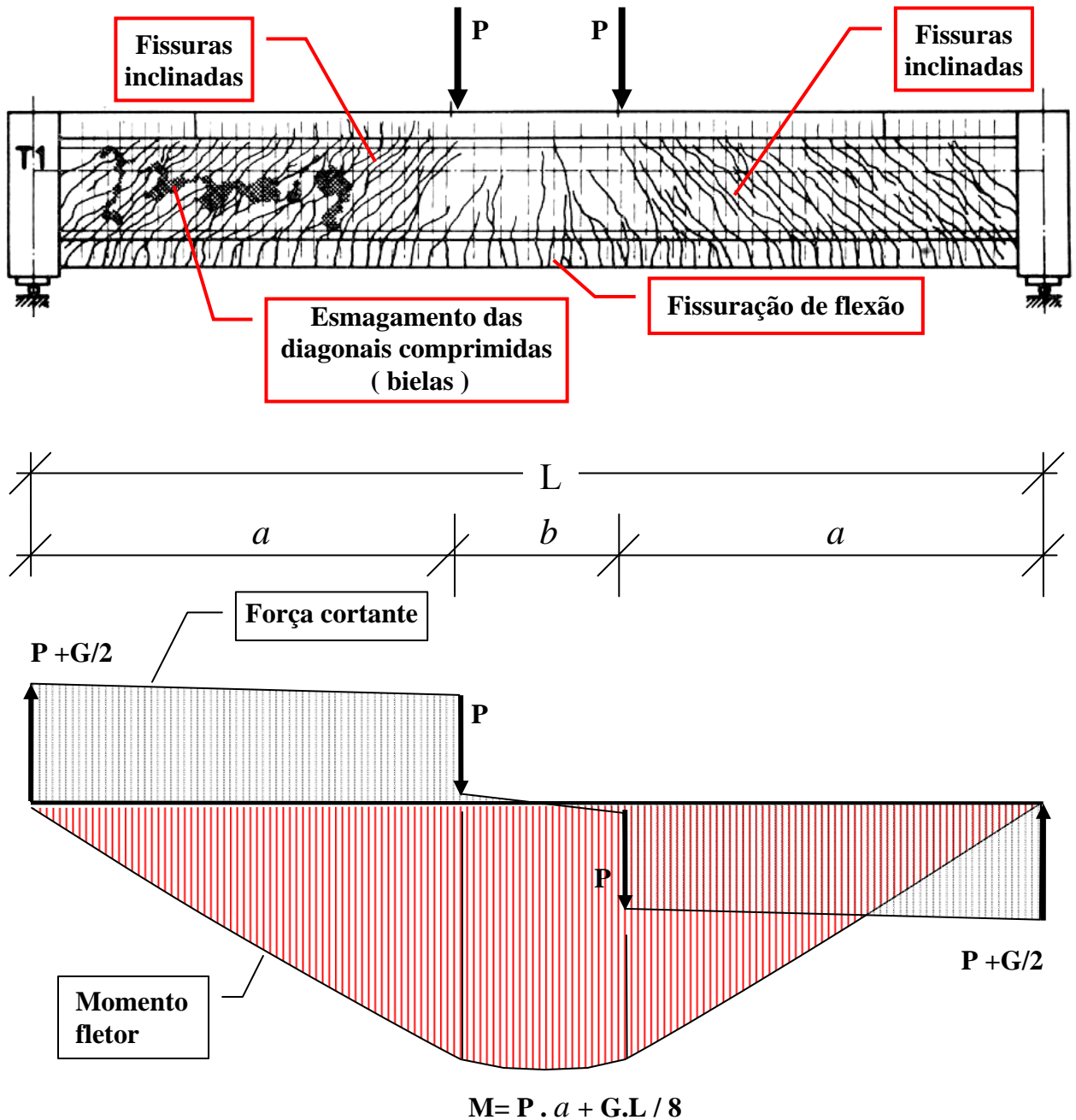




FISSURAÇÃO INCLINADA DEVIDA À FORÇA CORTANTE



Esquema da fissuração de flexão e da fissuração inclinada devida à força cortante.



Cálculo da armadura de estribos necessária :

$$\rho_{w.\text{estribo}} = \frac{(\tau_s - 2,5 \times \tau_{rd})}{f_{yd.\text{estribo}}}$$

A formulação do CEB / 78 para a fissura inclinada e para vigas com estribos a 90° pode ser obtida da formulação geral.

Abertura característica da fissura inclinada

$$\omega_{k.95\%} = 1,7 \times 1,2 \times \omega_m = 1,7 \times 1,2 \times \varepsilon_{sm} \times s_{rm}$$

onde :

$\omega_{k.95\%}$ = abertura da fissura inclinada , com probabilidade de apenas 5% que haja uma fissura com abertura maior.

ω_m = abertura média da fissura inclinada

O coeficiente 1,2 leva em conta o fato de o estribo não ser ortogonal à fissura, e portanto não ser a armadura mais eficiente, o que causa uma fissura com abertura maior.

ε_{sm} = alongamento médio do estribo

s_{rm} = espaçamento médio entre fissuras (medido na vertical , sobre o estribo)

O coeficiente 1,7 é a relação entre a abertura máxima e a abertura média das fissuras.

Tensão no estribo :

$$\sigma_{\text{estribo}} = \left(\frac{V_s - V_{cd}}{b \times d} \right) \times \frac{1}{\rho_{\text{estribo}}}$$

V_s = Força cortante na seção no estado limite de utilização.

$V_{cd} = 2,5 \times b \times d \times \tau_{rd}$ onde : b = largura da viga ; d = altura útil da viga.

τ_{rd} = tensão que considera uma participação do concreto, a determinar a partir da curva do CEB/78 , mostrada na figura 1.

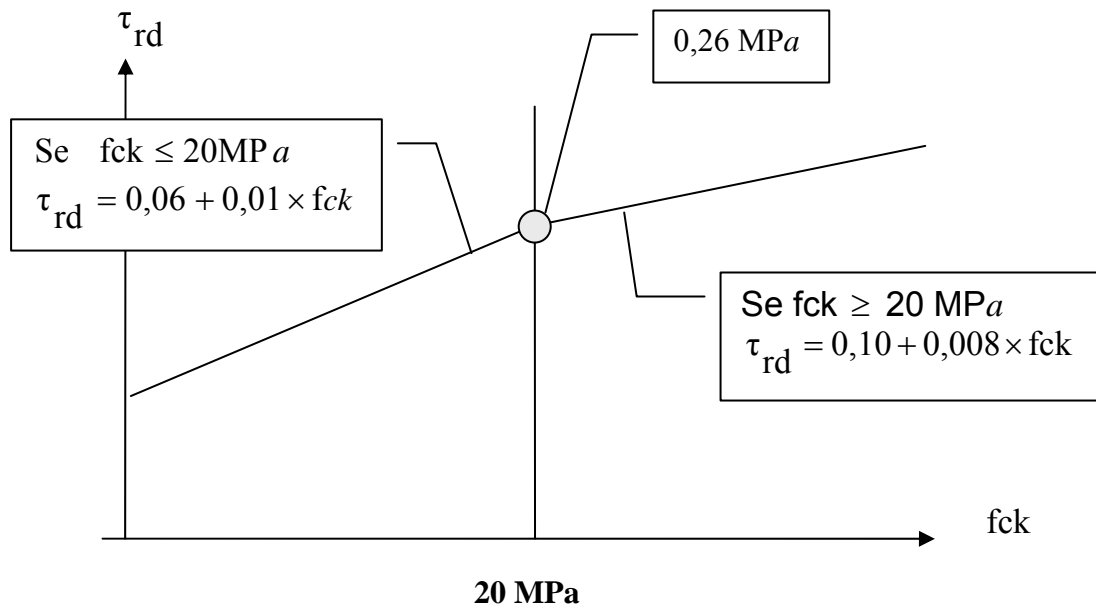


Figura 1 – CEB 78

Fazendo a substituição obtemos:

$$\sigma_{\text{estribo}} = \left(\frac{V_s}{b \times d} - \frac{V_{cd}}{b \times d} \right) \times \frac{1}{\rho_{\text{estribo}}} = \frac{(\tau_s - 2,5 \times \tau_{rd})}{\rho_{\text{estribo}}} \geq 400 \left(\text{kgf} / \text{cm}^2 \right)$$

com $\tau_s = \frac{V}{b \times d}$, em serviço.

