



## **Resistência do Concreto**

### **Prof. P. B. FUSCO**

Prof. Eduardo C. S. Thomaz  
Notas de aula

## **AValiação DA RESISTÊNCIA DO CONCRETO**

Prof. Dr. Péricles Brasiliense Fusco  
Professor Titular da Escola Politécnica da USP  
23-09-2009

### **1 CONCEITOS BÁSICOS DE SEGURANÇA ESTRUTURAL**

#### **1.1 - Introdução**

No início do emprego do concreto armado, iniciou-se também o processo de normalização do projeto estrutural.

Os primeiros projetos de estruturas da construção civil foram feitos com a determinação das dimensões das peças estruturais por meio da comparação direta de suas peças com as peças análogas empregadas em construções semelhantes, que empiricamente haviam sido julgadas como bem construídas.

Posteriormente, os desenvolvimentos ocorridos com os conhecimentos de Resistência dos Materiais permitiram o início da normalização dos projetos estruturais, feita com a aplicação do método de cálculo de tensões admissíveis. As cargas atuantes foram fixadas subjetivamente, com valores arbitrariamente considerados como plausíveis. As tensões admissíveis foram fixadas com as máximas tensões calculadas em regime elástico linear nas estruturas consideradas como bem construídas, se elas fossem solicitadas pelas cargas úteis então arbitradas. Com isso, o método comparativo de projeto deixou de lidar diretamente as dimensões das peças estruturais, passando a comparar tensões máximas com tensões admissíveis.

Com o correr do tempo, a resistência do concreto passou a ser determinada experimentalmente, adotando-se como referência o valor médio obtido com o ensaio de 3 corpos-de-prova, empregando-se os coeficientes de segurança 3 para o próprio concreto, e 2 para o aço das armaduras.

No Brasil, a normalização começou na década de 40 do século passado, com a elaboração da NB-1.

Para o concreto, na compressão simples, a tensão admissível adotada foi de  $40 \text{ kgf} / \text{cm}^2$  (4 MPa) e, na flexão simples ou composta, de  $60 \text{ kgf} / \text{cm}^2$  (6 MPa).

No cisalhamento, o valor admissível era de  $6 \text{ kgf / cm}^2$  (0,6 MPa) para as vigas, e de  $8 \text{ kgf / cm}^2$  (0,8 MPa) para as lajes.

Na década de 50, quando se introduziu o cálculo de concreto armado em regime de ruptura, surgiu o conceito de resistência mínima do concreto, cujo valor seria de  $\frac{3}{4}$  da resistência média.

Mais tarde, introduziu-se a ideia de que a distribuição de resistências do concreto seria normal (gaussiana), e que a resistência característica, definida como o valor com apenas 5% probabilidade de ser ultrapassado no sentido desfavorável, deveria ser adotada como o valor representativo da resistência mecânica dos materiais de construção.

A ideia de probabilização da segurança das estruturas sempre existiu, desde o código de Hamurabi. Não existe estrutura absolutamente segura. Sempre existirá uma probabilidade de ruína.

Ao poucos, a probabilização das ideias de segurança estrutural foram sendo construídas. De início, o método probabilista de projeto das estruturas foi considerado como uma simples alternativa ao método de tensões admissíveis. Atualmente ele é o método fundamental do cálculo estrutural. Esse é um caminho que ainda está sendo percorrido.

Uma das ideias básicas para essa probabilização é a de que a resistência do concreto tenha uma distribuição normal de valores.

Nesse sentido, dado um conjunto de valores  $x_i$ , que medem uma dada propriedade dos elementos que compõem uma certa população normal de  $N$  elementos, definem-se os parâmetros mostrados na Fig. 1.

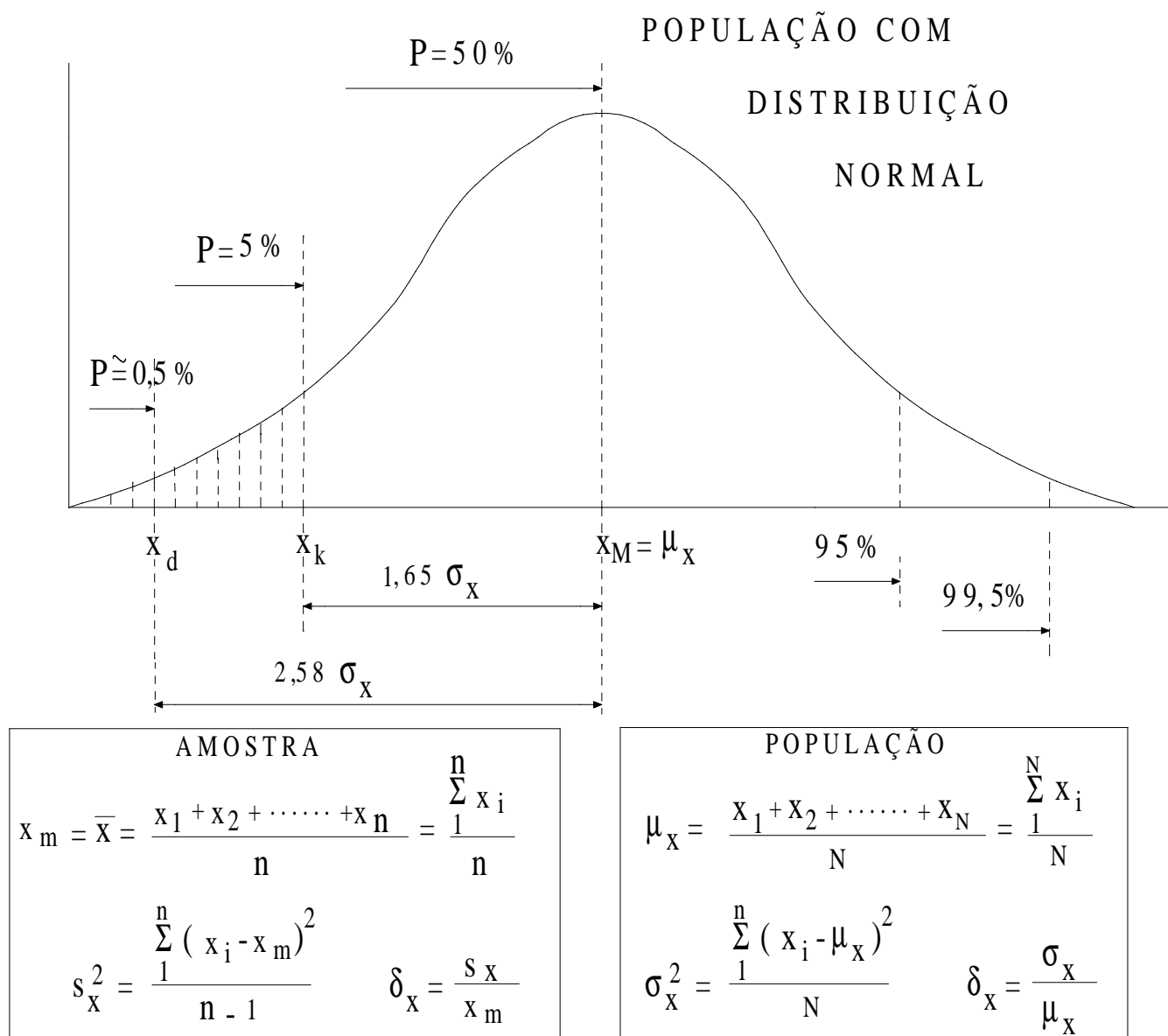
De um lado, da própria população e, de outro, de amostras com  $n$  exemplares dela extraídas, que irão servir para a estimativa dos parâmetros desse universo, sendo :

