - (1/3) \times 9 \text{ cm} = 34.5 \text{ cm}$$

$$f_c = 27.3 \text{ MPa a } 28.3 \text{ MPa}$$

Momento fletor quando ocorre a 1ª fissura;

$$M_{\text{fissuração}} = f_{ctk,5\%} \times W_{\text{inf}} = 19 \left( \text{kgfcm}^2 \right) \times 7380 \left( \text{cm}^3 \right) = 140220 \left( \text{kgf.cm} \right) = 14,0 \left( \text{kN.m} \right)$$

concreto	C12	C20	C30	C40	C50	C60	C70	C80
fck	12	20	30	40	50	60	70	80
fctm	1,6	2,2	2,9	3,5	4,1	4,6	5,1	5,6
fctk,5%	1,1	1,5	2,0	2,4	2,8	3,1	3,5	3,8
fctk,95%	2,1	2,9	3,8	4,7	5,4	6,1	6,8	7,4

**Carga que causa a 1ª fissura :**

$$M = 14,0 \text{ kN.m} - 3,78 \text{ kN.m} = 10,22 \text{ kN.m}$$

$$P/2 = 10,22 \text{ kN.m} / 1.25 \text{ m} = 8,2 \text{ kN}$$

$$P \text{ 1ª fissura} = 2 \times 8,2 = 16,4 \text{ kN}$$



Tensão no aço imediatamente após a 1ª fissura:

$$\sigma_{\text{aço } 1^{\text{a}} \text{ fissura}} = \frac{14,0(\text{kN.m})}{0,345(\text{m}) \times 27,12(\text{cm}^2)} = \dots = 149(\text{kgf/cm}^2)$$

$$\text{Fissura para a carga } P \text{ total} = 2 \times \left( \frac{P}{2} \right) = 60 \text{ ton} = 600 \text{ kN}$$

Momento fletor atuante =  $300\text{kN} \times 1,25\text{m} + 3,78 \text{ kN.m}$  ( peso próprio) =  $378,78 \text{ kN.m}$

$$\text{Tensão do aço da armadura} = \frac{M}{Z \times A_{\text{aço}}} = \frac{378,78 (\text{kN.m})}{0,345\text{m} \times 27,12 (\text{cm}^2)} = 40,48 (\text{kN/cm}^2)$$

A tensão medida na armadura foi de  $41\text{kN/cm}^2$  na viga TA10.

A tensão no aço está acima do limite elástico (  $30\text{kN/cm}^2$ ) e é igual ao limite

$$\text{plástico } \sigma_{0,2\%} = 40 (\text{kN/cm}^2)$$

Área efetiva do concreto ao redor da barra tracionada : Ver Figura 1

$$A_{c,\text{efetiva}} = 16\text{cm} \times ( 2,6+2,4+3,0+2,4+16,8)\text{cm} = 16\text{cm} \times 27,2\text{cm} = 435,2\text{cm}^2$$

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{c,\text{efetiva}}} = \text{onde } A_s = \text{área da barra de aço}$$

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{c,\text{efetiva}}} = \frac{6 \times 4,52\text{cm}^2}{435,2\text{cm}^2} = 0,0623$$

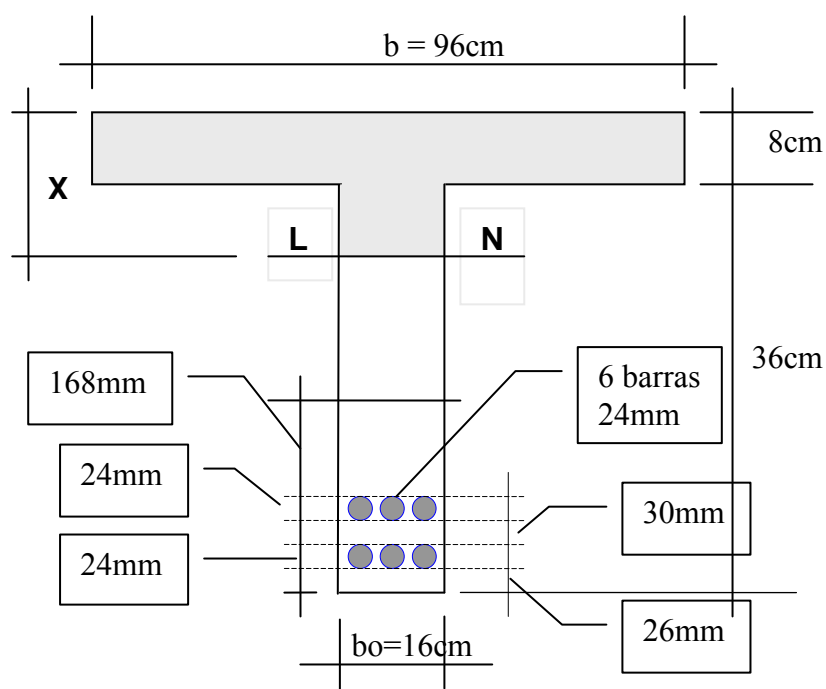


Figura1



Espaçamento médio entre as fissuras:

