

# Consolos e Consolos Curtos

Heinz Niedenhoff - 1961

Adiante a Tese de Doutorado de Heinz Niedenhoff da Universidade de Karlsruhe

Data : 1961

Tema : Folo-elasticidade em consolos curtos e blocos

Orientador : Prof. Gotthard Franz

1 - Com o uso da fotoelasticidade pode-se “ **ver as bielas** ”.

Links atuais : <http://edaet.usuarios.rdc.puc-rio.br/AET8-Fotoelasticidade.pdf> :  
<http://www.seer.ufu.br/index.php/horizontecientifico/article/viewFile/3788/2793>

2- Niedenhoff fez ensaios foto-elásticos em muitos consolos com diferentes geometrias e em poucos blocos ( duplo consolo)

3- Com as imagens fotoelásticas, determinou as trajetórias das tensões de compressão ( bielas ) e de tração ( armaduras)

4- Projetou as armaduras a partir desses resultados foto-elásticos .

5- Preparou em concreto armado esses consolos.

6- Marcou , desenhou, nos corpos de prova as trajetórias das tensões de compressão e de tração, que obtivera com a foto-elasticidade.

7-Ensaiou até à ruptura os consolos

8 – Verificou que as fissuras seguem aproximadamente essas trajetórias de tensões.

9- Constatou a formação de bielas e de tirantes, formando Treliças

10 – Como conclusão , recomenda então o Cálculo das armaduras seguindo esse modelo de Treliça = Biela + Tirante

11 – As tensões nas bielas de concreto não recomendou calcular pela treliça pois as larguras das bielas não ficaram bem definidas.

12 – Recomendou verificar, então, o concreto ainda no estágio II de flexão. Pena !

13- **ATENÇÃO** : Ver a primeira figura selecionada.

Nessas fotos “foto-elásticas” do bloco com 2 cargas ( estacas ) fica evidente que as bielas seguem aproximadamente a direção sugerida por Blévo , isto é para o ponto  $\frac{1}{4}$  da largura do pilar . Blévo estaria certo ?

14 – No estágio atual da fotoelasticidade, segundo alguns autores, é possível fazer foto-elasticidade 3D, ainda que com muito trabalho, material e equipamentos especiais.

15 - Seria um bom desafio para os pesquisadores obter imagens fotoelásticas 3D das bielas, como já é rotina com elementos finitos em 3D.

16 - Obs: As fotos e os desenhos se autoexplicam.

