

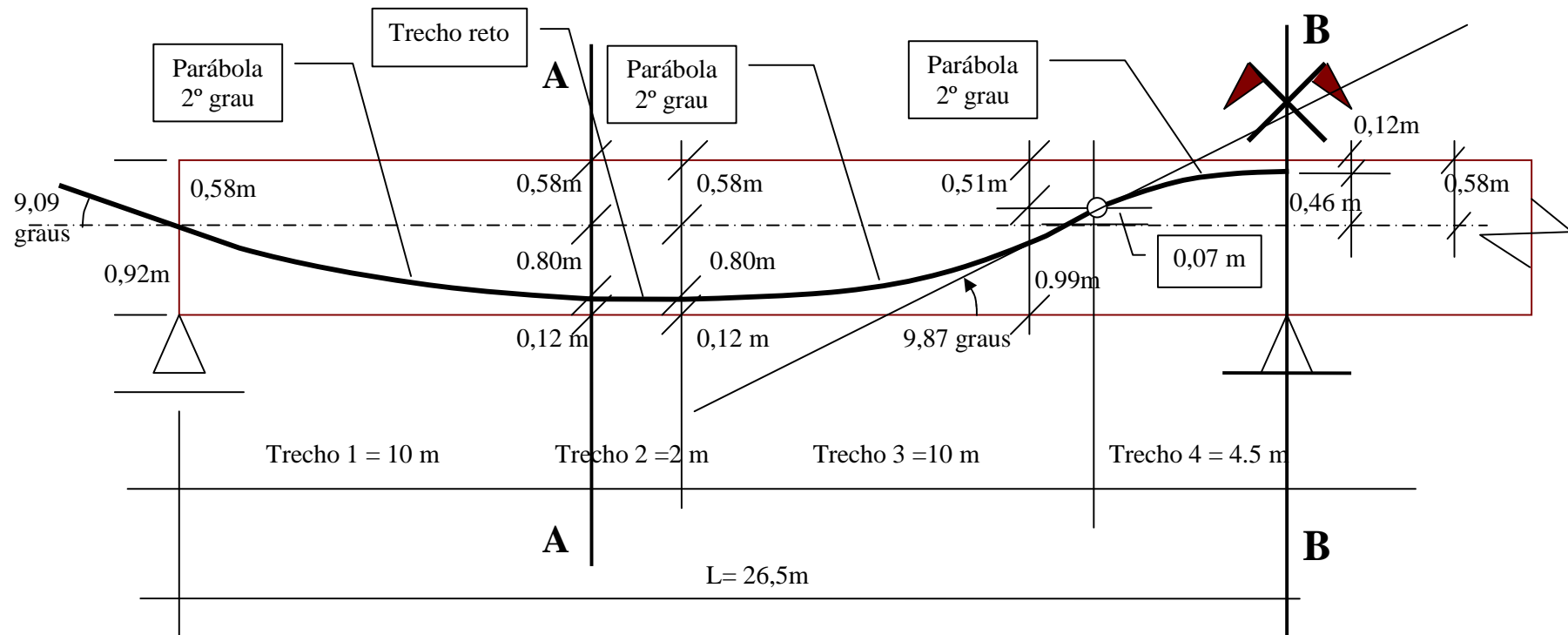


## Concreto Protendido - Momento Hiperestático de Protensão

IABSE –Workshop - International Association for Bridge and Structural Engineering- New Delhi - 1993  
Thomas W. Kuchler – University of Stuttgart – Tema: Consistent Treatment of Prestress in the Concept of Structural Concrete.

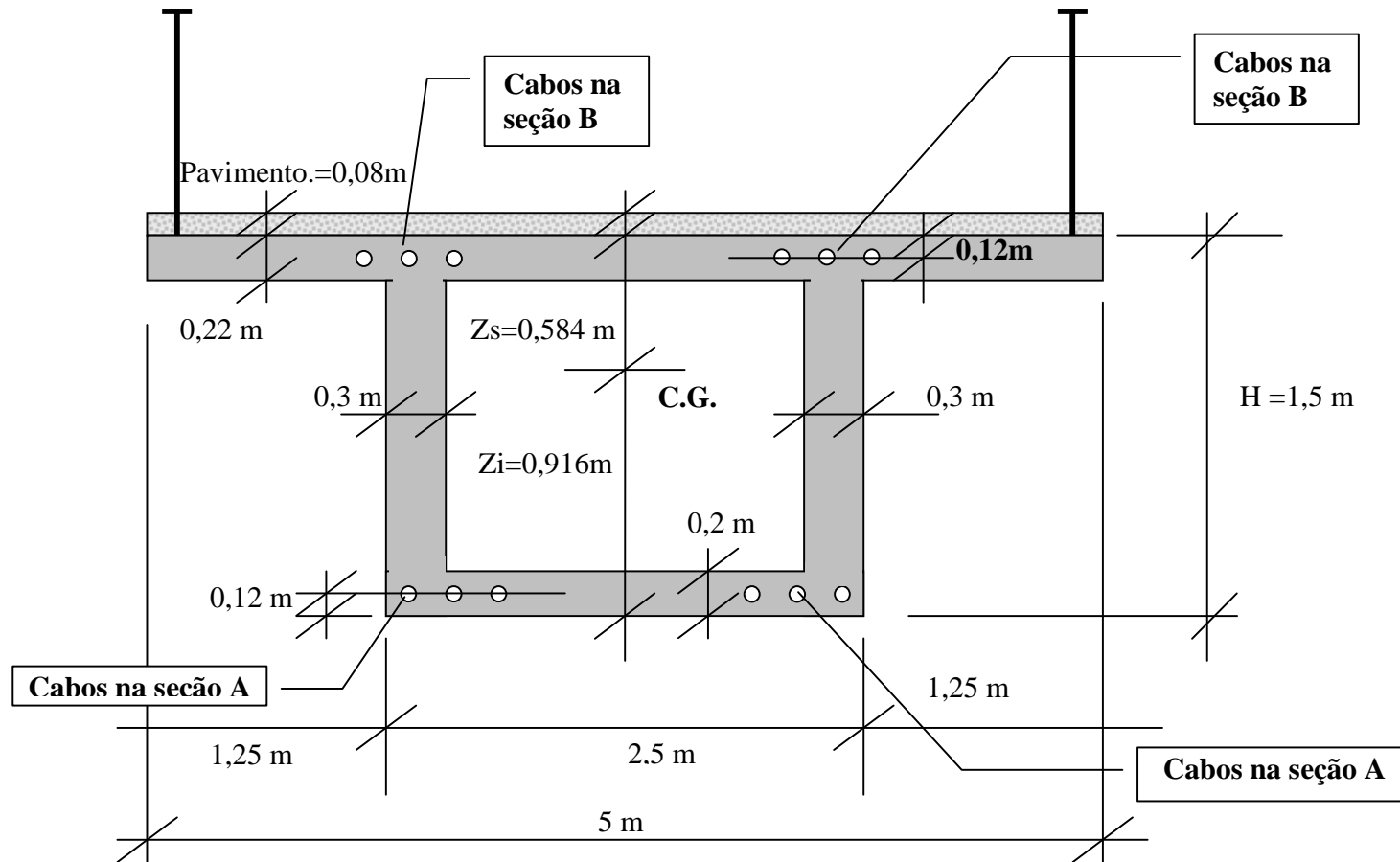
*O tema proposto no IABSE-1993 foi desenvolvido por Prof. E.C.S.Thomaz para servir como notas de aula.*

Exemplo de viga protendida hiperestática.



Aço CP190RB - 6 cabos com 12 cordoalhas 12.5mm cada ; Concreto  $f_{ck}=35\text{ MPa}$

## Seção transversal constante



$$H = 1.50 \text{ m} ; A_c = 2,248 \text{ m}^2 ; I_c = 0,669 \text{ m}^4 ; Z_s = 0.584 \text{ m} ; Z_i = 0.916 \text{ m} ; W_s = 1.14538 \text{ m}^3 ; W_i = 0.73083 \text{ m}^3$$

- A seção transversal constante é uma simplificação para facilitar os cálculos numéricos. Em projetos reais, as dimensões das lajes inferiores e das vigas podem variar ao longo do comprimento da obra.
- Força de Protensão = 8000 kN com 6 cabos com 12 cordoalhas 12,5mm. Considerar a força de protensão constante, sem perdas, ao longo da viga.
- Em um projeto real, calcular as perdas de protensão devidas ao atrito, retração, fluência e relaxação. Considerar, então, para o cálculo dos momentos de protensão, uma força de protensão média, trecho a trecho.

### Itens a executar :

- Calcular os diagramas de momentos de protensão : Momentos Isostáticos e Hiperestáticos
- Verificar se há segurança à Ruptura ( Estado Limite Último) nas seções A e B.
- Verificar as tensões no concreto em Serviço ( Estado Limite de Serviço) , com e sem carga móvel, nas Seções A e B:
- Verificar as tensões devidas a um gradiente térmico ao longo da altura da viga.

### Dados:

- Momentos de carga permanente e de carga móvel :

- Carga permanente =  $g = \left( \text{Peso próprio} = 2,248\text{m}^2 \times 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \right) + \left( \text{Pavimento} = 5\text{m} \times 0,08\text{m} \times 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \right) = 66\text{kN/m}$

- $M \text{ seção B} = -\frac{gL^2}{8} = -66 \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right) \times \frac{(26,5\text{m})^2}{8} = -5794 \text{ kN.m}$

- Com  $x_A/L = 10\text{m}/26,5\text{m} = 0,377$  ;

- $M \text{ seção A} = +0,07031qL^2 = +0,07031 \times 66 \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right) \times (26,5\text{m})^2 = 3258\text{kN.m}$

- Carga móvel = 40 kN/m :

- $M \text{ máximo na seção B} = -\frac{pL^2}{8} = -40 \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right) \times \frac{(26,5\text{m})^2}{8} = -3511 \text{ kN.m}$

- Com  $x_A/L = 10\text{m}/26,5\text{m} = 0,377$  ;

- $M \text{ máximo na seção A} = +0,0936 \times pL^2 = +0,0936 \times 40 \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right) \times (26,5\text{m})^2 = +2629\text{kN.m}$

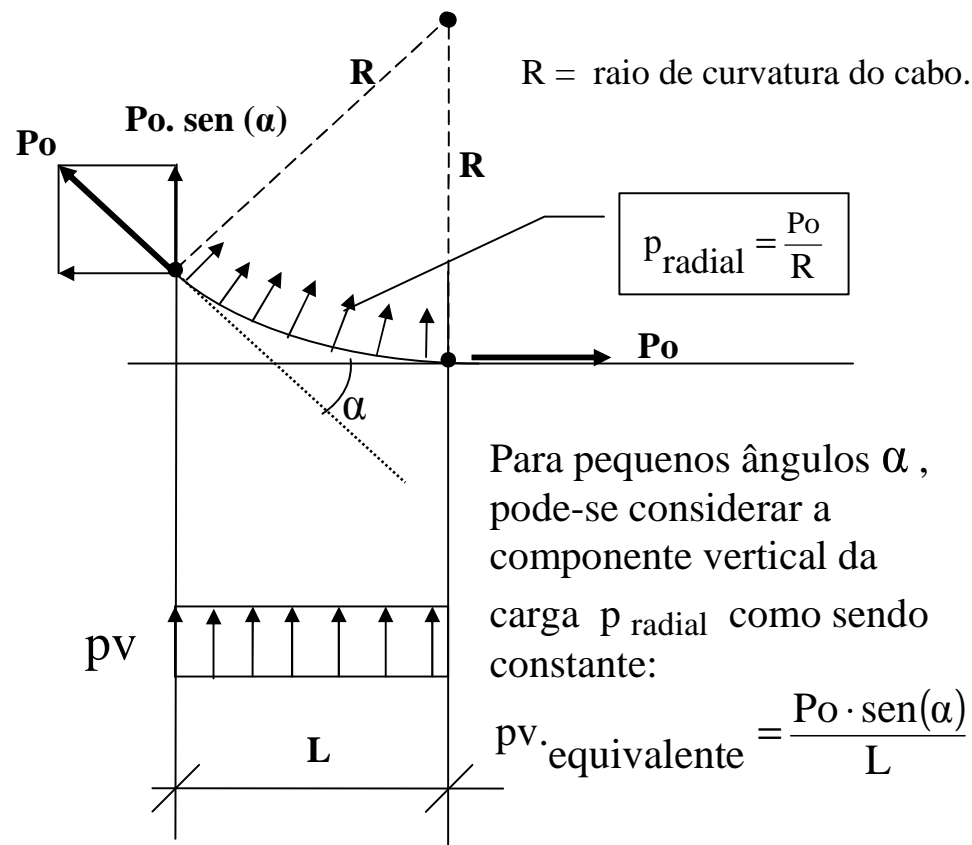
### Cálculo das cargas atuantes :

- **Nos apoios extremos:**

Componente vertical da força de protensão :  $P \times \text{sen}(\alpha) = 8000kN \times \text{sen}(9,09\text{ graus}) = 1263,99 \text{ kN}$

Componente horizontal da força de protensão:  $P \times \text{cos}(\alpha) = 8000kN \times \text{cos}(9,09\text{ graus}) = 7899,53 \text{ kN}$

- **Nos trechos curvos - Ver ANEXO 1 :**



O método da carga equivalente, é usado em qualquer tipo de estrutura, seja em vigas, seja em pórticos, em cascas ou em lajes protendidas.

