



## Ensaio de flexão realizados no laboratório de materiais da Faculdade de Engenharia da FE-UERJ

Foram ensaiadas 4 vigas com as dimensões e armaduras de flexão da figura 28 abaixo.

Os estribos eram diferentes em cada viga, usando diâmetros de  $\phi 5\text{mm}$  e  $\phi 6,3\text{mm}$ .

O espaçamento era de 5cm, 10cm, 15cm, 20cm e 25cm.

Como eles não são considerados no cálculo da abertura de fissura de flexão, não estão detalhados na figura 28.

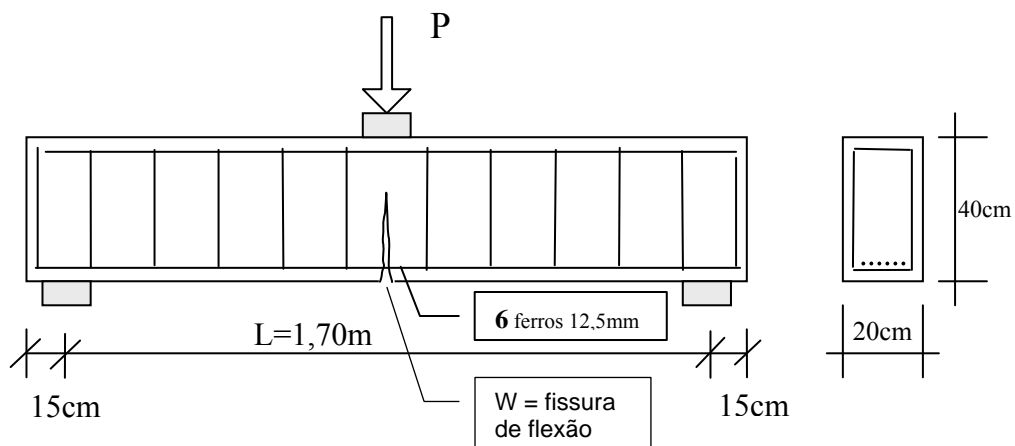


Figura 29

Faremos o cálculo da abertura da fissura de flexão para diversas cargas e compararemos com a medição feita na viga ensaiada.

Posição da linha neutra:

$$k_x = n \times \mu \times \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{n \times \mu}} \right]$$

onde :

$$k_x = \frac{x}{d} ; \quad n = \frac{E_{\text{aço}}}{E_{\text{concreto}}} = 7 \text{ a } 10 ; \quad \mu = \frac{A_{\text{aço}}}{b \times d}$$

No nosso exemplo: A resistência  $f_{ck}$  das vigas V1 e V2 foi de 15,6MPa ( $f_{ctk} 95\% \cong 2,5 \text{ MPa}$ ) e nas vigas V3 e V4  $f_{ck} = 21,1\text{MPa}$  ( $f_{ctk} 95\% \cong 3,0 \text{ MPa}$ )



Com  $f_{ck} = 15,6 \text{ MPa}$  e pela Norma NBR6118 ,

$$E_c(\text{MPa}) = 5600\sqrt{f_{ck}(\text{MPa})} = 5600\sqrt{15,6} = 21700\text{MPa} = 22,1\text{GPa}$$

Com  $f_{ck} = 21,1 \text{ MPa}$

$$E_c(\text{MPa}) = 5600\sqrt{f_{ck}(\text{MPa})} = 5600\sqrt{21,1} = 25700\text{MPa} = 25,7\text{GPa}$$

$$n_{(f_{ck} = 15,6\text{MPa})} = \frac{2100000 \left( \text{kgf/cm}^2 \right)}{221000 \left( \text{kgf/cm}^2 \right)} = 9,5$$

$$n_{(f_{ck} = 21,1\text{MPa})} = \frac{2100000 \left( \text{kgf/cm}^2 \right)}{257000 \left( \text{kgf/cm}^2 \right)} = 8,2$$

Usaremos  $n = 9$  para o cálculo da linha neutra

$$\mu = \frac{A_{\text{aço}}}{b \times d} = \frac{6 \times 1,23\text{cm}^2}{20\text{cm} \times 37\text{cm}} = 0,01 = 1,0 \%$$

$$k_X = \mu \times n \times \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{n \times \mu}} \right]$$

$$k_X = 0,01 \times 9,0 \times \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{0,01 \times 9,0}} \right] = 0,344$$