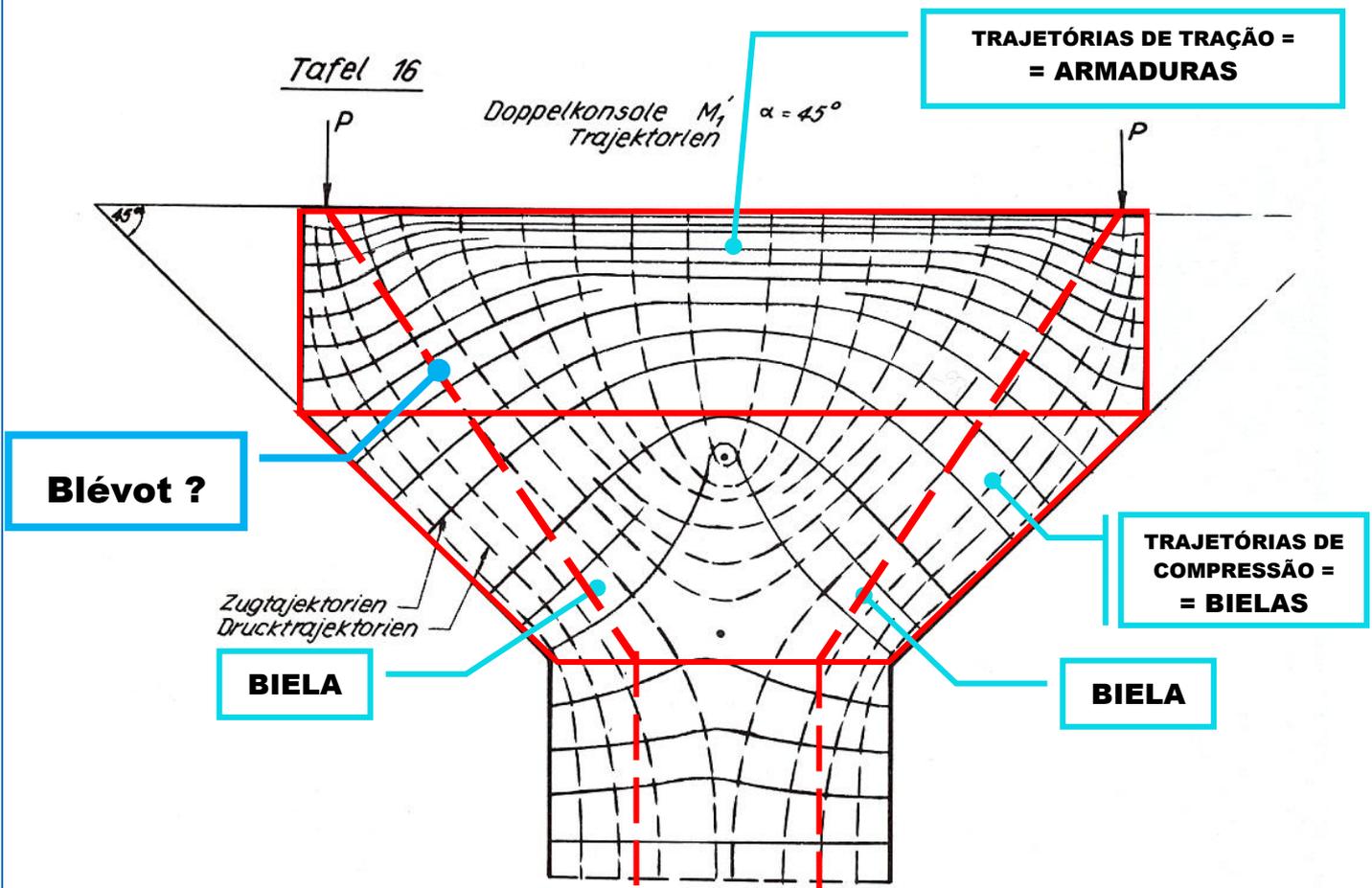
Eduardo Thomaz



SELEÇÃO DE IMAGENS FOTOELÁSTICAS FEITA POR E.THOMAZ



Isochromatenverlauf Doppelkonsole M 3

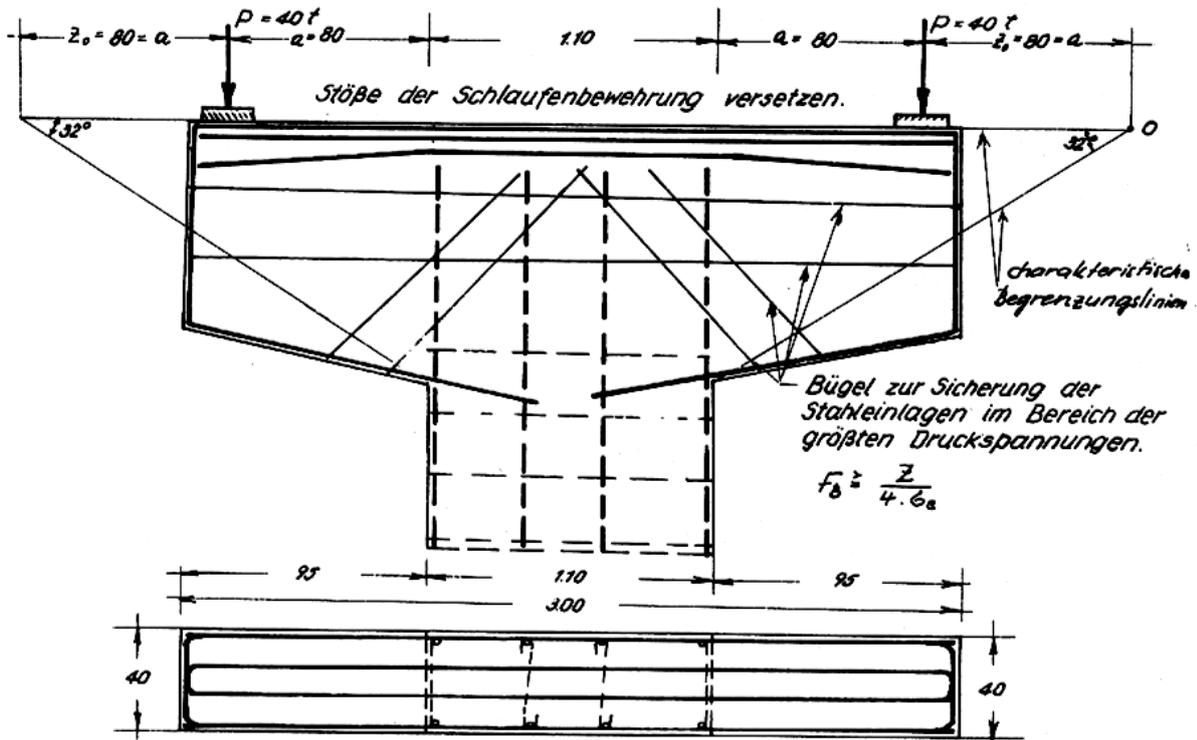


## DUPLO CONSOLO COM DUAS CARGAS IGUAIS

### 2. Doppelkonsole mit 2 gleichen Lasten

Abmessungen und Materialgüten wie vor;  $P = 40 \text{ t}$

Bewehrungsführung: vgl. hierzu Anhang Tafel 15, 16 und 17.

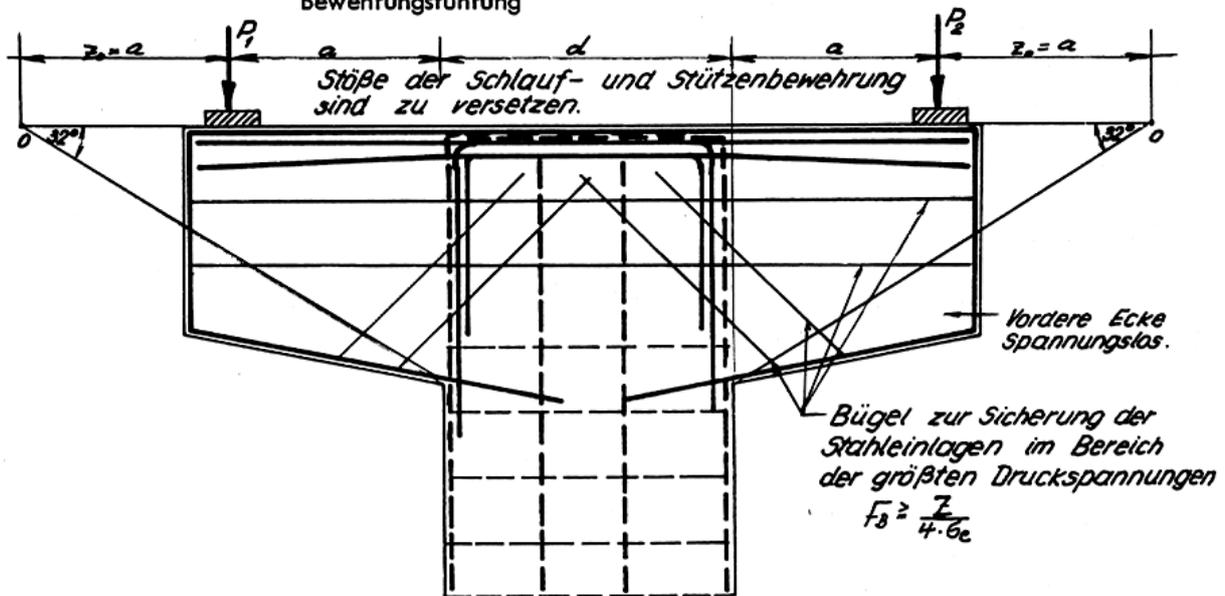


## DUPLO CONSOLO COM DUAS CARGAS INDEPENDENTES VARIANDO DE ZERO AO MÁXIMO

### 3. Doppelkonsole mit $P_{\max} = 40 \text{ t}$ ; $P_{\min} > 0$

Abmessungen und Materialgüten wie vor;

