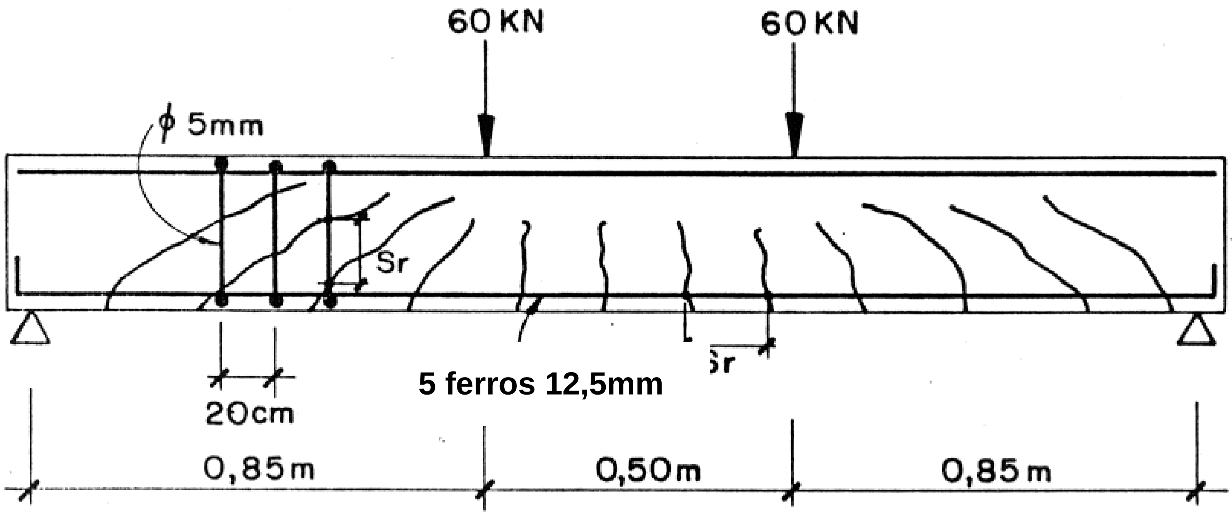
Exemplo de cálculo da abertura da fissura de flexão.
Consideremos uma viga simples conforme mostrado na figura abaixo.
Esse exemplo é um ensaio feito em laboratório na UERJ por E. Thomaz.



Vista Lateral

Seção transversal

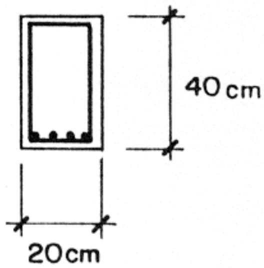


Figura 16

Momento fletor no meio do vão :

- Momento das 2 cargas concentradas:
  M = 60 kN x 0,85 m =51 kN.m

- Momento do peso próprio:
  g = 0,20m x 0,40m x 25 kN/m^3 =2,0 (kN /m)
  M = $\frac{q \times L^2}{8} = \frac{2{,}0 \times 2{,}20^2}{8} = 1{,}21 \text{kN.m}$
- Momento total = 51+ 1,21 = 52,21 kN.m

Dimensionamento da armadura no estado limite último de flexão. (estádio 3), segundo a NB1 / 78