média da amostra :  $\bar{x}_m = \bar{x}$       média da população :  $\mu_x$

variância da amostra :  $s_x^2$       variância da população :  $\sigma_x^2$

desvio padrão da amostra :  $s_x$       desvio padrão da população :  $\sigma_x$

coeficiente de variação da amostra :  $\delta_x$       coeficiente de variação da população :  $\delta_x$



**PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL**

**Figura 1**

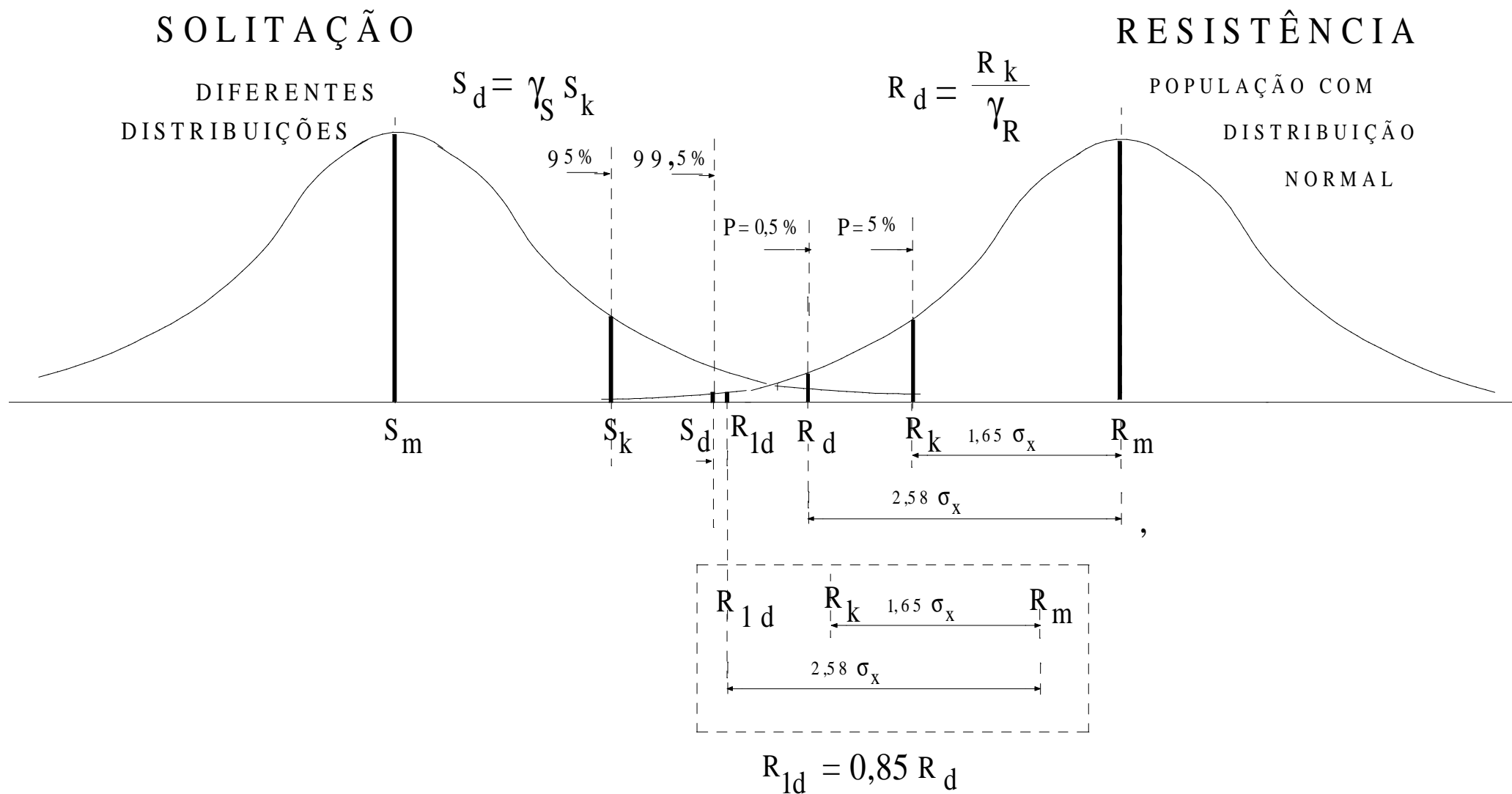
**1.2 -Segurança da estrutura**

A passagem projeto estrutural do método de tensões admissíveis para um método probabilista ficou consolidada no início da década de 70 do século passado.

Ficaram então definitivamente implantadas as ideias probabilistas referentes à caracterização das resistências dos materiais e das ações atuantes nas estruturas. Igualmente, foram imaginadas formas plausíveis de quantificar a segurança das estruturas por meios probabilistas.

A Fig. 2 apresenta sinteticamente os conceitos empregados pelo chamado método probabilista de nível I, também dito método semiprobabilista de projeto estrutural, sendo:

# SEGURANÇA PELO MÉTODO PROBABILISTA NÍVEL-I



**Figura 2 : PARÂMETROS PROBABILÍSTAS DE SEGURANÇA**

## RESISTÊNCIAS:

$\mathbf{R}_m$  = valor médio =  $f_{cm}$

$\mathbf{R}_k$  = valor característico (inferior) =  $f_{ck}$

$\mathbf{R}_d$  = valor de cálculo =  $\mathbf{R}_k / \gamma_c = f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$