$\rho_{\text{estribo}} = \frac{A_{\text{estribo}}}{b \times s}$ = taxa de armação de estribos na viga. Ver figura 2.

b = largura da alma da viga

s = espaçamento entre estribos

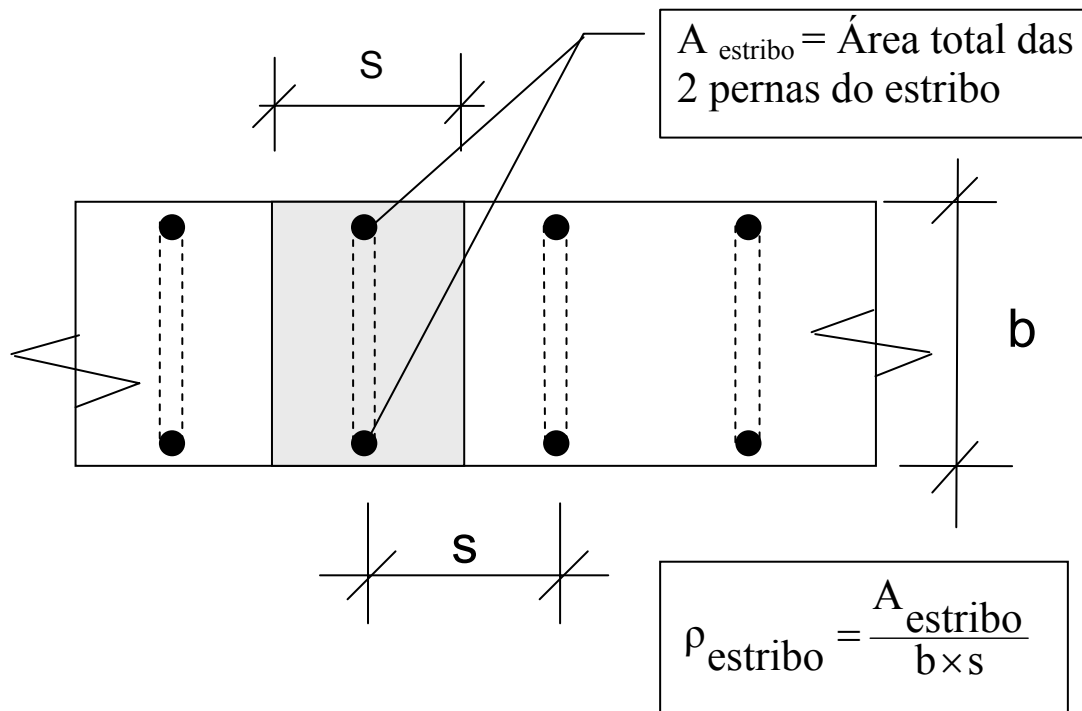


Figura 2 Em planta

Alongamento médio nos estribos :

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{\text{médio no estribo}} = \left(\frac{\sigma_{\text{estribo}}}{E_{\text{aço}}} \right) \times \left[1 - \left(\frac{V_{cd}}{V_s} \right)^2 \right] \geq 0,40 \times \left(\frac{\sigma_{\text{estribo}}}{E_{\text{aço}}} \right)$$

Como $\tau_s = \frac{V_s}{b \times d}$, em serviço, e $V_{cd} = 2,5 \times b \times d \times \tau_{rd}$ obtemos :

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{\text{médio no estribo}} = \left(\frac{\sigma_{\text{estribo}}}{E_{\text{aço}}} \right) \times \left[1 - \left(\frac{2,5 \times \tau_{rd}}{\tau_s} \right)^2 \right] \geq 0,40 \times \left(\frac{\sigma_{\text{estribo}}}{E_{\text{aço}}} \right)$$



Espaçamento médio entre as fissuras inclinadas :

Esse espaçamento é medido ao longo do estribo, isto é, na direção vertical.

$$s_{rm} = (2 \times C) + (0,2 \times S) + \left[K_1 \times K_2 \times \left(\frac{\phi_{\text{estribo}}}{\rho_r} \right) \right] \leq (d - x) \quad \text{onde :}$$

C = cobrimento da barra do estribo

S = espaçamento entre os estribos

ϕ_{estribo} = diâmetro do estribo

d = altura útil da viga

x = posição da linha neutra na flexão

ρ_r = taxa de armadura do estribo para efeito de fissuração inclinada. Ver figura 3.

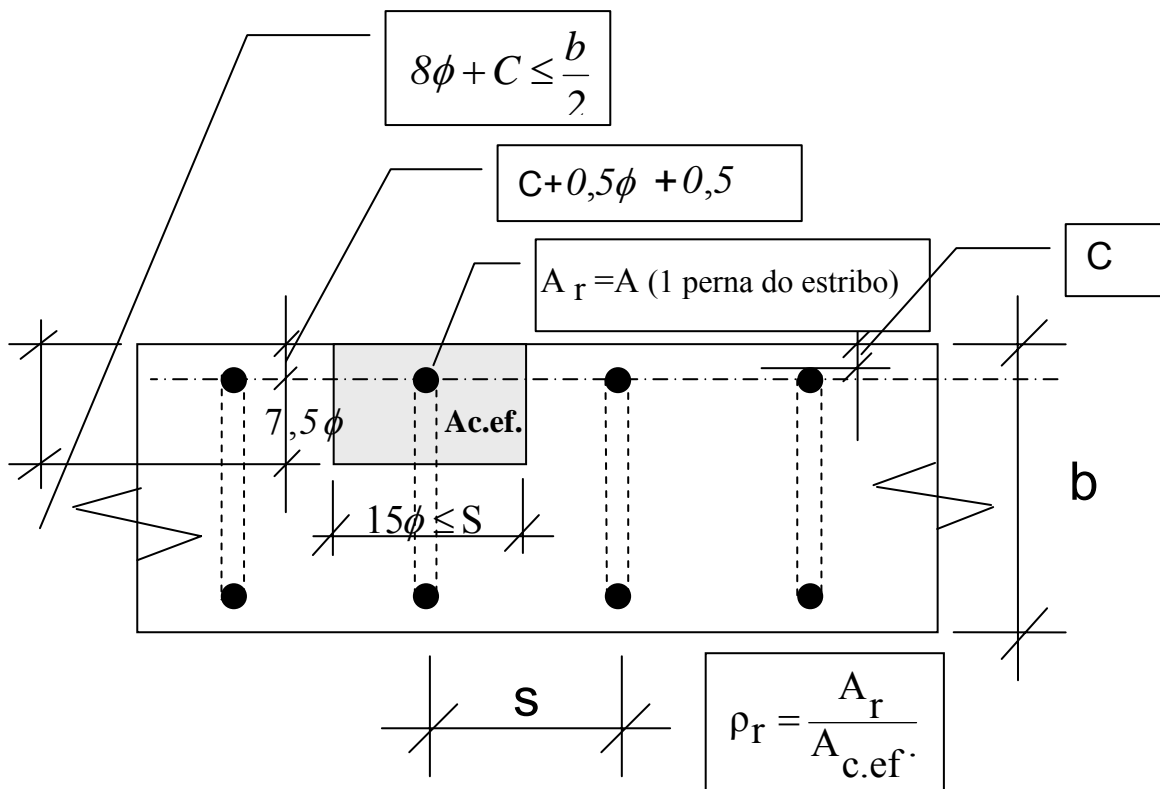


Figura 3 Em planta



$$\rho_r = \frac{A_{(1 \text{ perna do estribo})}}{A_{c.ef.}} \text{ conforme mostrado na Figura 3.}$$

K_1 = coeficiente de aderência da barra = 0,40 para barras com nervuras e alta aderência.