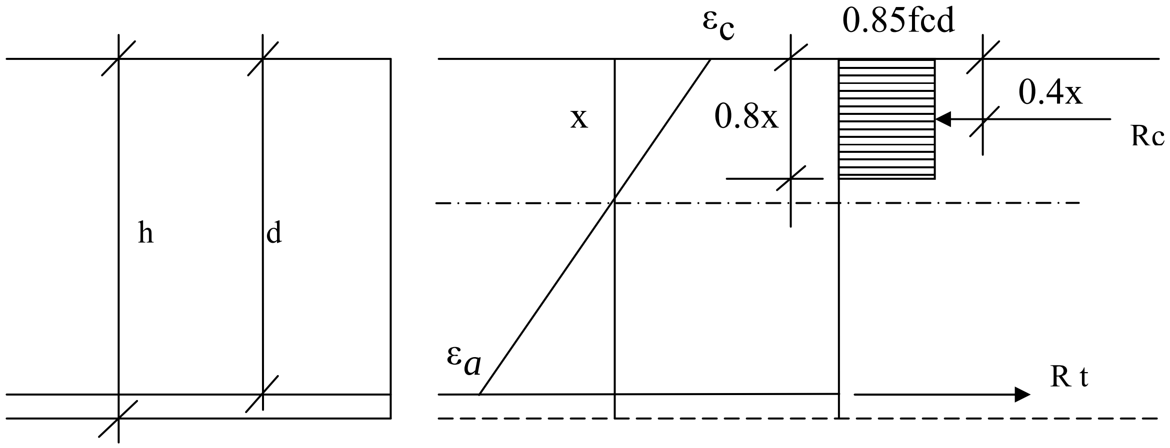


Figura 17

Resultante de compressão : $Rc = b \times (0.8x) \times 0.85fcd$

Resultante de tração : $Rt = A_{aço} \times \sigma_{aço}$

Braço de alavanca : z = d - 0.4x

Momento fletor último resistente : Mu = Rc x z = Rt x z

Mu = $Mu = Rc \times z = [\ b \times (0.8x) \times 0.85fcd\ ] \times (d - 0.4x)$

Dividindo por (b d^2 fcd)

$$\frac{Mu}{bd^2\, fcd} = [\,(0.8\,k_x) \times 0.85\,] \times (1 - 0.4k_x) = 0.68k_x - 0.272k_x^2\ , \quad \text{onde } k_x = \frac{x}{d}$$

Como o momento resistente (Mu) deve ser maior que o momento fletor atuante (Md) , obtemos a posição da linha neutra :

$$\frac{Mu}{bd^2\, fcd} = 0.68k_x - 0.272k_x^2 \geq \frac{Md}{bd^2\, fcd} = kmd = \frac{1{,}4 \times M_{atuante}}{bd^2\left(\dfrac{fck}{1{,}4}\right)}$$

No nosso exemplo :
b = 0.20m
d = 40cm – 3cm =37cm = 0.37m
fck = 15 MPa

Para Mu = Md obtemos a posição da linha neutra :

$$\frac{\mathrm{Md}}{bd^2\, fcd} = kmd = \frac{1{,}4 \times M_{atuante}}{bd^2\left(\frac{fck}{1{,}4}\right)}$$

$$kmd = \frac{1{,}4 \times 52{,}21(kN.m)}{0{,}20(m) \times (0{,}37(m))^2 \times \left(\frac{15000\left(kN/m^2\right)}{1{,}4}\right)} = 0{,}249$$

$$0.68k_x - 0.272k_x^2 \geq kmd = 0{,}249\,; \quad 0.272k_x^2 - 0.68k_x + kmd \leq 0$$

$$\mathrm{kx} = \frac{0.68 \pm \sqrt{(-0.68)^2 - 4 \times 0{,}272 \times (\mathrm{kmd})}}{2 \times 0{,}272}$$

Daí resulta : $(\; 0{,}44 \leq \mathrm{kx} \leq 2.06 \;)$ Evidentemente, kx deve ser <1.
Além disso devemos verificar qual alongamento do aço:

$$\varepsilon_{aço} = \varepsilon_c \times \frac{\mathrm{d-x}}{\mathrm{x}} = 3.5(mm/m) \times \left(\frac{1-kx}{kx}\right)$$

Para a viga não seja super-armada, deve-se fazer com que o alongamento do aço seja maior que ε yd = 4.07 (mm/m) no aço CA50 B

$$\varepsilon_{aço} = \varepsilon_c \times \frac{\mathrm{d-x}}{\mathrm{x}} = 3.5(mm/m) \times \left(\frac{1-kx}{kx}\right) \geq \varepsilon_{yd} = 4{,}07(mm/m) \;\; para\ o\ aço\ \ CA50B$$

Daí resulta k*x* < 0,462
Logo com kx= 0,44 estamos projetando uma viga “ não super-armada”.
Para garantir uma dutilidade da viga devemos limitar k*x* aos seguintas valores:

- k*x* ≤ 0,50 para concretos com fck ≤ 35 MPa
- K*x* ≤ 0,40 para concretos com fck > 35 MPa
- Ver a norma NBR6118 / 2002 item 14.6.4.3

Resumindo os diversos limites acima indicados :

- $0{,}44 \leq kx$; $M_d = 1{,}40 \times M \leq M_u$
- $kx \leq 0{,}462$; $\sigma_{aço} \geq f_{yd}$: Aço escoando ≡ Viga "não super-armada"
- $kx \leq 0{,}50$; Dutilidade estrutural

Usaremos k*x* = 0,44 : X = 0,44 * 37cm =16,3 cm

O braço de alavanca será : z = d - 0,4 X = 37cm – 0,4x 16,3 cm = 30,5 cm

Força de tração na armadura : $Rtd = \dfrac{1{,}40 \times 52{,}21 \ \text{kN.m}}{0{,}305 \ \text{m}} = 239{,}6 \ \text{kN}$

Área da armadura = $\dfrac{239{,}6 \ \text{kN}}{(500000/1{,}15)\left(\text{kN}/\text{m}^2\right)} = \ldots = 5{,}5 cm^2$