$\gamma_c$  = coeficiente de ponderação (minoração) da resistência do concreto

## SOLICITAÇÕES

$\mathbf{S}_m$  = valor médio

$\mathbf{S}_k$  = valor característico

$\mathbf{S}_d$  = valor de cálculo =  $\gamma_f \mathbf{S}_k$

$\gamma_f$  = coeficiente de ponderação (majoração) das ações

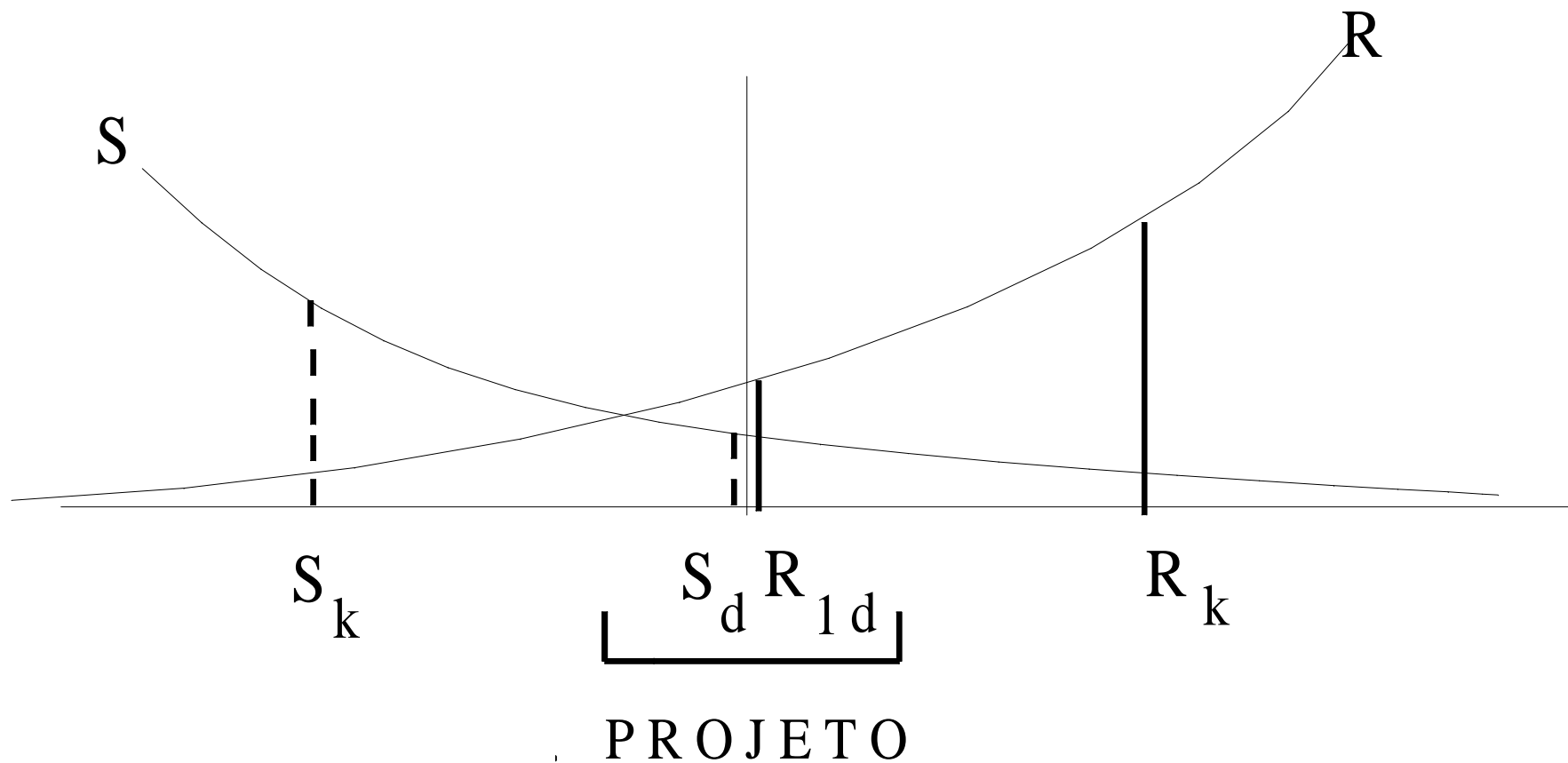
Neste método de cálculo, admite-se que a ruína da estrutura ocorra quando na seção mais solicitada a resistência de cálculo for igual a  $\mathbf{R}_d$  e, simultaneamente, a respectiva solicitação máxima for igual  $\mathbf{S}_d$ , ou seja, a probabilidade de ruína seria dada interseção.

$$\left( R = R_{1d} \cap S = S_d \right)$$

Na verdade, a ruína pode ocorrer com muitas outras combinações de esforços resistentes e esforços solicitantes.

A Fig.3 apresenta um croquis explicativo dessa condição generalizada de ruína.

# OCORRÊNCIA GERAL DE RUÍNA



Para qualquer  $S$ , sempre haverá a possibilidade de ocorrer  $R_{efetiva} < S$ .

Para qualquer  $R$ , sempre haverá a possibilidade de ocorrer  $S_{efetiva} > R$ .

**Figura 3**

Na Fig. 4 estão apresentadas as principais ideias referentes à determinação da resistência das estruturas de concreto, as quais envolvem os seguintes conceitos:

$$f_{c,estrutura} = f_{1cd} = k_{mod} \frac{f_{ck}}{\gamma_c};$$

$$k_{mod} = \text{coeficiente de modificação} = k_{mod1} \cdot k_{mod2} \cdot k_{mod3};$$

$k_{mod1}$  = considera a influência da altura do corpo-de-prova;

$k_{mod2}$  = considera o aumento da resistência com o tempo;

$k_{mod3}$  = considera a perda de resistência pela permanência das cargas;

$$\gamma_c = \text{coeficiente de minoração} = \gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2} \cdot \gamma_{c3};$$

$\gamma_{c1}$  = considera a variabilidade intrínseca da resistência do concreto;

$\gamma_{c2}$  = considera a diferença dos processos de produção da estrutura e do corpo-de-prova;

$\gamma_{c3}$  = considera outros possíveis efeitos deletérios (defeitos localizados, peneiramento pela armadura, cura defeituosa, etc).

# AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA PELO MÉTODO PROBABILISTA - NÍVEL I

HIPÓTESE BÁSICA:  $f_{ck}$  é um valor conhecido

RUÍNA TEÓRICA = ESTADO LIMITE ÚLTIMO (Para efeito de projeto)

CONDIÇÃO DE RUÍNA DE PROJETO  $[(R=R_{1d}) \cap (S=S_d)]$

ESTRUTURAS DE CONCRETO  $f_{c,estrutura} = f_{1cd} = k_{mod} \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$

$$f_{1cd} = k_{mod1} \cdot k_{mod2} \cdot k_{mod3} \frac{f_{ck}}{\gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2} \cdot \gamma_{c3}}$$

$$k_{mod} = k_{mod1} \cdot k_{mod2} \cdot k_{mod3} = 0,95 \cdot 1,2 \cdot 0,75 = 0,85$$

$$\gamma_c = \gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2} \cdot \gamma_{c3} = 1,2 \cdot 1,08 \cdot 1,08 = 1,4$$

**Figura 4 : CONCEITOS PRINCIPAIS**



### 1.3- Resistência característica do concreto de 1 caminhão-betoneira

De acordo com procedimentos normalizados de colheita do material para moldagem dos 2 corpos-de-prova que formam a amostra para o controle da resistência do concreto fornecido por um único caminhão-betoneira, exige-se que o material seja retirado do terço médio da descarga.