Zona comprimida :  $X = 0,344 \times 37\text{cm} = 12,7 \text{ cm}$

Braço de alavanca :  $z = d - (1/3) \cdot X = 37 - (1/3) \times 12,7\text{cm} = 32,8\text{cm}$





Espaçamento médio entre as fissuras:

$$S_{rm} = 2 \times (c + 0,10 S) + 0,05 \times \frac{\phi}{\rho_f}$$

$$S_{rm} = 2 \times (2,5\text{cm} + 0,10 \times 2,7\text{cm}) + 0,05 \times \frac{1,25\text{cm}}{0,0293} = 5,54 + 2,13 = 7,7\text{cm}$$

$$S_{rm} = 7,7\text{cm}$$

$$\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a.fissura}}} = \frac{M_{(1^{\text{a.fissura})}}}{d \times \left(1 - \frac{kx}{3}\right) \times A_{\text{aço}}}$$

Momento fletor ao ocorrer a 1ª fissura :

Consideramos para o concreto das vigas ensaiadas, com ( $15,6\text{MPa} \leq f_c \leq 21,1\text{MPa}$ ) a resistência a tração  $f_{ctk_{95\%}} = 2,75 \text{ MPa}$ .

$$M_{(1^{\text{a.fissura})}} = \frac{b \times h^2}{6} \times f_{ctk_{95\%}} = \frac{0,20\text{m} \times 0,40^2\text{m}}{6} \times 2750 \left(\text{kN/m}^2\right) = 14,7\text{kN.m}$$

$$\text{Carga para a 1ª fissura : } M = \frac{P \times L}{4} = \frac{P(\text{kN}) \times 1,70\text{m}}{4} = 14,7 \text{ kN.m}$$

$$P_{1^{\text{a.fissura}}} = 34,5 \text{ k.N}$$

$$\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a.fissura}}} = \frac{14,7(\text{kN.m})}{0,37\text{m} \times \left(1 - \frac{0,344}{3}\right) \times \left(6 \times 1,23 \left(\text{cm}^2\right)\right)} = \dots = 608\text{kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a.fissura}}} = 608\text{kgf/cm}^2$$



Abertura de fissura para a carga **P = 250 kN**

$$M = \frac{P \times L}{4} = \frac{250(\text{kN}) \times 1,70\text{m}}{4} = 106,25\text{kN.m}$$

$$\sigma_{\text{aço}} = \frac{M}{z \times A_{\text{aço}}} = \frac{106,25 (\text{kN.m})}{0,328\text{m} \times \left(6 \times 1,23 (\text{cm}^2)\right)} = 43,89 (\text{kN/cm}^2)$$

$$\sigma_{\text{aço}} = 4389 (\text{kgf/cm}^2)$$

Espaçamento médio entre as fissuras:

$$S_{\text{rm}} = 2 \times (c + 0,10 S) + 0,05 \times \frac{\phi}{\rho_r}$$

$$S_{\text{rm}} = 7,7\text{cm}$$

Alongamento médio do aço entre as fissuras :

$$\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a}} \text{fissura}} = 608\text{kgf/cm}^2$$

$$\varepsilon_{\text{s.m}} = \frac{\sigma_{\text{aço}}}{E_{\text{aço}}} \times \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a}} \text{fissura}}{\sigma_{\text{aço}}} \right)^2 \right] = \frac{4389}{2100000} \times \left[ 1 - \left( \frac{608}{4389} \right)^2 \right] = 1,62\text{‰}$$

$$\varepsilon_{\text{s.m}} = 2,09 \times 0,98\text{‰} = 2,05\text{mm/m}$$

Abertura máxima de fissura segundo o CEB / 78 :

$$\omega_{95\%} = 1,7 \times \varepsilon_{\text{sm}} \times S_{\text{rm}} = 1,7 \times 2,05(\text{mm/m}) \times 0,077(\text{m}) = 0,268\text{mm}.$$