Usar 5 ferros 12,5mm = 6,1cm^2

Verificação da fissuração no estádio limite de utilização (estádio 2)

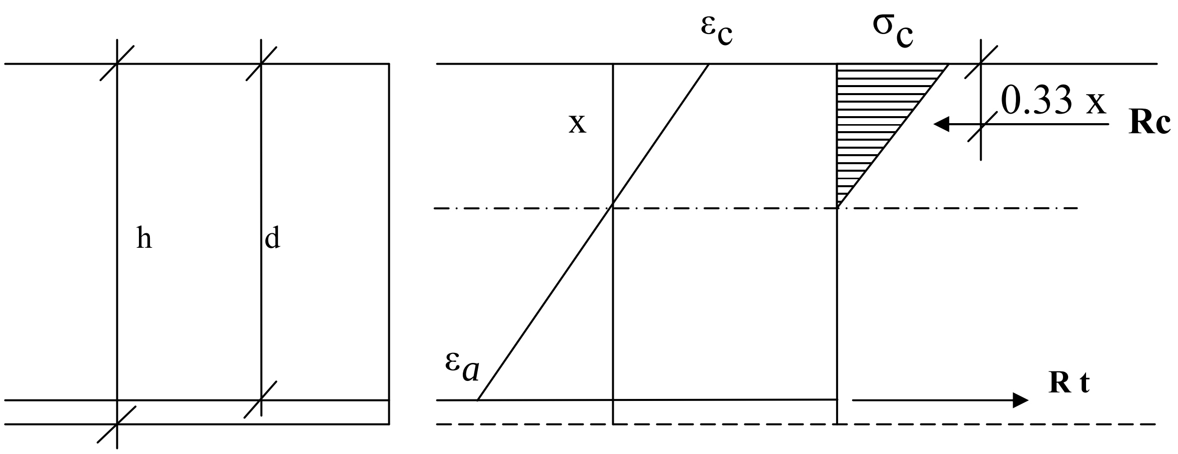


Figura 18

$$R_c = \left(\frac{b \cdot x}{2}\right) \times \sigma_c \; ; \quad R_t = A_{aço} \times \sigma_{aço}$$

$$M = R_c \times z = R_t \times z = \left(\frac{b \cdot x}{2}\right) \times \sigma_c \times \left(d - 0{,}333 \cdot x \right)$$

Daí resulta , em geral :

$$\boxed{k_x = n \times \mu \times \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{n \times \mu}} \right]}$$

onde :

$$k_x = \frac{x}{d} \; ; \qquad n = \frac{E_{aço}}{E_{concreto}} = 7 \text{ a } 10 \quad ; \qquad \mu = \frac{A_{aço}}{b \times d}$$

No nosso exemplo :

f ck = 15 MPa e pela Norma NBR6118 ,

$$Ec(MPa) = 5600\sqrt{fck(MPa)} = 5600\sqrt{15} = 21700MPa = 22GPa$$

$$n = \frac{2100000\left(kgf/cm^2\right)}{217000\left(kgf/cm^2\right)} = 9{,}7$$

$$\mu = \frac{A_{aço}}{b \times d} = \frac{5 \times 1{,}23cm^2}{20cm \times 37cm} = 0{,}0083 = 0{,}83\ \%$$

$$\boxed{k_x = \mu \times n \times \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{n \times \mu}}\right]}$$

$$\boxed{k_x = 0{,}0083 \times 9{,}7 \times \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{0{,}0083 \times 9{,}7}}\right] = 0{,}329}$$

Zona comprimida : x = 0,329 $\times$ 37cm = 12,2 cm

Braço de alavanca : z = d – (1/3). X = 37 – (1/3) $\times$ 12,2cm = 32,9cm

Tensão no aço:

$$\sigma_{aço} = \frac{M}{z \times A_{aço}} = \frac{52{,}21kN.m}{0{,}329m \times \left(5 \times 1{,}23\left(cm^2\right)\right)} = 25{,}8\left(kN/cm^2\right)$$

$$\sigma_{aço} = 2580\left(kgf/cm^2\right)$$

Verificação da abertura de fissura seguindo a formulação do Prof. Gallus Rehm (DIN 1045)

Abertura da fissura na face da viga

Vale lembrar que a abertura de fissura é calculada e medida na face inferior da viga.