Com isso, espera-se que o valor  $X_0$  assim obtido esteja isento do efeito de uma eventual sedimentação do cimento ao longo da altura do equipamento.

Para controlar a variabilidade da resistência do concreto existente ao longo do material fornecido por uma única betoneira, devem ser colhidas mais duas porções de material, uma ao se atingir 15% da descarga e outra nos 85% da operação, com as quais podem ser obtidos mais dois valores da resistência desse concreto.

De acordo com a ( NBR-11562 - item 6.3 ), para aceitar que uma betoneira esteja em condições satisfatórias de funcionamento, das 3 resistências obtidas para seu controle, exige-se que seja  $X_{\max} - X_{\min} \leq 0,15X_0$ .

Desse modo, a tolerância admitida para a variabilidade da resistência do concreto fornecido por uma única betonada é dada por

$$X_{\max} - X_0 = 7,5\% (X_0)$$

$$X_0 - X_{\min} = 7,5\% (X_0)$$

o que mostra que a distribuição de resistências ao longo da betonada é simétrica, e que o valor médio  $X_0$  é uma boa estimativa da média dessa distribuição, confirmando-se assim a hipótese de que tal distribuição seja gaussiana.

Por outro lado, empiricamente, sabe-se que na amostragem de populações com distribuição normal, muito raramente as amostras apresentam valores individuais  $X_i$  fora do intervalo  $\mu_X - 3\sigma_X \leq X_i \leq \mu_X + 3\sigma_X$

onde  $\mu_X$  é a média e  $\sigma_X$  o desvio-padrão dessa população.

A título de ilustração dessa regra empírica, no caso do concreto produzido por um único caminhão-betoneira, com o qual poderia ser construída uma população de cerca de 1600 corpos-de-prova, a probabilidade de serem obtidos valores individuais abaixo de determinados limites está indicada na tabela apresentada na Fig. 5 .

CAMINHÃO-BETONEIRA : 1600 corpos-de-prova 15x30		
P= 50%	$X_{0,5} = \mu_X$	$(N_X < \mu_X = X_{0,5}) = 1600 / 2 = 800$
P= 5%	$X_{0,05} = X_k = \mu_X - 1,645 \sigma_X$	$(N_X < X_{0,05}) = 1600 \times 0,05 = 80$
P= $6,21 \times 10^{-3}$	$X_{0,00621} = \mu_X - 2,5 \sigma_X$	$(N_X < X_{0,00621}) = 1600 \times 0,00621 = 10$
P= 5‰	$X_{0,005} = X_d = \mu_X - 2,58 \sigma_X$	$(N_X < X_{0,005}) = 1600 \times 0,005 = 8$
P= $1,35 \times 10^{-3}$	$X_{0,00135} = \mu_X - 3 \sigma_X$	$(N_X < X_{0,00135}) = 1600 \times 0,00135 = 2$
P= $5,77 \times 10^{-4}$	$X_{0,000577} = \mu_X - 3,25 \sigma_X$	$(N_X < X_{0,000577}) = 1600 \times 0,000577 = 1$

Figura 5 : Número de valores  $N_x$  inferiores ao valor  $X$ , com P% de probabilidade

Desse modo, da condição

$$(X_0 - 0,075X_0 \leq X_0 \leq X_0 + 0,075X_0),$$

conclui-se que:

$$\text{média da população : } \mu_X = X_0$$

$$\text{desvio padrão da população : } \sigma_X \leq \frac{0,075X_0}{3} = 0,025 X_0$$

logo, a resistência característica efetiva do concreto fornecido por um único caminhão-betoneira vale

$$f_{ck} \geq X_k = X_0 - 1,645 \times 0,025 X_0 = 0,96 X_0$$

## 2 CONTROLE DA RESISTÊNCIA DO CONCRETO

### 2.1 O processo de controle

O controle básico da resistência do concreto é feito por meio de ensaios de corpos-de-prova moldados por ocasião do lançamento do concreto na obra.

A partir dos resultados desses ensaios, procura-se estimar o valor da resistência característica inferior do concreto, que corresponde à probabilidade de 5% de existirem frações do concreto com resistência ainda menor.

Nas decisões a respeito do que se deve considerar a respeito da resistência do concreto da estrutura, tomadas em função das resistências determinadas nos ensaios de corpos-de-prova moldados por ocasião do seu lançamento, é preciso levar em conta que os resultados dos ensaios de controle também podem ser afetados pelas condições de moldagem, de cura na obra, e do transporte dos corpos-de-prova desde a obra até o laboratório de ensaio, podendo também ser afetados pelas condições de cura até a data de ensaio e pelos procedimentos de preparação desses corpos-de-prova para ensaio, e pelos próprios procedimentos de ensaio.

No caso de não existir conformidade do valor da resistência do concreto determinado a partir dos ensaios de controle com o valor da resistência característica especificada para o concreto da estrutura, podem ser realizados ensaios de contra-prova que permitam a tomada de decisões a respeito da segurança da estrutura.

Para o controle da resistência do concreto, é necessário distinguir dois procedimentos distintos, o controle total e o controle parcial, como adiante especificados.

## 2.2 Controle total

No controle total, é feita a amostragem total, isto é, o concreto de cada amassada (caminhão-betoneira) é controlado individualmente, e também é realizado o mapeamento do lançamento do concreto ao longo da estrutura.

Como o resultado do ensaio do exemplar de controle do concreto de cada caminhão-betoneira somente é obtido cerca de um mês após o seu lançamento na obra, ele só fica conhecido após a utilização dessa betonada.

Desse modo, se a resistência obtida for inferior ao valor especificado no projeto estrutural, isto é, se  $f_{ck,est} < f_{ck,esp}$ , qualquer providência posterior a respeito dessa betonada particular somente poderá ser tomada se sua localização puder ser rastreada ao longo da estrutura. Esse rastreamento somente poderá ser feito se também houver sido realizado o mapeamento do lançamento do concreto ao longo da estrutura.

### CRITÉRIO DE CONTROLE C1

No caso de controle total, a resistência do concreto de cada caminhão-betoneira é avaliada individualmente.

Dos dois corpos-de-prova ensaiados, considera-se apenas o resultado  $X_0$  mais alto. Em princípio, a resistência característica estimada deve ser adotada com o valor

$$f_{ck,est} = 0,96 X_0.$$

Se o resultado obtido for  $f_{ck,est} \geq f_{ck,esp}$ , a resistência dessa betonada será aceite automaticamente como conforme.

Se resultar  $f_{ck,est} < f_{ck,esp}$ , o material será considerado como não conforme.

No caso de ter havido controle total, existindo o correspondente mapeamento dos locais de lançamento das diferentes frações do concreto empregado, a critério do projetista da estrutura, esse concreto poderá ser considerado como conforme, em função da avaliação da segurança das peças estruturais onde esse concreto foi empregado.