Abertura de fissura para a carga **P = 200 kN**

Tensão no aço para a carga P = 200 kN

$$M = \frac{P \times L}{4} = \frac{200(\text{kN}) \times 1,70\text{m}}{4} = 85,0\text{kN.m}$$

$$\sigma_{\text{aço}} = \frac{M}{z \times A_{\text{aço}}} = \frac{85,0 (\text{kN.m})}{0,328\text{m} \times \left(6 \times 1,23 (\text{cm}^2)\right)} = 35,11 (\text{kN/cm}^2)$$

$$\sigma_{\text{aço}} = 3511 (\text{kgf/cm}^2)$$

Espaçamento médio entre as fissuras:

$$S_{\text{rm}} = 2 \times (c + 0,10 S) + 0,05 \times \frac{\phi}{\rho_r}$$

$$S_{\text{rm}} = 7,7\text{cm}$$

Alongamento médio do aço entre as fissuras :

$$\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a.fissura}}} = 608\text{kgf/cm}^2$$

$$\varepsilon_{\text{s.m}} = \frac{\sigma_{\text{aço}}}{E_{\text{aço}}} \times \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a.fissura}}}}{\sigma_{\text{aço}}} \right)^2 \right] = \frac{3511}{2100000} \times \left[ 1 - \left( \frac{608}{3511} \right)^2 \right] = 1,62\text{‰}$$

$$\varepsilon_{\text{s.m}} = 1,672 \times 0,970\text{‰} = 1,622 \text{ mm/m}$$

Abertura máxima de fissura segundo o CEB / 78 :

$$\omega_{95\%} = 1,7 \times \varepsilon_{\text{sm}} \times S_{\text{rm}} = 1,7 \times 1,622 (\text{mm/m}) \times 0,077(\text{m}) = \mathbf{0,212\text{mm}} .$$



### Abertura de fissura para a carga de $P=100\text{kN}$

Tensão no aço para a carga  $P = 100 \text{ kN}$

$$M = \frac{P \times L}{4} = \frac{100(\text{kN}) \times 1,70\text{m}}{4} = 42,5\text{kN.m}$$

$$\sigma_{\text{aço}} = \frac{M}{z \times A_{\text{aço}}} = \frac{42,5 \text{ (kN.m)}}{0,328\text{m} \times \left(6 \times 1,23 \left(\text{cm}^2\right)\right)} = 17,56 \left(\text{kN/cm}^2\right)$$

$$\sigma_{\text{aço}} = 1756 \left(\text{kgf/cm}^2\right)$$

Espaçamento médio entre as fissuras:

$$S_{\text{rm}} = 2 \times (c + 0,10 S) + 0,05 \times \frac{\phi}{\rho_{\text{r}}}$$

$$S_{\text{rm}} = 7,7\text{cm}$$

Alongamento médio do aço entre as fissuras :

$$\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a.fissura}}} = 608\text{kgf/cm}^2$$

$$\varepsilon_{\text{s.m}} = \frac{\sigma_{\text{aço}}}{E_{\text{aço}}} \times \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a.fissura}}}}{\sigma_{\text{aço}}} \right)^2 \right] = \frac{1756}{2100000} \times \left[ 1 - \left( \frac{608}{1756} \right)^2 \right] =$$

$$\varepsilon_{\text{s.m}} = 0,836 \times 0,88\text{‰} = 0,736\text{‰}$$

Abertura máxima de fissura segundo o CEB / 78 :

$$\omega_{95\%} = 1,7 \times \varepsilon_{\text{sm}} \times S_{\text{rm}} = 1,7 \times 0,736(\text{mm/m}) \times 0,077(\text{m}) = 0,096\text{mm} = 0,1\text{mm} .$$



### Abertura de fissura para a carga de $P=50\text{kN}$

Tensão no aço para a carga  $P = 50 \text{ kN}$

$$M = \frac{P \times L}{4} = \frac{50(\text{kN}) \times 1,70\text{m}}{4} = 21,25\text{kN.m}$$

$$\sigma_{\text{aço}} = \frac{M}{z \times A_{\text{aço}}} = \frac{21,25 \text{ (kN.m)}}{0,328\text{m} \times \left(6 \times 1,23 \left(\text{cm}^2\right)\right)} = 8,78 \left(\text{kN/cm}^2\right)$$

$$\sigma_{\text{aço}} = 878 \left(\text{kgf/cm}^2\right)$$

Espaçamento médio entre as fissuras:

$$S_{\text{rm}} = 2 \times (c + 0,10 S) + 0,05 \times \frac{\phi}{\rho_{\text{r}}}$$