$$\boxed{\omega_{95\%}(\text{cm}) = \left(\frac{10^{-6}}{kgf/cm^2}\right)\times\left(4(\text{cm})+0{,}025\times\frac{\phi(\text{cm})}{\mu}\right)\times\sigma_{eII}\left(\text{kgf}/\text{cm}^2\right)\times\left[1-\left(\frac{3}{\mu\times\sigma_{eII}\left(\text{kgf}/\text{cm}^2\right)}\right)^2\right]}$$

$$\omega_{95\%}(\text{cm}) = \left(10^{-6}\right)\times\left(4+0{,}025\times\frac{1{,}25}{0{,}0083}\right)\times 2580\times\left[1-\left(\frac{3}{0{,}0083\times 2580}\right)^2\right]$$

$$\omega_{95\%}(\text{cm}) = \frac{10^{-6}}{\left(kgf/cm^2\right)}\times 7{,}765(\text{cm})\times 2529\left(kgf/cm^2\right) = 0{,}0196\ cm = 0{,}20\ mm$$

<u>Observação</u> : No ensaio da viga, no Laboratório de Materiais da UERJ, a abertura de fissura máxima de flexão, medida no trecho entre as duas cargas concentradas, foi W máx. = 0,16mm.

Abertura da fissura na altura da armadura

A abertura da fissura na altura da armadura é menor que a abertura na face externa e pode ser estimada usando a fórmula de Gallus Rehm usando o termo $K_2\times\ddot{u}_b = 0$ ao invés de 4cm.

$$\boxed{\omega_{95\%}(\text{cm}) = \left(\frac{10^{-6}}{kgf/cm^2}\right)\times\left(0\ +\ 0{,}025\times\frac{\phi(\text{cm})}{\mu}\right)\times\sigma_{eII}\left(\text{kgf}/\text{cm}^2\right)\times\left[1-\left(\frac{3}{\mu\times\sigma_{eII}\left(\text{kgf}/\text{cm}^2\right)}\right)^2\right]}$$

$$\omega_{95\%.\,(\text{armadura})}(\text{cm}) = \frac{10^{-6}}{\left(kgf/cm^2\right)}\times 3{,}765(\text{cm})\times 2529\left(kgf/cm^2\right) = 0{,}0095\,cm = 0{,}1\ mm$$

<u>Observação</u> : No ensaio da viga, no Laboratório de Materiais da UERJ, a abertura de fissura na altura da armadura, medida no trecho entre as duas cargas concentradas, foi

$W_{(\text{armadura})} \cong 0{,}11\text{mm}.$

Resumo do cálculo da abertura da fissura usando a formulação de G.Rehm

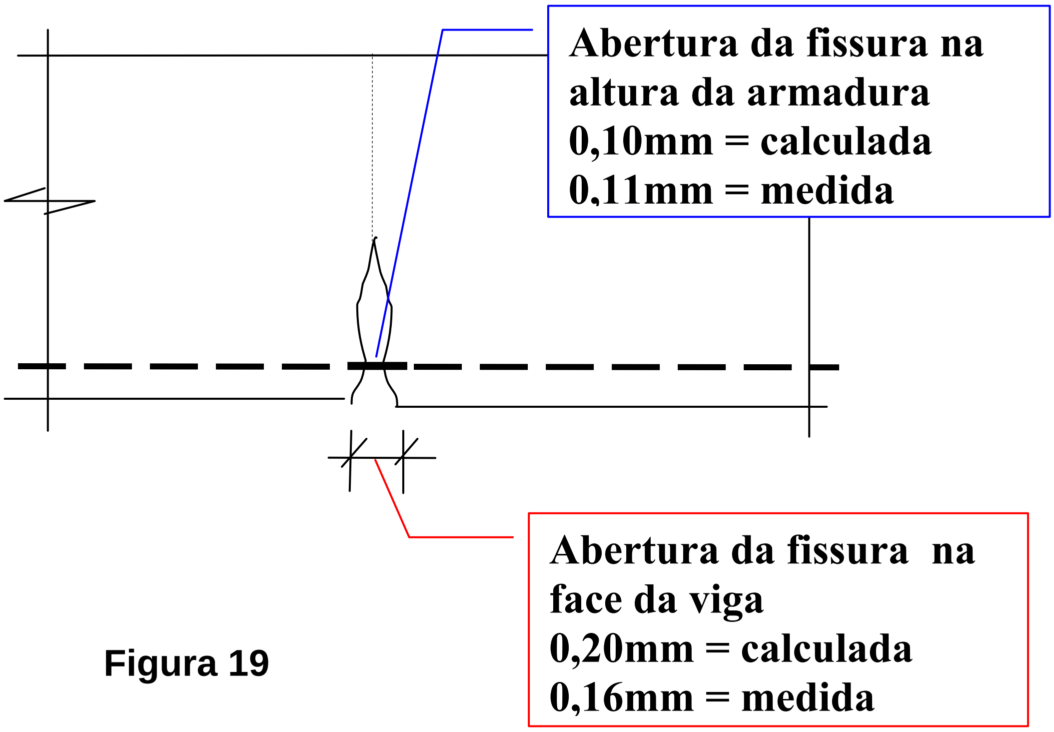


Figura 19

Segundo Y. Goto [18], a fissura na face da viga é maior do que junto à barra da armadura. Ver Fig. 20 .