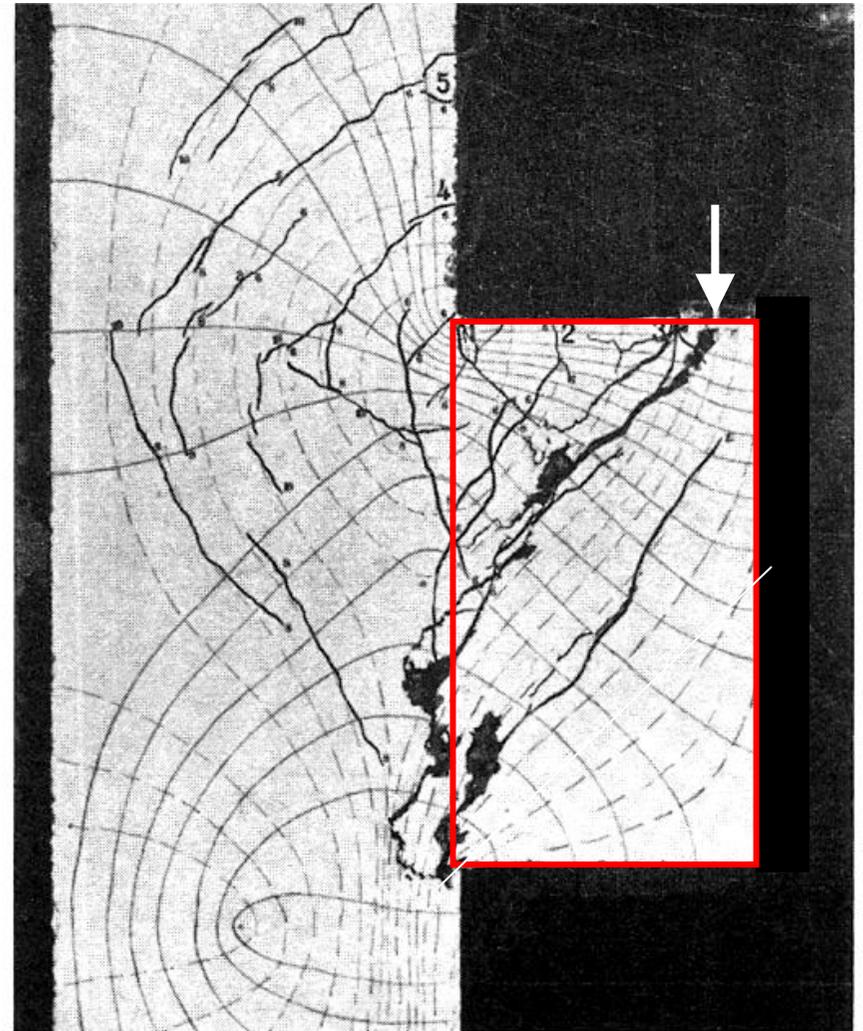
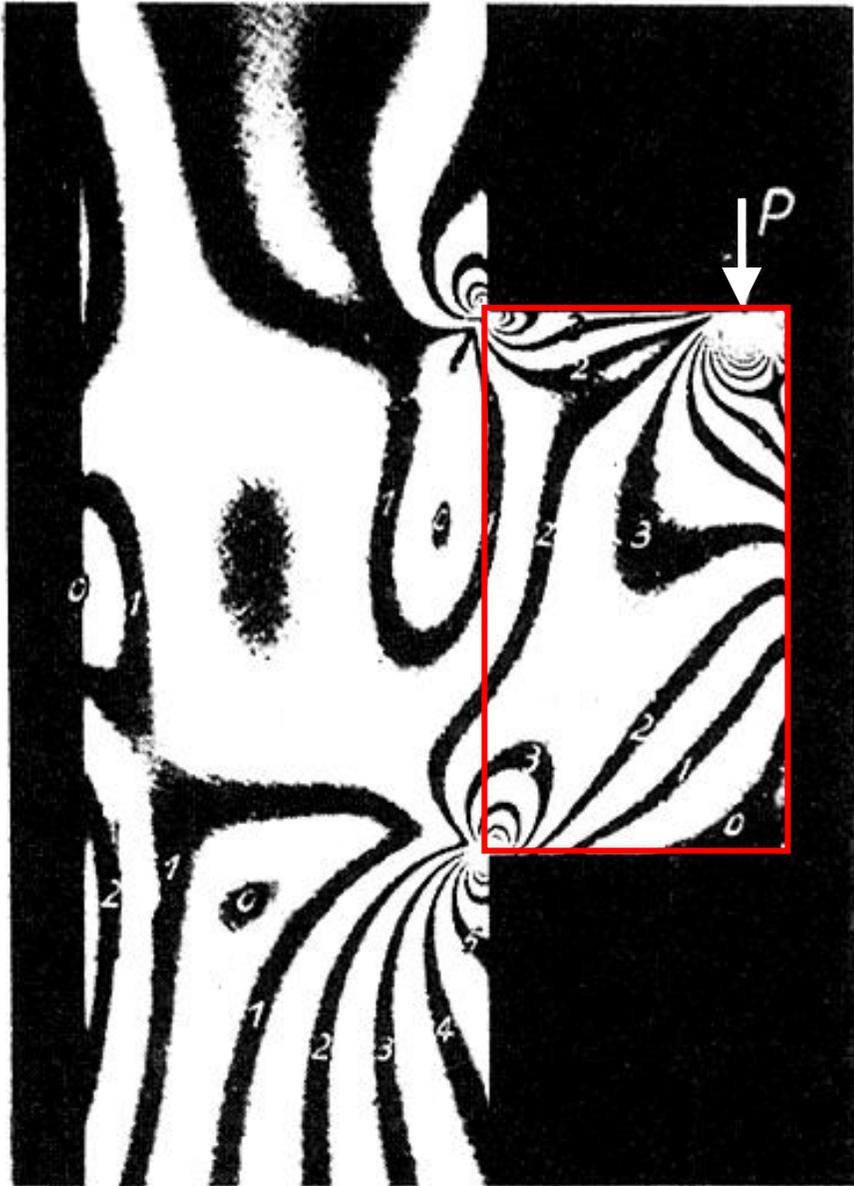
Bewehrungsführung



Krümmungsradius mindestens  
 $R = 5 \cdot d$  besser  $10d + 15d$   
 $d = \phi$  der Stahleinlage

# Isocromáticas x Trajetórias x Fissuras x Bielas

<http://edaet.usuarios.rdc.puc-rio.br/AET8-Fotoelasticidade.pdf> : <http://www.seer.ufu.br/index.php/horizontecientifico/article/viewFile/3788/2793>