Esse método foi desenvolvido pelo Eng. T. Y. Lin, no artigo – *Load-Balancing Method for Design and Analysis of Prestressed Concrete Structures.*

ACI Journal, Proceedings V,60, No.6, June 1963 pp 719-742.

É um método muito útil para o cálculo estrutural.

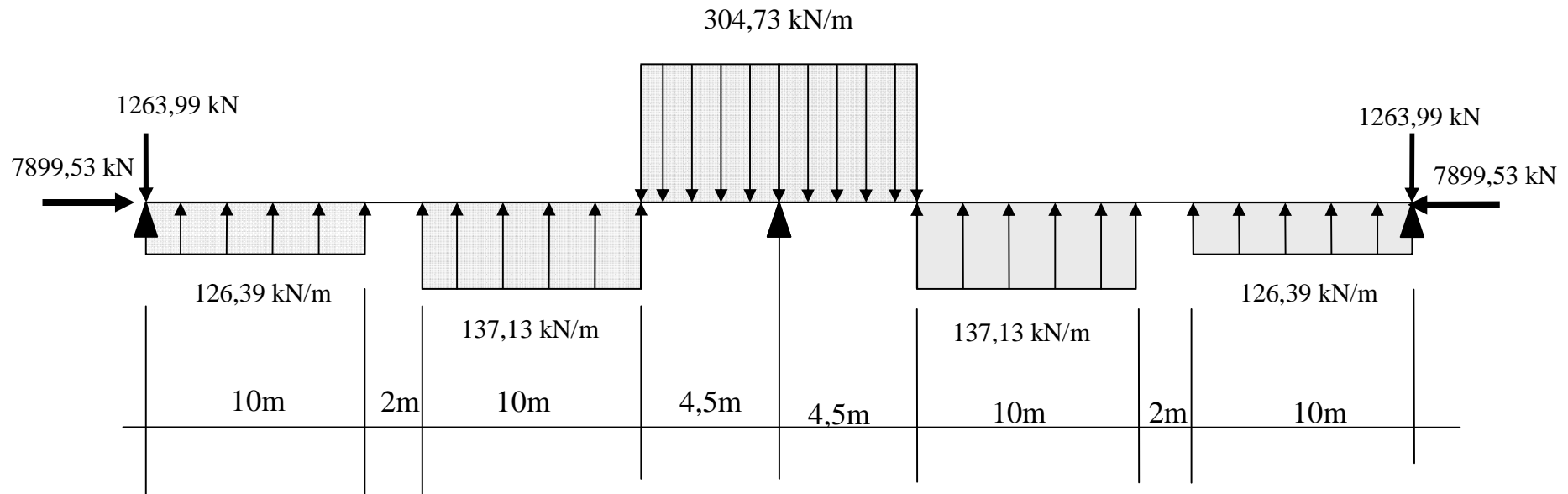
A idéia básica do método é fazer com que as forças aplicadas pelos cabos, na estrutura, equilibrem o peso próprio da estrutura. Em lajes protendidas, equilibra-se o peso próprio e mais uma parte da sobrecarga.

$$\text{Trecho 1 : ( 10m) : } p_{1v} = \frac{P \times \text{sen}(\alpha)}{L_1} = \frac{8000\text{kN} \times \text{sen}(9,09\text{graus})}{10\text{m}} = 126,39 \text{ kN/m}$$

$$\text{Trecho 2 : ( 2m) : } p_{2v} = 0 \text{ (zero)}$$

$$\text{Trecho 3 : ( 10m) : } p_{3v} = \frac{P \times \text{sen}(\alpha)}{L_3} = \frac{8000\text{kN} \times \text{sen}(9,87\text{graus})}{10\text{m}} = 137,13 \text{ kN/m}$$

$$\text{Trecho 4 : ( 4,5m) : } p_{4v} = \frac{P \times \text{sen}(\alpha)}{L_4} = \frac{8000\text{kN} \times \text{sen}(9,87\text{graus})}{4,5\text{m}} = 304,73 \text{ kN/m}$$



**Verificação do equilíbrio vertical :**

$$-1263,99\text{kN} + 126,39 \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right) \times 10\text{m} + 0 + 137,13 \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right) \times 10\text{m} - 304,73 \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right) \times 4,5 + 0 = 0 \quad \text{OK}$$

$$\text{apoio extremo} + \text{trecho 2} + \text{trecho 2} + \text{trecho 3} + \text{trecho 4} + \text{apoio central} = 0$$

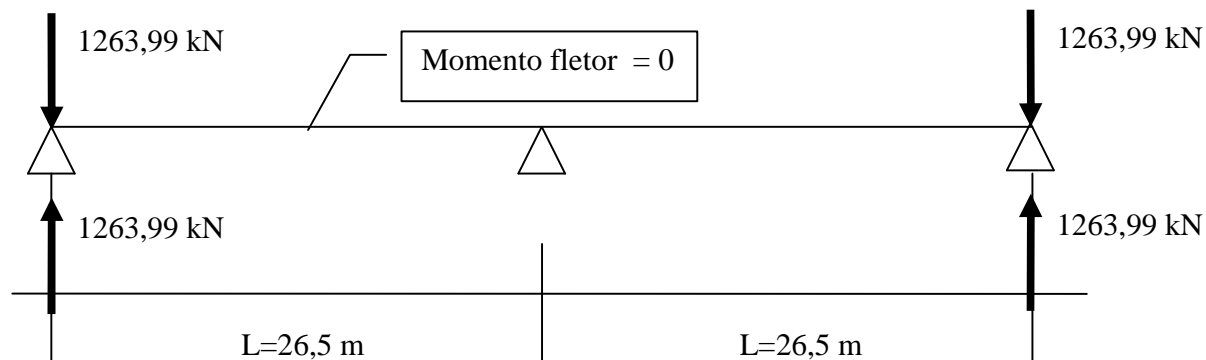
## Cálculo dos momentos de protensão:

Com o carregamento acima definido calculam-se os momentos fletores, as forças cortantes, e as forças normais na viga contínua.

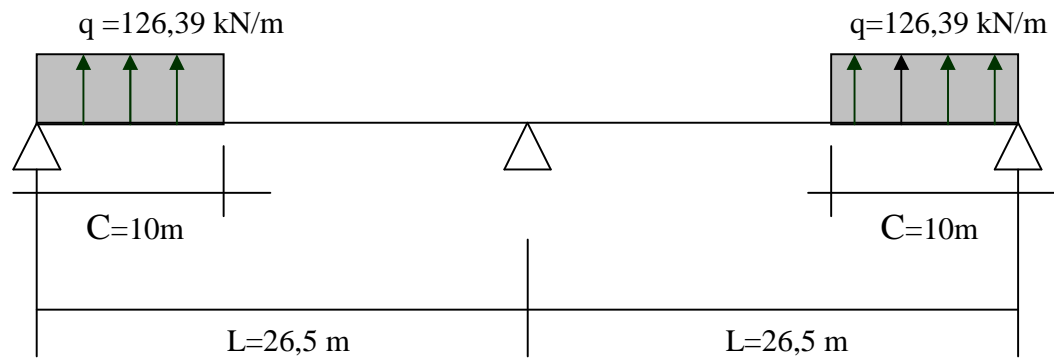
Usa-se, em geral, um programa de computador para os casos correntes da prática.

No exemplo em análise, uma viga simétrica com apenas 2 vãos, o cálculo pode ser feito por meio de fórmulas simples, como faremos adiante.

- **Carregamento da componente vertical dos cabos nos apoios extremos :**

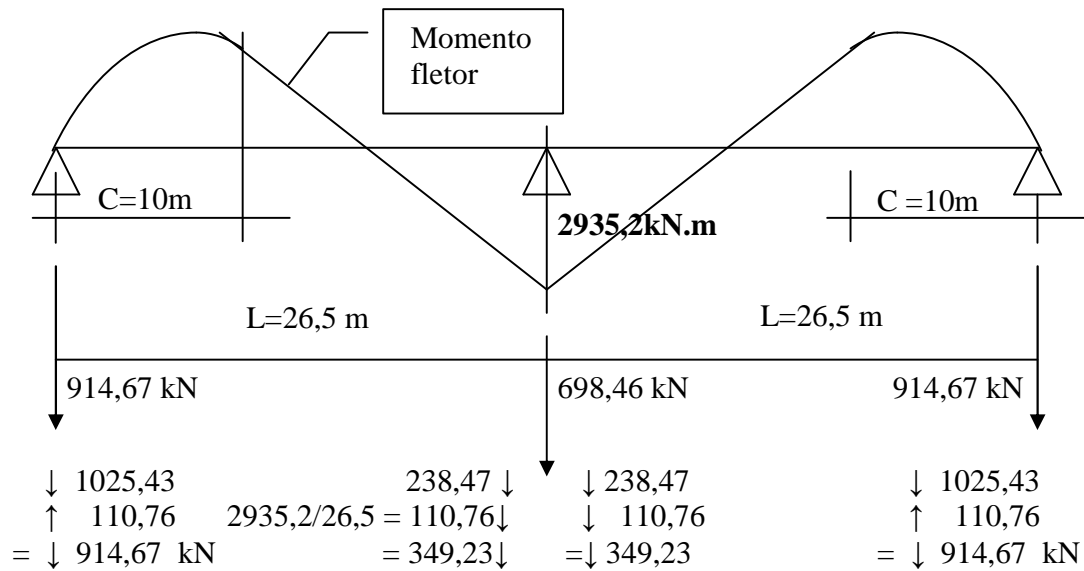


• **Trecho 1 :**

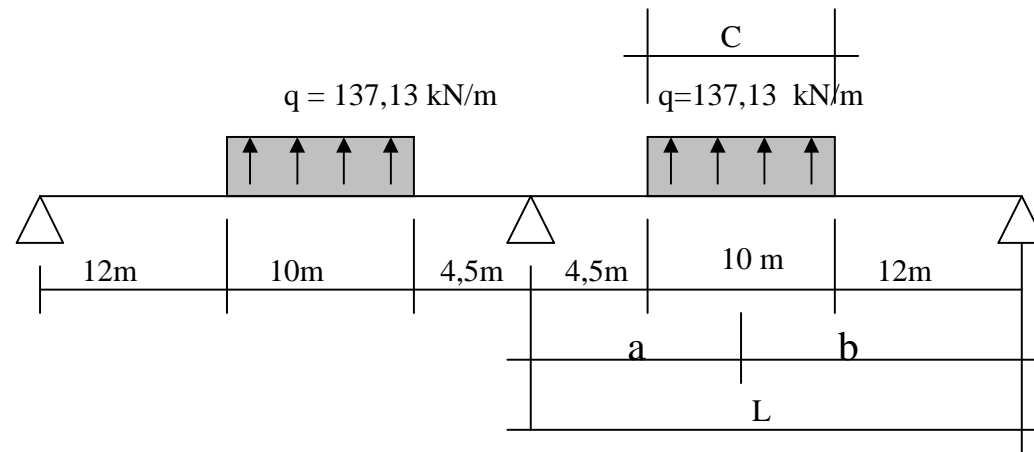


$\gamma = C / L = 10 / 26,5 = 0,377$

$$X = + \frac{q \cdot C^2}{8} (2 - \gamma^2) = \frac{126,39 \cdot (10)^2}{8} \cdot (2 - (0,377)^2) = 2935,20 \text{ kN.m}$$

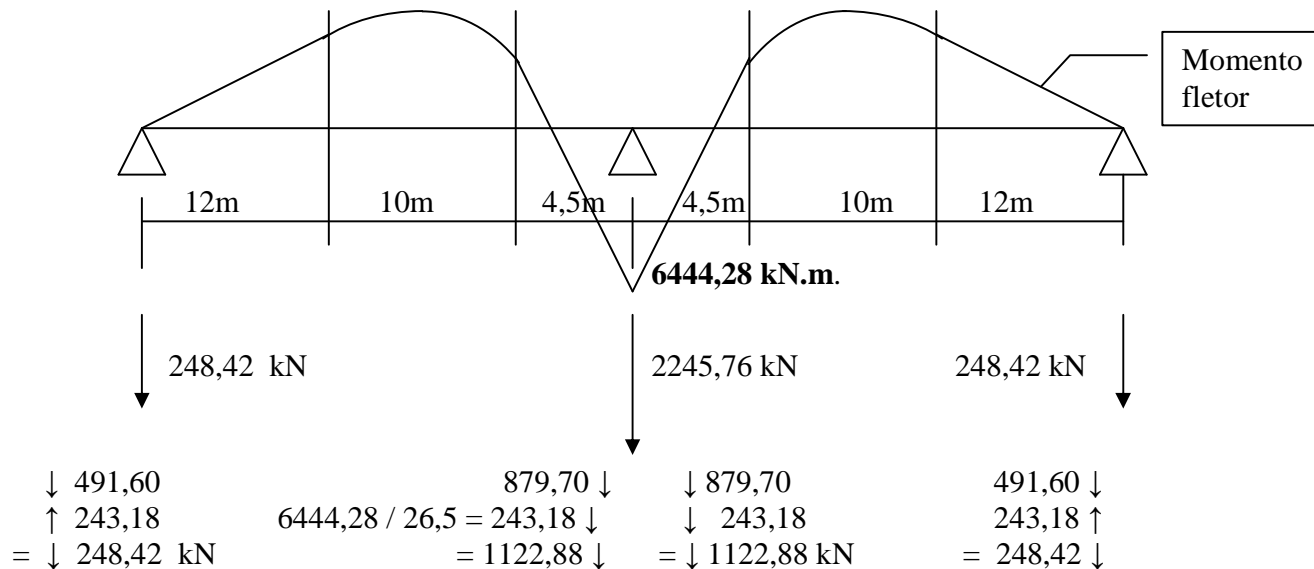


- Trecho 2 : Sem carga
- Trecho 3:



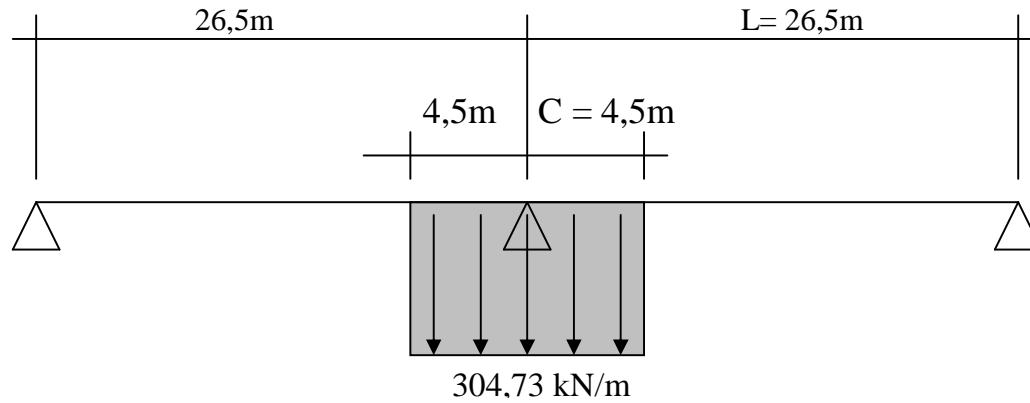
$$X = +\frac{q \cdot b \cdot c}{2} \cdot \left( 1 - \beta^2 - 0,25\gamma^2 \right); \quad \alpha = a/L = 9,5 / 26,5 = 0,3585; \quad \beta = b/L = 17 / 26,5 = 0,6415; \quad \gamma = c/L = 10 / 26,5 = 0,3774$$

$$X = +\frac{q \cdot b \cdot c}{2} \cdot \left( 1 - \beta^2 - 0,25\gamma^2 \right) = +\frac{137,13 \cdot 17 \cdot 10}{2} \cdot \left( 1 - (0,6415)^2 - 0,25 \cdot (0,3774)^2 \right); \quad X = +11656,05 \cdot 0,55287 = 6444,28 \text{ kN.m}$$

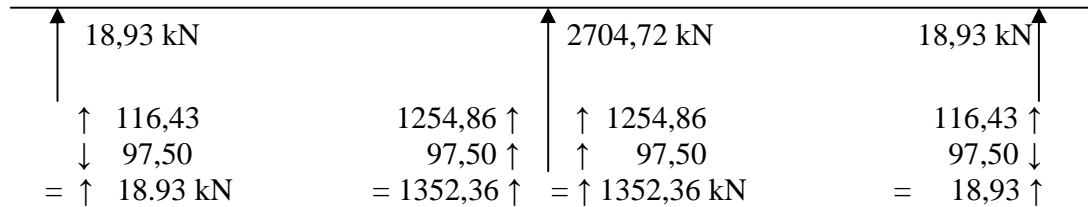
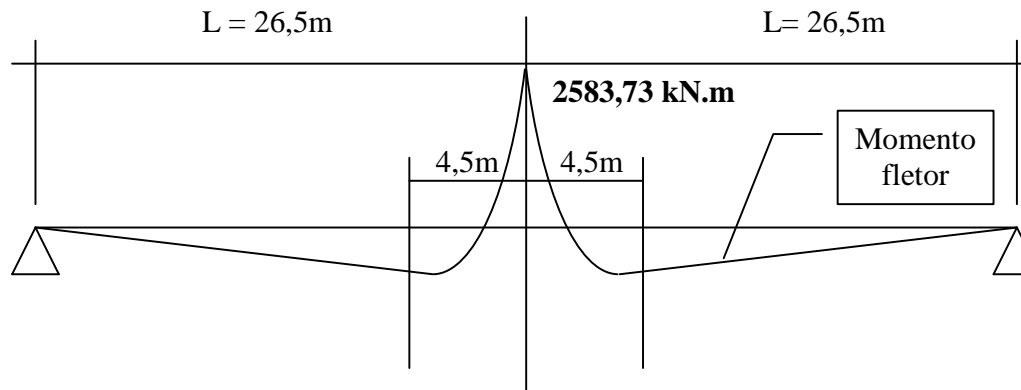




**Trecho 4 :**



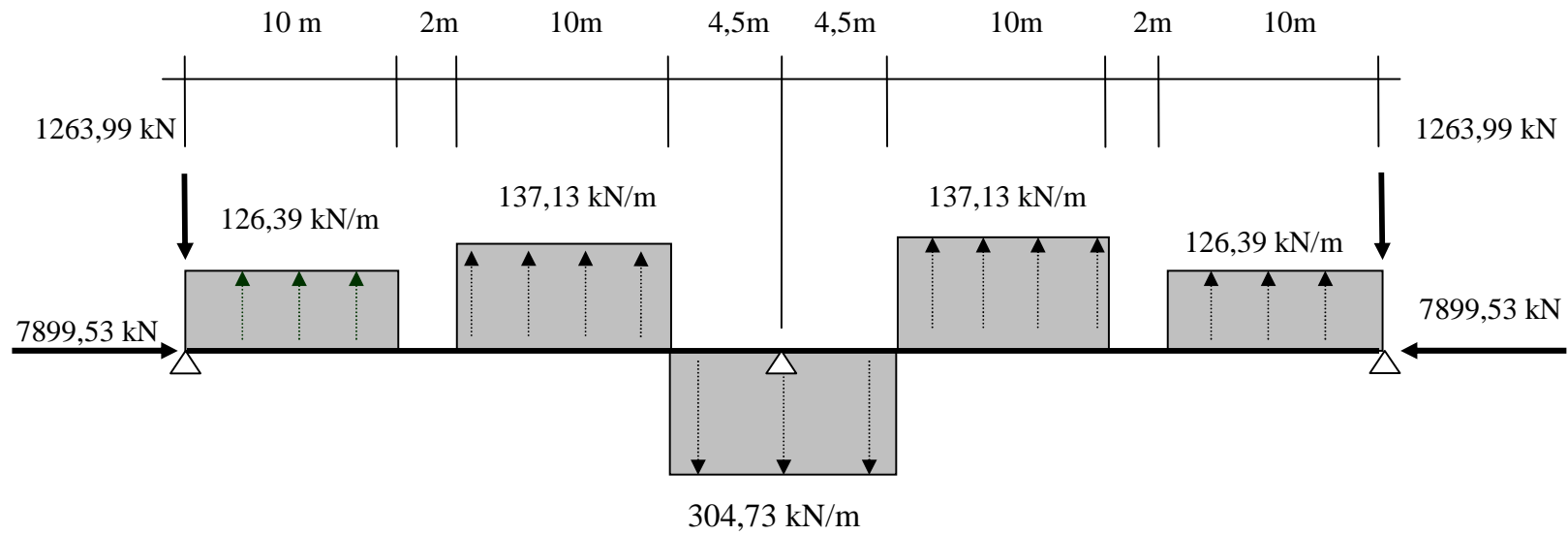
$$\gamma = c / L = 4,5 / 26,5 = 0,1698 ; \quad X = -\frac{qc^2}{8}(2-\gamma)^2 = -\frac{304,73 \cdot 4,5^2}{8}(2-0,1698)^2 = -2583,73 \text{ kN.m}$$



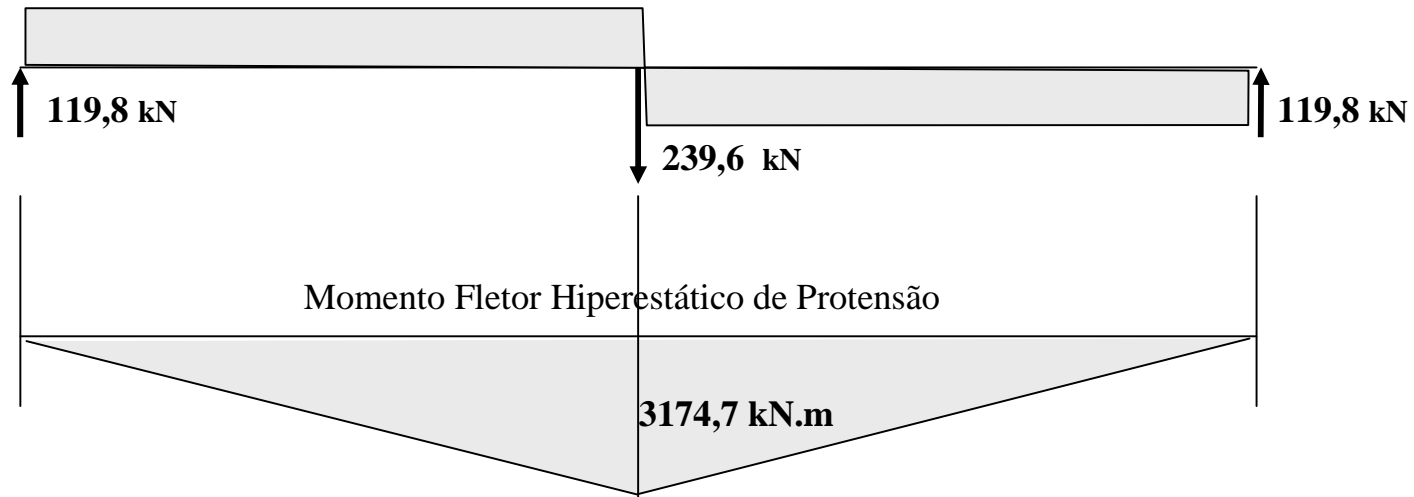
Reação no apoio Central = + 698,46 kN + 2245,76 kN - 2704,72 kN = + 239,5 kN

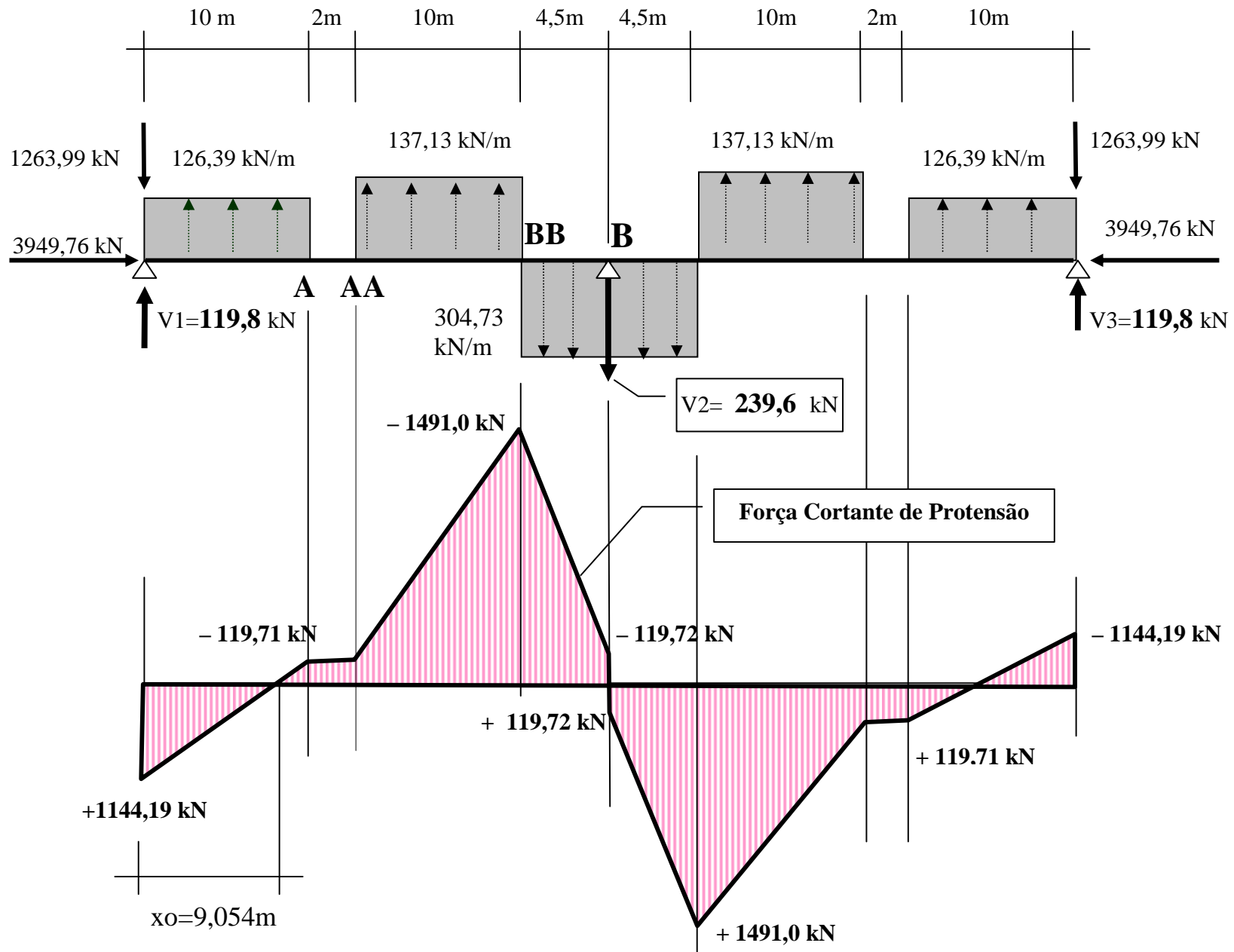
Reação apoios extremos = + 914,67 kN + 248,42 kN - 18,93 kN - 1263,99 kN = - 119,83 kN