$$S_{rm} = 2 \times (c + 0,10 S) + 0,05 \times \frac{\phi}{\rho_r}$$

$$c = 2,6 \text{ cm}$$

S = 5,4cm na direção vertical

S = 4,2cm na direção horizontal

$$\phi = 2,4 \text{ cm}$$

$$\rho_r = 0,0623$$

$$S_{rm} = 2 \times (2,6 \text{ cm} + 0,10 \times 5,4 \text{ cm}) + 0,05 \times \frac{2,4 \text{ cm}}{0,0623} = 6,28 + 1,90 = 8,2 \text{ cm}$$

$$S_{rm} = 8,2 \text{ cm}$$

O espaçamento médio medido na viga TA10, no trecho central, foi de 5,4 cm.

O que corresponde à metade do espaçamento do estribo que era 11,3cm

Forma-se uma fissura sobre cada estribo e em seguida uma nova fissura entre eles.

Alongamento médio da barra de aço:

$$\text{Tensão do aço da armadura} = \frac{M}{Z \times A_{aço}} = \frac{378,78 \text{ (kN.m)}}{0,345 \text{ m} \times 27,12 \text{ (cm}^2\text{)}} = 40,48 \text{ (kN/cm}^2\text{)}$$

$$\sigma_{aço \text{ 1}^a \text{ fissura}} = \frac{14,0 \text{ (kN.m)}}{0,345 \text{ (m)} \times 27,12 \text{ (cm}^2\text{)}} = \dots = 149 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

$$\varepsilon_{s.m} = \frac{\sigma_{aço}}{E_{aço}} \times \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{aço \text{ 1}^a \text{ fissura}}}{\sigma_{aço}} \right)^2 \right] = \frac{4048}{2100000} \times \left[ 1 - \left( \frac{149}{4048} \right)^2 \right] = 1,925 \text{ ‰}$$

Abertura máxima da fissura de flexão :

$$\omega_{95\%} = 1,7 \times \varepsilon_{s.m} \times S_{rm} = 1,7 \times 1,925 \text{ (mm/m)} \times 0,082 \text{ (m)} = 0,27 \text{ mm}$$

Segundo a norma brasileira **NBR6118 / 2002**

$$\omega = \frac{26 \text{ mm}}{12,5 \times 2,25} \times \frac{4048 \text{ kgf/cm}^2}{2100000 \text{ kgf/cm}^2} \times \frac{3 \times 4048 \text{ kgf/cm}^2}{28 \text{ kgf/cm}^2} = 0,77 \text{ mm}$$

$$\omega = \frac{26 \text{ mm}}{12,5 \times 2,25} \times \frac{4048}{2100000} \times \left( \frac{4}{0,0623} + 45 \right) = 0,195 \text{ mm}$$



**Fissura para a carga P total =  $2 \times \left(\frac{P}{2}\right) = 40 \text{ ton} = 400 \text{ kN}$**

Momento fletor atuante =  $200 \text{ kN} \times 1,25 \text{ m} + 3,78 \text{ kN} \cdot \text{m}$  ( peso próprio) =  $253,78 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Tensão do aço da armadura :

$$\sigma_{\text{aço}} = \frac{M}{z \times A_{\text{aço}}} = \frac{253,78 \text{ (kN.m)}}{0,345 \text{ m} \times 27,12 \text{ (cm}^2\text{)}} = 27,12 \text{ (kN/cm}^2\text{)} < 30 \text{ (kN/cm}^2\text{)}$$

O aço está no regime elástico .

Área efetiva do concreto ao redor da barra tracionada : Ver figura 1.