K_2 = coeficiente representando a influência da forma do diagrama de tensões.

Usaremos $K_2 = 0,25$, que corresponde a um diagrama de tensões uniforme ao longo da alma da viga.

Quando a força cortante é constante no trecho da viga onde se calcula a abertura da fissura, essa hipótese é correta.

Substituindo K_1 e K_2 obtemos:

$$s_{rm} = (2 \times C) + (0,2 \times S) + \left[0,1 \times \left(\frac{\phi_{estribo}}{\rho_r} \right) \right] \leq (d - x)$$

$$\omega_{k.95\%} = 1,7 \times 1,2 \times \omega_m = 1,7 \times 1,2 \times \varepsilon_{sm} \times s_{rm}$$



Exemplo 1 :

Cálculo da abertura da fissura inclinada na parte da viga próxima dos apoios
Consideremos uma viga simples conforme mostrado na figura abaixo.

Esse exemplo é um ensaio feito em laboratório na U.E.R.J. por E.C.S.Thomaz.

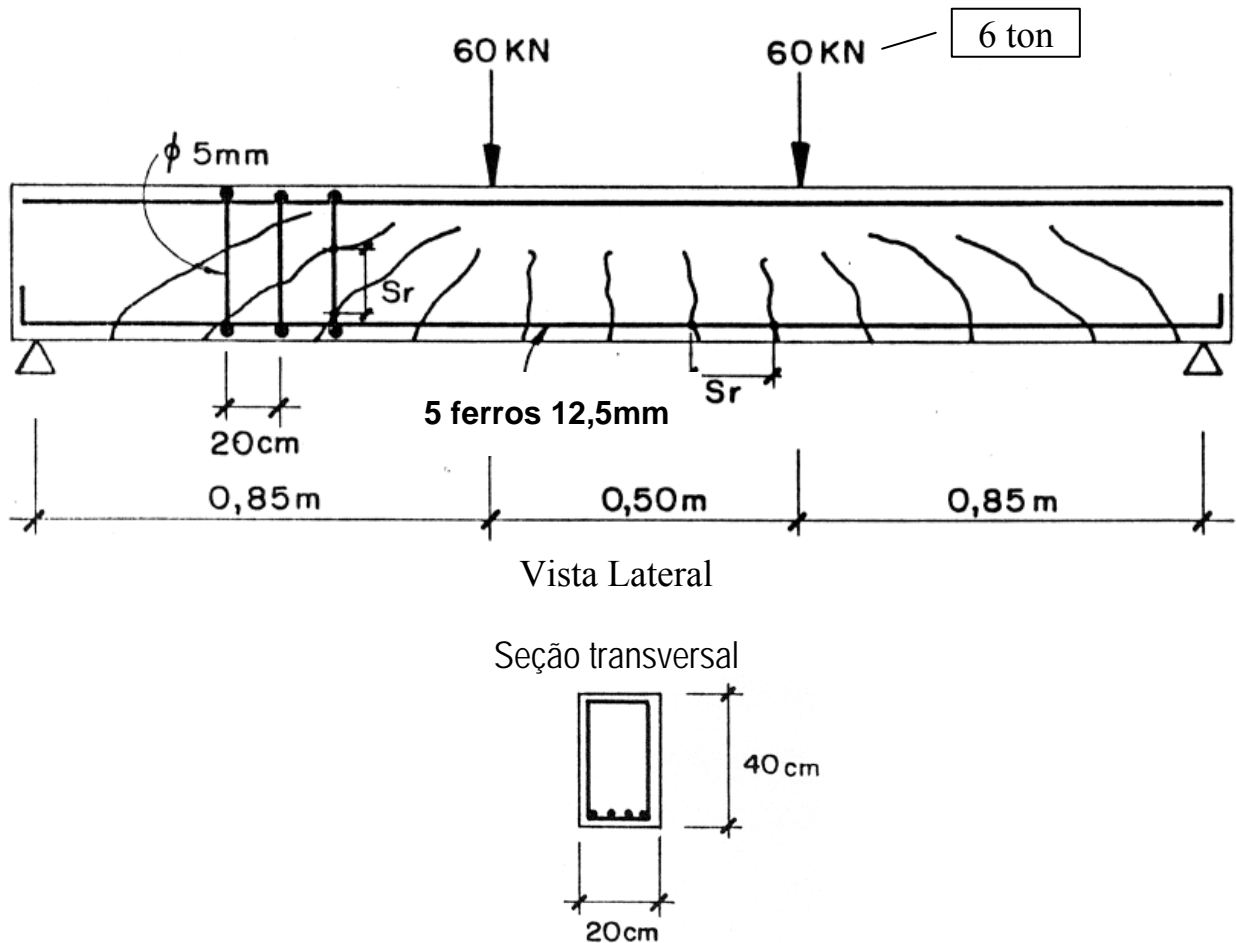


Figura 1

- Carga atuante : 2 cargas concentradas: $2P = 2 \times 60\text{kN}$
- Força cortante $V = 60\text{ kN}$
- Força cortante devida ao peso próprio:
 $g = 0,2\text{m} \times 0,4\text{m} \times 25(\text{kN/m}^3) = 2 (\text{kN /m})$
 $V = \frac{q \times L}{2} = \frac{2(\text{kN/m}) \times 1,8\text{m}}{2} = 1,8\text{ kN}$
- Força cortante total = $60 + 1,8 = 61,8\text{ kN}$



- Estribos necessários

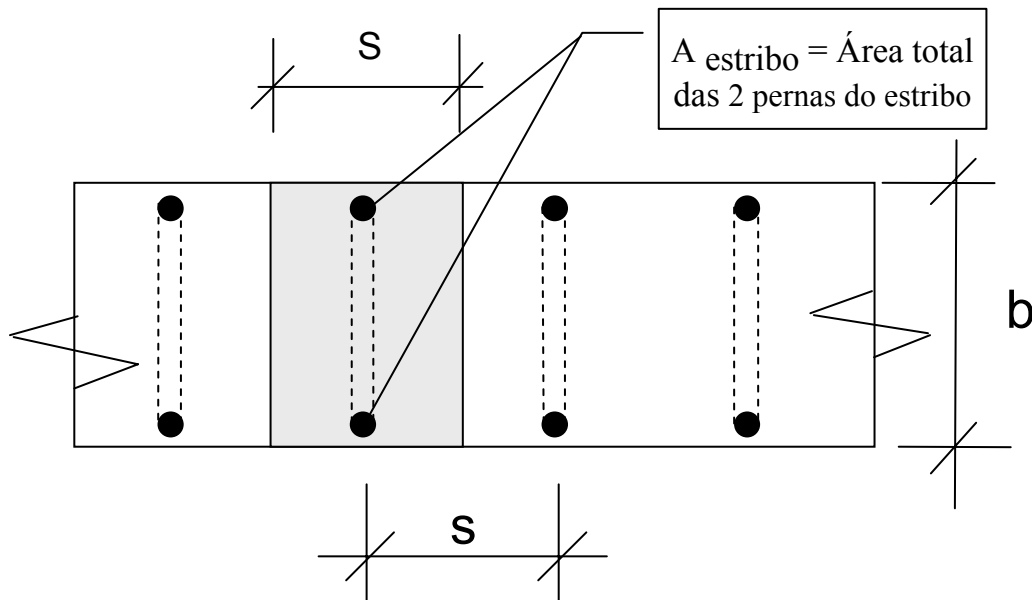
$$\rho_{w.\text{estribo}} = \frac{(\tau_{sd} - 2,5 \times \tau_{rd})}{f_{yd.\text{estribo}}}$$