### CRITÉRIO ALTERNATIVO C1'

Existe a alternativa de uma eventual adoção do critério que admite a conformidade da resistência quando  $f_{ck,est} = X_0$ . Esse critério exigiria uma revisão dos valores

numéricos apresentados nos critérios de conformidade e de aceitação adiante analisados.

A título de esclarecimento, considere-se a influência da adoção mostrada na tabela seguinte, do critério  $f_{ck, est} = X_0$  sobre a resistência de cálculo  $f_{1,cd}$ , admitindo a

relação básica  $f_{1,cd} = 0,85 \frac{f_{ck}}{1,4} = 0,607 f_{ck}$ , sendo:

$$f_{1,cd\ ef} / f_{1,cd\ esp} \geq 0,96$$

#### VALORES em MPa

RESISTÊNCIA ESPECIFICADA $f_{ck, esp}$	VALOR ESPECIFIC. $f_{1,cd\ esp}$	VALOR EFETIVO $f_{1,cd\ ef} \geq$	DIFERENÇA $f_{1,cd\ esp} - f_{1,cd\ ef} \leq$
20	12,1	11,7	0,4
30	18,2	17,5	0,7
40	24,3	23,3	1,0
50	30,3	29,1	1,2

### 2.3 Controle parcial

No controle parcial, não é realizado o mapeamento do lançamento do concreto ao longo da estrutura, embora possa ter sido feita a amostragem total.

Na ausência de mapeamento do lançamento do concreto, não se sabe localizar a posição de cada betonada empregada na estrutura.

#### CRITÉRIO DE CONTROLE C2

No caso de controle parcial, o concreto deverá ser julgado pelo conjunto de resultados experimentais obtidos das betonadas empregadas em todo um certo trecho da estrutura.

Dos resultados dos ensaios de  $N$  testemunhos, sendo  $N$  um número par, com resistências individuais  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_{m-1} \leq f_M \leq \dots \leq f_{N-1} \leq f_N$ , sendo  $M = N/2$ , considera-se apenas a metade menos resistente, obtendo-se a estimativa

$$f_{ck, est} = 2[(f_1 + f_2 + \dots + f_{M-1}) / (M - 1)] - f_M$$

O significado probabilista desta expressão está apresentado no item 3.

O emprego deste estimador admite que o todos os exemplares sejam extraídos de uma única população homogênea. Desse modo, se a amostra foi extraída de uma mistura de

populações diferentes, a resistência característica calculada é, apenas, uma resistência característica aparente.

### **CRITÉRIO DE CONTROLE C3**

No caso de controle parcial, havendo amostragem total mas não tendo sido feito o mapeamento dos locais de lançamento, se o resultado obtido com todas as betoneiras for  $f_{ck,est} \geq f_{ck,esp}$ , haverá aceitação automática, porém, se resultar um único valor  $f_{ck,est} < f_{ck,esp}$ , todo o concreto deverá ser rejeitado, pois não se saberá onde esse concreto foi lançado.

## **2.4 Controle de contraprova**

Caso o concreto tenha sido rejeitado pelo controle exercido com o material colhido por ocasião de seu lançamento, o engenheiro responsável por essa análise deverá recomendar uma avaliação de contraprova da resistência do concreto, por meio de ensaios de testemunhos extraídos das peças estruturais que julgar possam ter sido executadas com o concreto não conforme.

Para a contraprova, deverão ser consideradas, separadamente, as partes que possam ser julgadas como construídas com concreto razoavelmente homogêneo.

No exame dessa homogeneidade, as análises esclerométrica e de ultra-som poderão ser elementos auxiliares.

### **CRITÉRIO DE CONTROLE C4**

No caso de rejeição inicial do concreto, para o controle de contraprova, para cada lote parcial deverão ser cuidadosamente especificados o número  $N$  e os locais de extração dos testemunhos, mantendo-se uma razoável distância entre eles, para que fique considerado todo o volume do concreto a ser examinado.

O número  $N$  de testemunhos deve ser coerente com o tamanho de cada trecho em exame.

Para o ensaio de testemunhos extraídos do concreto da estrutura, não há necessidade da extração de pares de corpos-de-prova gêmeos, pois não há risco de que o processo empregado na concretagem de um deles tenha sido diferente do empregado na do outro. Além disso, os eventuais defeitos dos testemunhos extraídos serão visíveis e, quando houver dúvidas, sempre poderá ser extraído um novo testemunho nas imediações daquele que possa estar sob suspeição.

De maneira análoga, como nessa amostragem todos os testemunhos representam partes reais da estrutura em exame, não há razão de natureza física para desprezar-se a metade dos resultados mais altos obtidos nessa investigação.

Por outro lado, como se mostra no item 3, não é correto fazer-se a estimativa da resistência característica com o estimador especificado pelo **Critério C2**, admitindo que a amostra conhecida de **N** elementos seja a metade menos resistente de uma amostra ideal de **2N** corpos-de-prova.

Desse modo, como não se conhece a variabilidade da resistência ao longo de todo o concreto em exame, é preferível subdividir o lote total a ser examinado em lotes independentes e julgá-los individualmente. Para isso, de cada lote local, deve ser extraído um número reduzido de corpos-de-prova, determinando-se assim o valor da resistência média de cada trecho.

A resistência característica de cada trecho pode ser assim estimada a partir desse valor médio experimental, admitindo um critério análogo ao critério **C1**, adotando-se um valor da ordem de

$$f_{ck,est} = \frac{f_{cm,exp}}{1,1} \cong 0,9 f_{cm,exp}$$

Nessa investigação, não poderão ser aceitos resultados muito discrepantes entre si. Caso isso ocorra, a critério do responsável pela investigação, deverão ser ensaiados testemunhos suplementares.

Dessa forma, na contraprova, o menor número aceitável de testemunhos, em função do volume estimado de cada lote em verificação, será de 2 a 3 corpos-de-prova, que devem ser localizados ao longo desse lote.

No caso do lote em exame ser constituído pelo concreto de uma simples peça estrutural de pequeno porte, admitindo-se que ela tenha sido concretada com o material de uma única betonada, à critério do engenheiro responsável pelo projeto estrutural, o julgamento poderá ser feito a partir de um único testemunho.

No caso de elementos estruturais com grande volume de concreto, o material em exame certamente não foi produzido em uma única betonada.

Nesse caso, se por motivos de natureza especial, como eventuais razões legais, for necessária uma estimativa global desse concreto, será preciso extrair um número de testemunhos que possam representar o concreto de todo o lote em exame, e sua resistência característica aparente, conforme justificação do item 3 seguinte, somente poderá ser determinada pelo Critério de Controle **C2**, considerando-se apenas a metade menos resistente dos resultados experimentais obtidos.

## CRITÉRIO DE CONTROLE C5

Na verificação da segurança da estrutura, a partir da estimativa de contraprova da resistência do concreto por meio de testemunhos extraídos do concreto já endurecido, as cargas permanentes constituídas pelos pesos próprios das partes da estrutura e das alvenarias e divisórias que já tenham sido construídas, e que possuam dimensões praticamente iguais aos correspondentes valores adotados no projeto da construção, poderão ser consideradas com o coeficiente parcial de majoração das ações

permanentes com o valor  $\gamma_{fG} = 1,2$ .