$$S_{\text{rm}} = 7,7\text{cm}$$

Alongamento médio do aço entre as fissuras :

$$\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a.fissura}}} = 608\text{kgf/cm}^2$$

$$\varepsilon_{\text{s.m}} = \frac{\sigma_{\text{aço}}}{E_{\text{aço}}} \times \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{\text{aço.1}^{\text{a.fissura}}}}{\sigma_{\text{aço}}} \right)^2 \right] = \frac{878}{2100000} \times \left[ 1 - \left( \frac{608}{878} \right)^2 \right] =$$

$$\varepsilon_{\text{s.m}} = 0,418 \times 0,52\text{‰} = 0,217\text{‰}$$

Abertura máxima de fissura segundo o CEB / 78 :

$$\omega_{95\%} = 1,7 \times \varepsilon_{\text{sm}} \times S_{\text{rm}} = 1,7 \times 0,217(\text{mm/m}) \times 0,077(\text{m}) = 0,0275\text{mm} .$$





Abertura máxima de fissura segundo o CEB / 78 e a NBR 6118 /2002

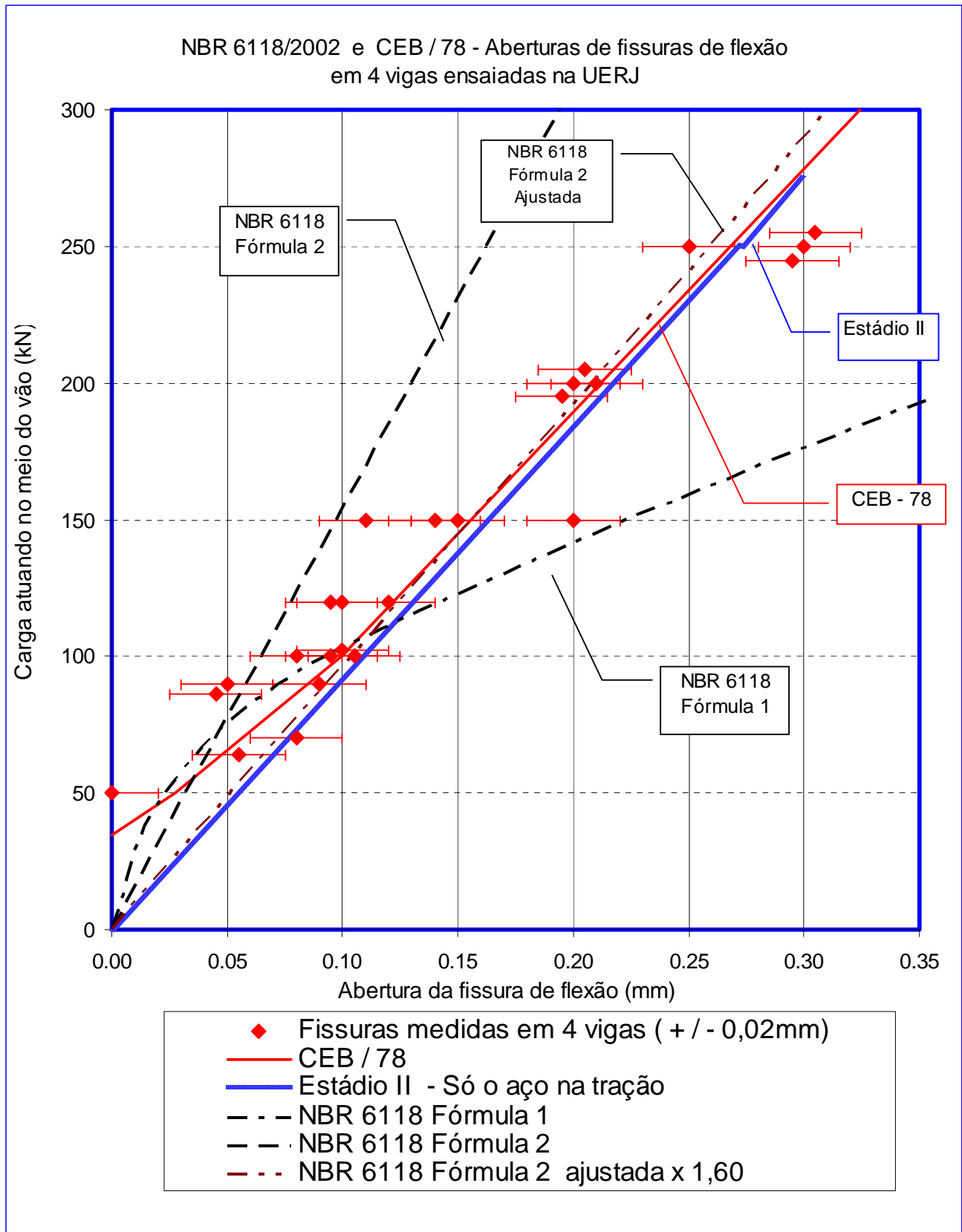


Figura 31



**Resumo e Comentários** sobre as medições e sobre os cálculos das aberturas das fissuras nas 4 vigas com 1,70 metros de vão, ensaiadas na UERJ.

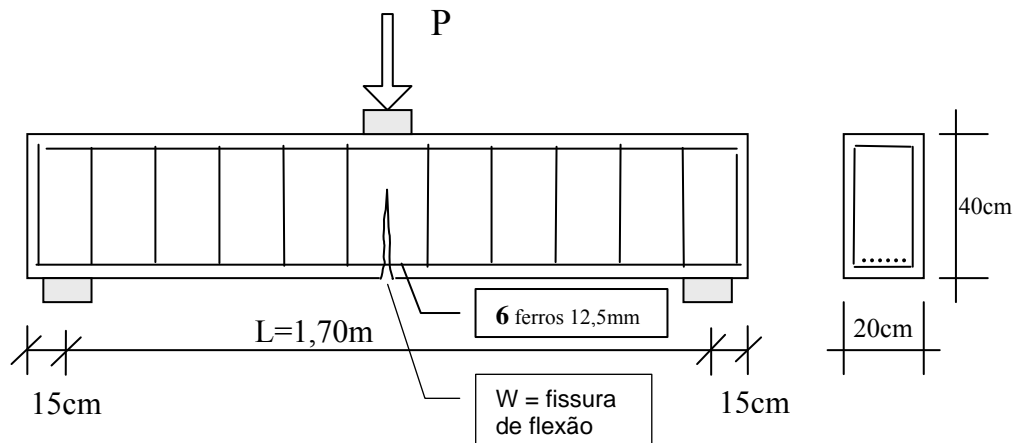


Figura 32 ( igual à figura 29 da página 36 )

- A figura 31 mostra a linha calculada segundo a formulação do CEB / 1978
- É mostrada também a linha calculada supondo o estágio II puro, isto é, só o aço com resistência à tração. O concreto tracionado não é considerado.