- $\tau_s = \frac{V_s}{b \times d} = \frac{61,8\text{kN}}{0,20\text{m} \times 0,37\text{m}} = 835 \left(\text{kN/m}^2 \right) = 0,835 \text{ MPa}$

- Como $f_{ck} = 15 \text{ MPa} < 20 \text{ MPa}$:

$$\tau_{rd} = 0,06 + 0,01 \times f_{ck} = 0,06 + 0,01 \times 15 = 0,21 \text{ MPa} \quad (\text{Ver figura 1})$$

$$\rho_{w.\text{estribo.necessário}} = \frac{(\tau_{sd} - 2,5 \times \tau_{rd})}{f_{yd.\text{estribo}}} = \frac{1,4 \times 0,835(\text{MPa}) - 2,5 \times 0,21(\text{MPa})}{500(\text{MPa})/1,15} = 0,15\%$$



$$\rho_{\text{estribo exist.}} = \frac{A_{\text{estribo}}}{b \times s} = \frac{2 \times \left(\frac{\pi \times (\phi_{\text{estribo}})^2}{4} \right)}{b \times s} = \frac{2 \times \left(\frac{\pi \times (0,5\text{cm})^2}{4} \right)}{20\text{cm} \times 20\text{cm}} = 0,001 = 0,1\%$$

Essa taxa de armadura de estribo é menor que a taxa necessária e também que taxa mínima que é de 0,14%.



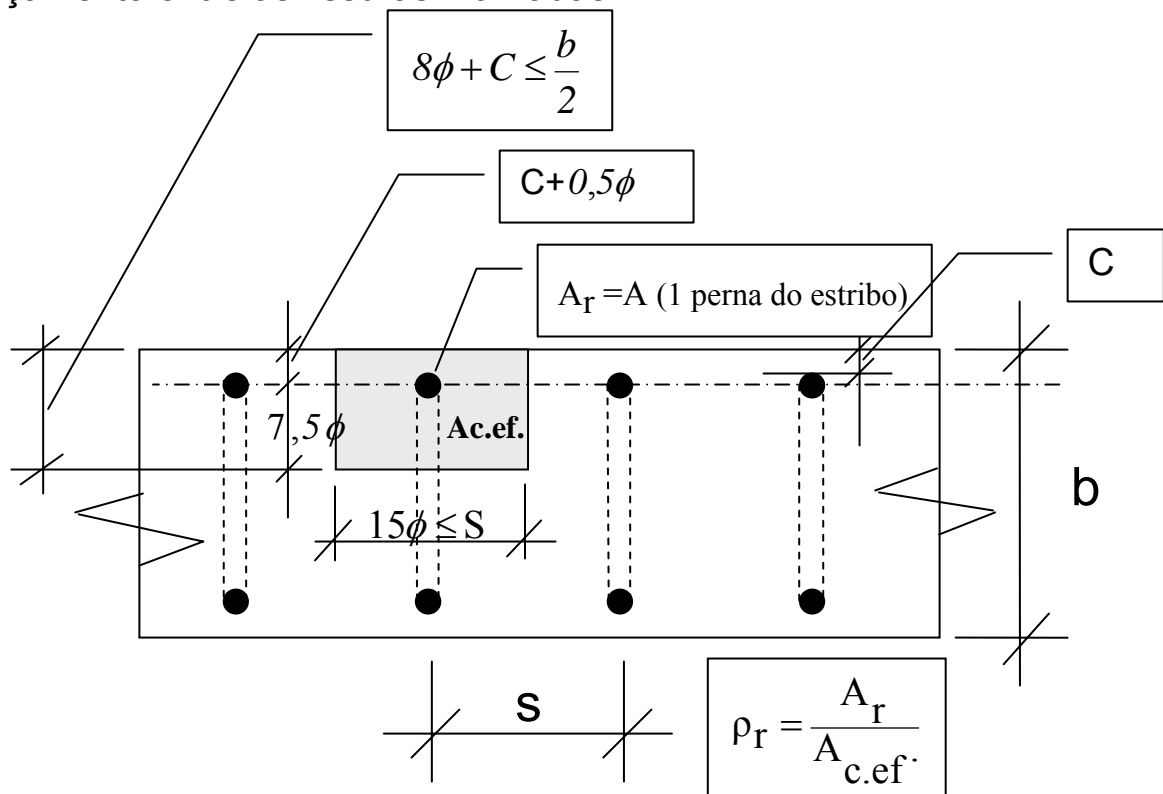
Essa quantidade reduzida de estribos foi usada no ensaio feito no laboratório para que a abertura da fissura fosse um pouco maior.

$$\sigma_{\text{estribo}} = \frac{(\tau_s - 2,5 \times \tau_{rd})}{\rho_{\text{estribo}}} = \frac{0,835 - 2,5 \times 0,21}{0,001} = 310 \text{ MPa}, \text{ considerando a contribuição do}$$

concreto τ_{rd} :

$$\sigma_{\text{estribo}} = 3100 \left(\text{kgf/cm}^2 \right)$$

Espaçamento entre as fissuras inclinadas :



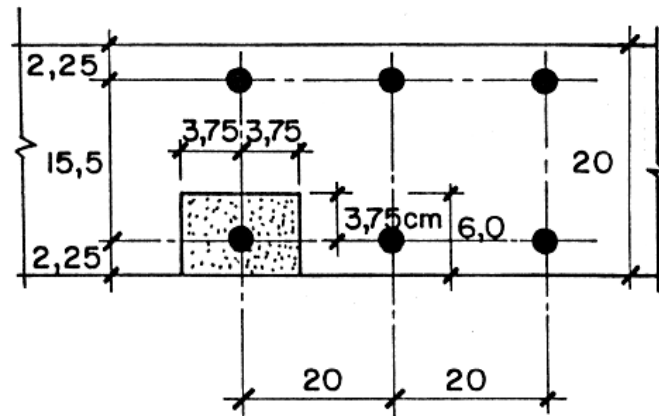
$$C = 2, \text{ cm}$$

$$S = 20 \text{ cm}$$

$$15 \phi = 15 \times 0,5 \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}$$

$$8\phi + C = 8 \times 0,5 \text{ cm} + 2,0 \text{ cm} = 6,0 \text{ cm} \leq \frac{b}{2} = \frac{20 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$A_{c.ef.} = 7,5 \text{ cm} \times 6,0 \text{ cm} = 45 \text{ cm}^2$$



$$\rho_r = \frac{A_r}{A_{c.ef.}} = \frac{\pi \times (0,5\text{cm})^2 \times 4}{45\text{cm}^2} = 0,0044$$

$$s_{rm} = 2 \times C + 0,2 \times (S \text{ ou } 15\phi) + \left[0,1 \times \left(\frac{\phi_{estribo}}{\rho_r} \right) \right] \leq (d - x)$$

Como $S = 20\text{cm}$ e $15\phi = 7,5\text{cm}$, usar $7,5\text{cm}$.

$$s_{rm} = (2 \times 2,0\text{cm}) + (0,2 \times 7,5\text{cm}) + \left[0,1 \times \left(\frac{0,5\text{cm}}{0,0044} \right) \right] = 4\text{cm} + 1,5\text{cm} + 11,4\text{cm} = 17\text{cm}$$