$A_{c,\text{efetivo}} = 16 \text{ cm} \times (2,6 + 2,4 + 3,0 + 2,4 + 16,8) \text{ cm} = 16 \text{ cm} \times 27,2 \text{ cm} = 435,2 \text{ cm}^2$

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{c,\text{efetiva}}} = \frac{6 \times 4,52 \text{ cm}^2}{435,2 \text{ cm}^2} = 0,0623$$

Espaçamento médio entre as fissuras:

$$S_{rm} = 8,2 \text{ cm}$$

O espaçamento médio medido na viga TA10 foi de 8,3 cm

Alongamento médio da barra de aço:

$$\sigma_{\text{aço } 1^{\text{a}} \text{ fissura}} = \frac{26,6 \text{ (kN.m)}}{0,345 \text{ (m)} \times 27,12 \text{ (cm}^2\text{)}} = \dots = 284 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

$$\varepsilon_{s,m} = \frac{\sigma_{\text{aço}}}{E_{\text{aço}}} \times \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{\text{aço } 1^{\text{a}} \text{ fissura}}{\sigma_{\text{aço}}} \right)^2 \right] = \frac{2712}{2100000} \times \left[ 1 - \left( \frac{284}{2712} \right)^2 \right] = 1,28 \text{ ‰}$$

Abertura máxima da fissura de flexão :

$$\omega_{95\%} = 1,7 \times \varepsilon_{sm} \times S_{rm} = 1,7 \times 1,28 \text{ (mm/m)} \times 0,082 \text{ (m)} = 0,18 \text{ mm}$$

Segundo a norma brasileira **NBR6118 / 2002**

A abertura da fissura é a menor entre as duas abaixo definidas:

$$1. \quad \omega = \frac{\phi}{12,5 \times \eta} \times \frac{\sigma_{\text{aço}}}{E_{\text{aço}}} \times \frac{3 \times \sigma_{\text{aço}}}{f_{ctm_{\text{concreto}}}}$$



$$2. \quad \omega = \frac{\phi}{12,5 \times \eta} \times \frac{\sigma_{\text{aço}}}{E_{\text{aço}}} \times \left( \frac{4}{\rho_r} + 45 \right)$$

$\phi$  = diâmetro da barra

$\eta$  = coeficiente de conformação superficial :

$\eta = 1,00$  para barras lisas

$\eta = 2,25$  para barras nervuradas

$\sigma_{\text{aço}}$  = tensão no aço calculado no estágio 2 = estado limite de utilização (em serviço)

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{c,\text{efetiva}}} = \frac{6 \times 4,52 \text{ cm}^2}{435,2 \text{ cm}^2} = 0,0623$$

$c = 2,6 \text{ cm}$

$S = 5,4 \text{ cm}$  na direção vertical

$S = 4,2 \text{ cm}$  na direção horizontal

$\phi = 2,4 \text{ cm}$

$$\rho_r = 0,0623$$

$$\omega = \frac{26 \text{ mm}}{12,5 \times 2,25} \times \frac{2712 \text{ kgf/cm}^2}{2100000 \text{ kgf/cm}^2} \times \frac{3 \times 2712 \text{ kgf/cm}^2}{28 \text{ kgf/cm}^2} = 0,35 \text{ mm}$$

$$\omega = \frac{26 \text{ mm}}{12,5 \times 2,25} \times \frac{2712}{2100000} \times \left( \frac{4}{0,0623} + 45 \right) = 0,13 \text{ mm}$$

**Fissura para a carga P total =  $2 \times \left( \frac{P}{2} \right) = 20 \text{ ton} = 200 \text{ kN}$**

Momento fletor atuante =  $100 \text{ kN} \times 1,25 \text{ m} + 3,78 \text{ kN} \cdot \text{m}$  ( peso próprio) =  $128,78 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Tensão do aço da armadura:

$$\sigma_{\text{aço}} = \frac{M}{z \times A_{\text{aço}}} = \frac{128,78 \text{ (kN} \cdot \text{m)}}{0,345 \text{ m} \times 27,12 \text{ (cm}^2\text{)}} = 13,76 \text{ (kN/cm}^2\text{)} < 30 \text{ (kN/cm}^2\text{)}$$

O aço está no regime elástico .