Esse procedimento não poderá ser aplicado a pilares, quando houver pavimentos ainda não concretados.

Em qualquer caso, com a necessária anuência do projetista da estrutura, a eventual aceitação poderá ser feita se for verificada a condição

$f_{ck,est} \geq 0,9 f_{ck,esp}$ , que equivale a adotar  $\gamma_{c2} = 1,0$ , por se admitir que as causas que justificam a presença desse coeficiente parcial de minoração da resistência do concreto, para corpos-de-prova moldados por ocasião da concretagem, não poderão agir com os testemunhos extraídos da estrutura já existente.

## CRITÉRIO DE CONTROLE C6

Quer para testemunhos extraídos da estrutura, quer para corpos de prova moldados por ocasião da concretagem, mas ensaiados em idade superior a 28 dias, os resultados, em princípio, deverão ser corrigidos para idade padrão de 28 dias.

Todavia, para ensaios de concreto com até cerca de 3 meses de idade, a critério do responsável pela investigação, os valores obtidos podem ser considerados como referências diretamente válidas para aceitação ou rejeição do concreto.

Essa opção pode ser admitida uma vez que, para essa idade, o acréscimo de resistência em relação à de 28 dias é de aproximadamente 10%, cujo efeito sobre a segurança da estrutura é equivalente à aceitação do concreto ensaiado aos 28 dias

quando se adota o critério  $f_{ck,est} \geq 0,9 f_{ck,esp}$ .



### 3 FUNÇÃO DE ESTIMAÇÃO DO VALOR

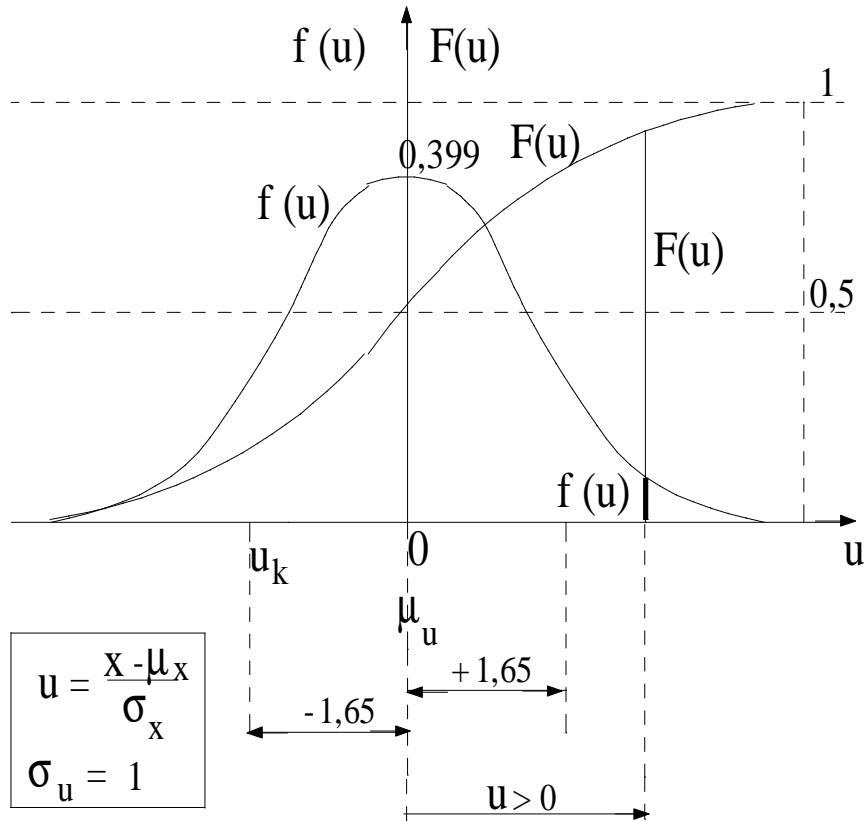
#### CARACTERÍSTICO NO CONTROLE PARCIAL

Dada uma população de valores  $X$  com distribuição normal, de média  $\mu_X$  e desvio padrão  $\sigma_X$ , a Fig. 6 mostra as características probabilísticas essenciais dessa população e da correspondente população formada pela variável reduzida,

definida por  $u = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$ , cujos parâmetros são  $\mu_u = 0$  e  $\sigma_u = 1$ .

Nessa figura,  $f(x)$  é a função de densidade de frequência, e  $F(x)$  é a função de frequência.