Verificar se $s_{rm} \leq (d - x)$

$f_{ck} = 15 \text{ MPa}$ e pela Norma NBR6118 ,

$$E_c(\text{MPa}) = 5600 \sqrt{f_{ck}(\text{MPa})} = 5600 \sqrt{15} = 21700 \text{ MPa} = 22 \text{ GPa}$$

$$n = \frac{2100000 \left(\text{kgf/cm}^2 \right)}{217000 \left(\text{kgf/cm}^2 \right)} = 9,7$$

$$\mu = \frac{A_{\text{aço de flexão}}}{b \times d} = \frac{5 \times 1,23\text{cm}^2}{20\text{cm} \times 37\text{cm}} = 0,0083 = 0,83 \%$$

$$k_x = \mu \times n \times \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{n \times \mu}} \right]$$



$$k_x = 0,0083 \times 9,7 \times \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{0,0083 \times 9,7}} \right] = 0,329$$

Zona comprimida : $x = 0,329 \cdot 37\text{cm} = 12,2\text{ cm} ;$
 $d - x = 37\text{cm} - 12,2\text{cm} = 24,8\text{cm}$
 $s_{rm} = 17\text{cm} \leq (d - x) = 24,8\text{cm} \quad \text{OK}$

Logo $s_{rm} = 17\text{cm}$

Alongamento médio nos estribos :

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{\text{médio no estribo}} = \left(\frac{\sigma_{\text{estribo}}}{E_{\text{aço}}} \right) \times \left[1 - \left(\frac{2,5 \times \tau_{rd}}{\tau_s} \right)^2 \right] \geq 0,40 \times \left(\frac{\sigma_{\text{estribo}}}{E_{\text{aço}}} \right)$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{\text{médio no estribo}} = \left(\frac{3100 \text{ kgf/cm}^2}{2100\,000 \text{ kgf/cm}^2} \right) \times \left[1 - \left(\frac{2,5 \times 0,21 \text{ MPa}}{0,835} \right)^2 \right] = 0,90 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{\text{médio no estribo}} = \left(\frac{3100}{2100\,000} \right) \times [0,605] = 0,90 \text{ ‰}$$

Abertura máxima da fissura inclinada :

$$\omega_{k, 95\%} = 1,7 \times 1,2 \times \varepsilon_{sm} \times s_{rm} = 1,7 \times 1,2 \times (0,9 \text{ mm/m}) \times 0,17 \text{ m} = 0,3 \text{ mm}$$

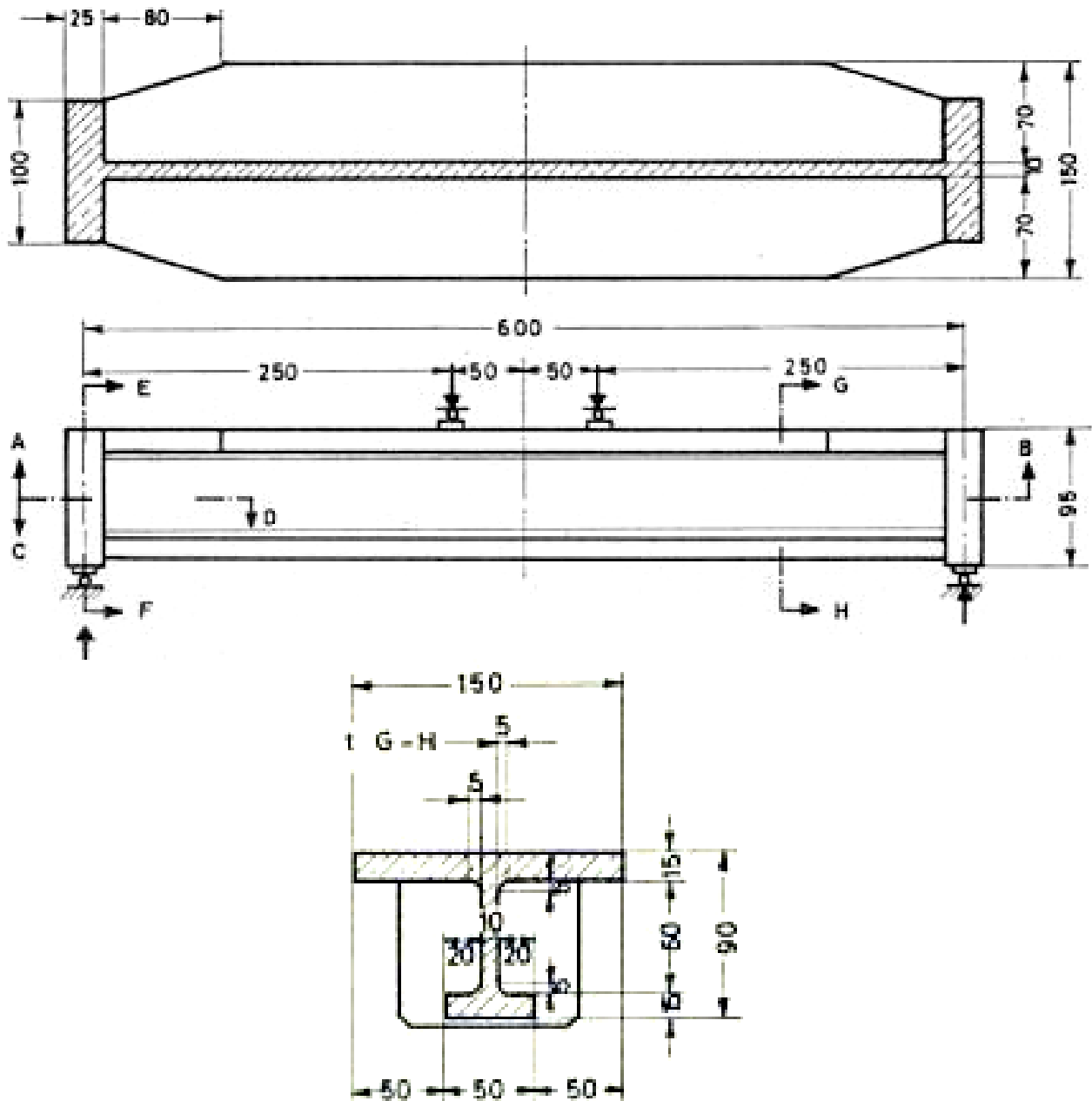
A abertura máxima das fissuras inclinadas observadas na viga era $\omega_{\text{máx}} \approx 0,25 \text{ mm}$

A estimativa da abertura das fissuras inclinadas, feita pelo CEB / 78, é bem precisa.



Exemplo 2 : Ensaio de Prof. Fritz Leonhardt Viga T1

Faremos aqui a comparação entre as aberturas de fissuras inclinadas medidas nos ensaios de F. Leonhardt [27] e as calculadas pelo CEB 78 e por G. Rehm, assim como as calculadas pela NBR6118 -2003