### Resumo : Cargas atuantes



### Força cortante devida ao Hiperestático de Protensão





+++++

Seção de momento máximo =  $x_0 = (1144,19) \text{ kN} / (126,39 \text{ kN/m}) = 9,054 \text{ m}$

Momento máximo =  $-(1144,19) \text{ kN} \times 9,054 \text{ m} + 126,39 \text{ kN/m} \times (9,054 \text{ m})^2 / 2 = -5179,09 \text{ kN.m}$

Momento total de protensão na seção A =  $-(1144,19) \text{ kN} \times 10 \text{ m} + 126,39 \times \frac{(10 \text{ m})^2}{2} = -5122,4 \text{ kN.m}$

Momento total de protensão na seção AA =  $-(1144,19) \text{ kN} \times 12 \text{ m} + 126,39 \times 10 \text{ m} \times 7 \text{ m} = -4882,98 \text{ kN.m}$

Momento total de protensão na seção BB

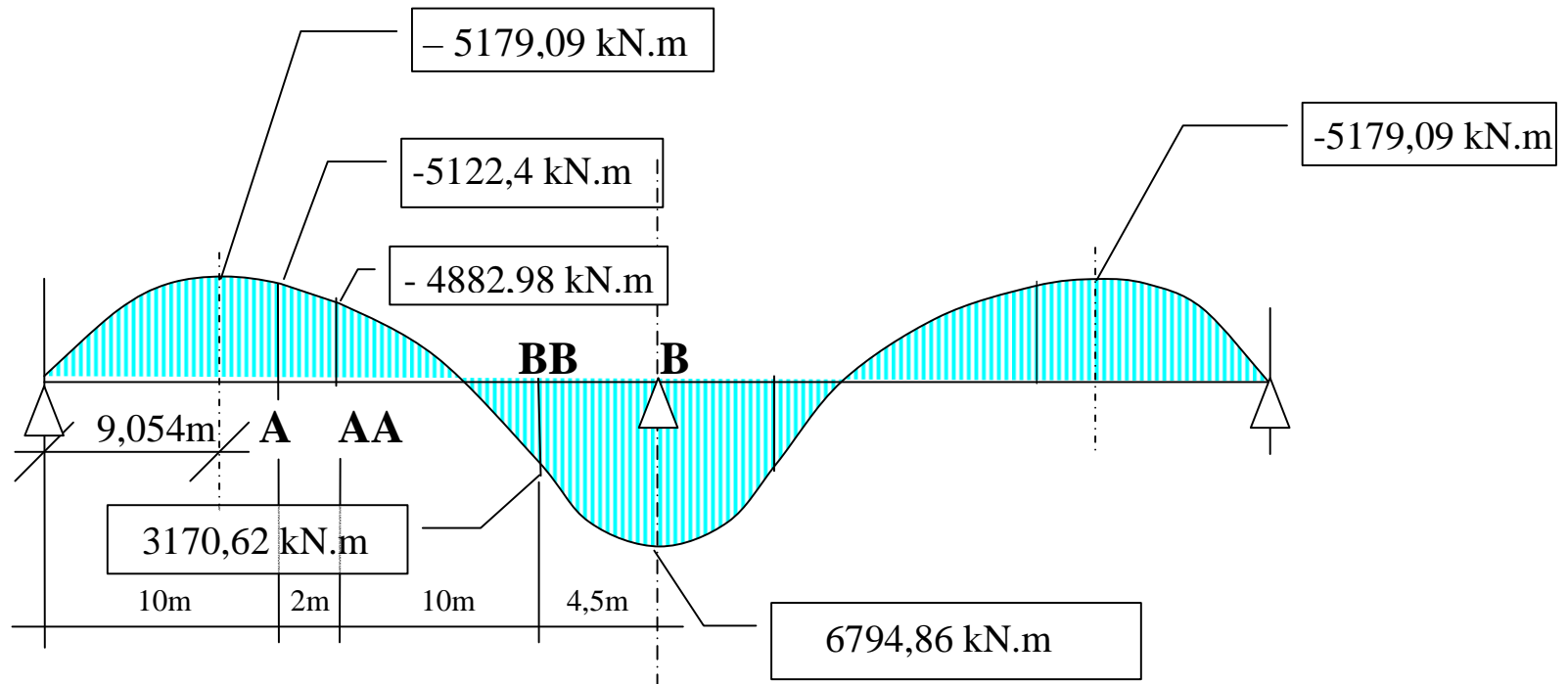
=  $-[(1144,19) \text{ kN} \times 22 \text{ m}] + [126,39 \text{ kN/m} \times 10 \text{ m} \times 17 \text{ m}] + [137,13 \text{ kN/m} \times 10 \text{ m} \times 5 \text{ m}] = +3170,62 \text{ kN.m}$

Momento total de protensão na seção B

$MB = -[(1144,19) \text{ kN} \times 26,5 \text{ m}] + [126,39 \text{ kN/m} \times 10 \text{ m} \times 21,5 \text{ m}] + [137,13 \text{ kN/m} \times 10 \text{ m} \times 9,5 \text{ m}] - 304,73 \times 4,5 \text{ m} \times \frac{4,5 \text{ m}}{2} =$

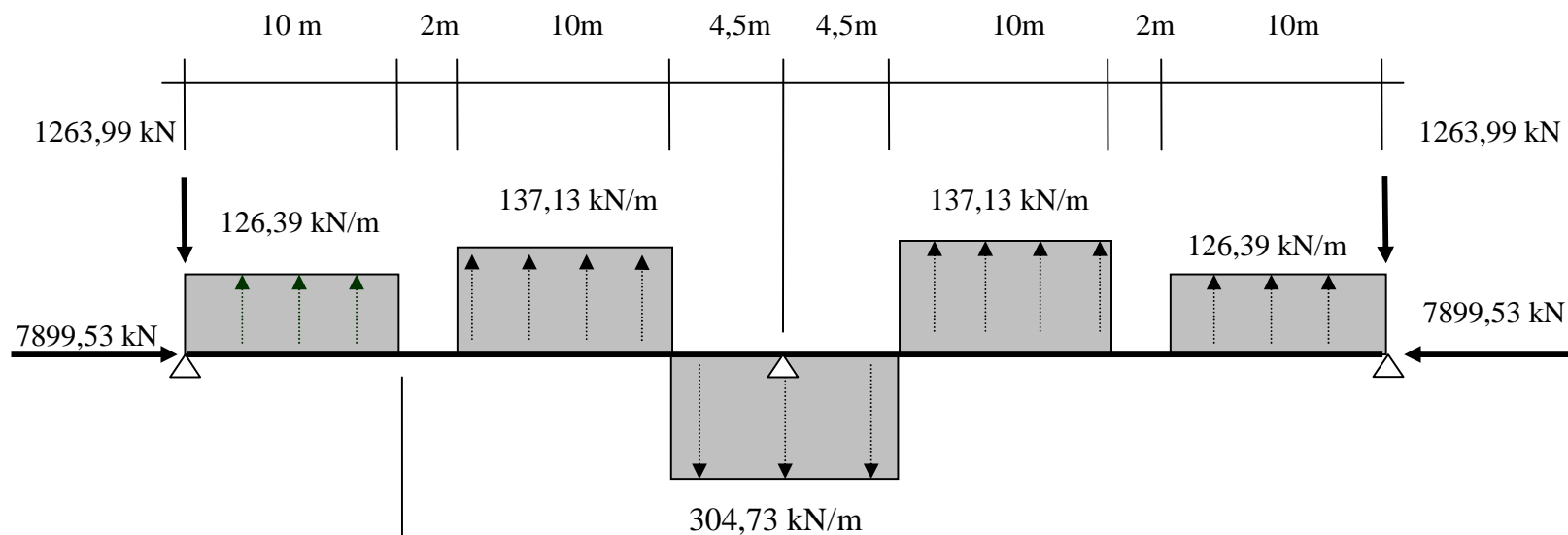
$MB = -30321,0 + 27173,9 + 13027,35 - 3085,39 = +6794,86 \text{ kN.m}$

### Diagrama de Momento Fletor Total de Protensão : ( ISO + HIPER )

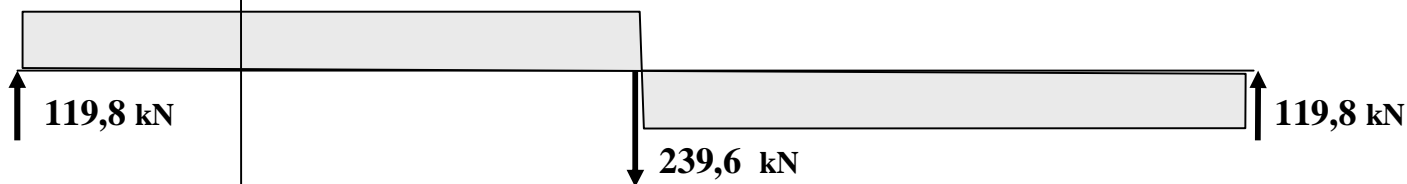


**Comentário :** Se fosse usado um programa tipo Viga3con para o cálculo da viga contínua, os resultados teriam sido os mesmos dos cálculos feitos manualmente. Ver os resultados do Viga3con no ANEXO 2. Qualquer outro programa de viga contínua poderia ser usado.

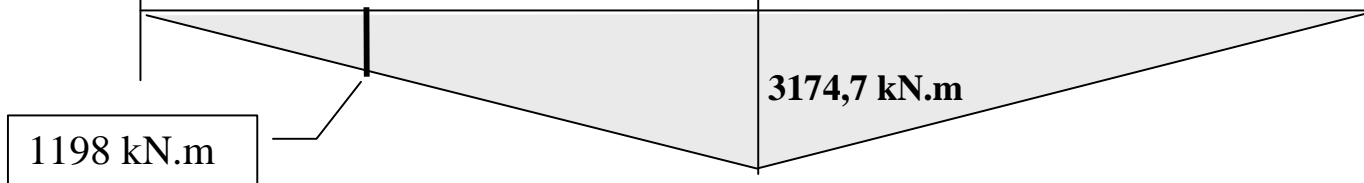
### Resumo : Cargas atuantes



Força cortante devida ao Hiperestático de Protensão



Momento Fletor Hiperestático de Protensão



## Verificação : Momento fletor hiperestático de Protensão no apoio :

Outro modo de calcular:

$$M \text{ total} = M.\text{isostático} + M.\text{ hiperestático} = 6794,86 \text{ kN.m}$$

$$M \text{ isostático} = 8000\text{kN} \times 0,46\text{m} = 3680 \text{ kN.m}$$

Logo:

$$M.\text{hiperestático} = 6794,86 - 3680 = 3114,86 \text{ kN.m} \approx 3174,7 \text{ kN.m} \text{ ( diferença de 1,9 \% nas aproximações de cálculo)}$$

## Seção B, sobre o apoio, verificação da segurança à ruptura ( Estado Limite Último ).

- Carga permanente  $g = 66 \text{ kN/m}$  :  $M \text{ seção B} = -5794 \text{ kN.m}$
- Carga móvel  $= 40 \text{ kN/m}$  :  $M \text{ seção B} = -3511 \text{ kN.m}$
- $M \text{ hiperestático de protensão} = 1582,58\text{kN.m}$

Escoamento do aço CP190RB :

$$RT \text{ escoamento.} = 6\text{cabos} \times 12\text{cordoalhas} \times \frac{1,0 \text{ cm}^2}{\text{cordoalha}} \times \frac{170 \left( \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right)}{1,15} = 10643,48\text{kN}$$

Plastificação do concreto da mesa inferior :

$$RC = 2,5\text{m} \times 0,20\text{m} \times 0,85 \times \frac{35000 \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right)}{1,4} = 10625\text{kN} \approx RT \text{ esc.} = 10643 \text{ kN}$$

$$Mu = Rc \times z = RT \times z \equiv 10625\text{kN} \times (1,50\text{m} - 0,12\text{m} - 0,10\text{m}) = 13\ 600 \text{ kN.m}$$

Reduz os momentos, logo usar 0,9

$$Md = 1,35 \times Mg + 1,5 \times Mp + 0,9 \times M \text{ prot.hiper.} < Mu$$

$$Md = 1,35 \times (-5794) + 1,50 \times (-3511) + 0,9 \times (+3174,7 \text{ kN.m}) = -10231 \text{ kN.m} < Mu = 13600\text{kN.m} \quad \mathbf{OK} \text{ Há segurança à ruptura por flexão.}$$

## Seção A , no vão, verificação da segurança à ruptura ( Estado Limite Último ).

- Carga permanente  $g = 66 \text{ kN/m}$  :  $M \text{ seção A} = + 3258 \text{ kN.m}$
- Carga móvel  $= 40 \text{ kN/m}$  :  $M \text{ seção A} = + 2629 \text{ kN.m}$
- $M$  hiperestático de protensão  $= + 1198 \text{ kN.m}$