### DISTRIBUIÇÃO NORMAL REDUZIDA



### DISTRIBUIÇÃO NORMAL

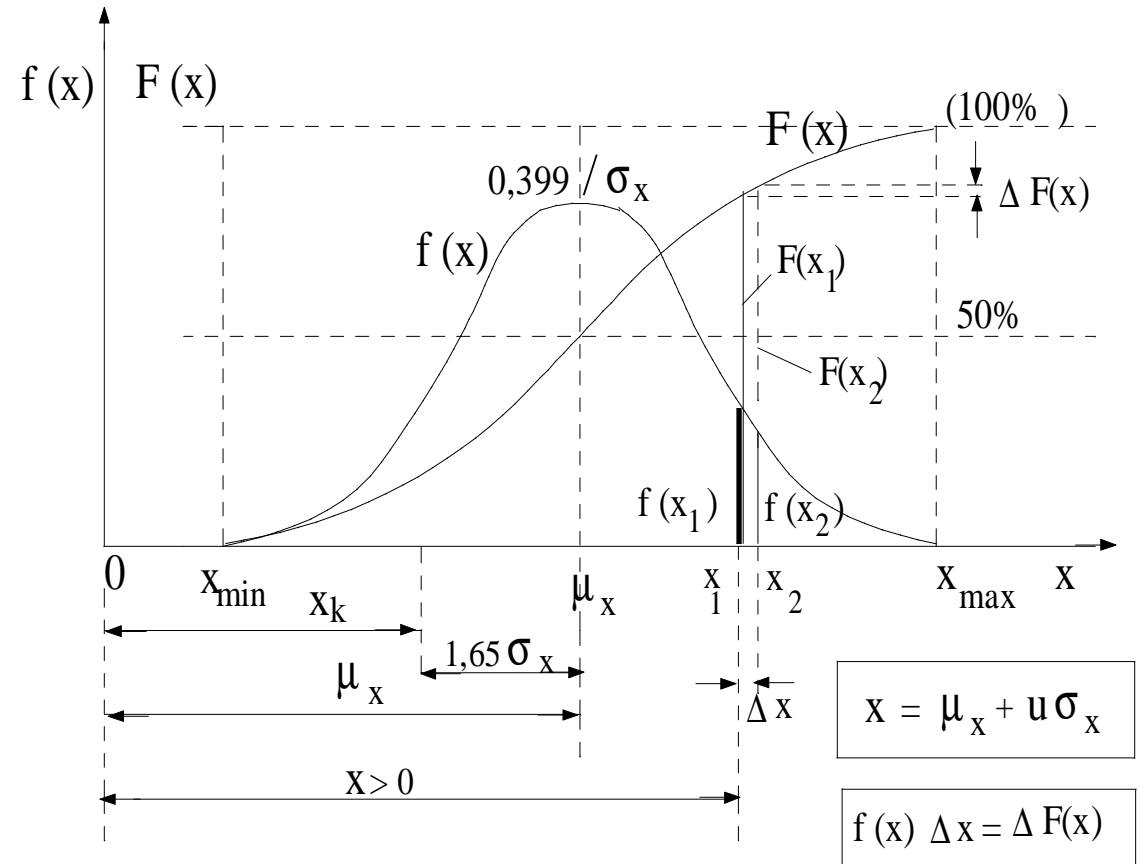


Figura 6

Dada uma amostra de  $N$  elementos retirados de um universo normal de média  $\mu_X$  e desvio padrão  $\sigma_X$ , sendo  $N$  um número par, ordenam-se os valores em ordem crescente

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{M-1} \leq x_M \leq \dots \leq x_{N-1} \leq x_N$$

onde  $M = N/2$ .

Se  $N$  for ímpar, despreza-se o maior valor.

A função de estimação do valor característico inferior de  $f(x)$ , que corresponde a seu quantil  $x_{0,05}$ , cuja probabilidade de ser ultrapassado no sentido de valores ainda menores é apenas de 5%, é definida por

$$X_{k,est} = 2 \left[ (x_1 + x_2 + \dots + x_{M-1}) / (M - 1) \right] - x_M$$

Conforme se mostra na Fig. 7, o valor de  $\bar{x}_{M-1}$ , que é a média dos  $(M - 1)$  menores valores contidos na amostra, representa a abscissa do centro de gravidade da área delimitada pela função  $f(x)$ , de 0 até a abscissa de  $x_{M-1}$ , sendo

$$\bar{x}_{M-1} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{M-1}}{M - 1}$$

De forma análoga, o valor de  $x_M$ , que divide a amostra total em duas partes com números iguais de elementos, representa uma estimativa da mediana da distribuição.

Com distribuições normais, que são simétricas em relação à mediana, ela também representa uma estimativa da média  $\mu_X$  da população em questão.

Em princípio,  $\bar{x}_{M-1}$  poderia ser calculada considerando a área desde 0 até a abscissa representativa de  $\mu_X$ .

Todavia, evitando a hipótese de que sejam iguais os valores de  $x_{M-1}$  e de  $x_M$ , sendo  $x_M \cong \mu_X$ , adota-se  $\bar{x}_{M-1} = \mu_X - 0,05\sigma_X$ , que no caso da resistência de concretos com  $f_{ck} \leq 50MPa$ , corresponde a um valor  $0,05\sigma_X \leq 0,25MPa$ .

Para o cálculo de  $\bar{x}_{M-1}$  em uma distribuição normal, calculam-se a área A e o momento estático S da figura mostrada na Fig. 7 em relação ao eixo vertical passando pela abscissa  $x_{M-1}$ .

Considerando a função  $f(u)$  da variável normal reduzida  $\frac{x - \mu}{\sigma}$ , sendo

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

obtêm-se, respectivamente,

$$A = \int_{-4}^{-0,05} f(u) du = 0,48$$

e

$$S = \int_{-4}^{-0,05} f(u) \cdot u du = -0,398$$

logo

$$x_{CG} = -\frac{0,398}{0,48} = -0,829$$

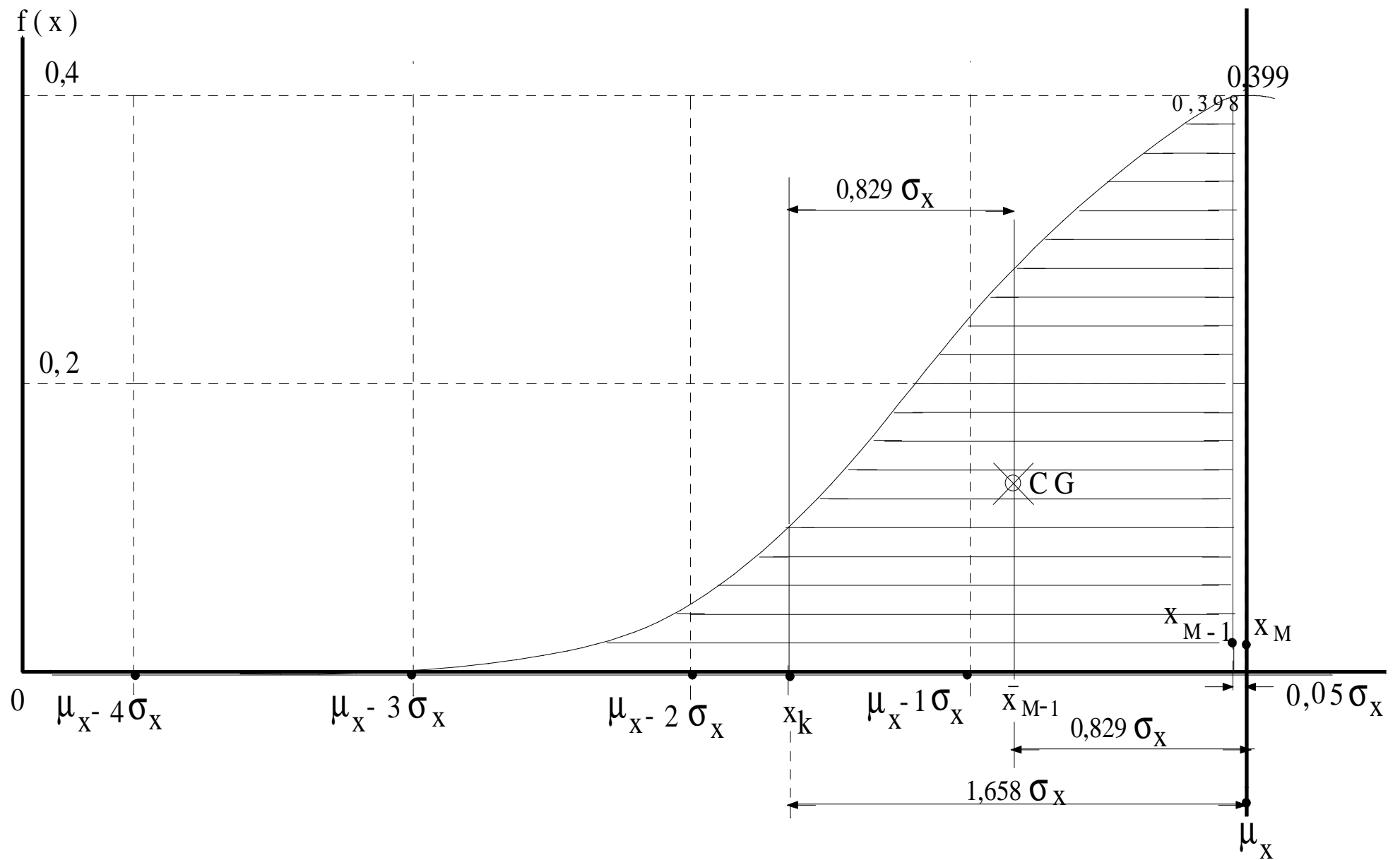


Figura 7

Desse modo, como o termo entre colchetes  $[(x_1 + x_2 + \dots + x_{M-1}) / (M - 1)]$