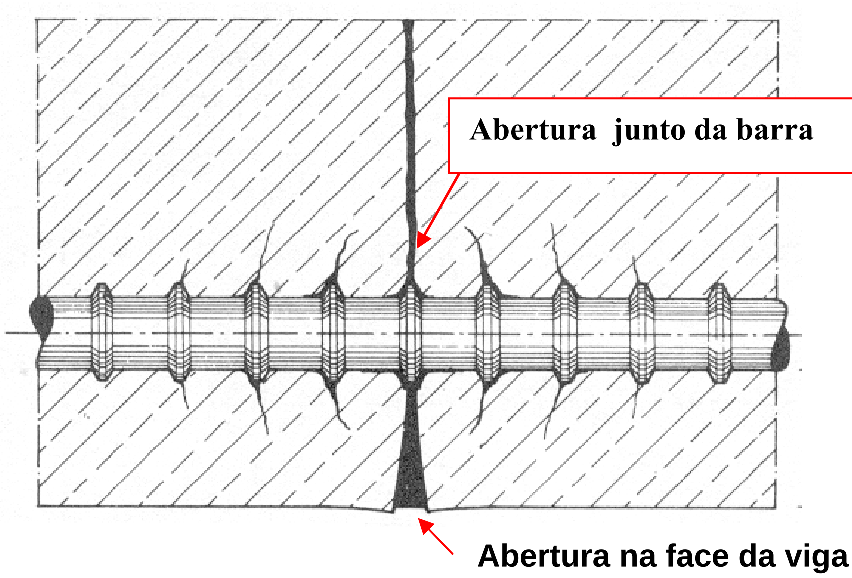
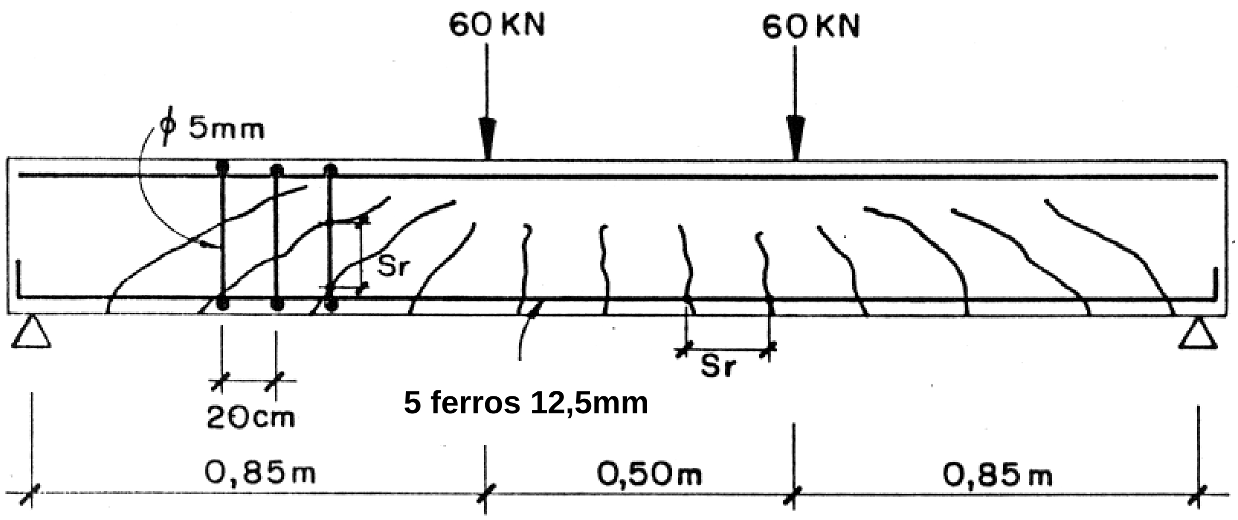


Figura 20

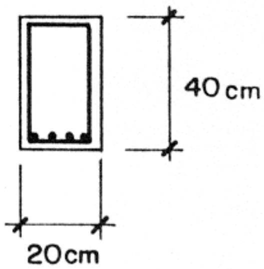
- A abertura da fissura junto da armadura é realmente menor que a abertura na face externa da viga.