Escoamento do aço CP190RB :

$$RT \text{ escoamento.} = 6\text{cabos} \times 12\text{cordoalhas} \times \frac{1,0 \text{ cm}^2}{\text{cordoalha}} \times \frac{170}{1,15} \left( \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right) = 10643,48\text{kN}$$

Plastificação do concreto da mesa superior :

$$RC = 5,0\text{m} \times 0,22\text{m} \times 0,85 \times \frac{35000}{1,4} \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right) = 23375\text{kN} \gg RT \text{ esc.} = 10643 \text{ kN}$$

Posição da linha neutra :

$$RT = 10643,48\text{kN} = RC = 5,0\text{m} \times [0,8 \times X(\text{m})] \times \left[ 0,85 \times \frac{35000}{1,4} \right] = 10643,48 \dots \dots \dots X = 0,125\text{m}$$

$$y = 0,8X = 0,10\text{m}$$

$$Mu = Rc \times z = RT \times z = 10643\text{kN} \times (1,50\text{m} - 0,12\text{m} - 0,05\text{m}) = 14155 \text{ kN.m}$$

$$Md = 1,35 \times Mg + 1,5 \times Mp + 1,1 \times M \text{ prot.hiper.} < Mu \text{ ( Verificar )}$$

Majora os momentos, logo usar 1,1

$$Md = 1,35 \times 3258 + 1,50 \times 2629 \text{ kN.m} + 1,1 \times 1198 \text{ kN.m} = 9659,6 \text{ kN.m} < Mu = 14155 \text{ kN.m} \quad \mathbf{OK} \text{ Há segurança à ruptura por flexão.}$$



## Tensões em Serviço – Estado limite de utilização

**Seção A – no vão :**

**Tensões de protensão:**

$$\sigma_s = \frac{N}{S} + \frac{M \text{ total de Protensão}}{W_s} = \frac{8000 \text{ kN}}{2,248 \text{ m}^2} - \frac{5122,4 \text{ kN.m}}{1.14538 \text{ m}^3} = 3558,7 - 4472,2 = -913,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -0,91 \text{ MPa tração}$$

$$\sigma_i = \frac{N}{S} + \frac{M \text{ total de Protensão}}{W_i} = \frac{8000 \text{ kN}}{2,248 \text{ m}^2} + \frac{5122,4 \text{ kN.m}}{0.73083 \text{ m}^3} = 3558,7 + 7009,0 = 1056,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 10,57 \text{ MPa compressão}$$

**Tensões de carga permanente total g1+g2 :**

$$\sigma_s = \frac{M g}{W_s} = \frac{3258 \text{ kN.m}}{1.14538 \text{ m}^3} = 2844 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 2,84 \text{ MPa compressão}$$

$$\sigma_i = \frac{M g}{W_i} = -\frac{3258 \text{ kN.m}}{0,73083 \text{ m}^3} = -4458 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -4,46 \text{ MPa tração}$$

**Tensões de carga móvel :**

$$\sigma_s = \frac{M g}{W_s} = -\frac{2629 \text{ kN.m}}{1.14538 \text{ m}^3} = +2295,3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = +2,29 \text{ MPa compressão}$$

$$\sigma_i = \frac{M g}{W_i} = \frac{2629 \text{ kN.m}}{0,73083 \text{ m}^3} = -3597 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -3,60 \text{ MPa tração}$$

**Tensões da Protensão + Carga Permanente total g1+g2:**

$$\sigma_s = -0,91 + 2,84 = 1,93 \text{ MPa compressão}$$

$$\sigma_i = +10,57 - 4,46 = 6,11 \text{ MPa compressão}$$

**Tensões da Protensão + Carga permanente + Carga Móvel :**

$$\sigma_s = -0,91 + 2,84 + 2,29 = 4,22 \text{ MPa compressão} < 0,50 f_{ck} = 0,50 \times 35 \text{ MPa} = 17,5 \text{ MPa compressão}$$

$$\sigma_i = +10,57 - 4,46 - 3,60 = 2,51 \text{ MPa compressão}$$

### Tensões de gradiente térmico ( ver cálculo com o programa Viga3con, no final, ANEXO 3 )

$M_A$  devido a  $\Delta T$  ( 15 Centigrados na altura de 1,5m) = +939 kN.m tração no bordo inferior .

$$\sigma_{\Delta T} = \frac{M \text{ devido a } \Delta T}{W_s} = + \frac{939 \text{ kN.m}}{1.14538 \text{ m}^3} = +820 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = +0,82 \text{ MPa compressão}$$

$$\sigma_{\Delta T} = \frac{M \text{ devido a } \Delta T}{W_i} = - \frac{939 \text{ kN.m}}{0,73083 \text{ m}^3} = -1285 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -1,28 \text{ MPa tração}$$

### Tensões da Protensão + Carga permanente + Carga Móvel + Gradiente Térmico :

$$\sigma_s = -0,91 + 2,84 + 2,29 + 0,82 = 5,94 \text{ MPa compressão} < 0,50 f_{ck} = 0,50 \times 35 \text{ MPa} = 17,5 \text{ MPa compressão}$$

$$\sigma_i = +10,57 - 4,46 - 3,60 - 1,28 = 1,23 \text{ MPa compressão OK}$$

### Seção B – sobre o apoio central :

#### Tensões de protensão:

$$\sigma_s = \frac{N}{S} + \frac{M \text{ total de Protensão}}{W_s} = \frac{8000 \text{ kN}}{2,248 \text{ m}^2} + \frac{6794,86 \text{ kN.m}}{1.14538 \text{ m}^3} = 3558,7 + 5932,4 = 9491,1 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 9,49 \text{ MPa compressão}$$

$$\sigma_i = \frac{N}{S} + \frac{M \text{ total de Protensão}}{W_i} = \frac{8000 \text{ kN}}{2,248 \text{ m}^2} - \frac{6794,86 \text{ kN.m}}{0.73083 \text{ m}^3} = 3558,7 - 9297,4 = -5738,7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -5,74 \text{ MPa tração}$$

#### Tensões de carga permanente total g1+g2 :

$$\sigma_s = \frac{M_g}{W_s} = - \frac{5794 \text{ kN.m}}{1.14538 \text{ m}^3} = -5058 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -5,06 \text{ MPa tração}$$

$$\sigma_i = \frac{M_g}{W_i} = \frac{5794 \text{ kN.m}}{0,73083 \text{ m}^3} = 7927 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 7,93 \text{ MPa compressão}$$

### **Tensões de carga móvel :**

$$\sigma_s = \frac{M_g}{W_s} = -\frac{3511 \text{ kN.m}}{1.14538 \text{ m}^3} = -3065 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -3,07 \text{ MPa tração}$$

$$\sigma_i = \frac{M_g}{W_i} = \frac{3511 \text{ kN.m}}{0,73083 \text{ m}^3} = 4804 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 4,80 \text{ MPa compressão}$$

### **Tensões da Protensão + Carga permanente:**

$$\sigma_s = 9,49 - 5,06 = 4,43 \text{ MPa compressão}$$

$$\sigma_i = -5,74 + 7,93 = +2,19 \text{ MPa compressão}$$

### **Tensões da Protensão + Carga permanente + Carga Móvel :**

$$\sigma_s = 9,49 - 5,06 - 3,07 = +1,36 \text{ MPa compressão}$$

$$\sigma_i = -5,74 + 7,93 + 4,80 = 6,99 \text{ MPa} < 0,50 f_{ck} = 0,50 \times 35 \text{ MPa} = 17,5 \text{ MPa compressão}$$

### **Tensões de gradiente térmico ( ver cálculo com o programa Viga3con, no final, ANEXO 2 )**

$M_B$  devido a  $\Delta T$  ( 15 Centígrados na altura de 1,5m) = 2489 kN.m tração no bordo inferior .

$$\sigma_s = \frac{M \text{ devido a } \Delta T}{W_s} = -\frac{2489 \text{ kN.m}}{1.14538 \text{ m}^3} = +2173 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 2,17 \text{ MPa compressão}$$

$$\sigma_i = \frac{M \text{ devido a } \Delta T}{W_i} = -\frac{2489 \text{ kN.m}}{0,73083 \text{ m}^3} = -3406 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -3,41 \text{ MPa tração}$$

### **Tensões da Protensão + Carga permanente + Gradiente térmico :**

$$\sigma_s = 9,49 - 5,06 + 2,17 = +1,36 \text{ MPa compressão}$$

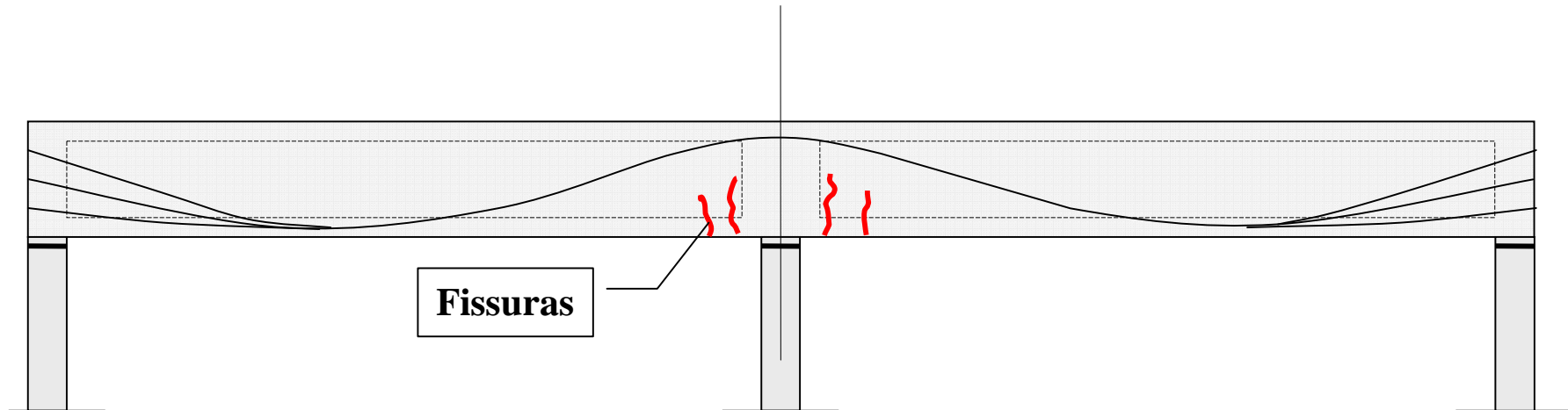
$$\sigma_i = -5,74 + 7,93 - 3,41 = -$$

*Verificar fissuração e colocar armadura junto ao bordo inferior.*

## Comentário : Fissuras em Vigas contínuas em concreto protendido

Muitas pontes protendidas, no Brasil e no mundo, apresentaram fissuras no bordo inferior, junto aos apoios centrais, fato inimaginável para vigas contínuas de concreto armado, nas quais ocorrem grandes tensões de compressão no bordo inferior junto dos apoios centrais.

É necessário reforçar todo o trecho da estrutura próximo ao apoio central.

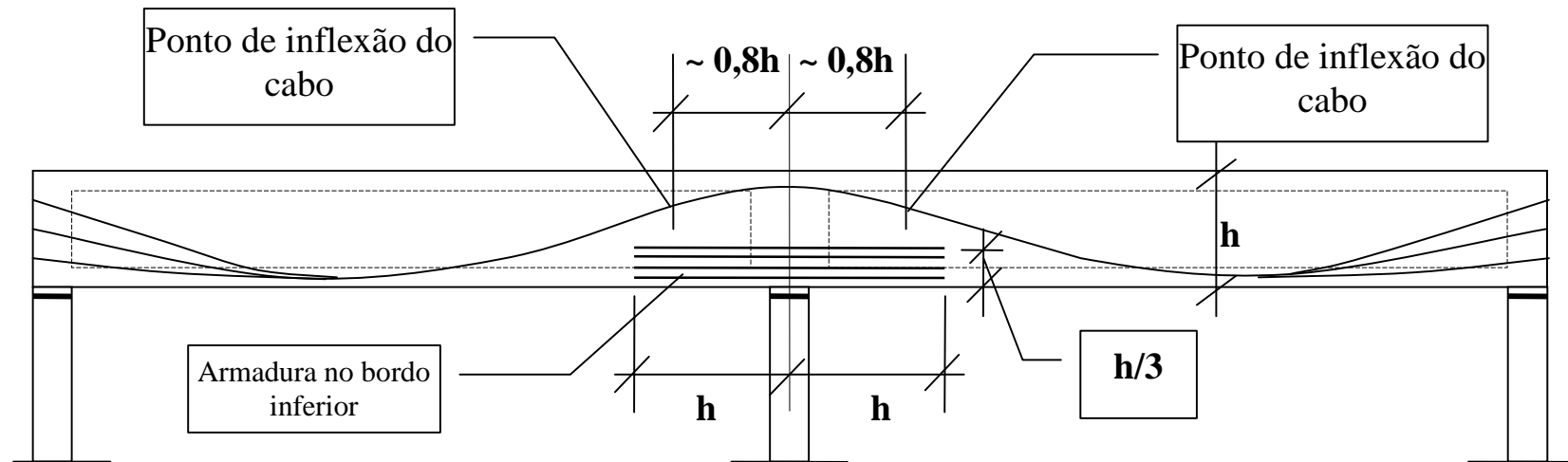


As causas das fissuras são :

- Forte Protensão :
  - Momento isostático de protensão grande, tracionando o bordo inferior.
  - Momento hiperestático de protensão grande , tracionando o bordo inferior.
- Efeito do aquecimento, por insolação, da laje superior, gerando momentos fletores que tracionam o bordo inferior.