Bruchbild M2/B3

**CONSOLO M2**

## TEXTO DA TESE

	<b>Consolos e Consolos Curtos</b> <b>Heinz Niedenhoff - 1961</b>	Notas de aula	Prof.. Eduardo C. S. Thomaz	pág. 5/125
---	---	------------------	--------------------------------	---------------

### CONSOLOS E CONSOLOS CURTOS

#### UNTERSUCHUNGEN ÜBER DAS TRAGVERHALTEN VON KONSOLEN UND KURZEN KRAGARMEN

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**Doktor-Ingenieurs**

von der Fakultät für Bauwesen der  
Technischen Hochschule Karlsruhe

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Heinz Niedenhoff

aus Bergisch Gladbach

bei Köln

1961

**UNTERSUCHUNGEN ÜBER DAS TRAGVERHALTEN  
VON KONSOLEN UND KURZEN KRAGARMEN**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs**

von der Fakultät für Bauwesen der  
Technischen Hochschule Karlsruhe

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Heinz Niedenhoff

aus Bergisch-Gladbach

bei Köln

Tag der mündlichen Prüfung: 5.6.1961

Referent: Prof. Dr.-Ing. G. Franz

Korreferent: Prof. Dr. phil. U. Wegner

**GOTTHARD  
FRANZ**

# GENERALIDADES

## 1. ALLGEMEINES

### 1.1 Problemstellung und Überblick

Die vorliegende Arbeit soll versuchsmäßig und theoretisch Aufschluß über den tatsächlichen Kräfteverlauf bei keilförmigen, abgestumpften und rechteckigen kurzen Trägern geben. Diese, in der Regel mit großen Einzellasten belastet, kommen in der Praxis häufig als Konsolen, abgeschrägte Fundamente, Stützmauern u.a.m. vor. Der Kräftezustand innerhalb der Konsolen oder kurzen Kragarme ist stark von der Art der elastischen Einspannung abhängig. Solche Scheibenprobleme lassen sich infolge der Schwierigkeit der Anpassung an die Randbedingungen in geschlossener Form nicht mehr mathematisch lösen.

Um diese Zusammenhänge zu studieren, lag es nahe, mit Hilfe der Spannungsoptik einen Einblick in das Tragverhalten solcher kurzen Kragarme zu erhalten. Weiterhin wird dann gezeigt, inwieweit sich die Spannungszustände der homogenen Gießharzmodelle auf den strukturmäßig groben, inhomogenen gerissenen Stahlbeton übertragen lassen. Die beim Stahlbeton stets auftretende Frage, ob die Ergebnisse sich auf den gerissenen Zustand übertragen lassen, wird durch die gleichzeitig durchgeführten Bruchversuche an Betonkonsolen ebenfalls beantwortet.

### 1.2 Veröffentlichungen über das behandelte Thema

Dem keilförmigen Träger, wie er als Sonderfall mit abgestumpfter Spitze bei Konsolen in der Praxis anzutreffen ist, widmet Professor Akira Miura [1] einen längeren Abschnitt. Er weist darauf hin, daß die Annahme eines konstanten Querschnittes bei keilförmigen Trägern nur bei geringer Schräge noch als Näherung anzusprechen ist. Das Bernoullische Theorem darf man streng genommen bei nicht parallelen Rändern nicht mehr anwenden. Die Spannungsverteilung ist daher nicht mehr gradlinig.

Für die Konsole leitet Prof. Miura aus den bekannten Ansätzen für die Halbscheibe aus der Airy'schen Spannungsfunktion in Polarkoordinaten die Gleichungen für einen keilförmigen Träger ab.

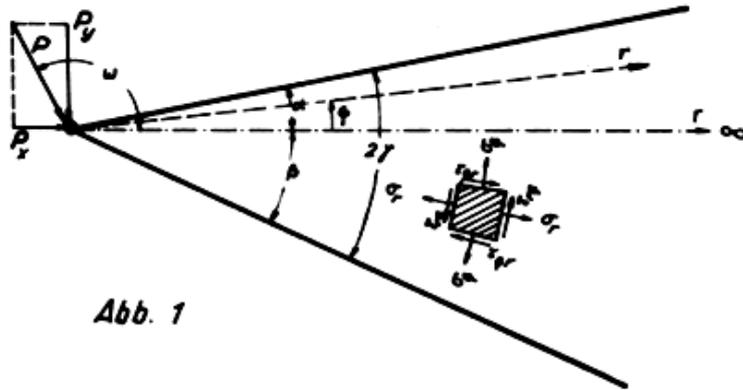


Abb. 1

$$\sigma_r = \frac{2P}{r} \frac{\cos \omega \cdot \cos \varphi}{2r + \sin 2\gamma} + \frac{\sin \omega \cdot \sin \varphi}{2r - \sin 2\gamma}$$

$$\sigma_\varphi \text{ und } \tau_{r\varphi} = 0$$

Bei geeigneter Wahl von  $\omega$ ,  $\alpha$  u.  $\beta$  ist es möglich, unter Berücksichtigung eines Momentes an der Keilspitze Gleichungen für eine abgestumpfte, keilförmige, unendlich ausgedehnte Scheibe zu finden. (vgl. hierzu Abb. 2 und 3).

$$\sigma_r = \frac{2P}{r^2} \cdot \left( -\frac{\sin \gamma \cdot \cos \varphi}{C} + \frac{\cos \gamma \cdot \sin \varphi}{S} \right) + \frac{2P \cdot m \cdot \sin 2\varphi}{r^2 \cdot K_2\gamma}$$

$$\sigma_\varphi = 0$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{P \cdot m}{K_2\gamma \cdot r^2} \cdot (\cos 2\varphi - \cos 2\gamma)$$

worin

C	=	$2\gamma + \sin 2\gamma$	
S	=	$2\gamma - \sin 2\gamma$	
$K_2\gamma$	=	$2\gamma \cdot \cos 2\gamma - \sin 2\gamma$	bedeutet.