Exemplo de cálculo da abertura da fissura de flexão. **(Continuação)**

Usando a formulação do CEB / 78



Vista Lateral



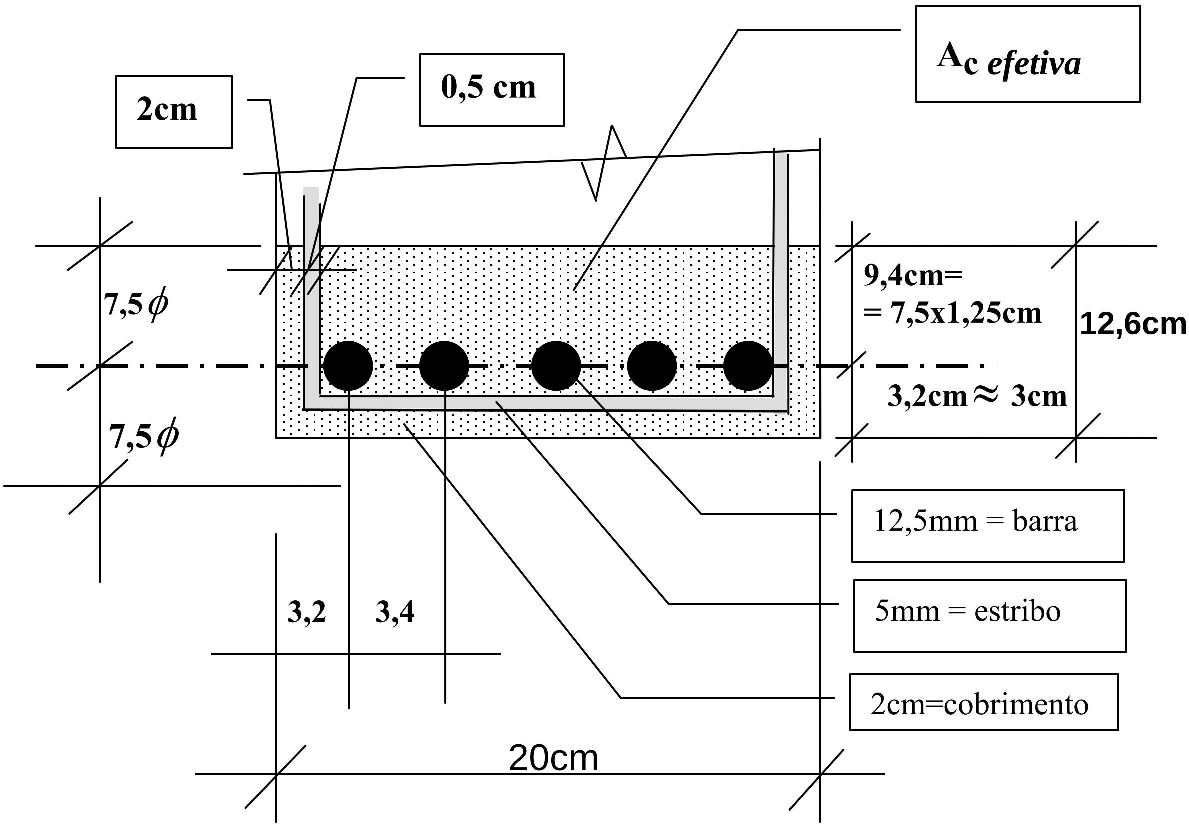
Seção transversal

Figura 22 = Repetição da figura 16 da página 14

Os cálculos no estádio limite último (ruptura) e no estado limite de utilização (estádio II) já foram feitos anteriormente e não serão repetidos, pois são os mesmos. Faremos apenas o cálculo da abertura de fissura.

Cálculo da área efetiva do concreto

Ac, efetiva = área efetiva de concreto que envolve a barra de aço.
É obtida considerando uma distância = $7{,}5\times\phi$ para cada lado da barra.
Ver figura 22



$$A_{c\ efetiva} = 20\text{cm} \times 12{,}6\text{ cm} = 252\text{ cm}^2$$

Figura 23

$$\rho_r = \frac{As}{Ac,efetiva}$$ onde As = área da barra de aço

$$\rho_r = \frac{As}{Ac,efetiva} = \frac{5\times1{,}23cm^2}{252cm^2} = 0{,}0244$$