Para evitar as fissuras junto ao bordo inferior, nos apoios centrais, são feitas recomendações pelo Prof. Fritz Leonhardt e pela Norma Alemã de Concreto Protendido DIN 4227 item 6.7.6

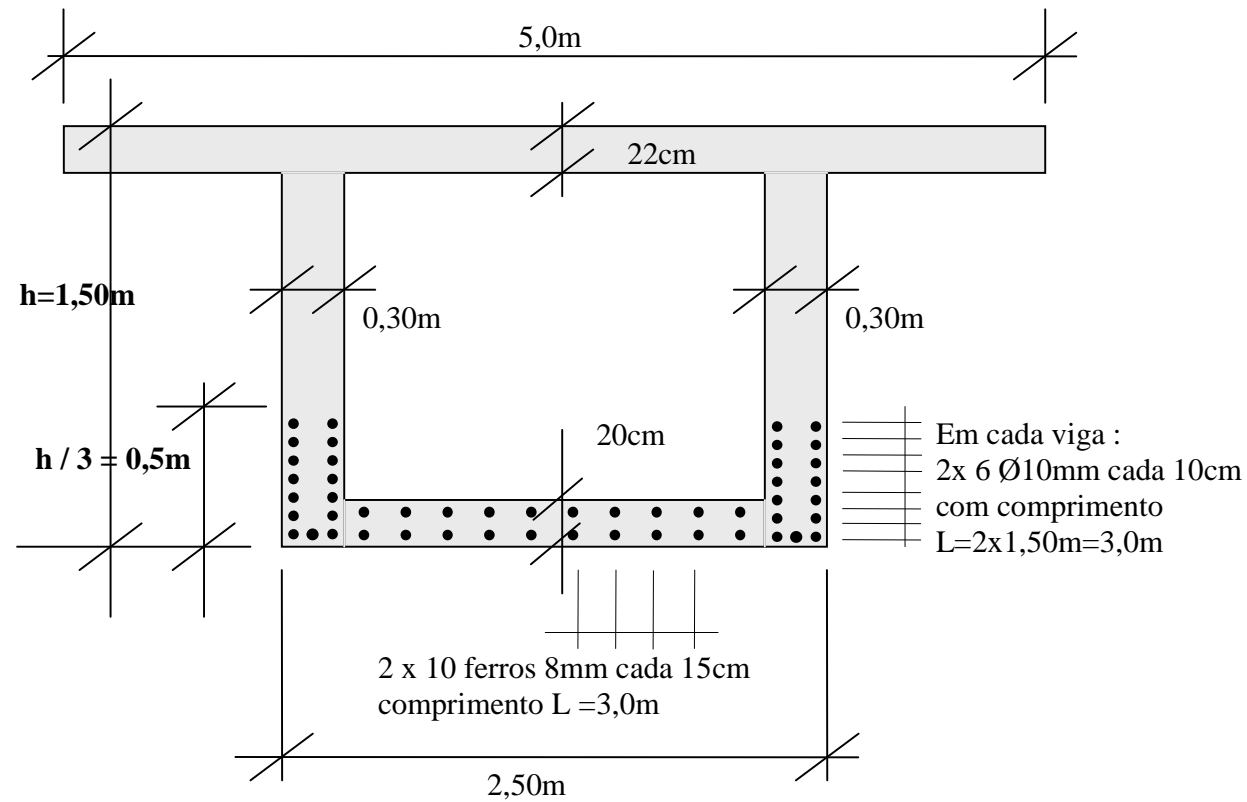
### Curvatura dos cabos sobre os apoios



### Armadura adicional sobre os apoios centrais

- O ponto de inflexão dos cabos deve distar no máximo  $0,8h$  do eixo dos apoios.
- A tensão de compressão no bordo inferior, considerando os gradientes térmicos no tabuleiro da ponte, deve ser maior que  $1,0$  MPa.
- Sobre os apoios, a protensão não necessita ser completa, isto é, parte da resistência à ruptura pode ser obtida com barras de aço CA50.
- Para reduzir a abertura de eventuais fissuras no bordo inferior, usar armadura de aço CA50 junto ao bordo inferior do tabuleiro celular, tanto nas vigas quanto na laje inferior.
- Essa armadura deve ser colocada até uma altura de  $h/3$ , a partir da face inferior. ( ver figura acima)
- A área dessa armadura deve ser de **0,2%** das áreas de concreto:  $0,2\%$  da área total das vigas e  $0,2\%$  da área total da laje inferior.( ver figura adiante)
- O comprimento dessa armadura deve ser  **$2h$**  (ver figura acima).

No tabuleiro celular desse exemplo:



- Área da armadura a colocar em cada viga :

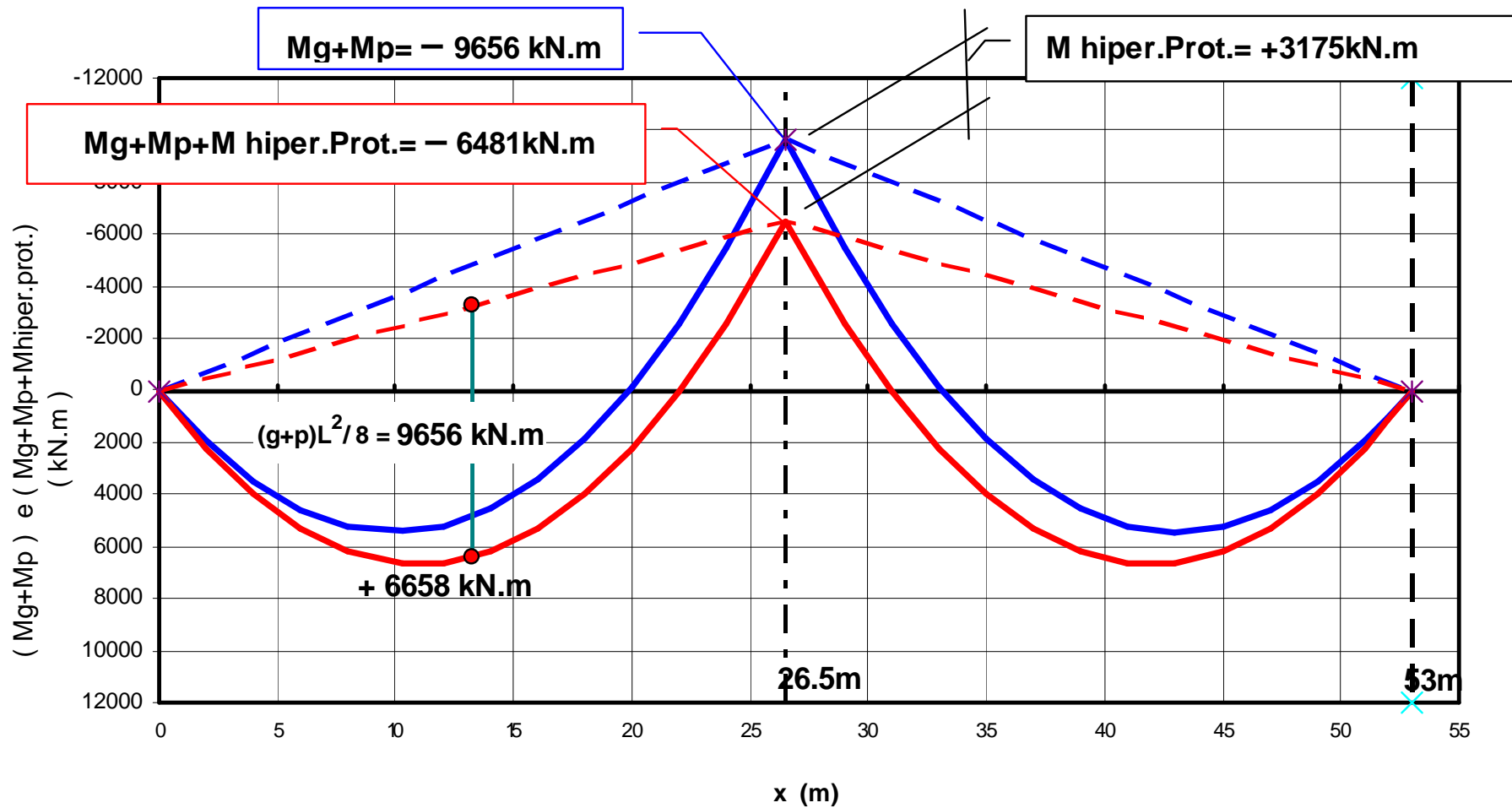
$$As (1viga) = \left(\frac{0,2}{100}\right) \times 30\text{cm} \times 150\text{cm} = 9\text{cm}^2 \quad CA50 = 12 \text{ ferros } 10\text{mm}$$

- Área da armadura a colocar na laje inferior:

$$As (laje inferior) = \left(\frac{0,2}{100}\right) \times 20\text{cm} \times (250\text{cm} - 2 \times 30\text{cm}) = 8\text{cm}^2 \quad CA50 = 2 \times 10 \text{ ferros } 8\text{mm cada } 15\text{cm} = 10\text{cm}^2$$

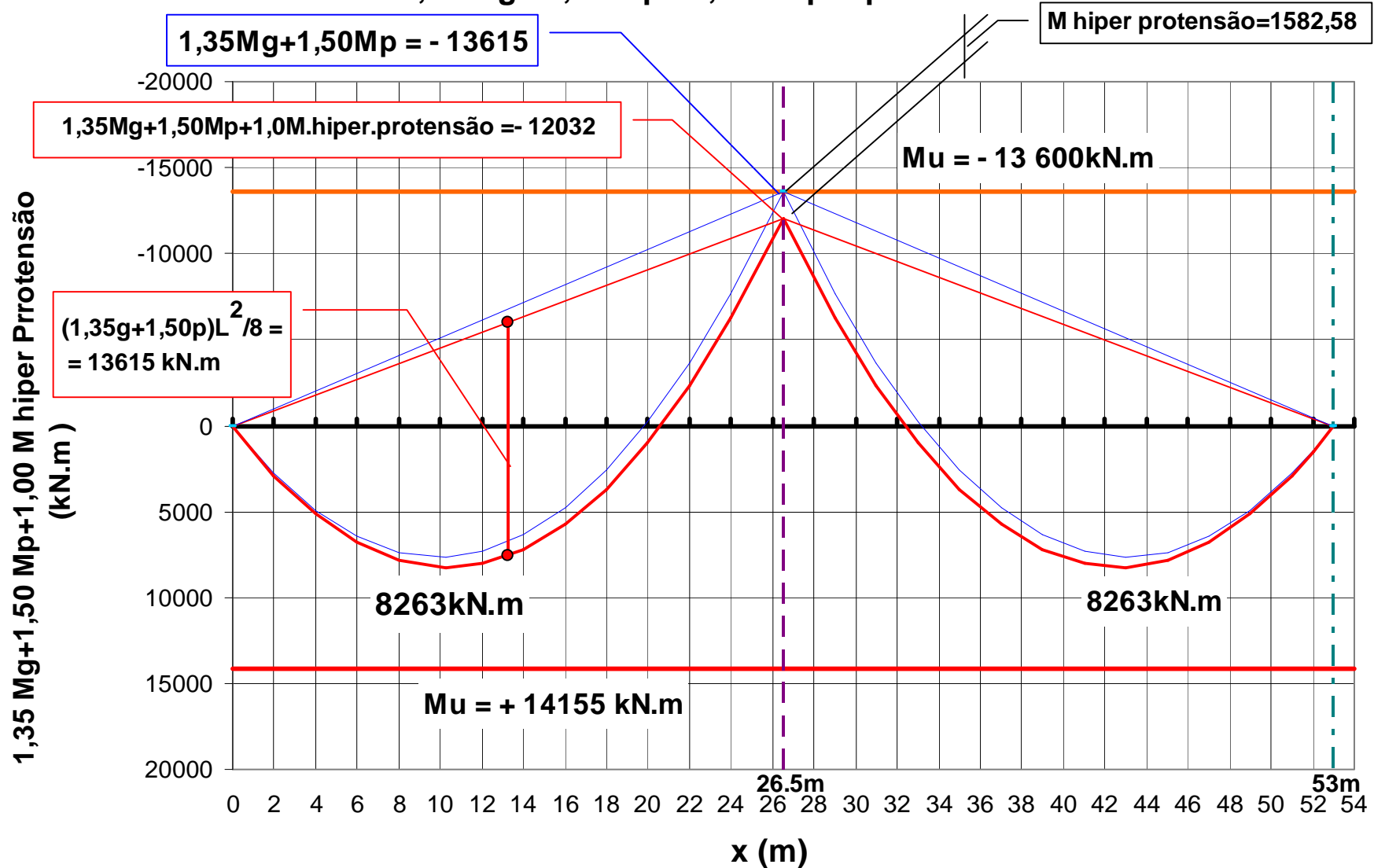
Para facilitar a compreensão do efeito do momento fletor hiperestático de protensão mostramos, a seguir, os diagramas de momento fletor para os estados limites E.L.Serviço, E.L.Último e E.L. Plástico.

E.L.S. = Estado Limite de Serviço  
 1,0Mg + 1,0Mp + 1,0M hiperestático de protensão



- O momento hiperestático de protensão, em geral, diminui o momento fletor sobre o apoio e aumenta o momento fletor no vão.