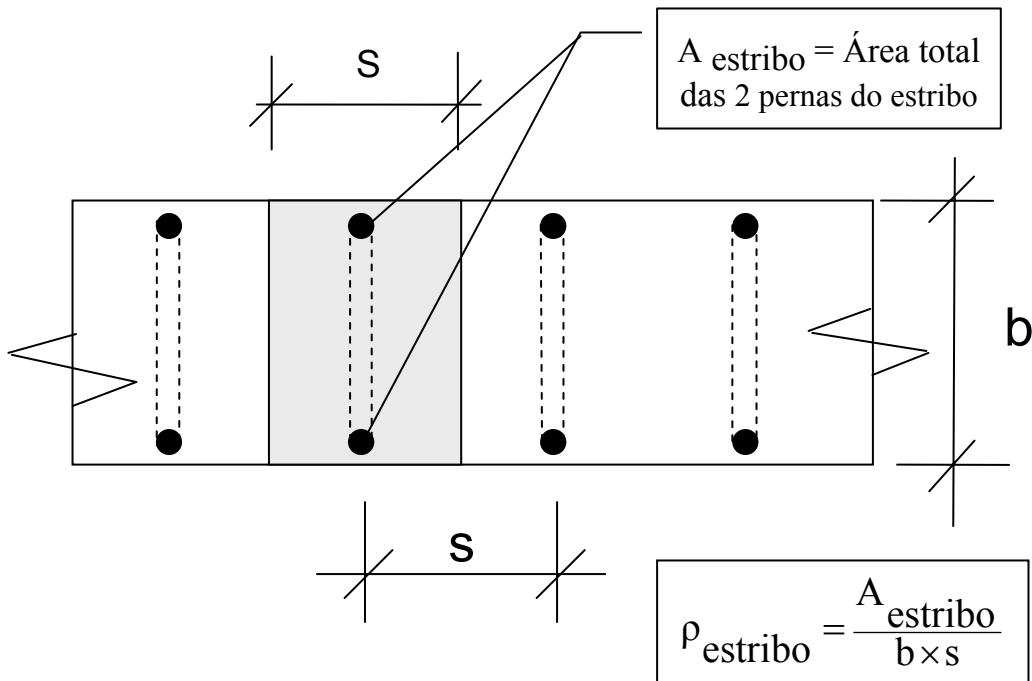
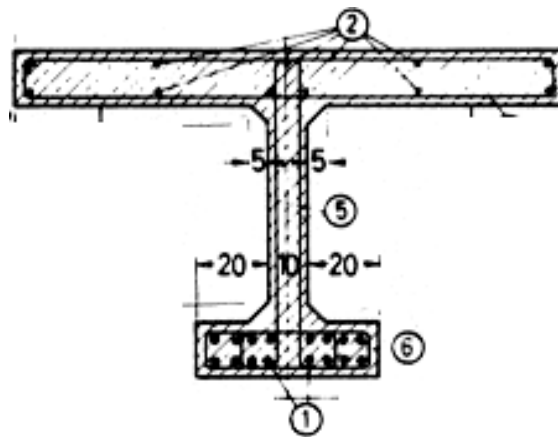
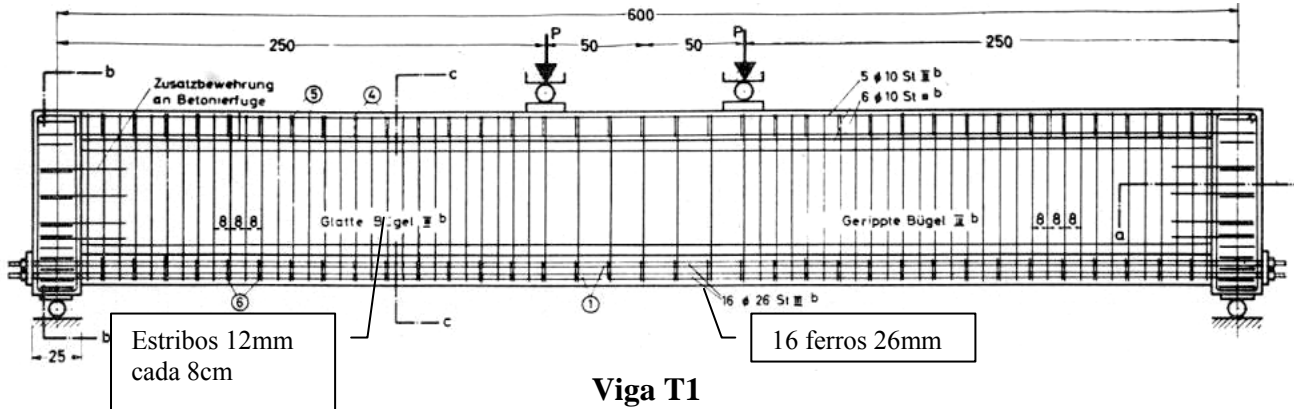


Seção transversal

Forma das vigas T1

A armadura de flexão da viga era composta de 16 barras de 26mm e a de estribos com 12mm de diâmetro e espaçamento de 8cm.

Em uma metade da viga os estribos tinham nervura. Na outra metade, os estribos não tinham nervura. A fissuração inclinada não foi diferente entre as duas metades da viga. **Isso faz supor que o importante nos estribos é a ancoragem nas suas extremidades, nos ganchos e nas dobras.**





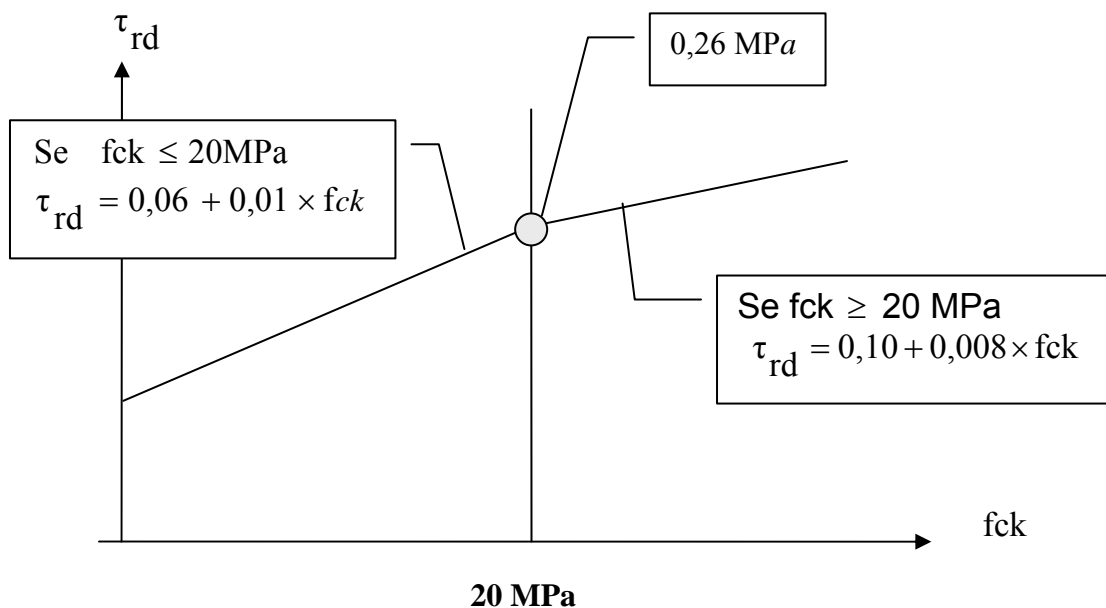
$$\rho_{\text{estribo}} = \frac{A_{\text{estribo}}}{b \times S} = \frac{2 \times \left(\frac{\pi \times (\phi_{\text{estribo}})^2}{4} \right)}{b \times S} = \frac{2 \times \left(\frac{\pi \times (1,2\text{cm})^2}{4} \right)}{10\text{cm} \times 8\text{cm}} = 0,0283 = 2,83\%$$

Exercício :

A carga aplicada na viga era $2P = 943 \text{ kN}$ e o peso total da viga = 63kN

Calcular a abertura máxima da fissura inclinada para a força cortante de 503 kN , e compará-la com a abertura máxima da fissura medida na viga.

$$\tau_s = \frac{V_s}{b \times d} = \frac{503\text{kN}}{0,10\text{m} \times (0,90 - 0,075)\text{m}} = 6097 \left(\text{kN}/\text{m}^2 \right) = 6,1\text{MPa}, \text{ em serviço.}$$