é uma estimativa da média  $\bar{x}_{M-1}$  dos (M-1) menores valores da população integral, pode-se escrever a expressão de  $X_{k,est}$  sob a forma

$$X_{k,est} = 2[\bar{x}_{M-1}] - x_M$$

e sendo

$$\bar{x}_{M-1} = \mu_X - 0,829\sigma_X$$

resulta

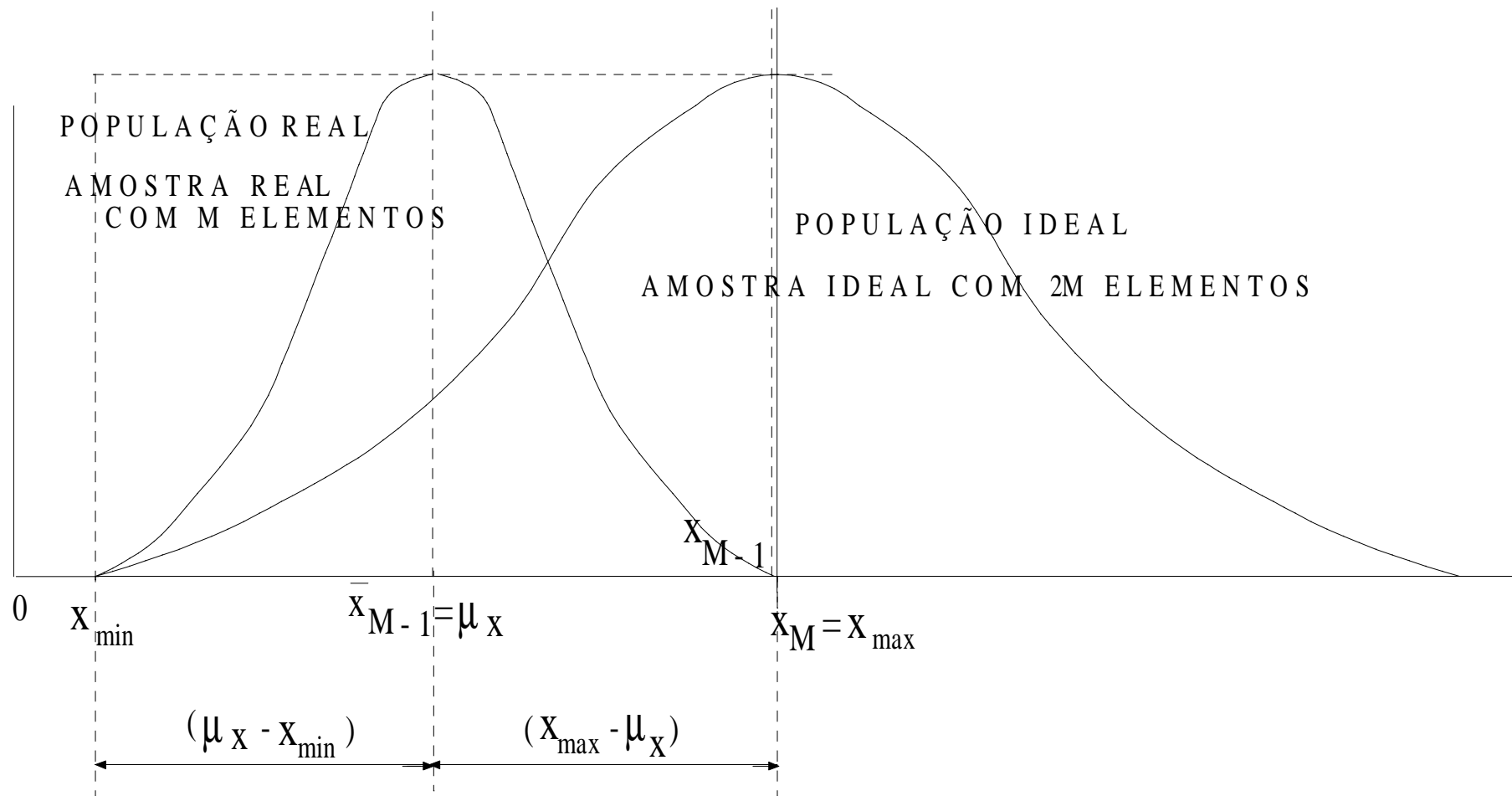
$$X_{k,est} = 2[\mu_X - 0,829\sigma_X] - \mu_X = \mu_X - 1,658\sigma_X$$

ou seja

$$X_{k,est} \cong X_{k,ef}$$

A função de estimativa aqui estudada é, portanto, um estimador centrado no valor característico da população analisada.

Além disso, como ele decorre de duas estimativas de médias, uma da média do conjunto de valores da metade menos resistente da amostra, e outra da média do conjunto de todos os valores da amostra por meio da mediana desse conjunto, a sua variância é significativamente menor que a variância de estimadores que também levam em conta a variância da população.



$$x_{k, \text{ est}} = [ 2 \bar{x}_{M-1} - x_M ] = 2 \mu_X - x_{\max} = \mu_X - (x_{\max} - \mu_X) = \mu_X - (\mu_X - x_{\min}) = x_{\min}$$

$$\bar{x}_{M-1} = (x_1 + x_2 + * * * + x_{M-2} + x_{M-1}) / (M-1)$$

Figura 8

Observe-se , finalmente, que ao contrário do que foi considerado anteriormente a esta publicação, esse estimador não pode ser aplicado imaginando-se que os M valores conhecidos sejam apenas a metade menos resistente de uma amostra ideal de 2M valores.

Como está mostrado na Fig. 8, se isso fosse admitido, o valor da média  $\bar{x}_{M-1}$  seria praticamente uma estimativa da média  $\mu_X$  da população , e  $x_M$  seria o valor  $x_{\max}$  da amostra .

Nessas condições, o estimador estaria centrado no valor  $[2\mu_X - x_{\max}]$  .

Com uma distribuição simétrica da variável X em torno de sua média, o estimador forneceria valores

$$x_{k,est} = 2\mu_x - x_{\max} = \mu_x - (x_{\max} - \mu_x) = \mu_x - (\mu_x - x_{\min}) = x_{\min}$$

que seriam estimativas exageradamente baixas do valor característico.

...