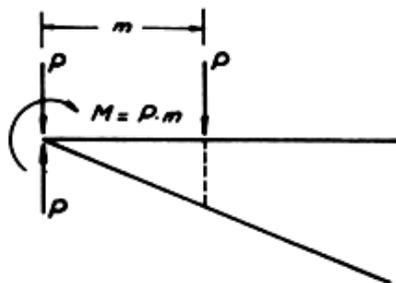


Abb. 2

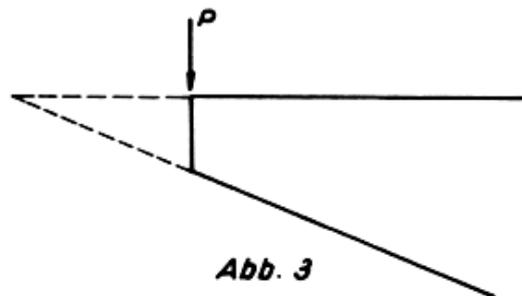


Abb. 3

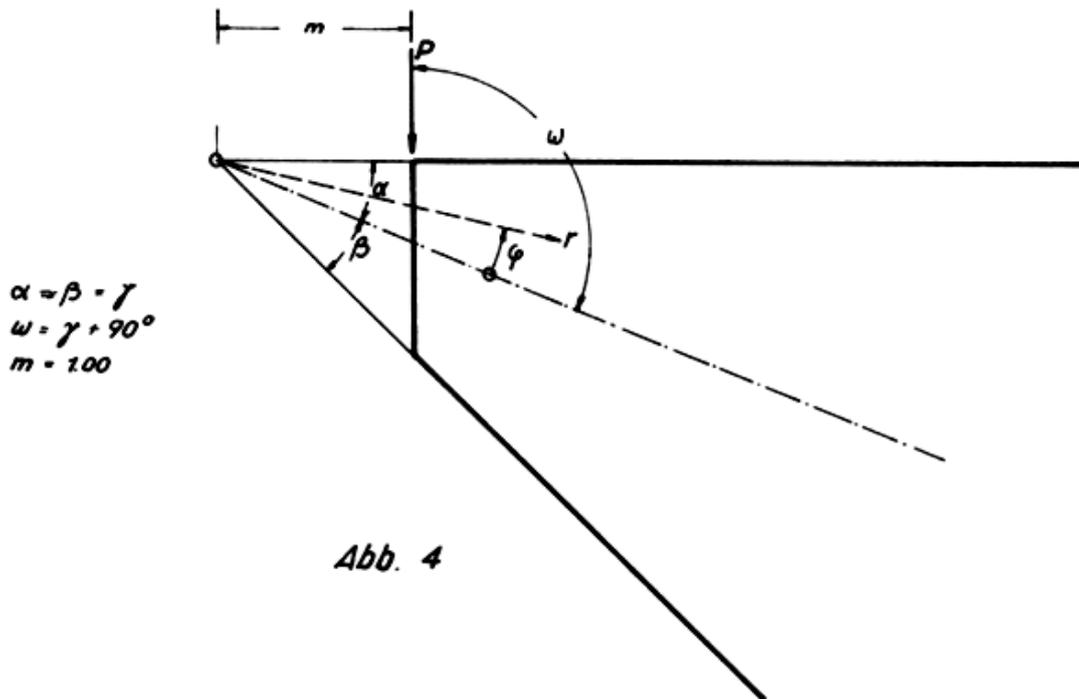


Abb. 4

Für die in der Praxis häufig anzutreffende Konsole mit einer unter  $45^\circ = 2\gamma$  geneigten Unterkante wird

$$\begin{aligned}
 C &= 1,492 \\
 S &= 0,078 \\
 K_{2\gamma} &= -0,152
 \end{aligned}$$

$$\sigma_r = \frac{2P}{r^2} (11,84 \cdot r \cdot \sin \varphi - 0,26 \cdot r \cdot \cos \varphi - 6,59 \cdot \sin 2\varphi)$$

$$\sigma_r = \frac{2P}{r^2} (3,30 \cdot \cos 2\varphi - 2,33) \quad \text{und}$$

$$\sigma_\varphi = 0$$

Setzt man in diese Gleichungen zur Ermittlung der Randspannungen für  $\sin \varphi = \sin (\pm 22,5^\circ) = \pm 0,383$  und  $\cos \varphi = \cos (\pm 22,5^\circ) = +0,924$ , so lauten die Gleichungen

$$\text{oberer Rand: } \sigma_r^o = \frac{2P}{r^2} \cdot (4,30 \cdot r - 4,65)$$

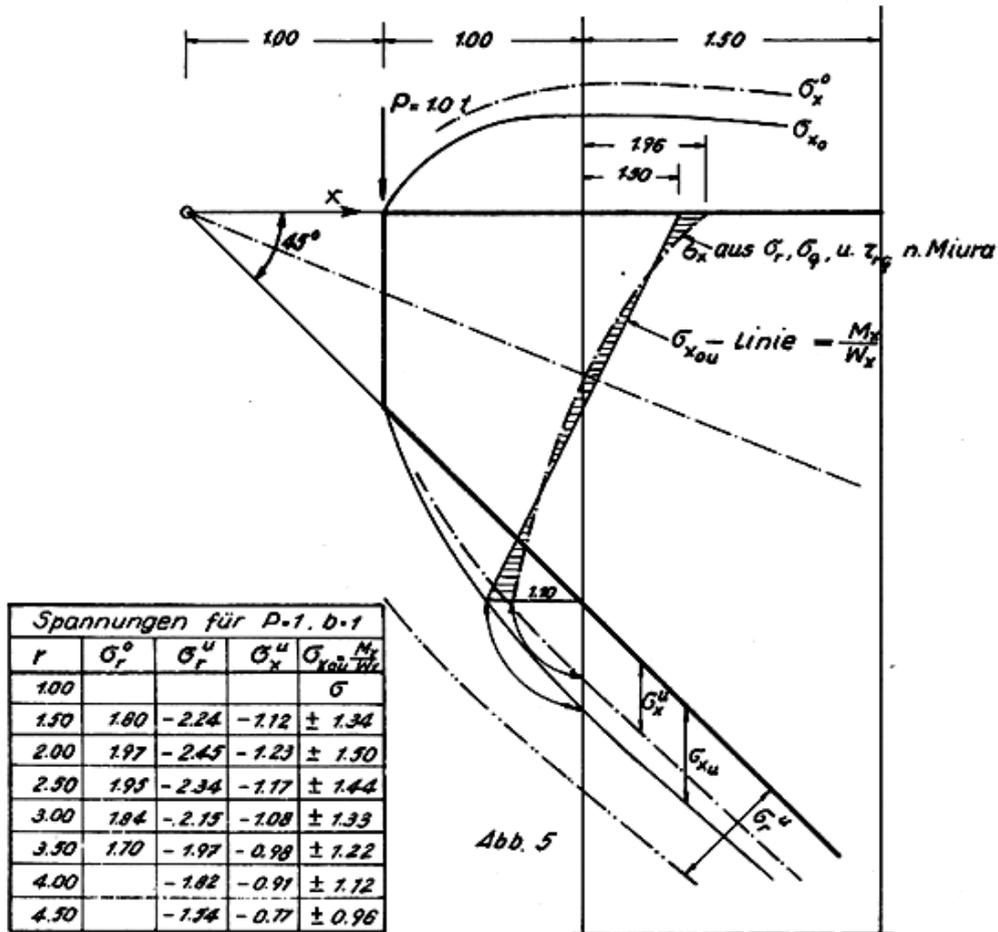
$$\text{unterer Rand: } \sigma_r^u = \frac{2P}{r^2} \cdot (-4,78 \cdot r + 4,65)$$