Espaçamento médio entre as fissuras:

$$S_{\text{rm}} = 8,2 \text{ cm}$$

O espaçamento médio medido na viga TA10 foi de  $8,3 \text{ cm}$



Alongamento médio da barra de aço:

$$\sigma_{\text{aço 1ª fissura}} = \frac{26,6(\text{kN.m})}{0,345(\text{m}) \times 27,12(\text{cm}^2)} = \dots = 284 \left( \text{kgf/cm}^2 \right)$$

$$\varepsilon_{s.m} = \frac{\sigma_{\text{aço}}}{E_{\text{aço}}} \times \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{\text{aço.1ª.fissura}}}{\sigma_{\text{aço}}} \right)^2 \right] = \frac{1376}{2100000} \times \left[ 1 - \left( \frac{284}{1376} \right)^2 \right] = 0,627 \text{ ‰}$$

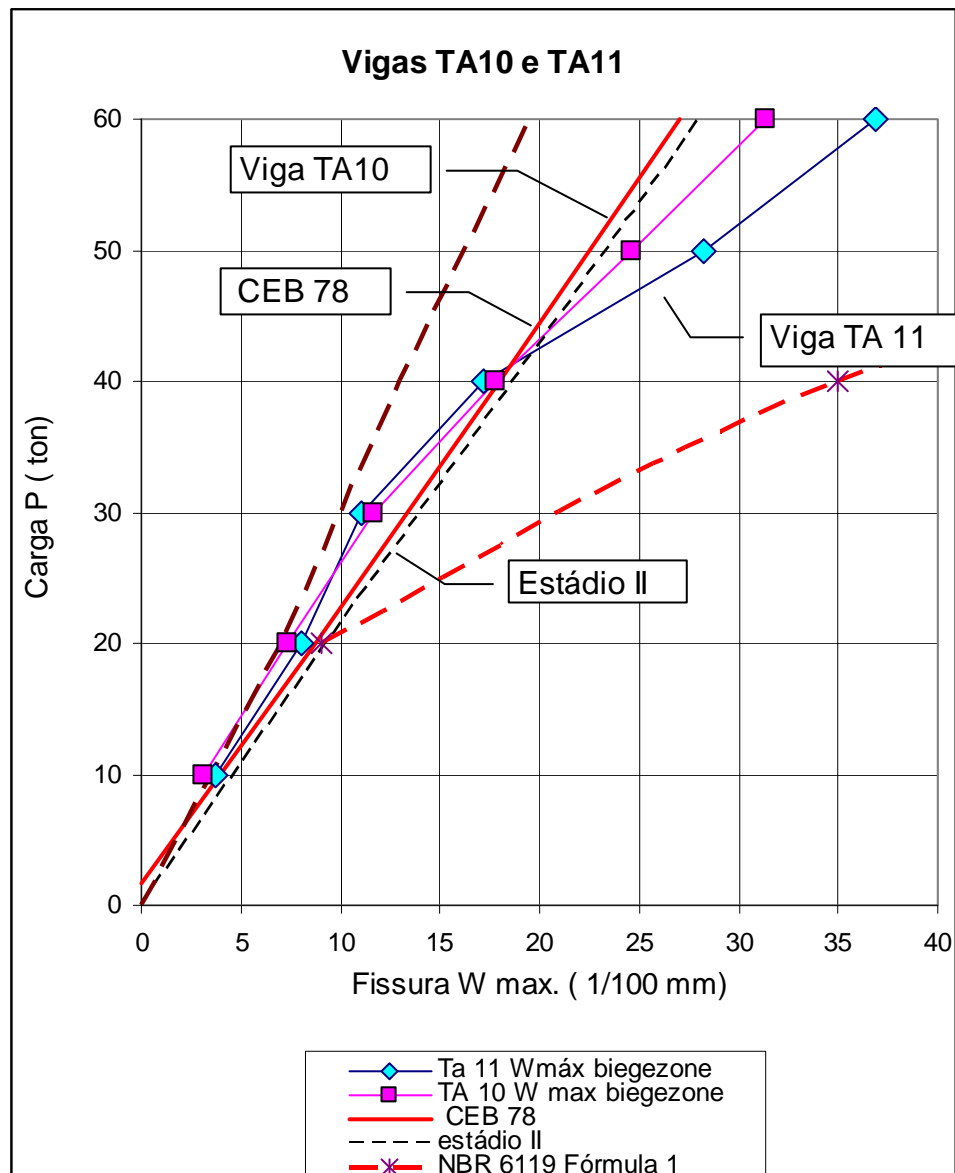
Abertura máxima da fissura de flexão :

$$\omega_{95\%} = 1,7 \times \varepsilon_{s.m} \times S_{r.m} = 1,7 \times 0,627(\text{mm/m}) \times 0,082(\text{m}) = 0,087\text{mm}$$