- As edições das aberturas de fissuras estão assinaladas com uma faixa de imprecisão de  $\pm 0,020\text{mm}$ .
- Observa-se concordância razoável entre as previsões do CEB / 78 e as medições das aberturas das fissuras feitas nas 4 vigas ensaiadas no Laboratório de Materiais da UERJ.
- Essa concordância razoável também é observada entre as previsões do CEB / 78 e as medições feitas em obras reais.
- A formulação da NBR 6118 prevê aberturas de fissuras bem menores que as fissuras observadas, tanto em obras como em ensaios de laboratório.
- A norma NBR 6118 não apresentou boa concordância com medições feitas nas 2 vigas T1 e T2 , ensaiadas por Leonhardt [26]

- A fórmula 1 
$$\omega = \frac{\phi}{12,5 \times \eta} \times \frac{\sigma_{\text{aço}}}{E_{\text{aço}}} \times \frac{3 \times \sigma_{\text{aço}}}{f_{\text{ctm}_{\text{concreto}}}}$$
 não é coerente e não deve ser usada.



- A fórmula 2 da NBR-6118 / 2002 deveria conter um **fator 1,6** que mostra a relação entre as aberturas de fissura ( $W_{\text{máxima}} / W_{\text{média}}$ ) nos ensaios realizados na UERJ.

$$\omega_{\text{máx.}} = 1,6 \times \omega_{\text{média}} = 1,6 \times \frac{\phi}{12,5 \times \eta} \times \frac{\sigma_{\text{aço}}}{E_{\text{aço}}} \times \left( \frac{4}{\rho_r} + 45 \right)$$

- Esse fator de ajuste da fórmula 2 da NBR 6118 oscila entre **1,60** e **1,80** dependendo da obra ou do modelo ensaiado