Resistência à compressão em prisma de $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 53\text{cm}$ era:

$$f_c \text{ prisma} = 242 \text{ kgf} / \text{cm}^2 = 24,2 \text{ MPa}$$

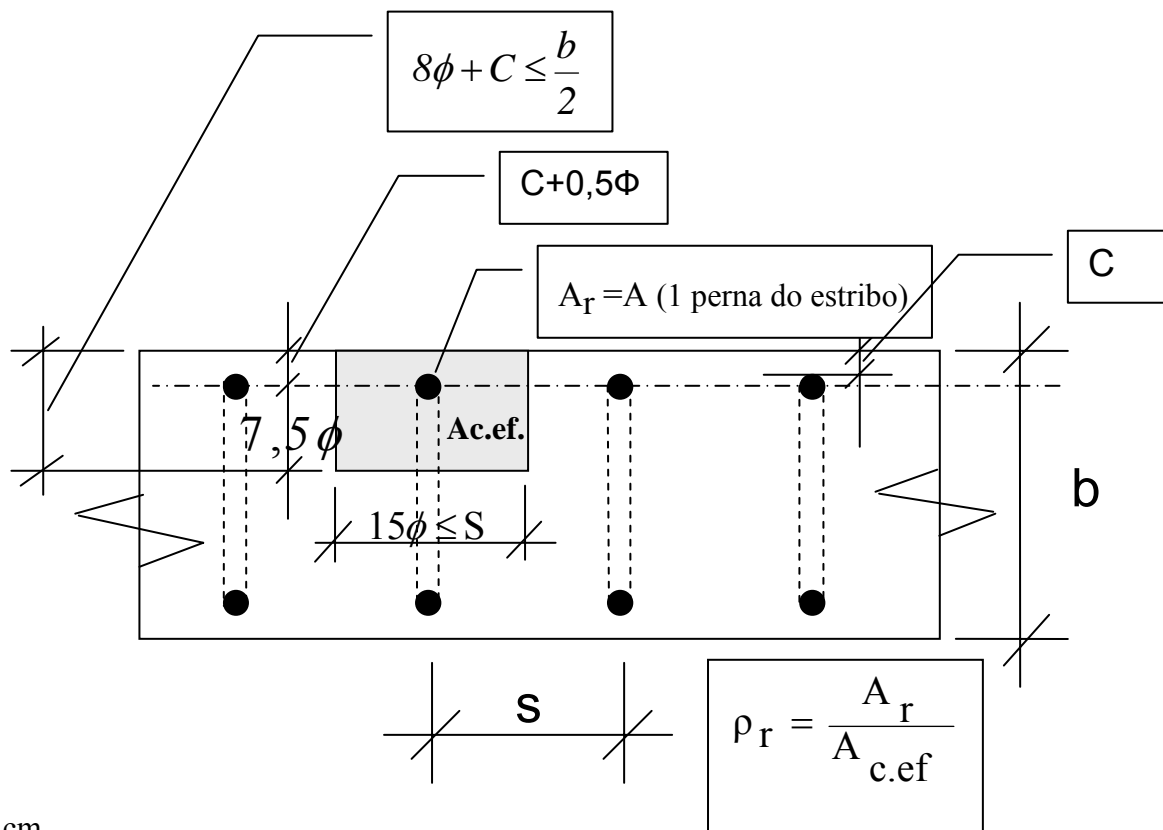
$$\text{logo: } \tau_{rd} = 0,10 + 0,008 \times 24,2 = 0,294\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{estribo}} = \frac{(\tau_s - 2,5 \times \tau_{rd})}{\rho_{\text{estribo}}} = \frac{6,1 - 2,5 \times 0,294}{0,0283} = 189,6\text{MPa} = 1896 \left(\text{kgf} / \text{cm}^2 \right)$$



$$\sigma_{\text{estribo}} = 1896 \left(\text{kgf/cm}^2 \right)$$

Espaçamento entre as fissuras inclinadas :



$$C = 2,0 \text{ cm}$$

$$S = 8 \text{ cm}$$

$$b = 10 \text{ cm}$$

$$15\phi = 15 \times 1,2 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

$$8\phi + C = 8 \times 1,2 \text{ cm} + 2,0 \text{ cm} = 11,6 \text{ cm} > \frac{b}{2} = \frac{10 \text{ cm}}{2} = 5 \text{ cm}$$

Usar a metade da largura = $10 \text{ cm} / 2 = 5 \text{ cm}$

$$A_{c.ef.} = 8,0 \text{ cm} \times 5,0 \text{ cm} = 40 \text{ cm}^2$$

$$\rho_r = \frac{A_{1 \text{ perna do estribo}}}{A_{c.ef.}} = \frac{\frac{\pi \times (1,2 \text{ cm})^2}{4}}{40 \text{ cm}^2} = 0,02826 = 2,83 \%$$



$$s_{rm} = 2 \times C + 0,2 \times (S \text{ ou } 15\phi) + \left[0,1 \times \left(\frac{\phi_{\text{estribo}}}{\rho_r} \right) \right] \leq (d - x)$$

Como $S = 8\text{cm}$ e $15\phi = 18\text{cm}$, usar 8cm .

$$s_{rm} = (2 \times 2,0\text{cm}) + (0,2 \times 8,0\text{cm}) + \left[0,1 \times \left(\frac{1,2\text{cm}}{0,0283} \right) \right] = 4\text{cm} + 1,6\text{cm} + 4,2\text{cm} = 9,8\text{cm}$$

Devemos verificar se $s_{rm} \leq (d - x)$

$f_{ck} \approx 24 \text{ MPa}$ e pela Norma NBR6118 ,

$$E_c(\text{MPa}) = 5600 \sqrt{f_{ck}(\text{MPa})} = 5600 \sqrt{24} = 27434 \text{ MPa} = 27,4 \text{ GPa}$$

Zona comprimida :

$$x = 34,1 \text{ cm ;}$$

$$d - x = 48,4\text{cm}$$

$$s_{rm} = 9,8\text{cm} < (d - x) = 48,4\text{cm} \quad \text{OK}$$

$$s_{rm} = 9,8\text{cm}$$

O espaçamento médio entre as fissuras, medido sobre os estribos, na direção vertical, foi de 10cm , coincidindo com a previsão do CEB / 78.

Alongamento médio nos estribos :

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{\text{médio no estribo}} = \left(\frac{\sigma_{\text{estribo}}}{E_{\text{aço}}} \right) \times \left[1 - \left(\frac{2,5 \times \tau_{rd}}{\tau_s} \right)^2 \right] \geq 0,40 \times \left(\frac{\sigma_{\text{estribo}}}{E_{\text{aço}}} \right)$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{\text{médio no estribo}} = \left(\frac{1896}{2100\,000} \right) \times \left[1 - \left(\frac{2,5 \times 0,294 \text{ MPa}}{6.1} \right)^2 \right] = 0,89 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{\text{médio no estribo}} = 0,89 \text{ ‰}$$

O alongamento medido no estribo para a força cortante de 503 kN foi de $0,95 \text{ ‰}$.