$$\tau_{r\varphi} \text{ an beiden Rändern} = 0$$

Außer diesen Randspannungen wurden für einen Schnitt  $x = \text{const} = 2,00$  die Spannungen  $\sigma_x$  aus den Gleichungen für  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  und  $\tau_{r\varphi}$  berechnet, um sie mit der gradlinigen Spannungsverteilung zu vergleichen. Die Ergebnisse sind in Abb.5 dargestellt.

Für den lastnahen Bereich gelten die Formeln für die Viertelscheibe

$$\sigma_r = \frac{2P}{r} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \varphi \right) ; \sigma_r = \tau_{r\varphi} = 0$$



Spannungen für P=1, b=1				
r	$\sigma_r^o$	$\sigma_r^u$	$\sigma_x^u$	$\sigma_{x^u} = \frac{M_x}{W_x}$
1.00				
1.50	1.60	-2.24	-1.12	$\pm 1.34$
2.00	1.97	-2.45	-1.23	$\pm 1.50$
2.50	1.95	-2.34	-1.17	$\pm 1.44$
3.00	1.84	-2.15	-1.08	$\pm 1.33$
3.50	1.70	-1.97	-0.98	$\pm 1.22$
4.00		-1.82	-0.91	$\pm 1.12$
4.50		-1.74	-0.77	$\pm 0.96$

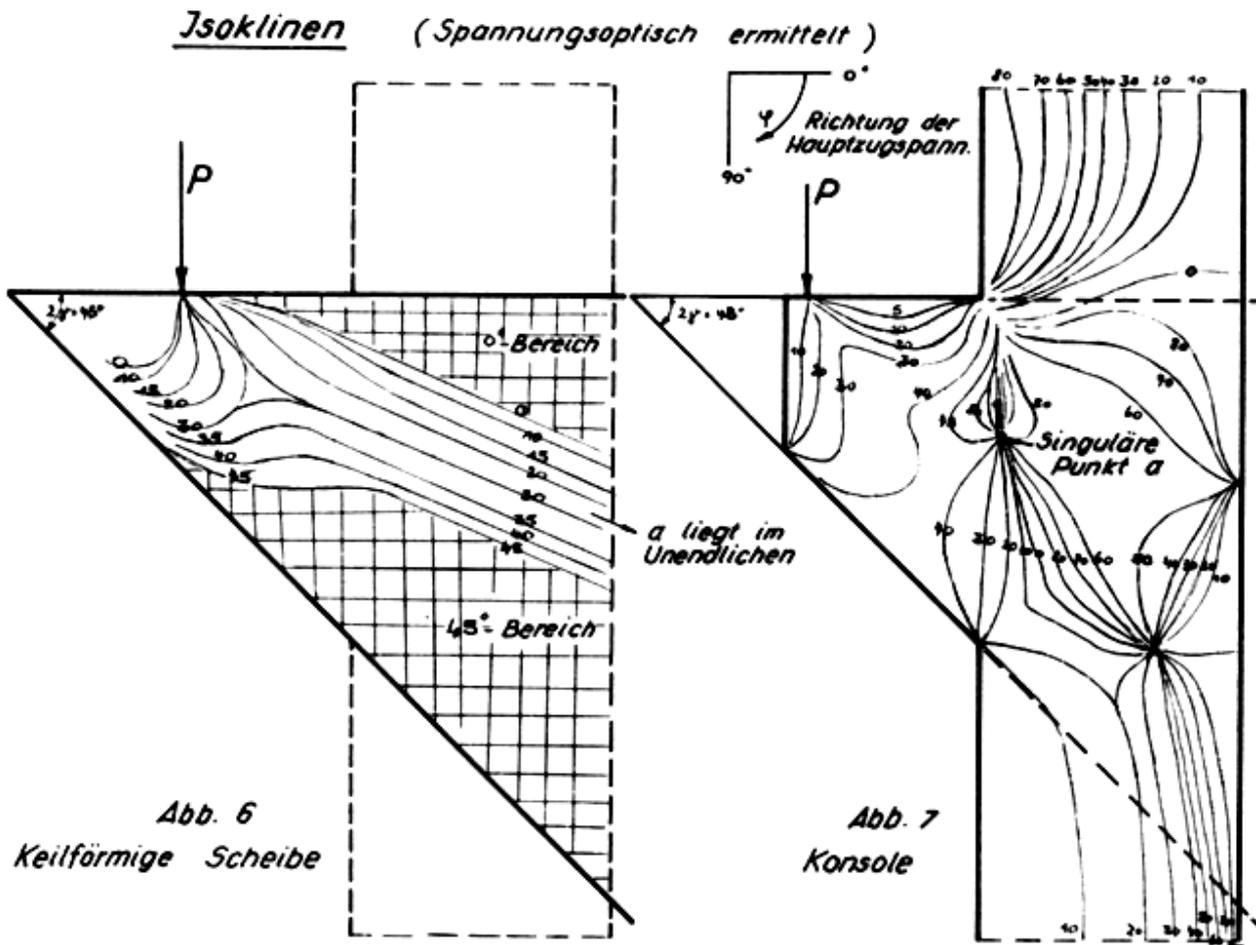
Die Spannungen betragen: für P = 1 und b=1.

	bei geradliniger Spannungsverteilung	für die keilförmige Scheibe	Abweichung
für den oberen Rand: x = 2,00 ; y = 0 r = 2,00 ; $\varphi = 22,5^\circ$	$\sigma_x^o = 1,50$	$\sigma_r^o = \sigma_x^o = 1,97$	31 %
für den unteren Rand: x = 2,00 ; y = 2,00 r = 2,82 ; $\varphi = -22,5^\circ$	$\sigma_x^u = -1,50$	$\sigma_r^u = 1,89$ $\sigma_x^u = \sigma_r^u \cdot \cos^2 45^\circ$ $= 1,89 \cdot 0,5 = 0,95$	58 %

Entsprechende Verhältnisse liegen vor, wenn man die Konsole mit einer Streckenlast belastet. Föppl [2] stellt für den eingespannten Keil ähnliche Abweichungen fest (§ 18 Der Keil mit Rückenlast).