Espaçamento médio entre as fissuras:

$$S_{rm} = 2\times(C + 0{,}10\ S) + 0{,}05\times\frac{\phi}{\rho_r}$$

$$S_{rm} = 2\times(2{,}5\text{cm} + 0{,}10\times3{,}4\text{cm}) + 0{,}05\times\frac{1{,}25\text{cm}}{0{,}0244} = 5{,}68 + 2{,}56 = 8{,}2\text{cm}$$

$$\underline{S_{rm} = 8{,}2\text{cm}}$$

Tensão no aço no estádio **II** – Já calculado anteriormente :

$$\sigma_{\text{aço (em serviço)}} = 2580 \;(\; kgf\,/\,cm^2 \;)$$

Alongamento médio entre as fissuras :

$$\sigma_{\text{aço.1}^{a}\text{.fissura}} = \frac{M_{(1^{a}.fissura)}}{d \times \left(1 - \frac{kx}{3}\right) \times A_{aço}}$$

Momento fletor ao ocorrer a 1ª fissura :

Para fc = 15 MPa obtemos fctk 95% =2,4MPa

$$M_{(1^{a}\text{.fissura})} = \frac{b \times h^2}{6} \times fctk_{95\%} = \frac{0{,}20\text{m} \times 0{,}40^2_{\text{m}}}{6} \times 2400\left(\text{kN}/\text{m}^2\right) = 12{,}8\text{kN.m}$$

$$\sigma_{\text{aço.1}^{a}\text{.fissura}} = \frac{12{,}8\,(\text{kN.m})}{0{,}37\text{m} \times \left(1 - \frac{0{,}329}{3}\right) \times \left(5 \times 1{,}23\left(\text{cm}^2\right)\right)} = \ldots = 632\text{kgf/cm2}$$

$$\sigma_{\text{aço.1}^{a}\text{.fissura}} = 632 kgf\,/\,cm2$$

$$\varepsilon_{s.m} = \frac{\sigma_{aço}}{E_{aço}} \times \left[1 - \left(\frac{\sigma_{\text{aço.1}^{a}\text{.fissura}}}{\sigma_{aço}}\right)^2\right] = \frac{2580}{2100000} \times \left[1 - \left(\frac{632}{2580}\right)^2\right] = 1{,}15‰$$

$$\varepsilon_{s.m} = 1{,}15‰ = 1{,}15 \text{ mm/m}$$

Abertura máxima de fissura segundo o CEB / 78 :

$$\omega_{95\%} = 1{,}7 \times \varepsilon_{sm} \times S_{rm} = 1{,}7 \times 1{,}15(\text{mm/m}) \times 0{,}082(\text{m}) = 0{,}16\text{mm}$$

Observação : No ensaio da viga, no Laboratório de Materiais da UERJ, a abertura de fissura máxima de flexão, medida no trecho entre as duas cargas concentradas, foi $\omega_{\textbf{máx.}}$ = 0,16mm.

Exemplo de cálculo da abertura da fissura de flexão. (Continuação)

Usando a formulação da norma NBR 6118

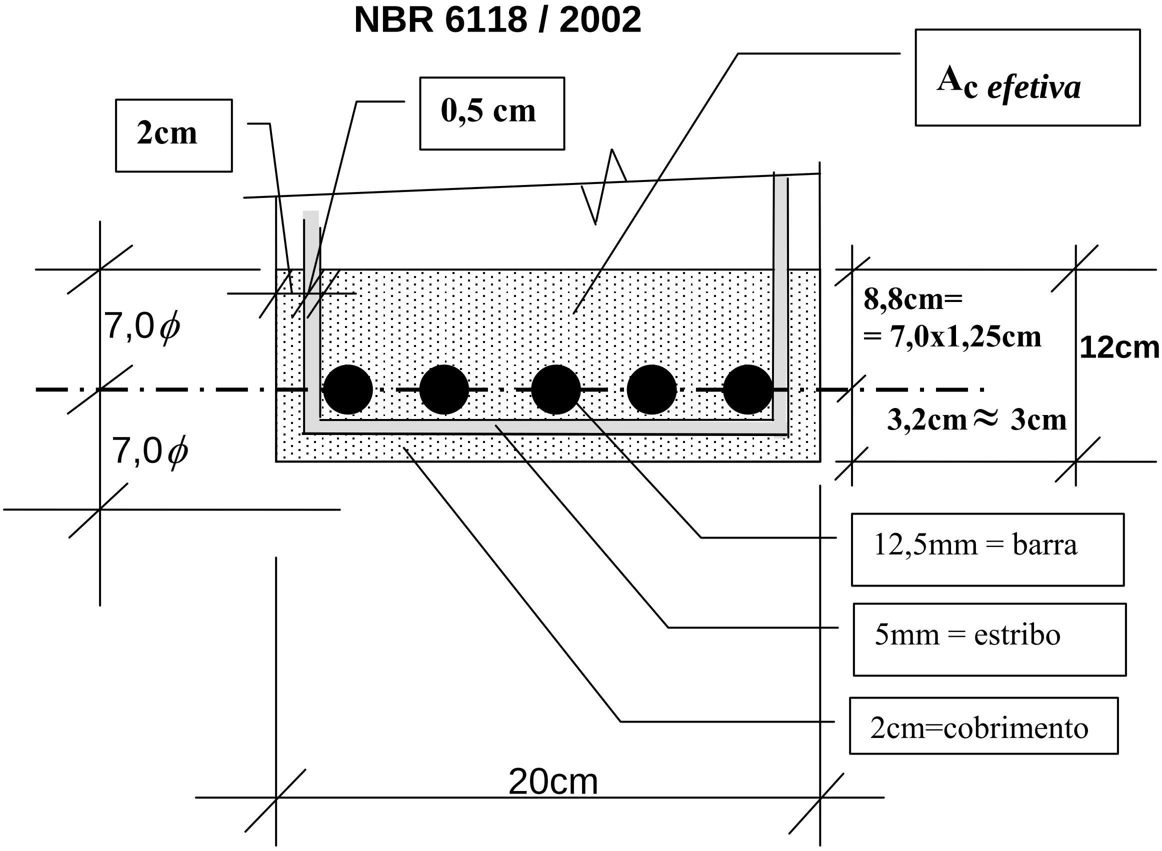
Tensão no aço no estádio 2 – Já calculado anteriormente :