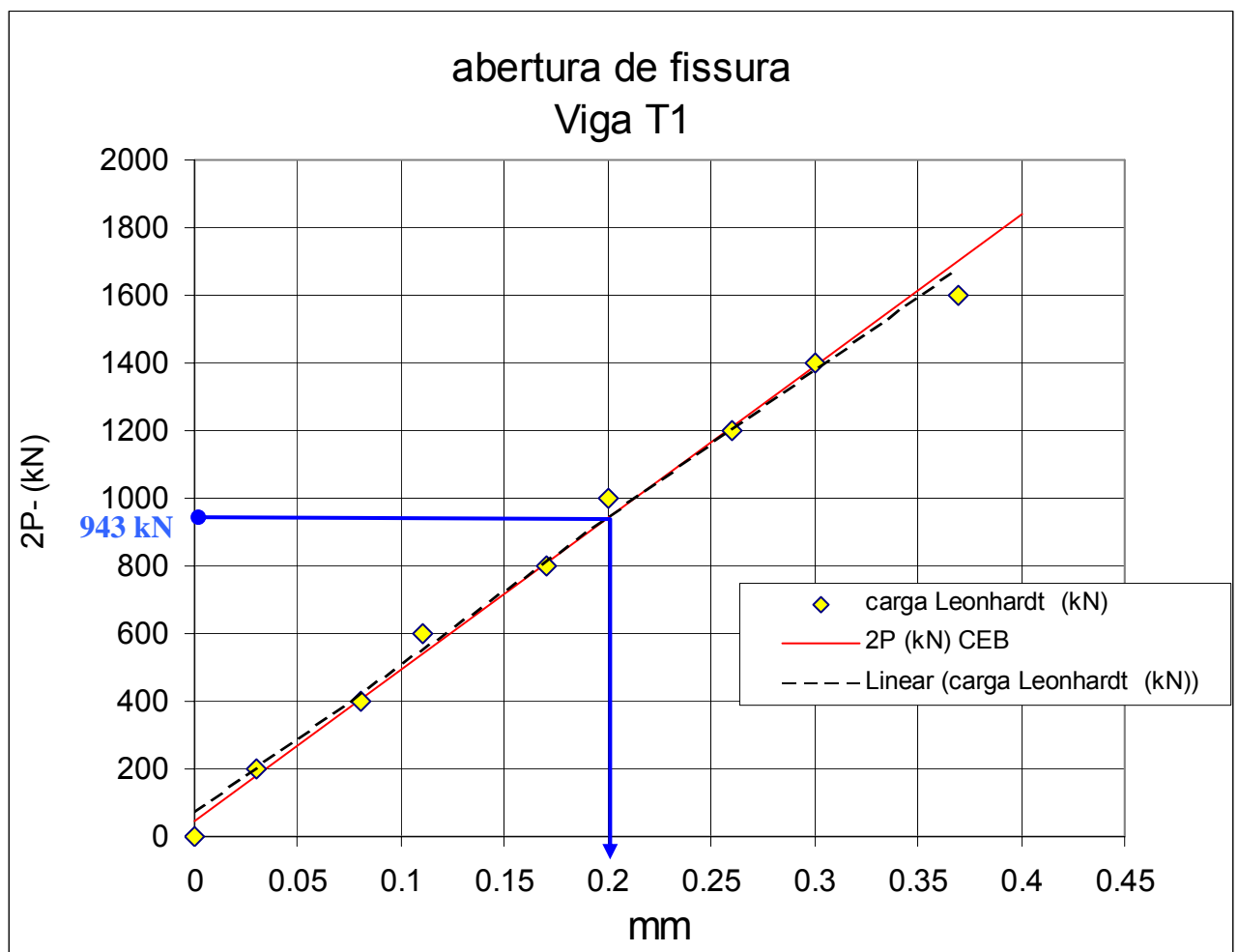
A abertura máxima da fissura inclinada, segundo o CEB 1978 , vale :



$$\omega_{k.95\%} = 1,7 \times 1,2 \times \varepsilon_{sm} \times s_{rm} = 1,7 \times 1,2 \times (0,89 \text{‰}) \times 0,098\text{m} = 0,18\text{mm}$$

A fissura máxima inclinada, medida na viga ensaiada, para a carga de $2P = 943 \text{ kN}$, foi de $\approx 0,20\text{mm}$.

A concordância obtida com o CEB / 78 é muito boa, ver gráfico abaixo.




A formulação da norma CEB/78 permite a estimativa correta da abertura da fissura inclinada.



Referências

1. Lobo Carneiro, Fernando Luiz – Teoria da fissuração das peças de concreto armado – Revista Estrutura N^{os} 26 e 27 - 1960 – Trabalho realizado no INT/RJ
2. Lobo Carneiro, Fernando Luiz , Maria Cascão F. de Almeida- Critérios adotados por diferentes normas para análise da fissuração em obras de concreto armado e protendido.
3. Code Modele CEB-FIP pour les Structures en Béton – 1978
4. Gallus Rehm – Zur Frage der Rissbegrenzung im Stahlbeton-Betonbau-Betonud Stahlbetonbau 63 – 1968 - n^o 8 pag.175 - 182.
5. Rao P.S. Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte – D.A.fStb, Heft 177 -1966
6. NB1/78 Norma brasileira para projeto e execução de obras de concreto armado.
7. Leonhardt – Vorlesungen über Massivbau- Vol. 4 – Construções de Concreto.
8. A.W.Beeby- Concrete in the Oceans Cracking and Corrosion - International Symposium on Offshore Structures – Rilem-FIP-CEB-1979 –Rio de Janeiro.
9. Rolf Lenschow – Serviceability state of marine structures with emphasis on cracking – International Symposium on Offshore Structures – Rilem-FIP-CEB-1979 –Rio de Janeiro.
10. Horst Falkner – Zur Frage der Rissbildung durch Eigen-und Zwangspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen - D.A.f.Stb-Heft 208
11. Mörsch, Emil – Brücken aus Stahlbeton und Spannbeton- Entwurf und Konstruktion – Sechste Auflage -1958
12. H. Stoffers – Cracking due to Shrinkage and temperature variation in walls- Heron Vol. 23 -1978
13. CEB Bulletin D'Information n^o 89 Fissuration – Mars 1973
14. ACI Stanadrd 318-71 – Building Code Requirements for Reinforced Concrete.
15. ACI Committee Report – Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete – ACI 318-71
16. CEB-70 Comite Europeen du Beton.
17. Programa Crack – Promon Engenharia – Eng. Ernani Diaz.

	<p>Fissuração Inclinada Estribos</p>	<p>Prof. Eduardo C. S. Thomaz Notas de aula</p>	<p>19 / 19</p>
--	--	---	----------------

18. Y. Goto – Cracks formed in concrete around deformed tension bars. Journal ACI, Proc. Vol. 68 (1971) – Nr 4 - pag. 244 – 251
19. Thomaz, Eduardo - Haguenauer ,Cristina - Estudo de Fissuração de Cisalhamento em Vigas de Concreto Armado, RBE - Revista Brasileira de Engenharia, Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, Caderno de Engenharia Estrutural, Vol.11/N.1, 10/93.
20. Haguenauer, Cristina – Thomaz, Eduardo - Estudo de Campos Comprimidos de Concreto Armado com Aplicação em Vigas - Parede, RBE - Revista Brasileira de Engenharia, Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, Caderno de Engenharia Estrutural, Vol.10/N.2, 3/93.
21. Norma NBR6118 – 2002 Projeto de Estruturas de Concreto – ABNT 2002
22. CEB-FIP Model Code 1990 – Bulletin D´Information N^o203
23. Thomaz, Eduardo , Haguenauer ,Cristina - Estudo de Fissuração de Cisalhamento em Vigas de Concreto Armado, RBE - Revista Brasileira de Engenharia, Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, Caderno de Engenharia Estrutural, Vol.11/N.1, 10/93.
24. Haguenauer, Cristina, Thomaz Eduardo - Estudo de Campos Comprimidos de Concreto Armado com Aplicação em Vigas - Parede, RBE - Revista Brasileira de Engenharia, Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, Caderno de Engenharia Estrutural, Vol.10/N.2, 3/93.
25. Norma NBR6118 – 2002 Projeto de Estruturas de Concreto – ABNT 2002
26. CEB-FIP Model Code 1990 – Bulletin D´Information N^o203
27. Fritz Leonhardt – René Walther – Stuttgart – Versuche an Plattenbalken mit hoher Schubbeanspruchung –(Ensaios em viga T com grandes solicitações tangenciais) Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - Heft 152.