Neben dieser in der Literatur von verschiedenen Autoren gemachten Feststellung, daß die in der Praxis verbreitete, vereinfachende Berechnungsweise nach der Bernoulli - Navier'schen Theorie für keilförmige oder trapezförmige Scheiben keine ausreichende Näherung mehr darstellt, liefern die nach Miura [1] und Föppl [2] gemachten Ansätze bei Konsolen auch aus folgenden Gründen keine brauchbaren Lösungen.

1. Der Spannungsverlauf in einer keilförmigen Scheibe, die in einer Richtung unendlich ausgedehnt ist, kann nicht gleichgesetzt werden mit dem Problem der keilförmigen Scheibe, die starr oder elastisch in eine Stütze eingespannt ist. Scheibe (Konsole) und Stütze beeinflussen sich gegenseitig. Die bei der unendlich ausgedehnten, keilförmigen Scheibe im Unendlichen liegende Stützung (singulärer Punkt) rückt in den endlichen Bereich. Die Isoklinenbilder mit den singulären Punkten zeigen diesen wesentlichen Unterschied. Vgl. Abb. 6 und 7.



Die zugehörigen Trajektorien sind auf Tafel 5 und 13 zu finden.

2. Die Ansätze machen von dem Saint Venant'schen Prinzip keinen Gebrauch. Bei kurzen Kragarmen oder schrägen Konsolen mit einer Einzellast am oberen Rande trifft die Annahme einer parabolisch über den Querschnitt verteilt eingetragenen Last nicht zu. Die errechneten Spannungsverläufe sind daher erst in einiger Entfernung brauchbar.

Der aus der Erfahrung bekannte Störbereich in einem Bereich, der ungefähr gleich der Höhe des Traggliedes ist, entspricht in den meisten Fällen etwa der Größe der Konsole.

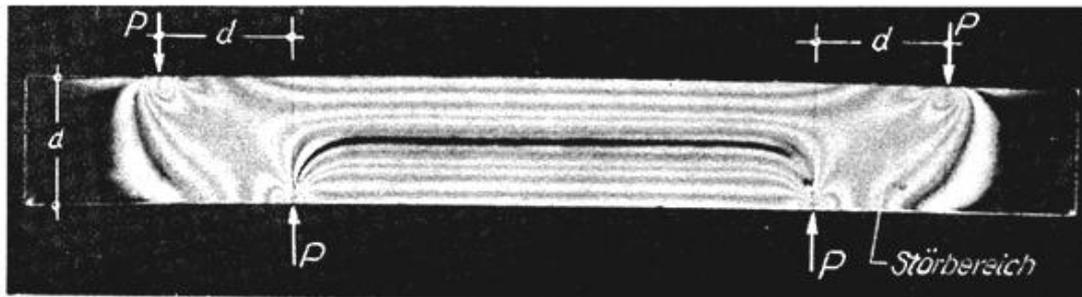


Bild 1

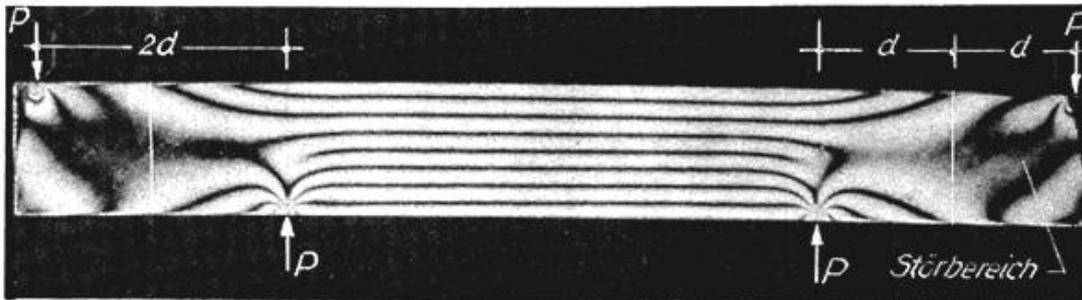


Bild 2 Balken mit Einzellasten in polarisiertem Licht

3. An den Einspannstellen rufen einspringende Ecken bekanntlich sehr große Kerbspannungen hervor, die zwar beim Beton wegen seiner Plastifizierungsfähigkeit nicht in voller Größe auftreten, aber stets zu beachten sind und den Spannungsverlauf örtlich stören.