**E.L.U. Estado Limite Último**  
**1,35 Mg +1,50 Mp +1,0 M.hiper.protensão**



- A figura mostra o momento hiperestático de protensão multiplicado por 1.00.
- Ao fazer a verificação no vão, multiplicar o momento hiperestático de protensão por 1.10, pois ele aumenta os momentos Mg e Mp.
- Ao fazer a verificação no apoio, multiplicar o momento hiperestático de protensão por 0.90, pois ele diminui os momentos Mg e Mp.

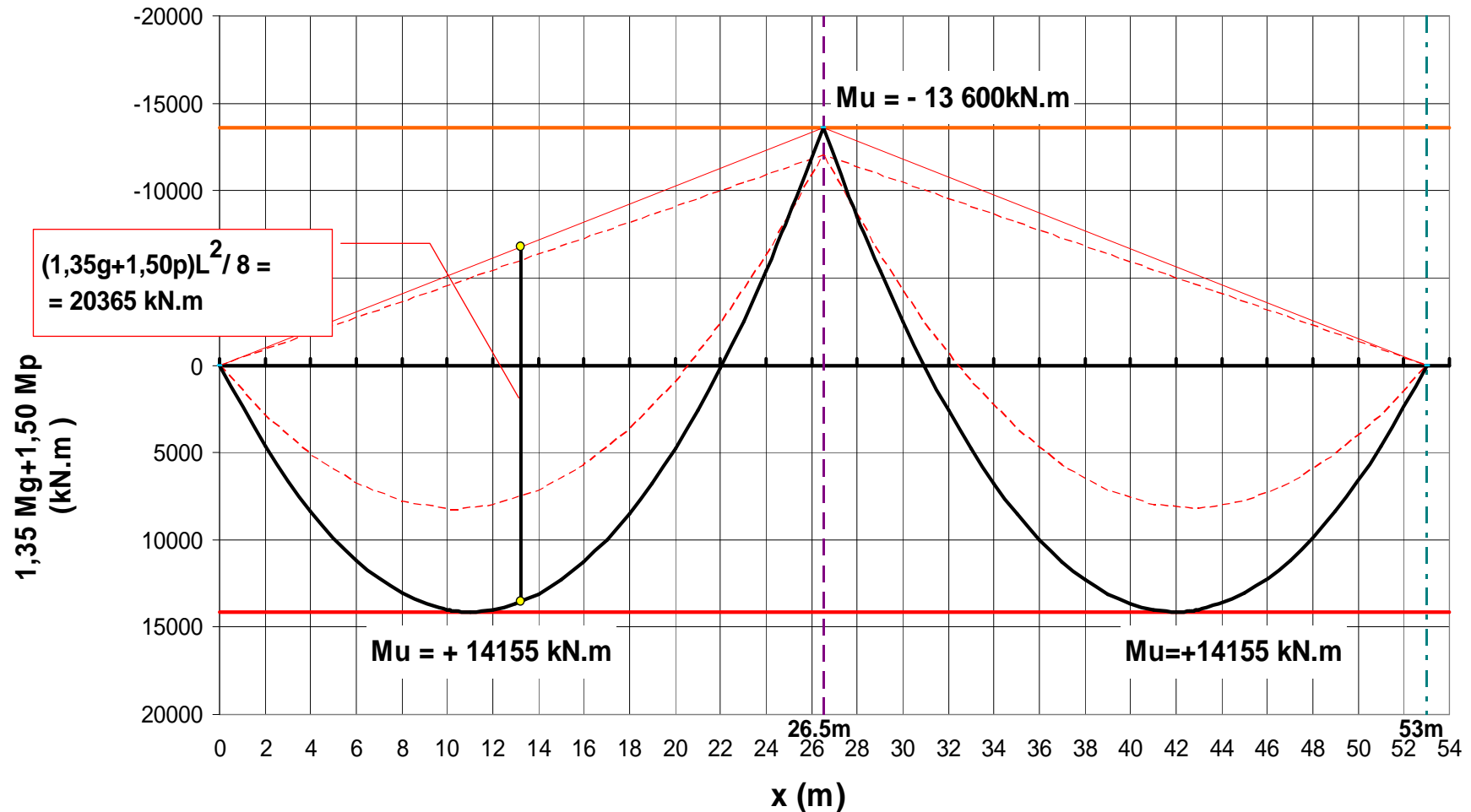


## E.L.U. Estado Limite Último : Teoria da Plasticidade

$M_{\text{apoio}} = M_u \text{ apoio} = 1,35 M_g + 1,50 M_p = 13600 \text{ kN.m}$

$M_{\text{máximo no vão}} = M_u \text{ vão} = 1,35 M_g + 1,50 M_p = 14155 \text{ kN.m}$

Solução :  $(1,35g + 1,50p) = 232 \text{ kN/m}$



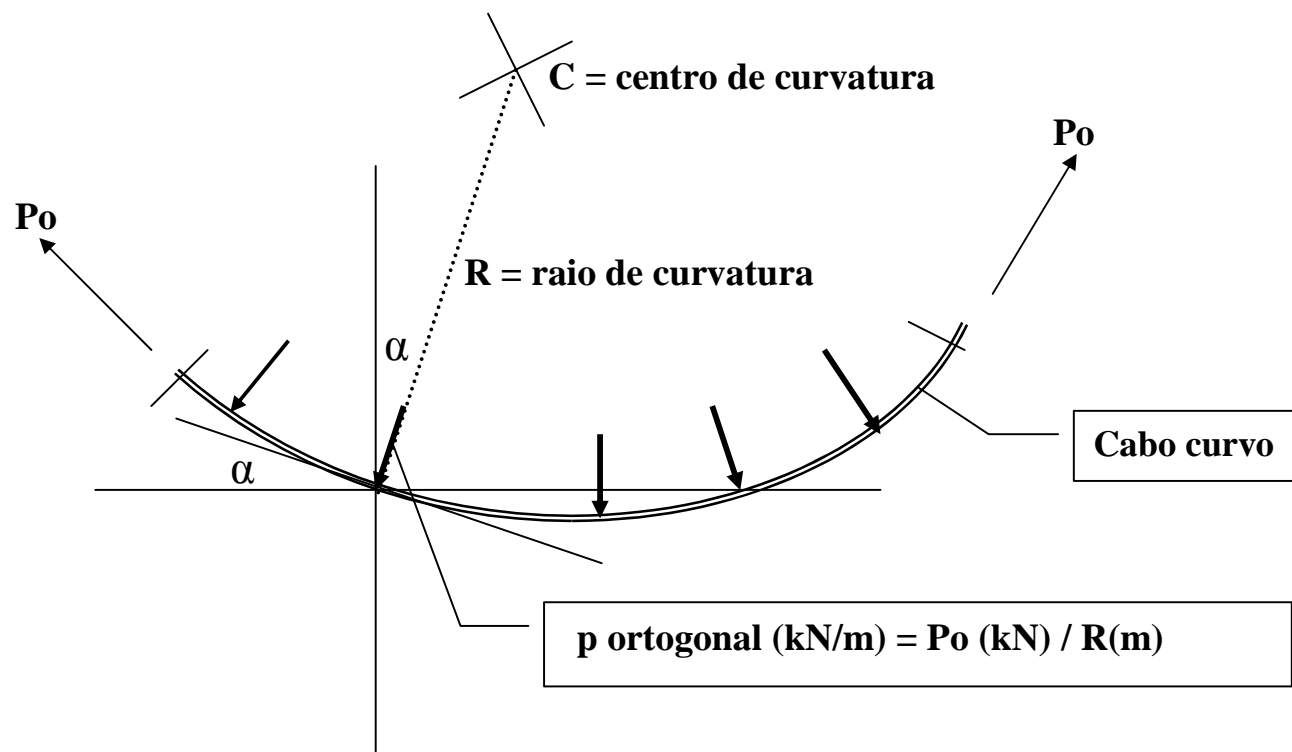
- Ao fazer a verificação segundo a teoria da plasticidade não considerar o momento hiperestático de protensão.
- Ao fazer a verificação segundo a teoria da plasticidade, verificar a capacidade de rotação das seções críticas, que formam o mecanismo de ruptura, isto é, a seção do apoio central e uma seção no vão. A resistência à força cortante fica muito reduzida na rótula plástica sobre o apoio, devido à intensa fissuração. A alma das vigas fica muito fissurada e reduzida, e não transmite a força cortante com a segurança necessária..

• **Referências :**

1. IABSE – Workshop – New Delhi 1993 – The Design of Structural Concrete –Jorg Schlaich , Kurt Schaefer – Institute for Structural Design – University of Stuttgart.
2. Prof. Fritz Leonhardt – Vorlesungen über Massivbau – Vierter teil – Nachweis der Gebrauchsfähigkeit -1977
3. Yves Guyon – Sistemas hiperestáticos de Concreto Protendido –conferência realizada no Clube de Engenharia em 1960.
4. W.E.Chen – Plasticity in Reinforced Concrete -1982 - Mc-Graw- Hill
5. Collins & Mitchell – Prestressed Concrete Basics –Canada Prestressed Concrete Institute - Structural -Architectural - 1987
6. Park and Paulay – Reinforced Concrete Structures - John Wiley & Sons -1975
7. Beton Kalender – Eurocode 2 – Stahlbeton und Spannbeton – 1998
8. Dilger W. –Veränderlichkeit der Biege-und Schubfestigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluss auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung. DafStb, Heft 179n- Berlin , W , Ernst u. Sohn , 1966.
9. Mônica Pinto Barbosa – Concreto Protendido – Estados limites de Utilização e Último- F.E.I.S-UNESP-  
[www.dec.feis.unesp.br/monica](http://www.dec.feis.unesp.br/monica) - 2009
10. DIN 4227 –Spannbeton
11. Prof. Eduardo C.S. Thomaz Instituto Militar de Engenharia

## ANEXO 1 – Carga Vertical Equivalente à Protensão

### Pressão de contacto entre o cabo e o concreto



Na direção “ortogonal” ao cabo, isto é, na direção do raio de curvatura a pressão entre o concreto e o cabo vale:

$$p \text{ ortogonal} = P_o / R \text{ curvatura}$$

Cabo parabólico :  $Y = a + b \cdot X + c \cdot X^2$

$$Y' = b + 2 \cdot c \cdot X$$

$$Y'' = 2 \cdot c$$

$$K = \frac{1}{R_{\text{curvatura}}} = \frac{Y''}{\left(1 + (Y')^2\right)^{3/2}} = \frac{2 \cdot c}{\left(1 + (b + 2 \cdot c \cdot X)^2\right)^{3/2}}$$

$$p \cdot \text{ortogonal} = P_o / R_{\text{curvatura}}$$

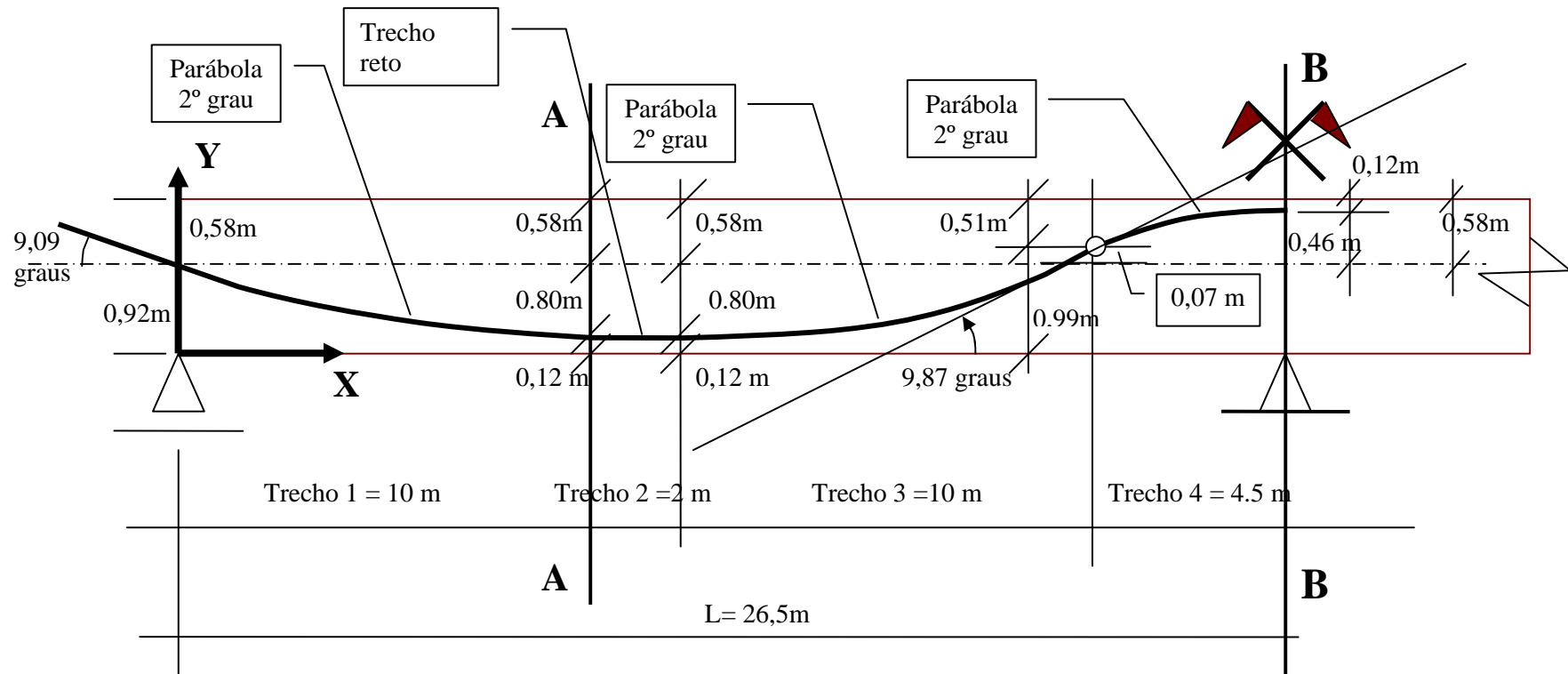
$$P_{\text{ortogonal}} = \frac{P_o}{R_{\text{curvatura}}} = \frac{P_o \cdot Y''}{\left(1 + (Y')^2\right)^{3/2}} = \frac{2 \cdot c \cdot P_o}{\left(1 + (b + 2 \cdot c \cdot X)^2\right)^{3/2}}$$

$$\alpha = \text{arc.tan} ( Y' )$$

$$p \cdot \text{vertical} = p \cdot \text{ortogonal} \times \cos(\alpha)$$

$$P_{\text{vertical}} = P_{\text{ortogonal}} \cdot \cos(\alpha) = \frac{2 \cdot c \cdot P_o}{\left(1 + (b + 2 \cdot c \cdot X)^2\right)^{3/2}} \cdot \cos(\text{arc.tan}(b + 2 \cdot c \cdot X))$$