$$\sigma_{\text{aço (em serviço)}} = 2580 \ (\text{ kgf/cm}^2\ )$$

Taxa de armadura (ver a figura 22)

$$\rho_r = \frac{A_{\text{aço}}}{A_{\text{concreto equivalente}}} = \frac{5 \times 1{,}23\text{cm2}}{20\text{cm} \times (3{,}2\text{cm} + 7 \times 1{,}25\text{cm})} = \frac{6{,}15\text{cm}^2}{240\text{cm}^2} = 0{,}0257$$

NBR 6118 / 2002



A_c *efetiva* = 20cm x 12,0 cm =240 cm^2

Figura 24

$$\omega = \frac{1{,}25(\text{cm})}{12{,}5 \times 2{,}25} \times \frac{2580\left(\text{kgf}/\text{cm}^2\right)}{2100000\left(\text{kgf}/\text{cm}^2\right)} \times \frac{3 \times 2580\left(\text{kgf}/\text{cm}^2\right)}{20\left(\text{kgf}/\text{cm}^2\right)} = 0{,}021\text{cm} = 0{,}21\text{mm}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1{,}25(\mathrm{cm})}{12{,}5 \times 2{,}25} \times \frac{2580\left(\mathrm{kgf}/\mathrm{cm}^2\right)}{2100000\left(\mathrm{kgf}/\mathrm{cm}^2\right)} \times \left(\frac{4}{0{,}0257} + 45\right) = 0{,}011cm = \underline{0{,}11\mathrm{mm}}$$

Segundo a NBR618 / 2002 a fissura terá uma abertura de **0,11mm**, que é o menor dos dois valores acima calculados.

Observação : No ensaio da viga, no Laboratório de Materiais da UERJ, a abertura de fissura máxima de flexão, medida no trecho entre as duas cargas concentradas, foi $\omega_{\text{máx.}}$ = 0,16mm.

Cálculo da abertura da fissura de flexão

Comparação dos resultados

Norma	Fissura na face da viga	Fissura na altura da armadura	Observação
Prof.Gallus Rehm	0,20 mm	0,10mm	A formulação do Prof. G.Rehm prevê uma abertura de fissura um pouco maior do que as medições em obras e em laboratórios. É a mais conservadora.
CEB 78	0,16 mm	-----	O C.E.B. é a norma que prevê com mais precisão as aberturas das fissuras
NBR 6118 /2002	1ª fórmula: 0,21 mm 2ª fórmula: 0,11 mm	-----	A norma brasileira prevê aberturas de fissuras menores do que as medições em obras e em laboratórios É a menos conservadora
Medição feita na viga no laboratório da UERJ	0,16 mm	0,11 mm	

- Em vigas com dimensões diferentes do exemplo anterior, as previsões das aberturas de fissura das diferentes normas mantêm a mesma posição relativa do exemplo acima.
- A formulação do Prof. *Gallus Rehm*, que deu origem à da norma alemã DIN 1045, é a mais conservadora. Prevê abertura de fissura um pouco maior do que constatado nas medições feitas em obras reais e em ensaios de laboratório.
- A formulação da Norma Brasileira, tanto a da NB 01/78 como a da nova NBR 6118/ 2002, é a menos conservadora. Prevê abertura de fissura menor do que constatado nas medições feitas em obras reais e em ensaios de laboratório.