Segundo a norma brasileira **NBR6118 / 2002**

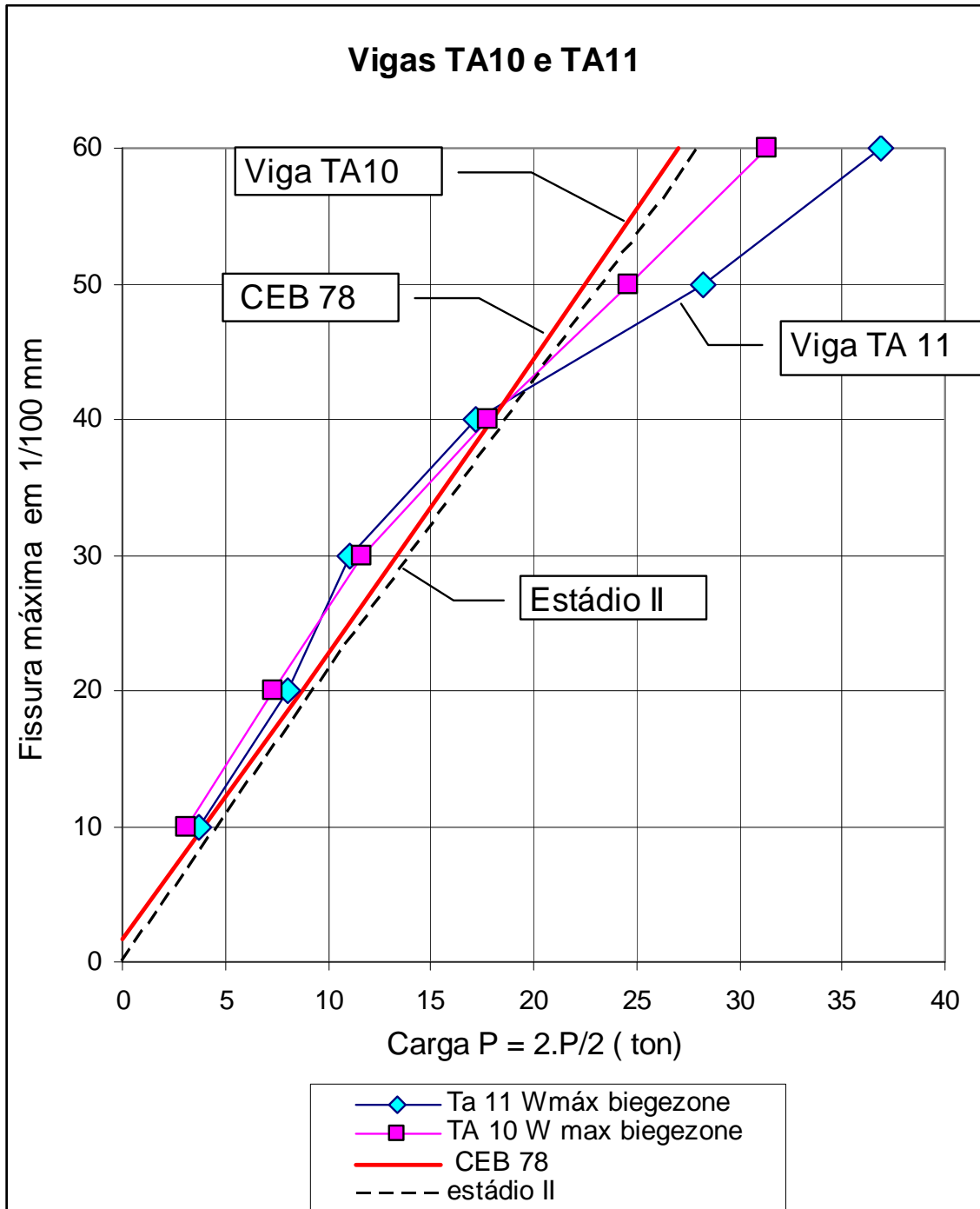
$$\omega = \frac{26\text{mm}}{12,5 \times 2,25} \times \frac{1376\text{kgf/cm}^2}{2100000\text{kgf/cm}^2} \times \frac{3 \times 1376\text{kgf/cm}^2}{28\text{kgf/cm}^2} = 0,09\text{mm}$$

$$\omega = \frac{26\text{mm}}{12,5 \times 2,25} \times \frac{1376}{2100000} \times \left( \frac{4}{0,0623} + 45 \right) = 0,07\text{mm}$$



A fórmula da NBR 6118 não faz boa estimativa da abertura de fissura .





A fórmula do CEB 78 e a do Estádio II dão boas estimativas .