## Exemplo de determinação da carga equivalente à Protensão :



Equação da parábola do trecho 1 :

Cabo parabólico :  $Y = a + b \cdot X + c \cdot X^2$  ;  $Y' = b + 2 \cdot c \cdot X$

$X = 0$  ;  $Y = 0,92\text{m}$  ;

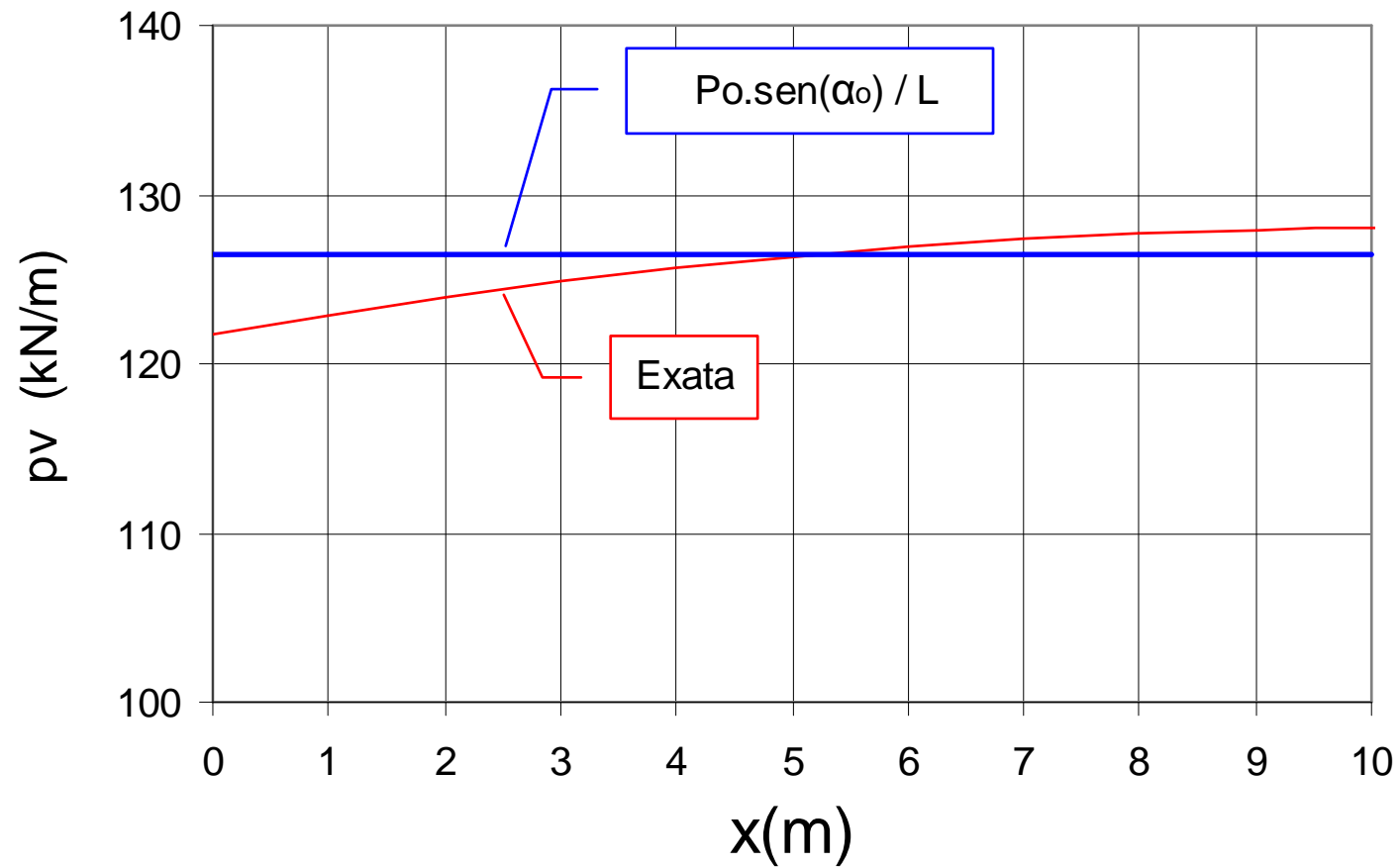
$X = 10\text{m}$  ;  $Y = 0,12\text{m}$  ;

$X = 10\text{m}$  ;  $Y' = 0$  ;

Resultam :  $a = 0,92$  ;  $b = -0,16$  ;  $c = 0,008$  .

$Y = 0,92 - 0,16 \cdot X + 0,008 \cdot X^2$

## Carga vertical equivalente à protensão



A aproximação  $p = P_o \times \text{sen}(\alpha_o) / L$  é satisfatória e facilita muito o cálculo dos esforços em vigas e em lajes protendidas.

## ANEXO 2 – Viga3con - Cálculo do Hiperestático de Protensão.

Programa VIGACON para análise de vigas contínuas – Prof. Ernani Dias da UFRJ - Versão 3.0. O Programa analisa estruturas em vigas com cargas nos membros, temperatura, protensão, recalques, cargas nos nós. Determina linhas de influencia e envoltórias para trem-tipo rodoviário, ferroviário e qualquer.

Designacao da viga

**Viga IABSE Protensão = 8000 kN**

Geracao de Coord., Membros, Propr., Apoios, Molas e Liber. dos Membros

Num\_R\_G\_Memb Num\_R\_G\_Restr Num\_R\_G\_Molas Num\_R\_G\_Liberac

4 2 0 0

Definicao da Geometria e Propriedades dos Membros

M\_In M\_Fin Inc\_M Comp. Ar\_AX Ar\_Ciz Inerc\_Iy Mod\_E Mod\_G Coef\_D\_Term

1 1 0 10 2.248 0.9 0.669 2.5e+007 1e+007 1e-005

2 2 0 2 2.248 0.9 0.669 2.5e+007 1e+007 1e-005

3 3 0 10 2.248 0.9 0.669 2.5e+007 1e+007 1e-005

4 4 0 4.5 2.248 0.9 0.669 2.5e+007 1e+007 1e-005

Resumo da geometria

Num\_Membros Num\_Nos Graus\_Lib

4 5 15

Definicao das Restricoes dos Nos

No\_Inic No\_Fin Incr\_No Desl\_X Desl\_Z Rot\_Y

r|l r|l r|l

1 1 0 r r l

5 5 0 r r r

Numero de carregamentos

1

Designação do Carregamento

Protensão 8000kN

Cargas nos Membros e Nos

Numero de grupos de dados referentes a

Esf\_Dist Esf\_Con Var\_Temp Protens Esf\_Engast Desl\_Imp Esf\_nos

3 0 0 0 0 0 0

Carregamentos de Esforços Distribuidos

Memb\_Inic Memb\_Fin Inc\_Memb Tipo Esf\_Inic Esf\_Fin Dist\_In Dist\_Fin

fxd|fzd|myd

1	1	0	fzd	<b>-126.39</b>	<b>-126.39</b>	0	10
3	3	0	fzd	<b>-137.13</b>	<b>-137.13</b>	0	10
4	4	0	fzd	<b>+304.73</b>	<b>+304.73</b>	0	4.5

Força de Protensão = 8000kN

Deslocamentos dos Nos

No	Desl_X,	Desl_Z	Rot_Y
1	0	0	0.0025175
2	0	-0.017473	0.00035041
3	0	<b>-0.017542</b>	-0.00025045
4	0	-0.0040648	-0.0014659
5	0	0	0

Força de Protensão = 8000kN

Esforços internos nos membros

Membro	Extremidade_Inicial			Extremidade_Final			Cálculo Manual
	Forc_X	Forc_Z	Mom_Y	Forc_X	Forc_Z	Mom_Y	
1	0	-1146.2	0	0	117.71	<b>-5142.4</b>	<b>(-5122,40)</b> seção A vão ( $\Delta = 0,4\%$ )
2	0	117.71	-5142.4	0	117.71	-4907.0	(- 4882,98) seção AA
3	0	117.71	-4907	0	1489.00	+3126.6	(+3170,62) seção BB
4	0	1489	3126.6	0	117.73	<b>+6741.8</b>	<b>(+ 6794,86)</b> seção B apoio central ( $\Delta = 0,7\%$ )



### **ANEXO 3 : Viga3con – Efeito do Gradiente Térmico de 15 graus entre a laje superior, aquecida pelo sol, e a laje inferior.**

Programa VIGACON para análise de vigas contínuas

Versão 3.0, Modificação 5 de 31/dez/1992

O Programa analisa estruturas em vigas com cargas nos membros, temperatura, protensão, recalques, cargas nos nós. Determina linhas de influência e envoltórias para trem-tipo rodoviário, ferroviário e qualquer.

Designação da viga

#### **Gradiente de Temperatura na viga IBASE**

Geracao de Coord., Membros, Propr., Apoios, Molas e Liber. dos Membros

Num_R_G_Memb	Num_R_G_Restr	Num_R_G_Molas	Num_R_G_Liberac
4	2	0	0

Definicao da Geometria e Propriedades dos Membros

M_In	M_Fin	Inc_M	Comp.	Ar_AX	Ar_Ciz	Inerc_Iy	Mod_E	Mod_G	Coef_D_Term
1	1	0	10	2.248	0.9	0.669	2.5e+007	1e+007	1e-005
2	2	0	2	2.248	0.9	0.669	2.5e+007	1e+007	1e-005
3	3	0	10	2.248	0.9	0.669	2.5e+007	1e+007	1e-005
4	4	0	4.5	2.248	0.9	0.669	2.5e+007	1e+007	1e-005

Resumo da geometria

Num_Membros	Num_Nos	Graus_Lib
4	5	15

Definicao das Restricoes dos Nos

No_Inic	No_Fin	Incr_No	Desl_X	Desl_Z	Rot_Y
---------	--------	---------	--------	--------	-------

			r l	r l	r l
1	1	0	r	r	l
5	5	0	r	r	r

Numero de carregamentos

1

Designacao do Carregamento  
gradiente

Cargas nos Membros e Nos

Numero de grupos de dados referentes a

Esf_Dist	Esf_Con	Var_Temp	Protens	Esf_Engast	Desl_Imp	Esf_nos
0	0	4	0	0	0	0

Desformacoes Impostas por Variacoes de Temperatura

Memb_Inic	Memb_Fin	Inc_Memb	Tipo	Var_T_Inic	Var_T_Fin
			ext cyt		

1	1	0	cyt	-10	<b>-10 graus/m [ 15 graus/( h=1,50m) =10graus/m ]</b>
2	2	0	cyt	-10	<b>-10 graus/m</b>
3	3	0	cyt	-10	<b>-10 graus/m</b>
4	4	0	cyt	-10	<b>-10 graus/m</b>

gradiente

Deslocamentos dos Nos

No	Desl_X,	Desl_Z	Rot_Y
1	0	0	0.00067815
2	0	-0.0026131	-4.1056e-005
3	0	-0.00243	-0.00011751
4	0	-0.00045596	-0.00016282
5	0	0	0

gradiente

Esforços internos nos membros

Membro	Extrem_Inicial			Extrem_Final		
	Forc_X	Forc_Z	Mom_Y	Forc_X	Forc_Z	Mom_Y
1	0	93.924	3.4052e-013	0	93.924	939.24
2	0	93.924	939.24	0	93.924	1127.1
3	0	93.924	1127.1	0	93.924	2066.3
4	0	93.924	2066.3	0	93.924	<b>2489.0 kN.m</b>

Gradiente térmico de 15 graus

Controle do equilíbrio dos nós (Reações de Apoio)

No	Forca_X	Forca_Z	Momento_Y
1	0	-93.924	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	93.924 kN	2489 kN.m

Determinação Individual de Linhas de Influência

Número de dados referentes a linhas de influência

Esf_Internos	Reacoes	Deslocam	Esforc_Hip_Prot
0	0	0	0

Determinação de Envoltórias para Trens\_Tipos

Número de Trens Tipos

0

Fim do Programa