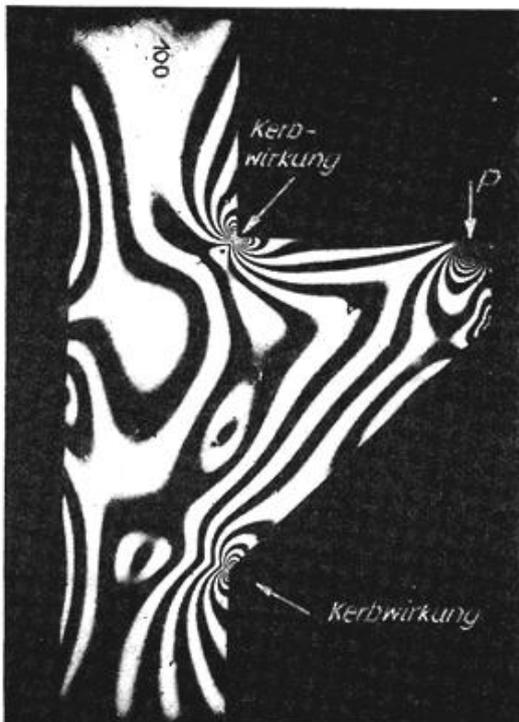


Bild 3



Bild 4

### 1.3 Das Prinzip von De Saint-Venant

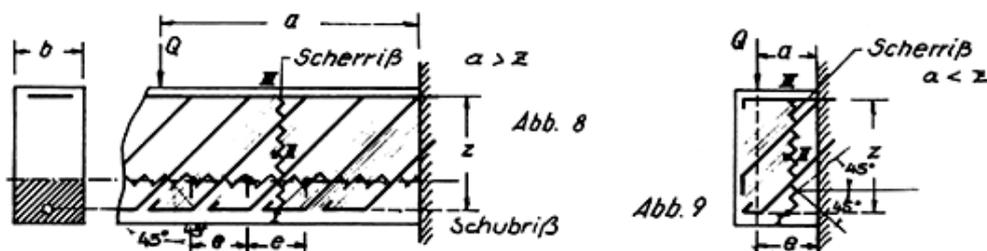
Nach diesem allein durch Erfahrung bestätigten Satz klingen die Wirkungen lokaler Störungen in kurzer Entfernung ab. Da wegen ihrer gedungenen Form Konsolen und kurze Kragarme als "kurz" anzusehen sind, war es nötig, den Störbereich genauer zu untersuchen.

Betrachtet man in der normalen spannungsoptischen Apparatur (siehe Bild Seite 8) Tragglieder - z.B. Stützen mit Einzellasten oder wie auf dem Bild (2) gezeigt wird, ein mit 2 d auskragenden Balken - dann kann man aus dem Isochromatenbild das Ende der Störung im Abstand d (Balkenhöhe) erkennen. Die Schubspannungen infolge einer Einzellast am oberen Rand des Kragbalkens sind erst im Abstand d parabolisch über den Querschnitt verteilt, was gleichbedeutend mit der linearen Verteilung der Längsspannungen ist.

## 2. BISHERIGE BEMESSUNGSMETHODEN FÜR KONSOLEN

### 2.1 Bemessung auf Schub und Scheren im Stahlbetonbau

Die heute übliche Bemessungsart für Konsolen geht auf die Veröffentlichungen von Rausch [3] zurück. Darin wird bei Kragarmen und Konsolen mit  $a > z$  nach Schubspannungen und mit  $a < z$  nach Scherspannungen unterschieden. Der Bemessung liegt das Fachwerkgleichnis nach Mörsch (vgl. [3] Seite 66 ff.) zugrunde.



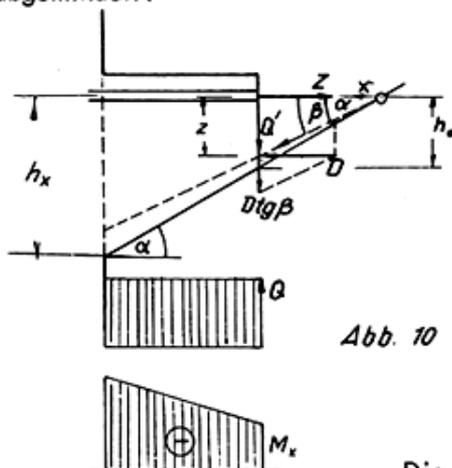
Eine am Balken angreifende "Querkraft" ruft bei Vernachlässigung des Eigengewichtes bis zum Auflager konstante Querkräfte und Schubkräfte hervor. Die durch abgebogene Stäbe aufzunehmende unter  $45^\circ$  verlaufende Zugkraft beträgt für

$$a > z: Z = \frac{Q \cdot a \cdot b}{\sqrt{2} \cdot b \cdot z} = \frac{Q}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{z}$$

$$a < z: Z = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

Der Einfluß der Biegung wird in üblicher Weise berücksichtigt.

Bei veränderlicher Höhe der Konsole wird die Querkraft um den Anteil  $D \cdot 4 \gamma \beta = \frac{M}{h} \cdot 4 \gamma \alpha$  abgemindert.



Daraus folgt

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( Q - \frac{M_x}{h_x} 4 \gamma \alpha \right); 4 \gamma \alpha = \frac{h_x - h_0}{x}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( Q - \frac{Q \cdot x \cdot (h_x - h_0)}{h_x \cdot x} \right)$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(Q \cdot h_x - Q \cdot h_x + Q \cdot h_0)}{h_x}$$

$$Z = \frac{Q}{\sqrt{2}} \cdot \frac{h_0}{h_x} \quad \text{vgl. [3] und [4]}$$

Die Schrägbewehrung vermindert sich im Verhältnis der Höhen.

### Kritik an der gültigen Bemessungsart

Die von Rausch entwickelten Bemessungsformeln setzen geradlinig verteilte Spannungen voraus. Die Hauptzugspannungen besitzen bei normalkraftfreier Schub- oder Scherbeanspruchung dann eine Neigung von  $45^\circ$ .

Der Ausdruck für ihre Größe  $\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$

vereinfacht sich durch die Vernachlässigung von  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$

zu  $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\tau^2}{2}}$  = reine Scherbeanspruchung.

Dies ist nur für die Nulllinie gültig, wo  $\sigma_x$  und  $\sigma_y = 0$  sind. Andererseits berücksichtigt man aber Spannungen  $\sigma_x$  aus der Biegung zur Verminderung der Querkraft bei Konsolen mit veränderlicher Höhe. Ferner wird trotz der Kürze der Konsole zur Verminderung der Querkraft die gradlinige Spannungsverteilung bereits im Lasteintragungsbereich angenommen.

Den Kräftefluß eines tragenden Elementes kann man als Netzwerk von Zug- und Druckstäben deuten, die in ihrer Richtung mit den Trajektorien, in ihrer Größe mit den Hauptspannungen übereinstimmen. Wenn auch bei der üblichen Bemessung die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind, so zeigt die Abweichung des Kräfteverlaufs von den Trajektorien, daß die Verträglichkeitsbedingungen hierbei nicht erfüllt sind.

## 2.2 Scherspannungen im Stahlbetonbau

- a) Nach Mörsch [5] kann eine Scherfläche als Verzahnung aufgefaßt werden. Betrachtet man ein einzelnes Element, dann gelten bei Überwindung der Festigkeit die Beziehungen unter der Annahme konstanter Verteilung der Spannungen

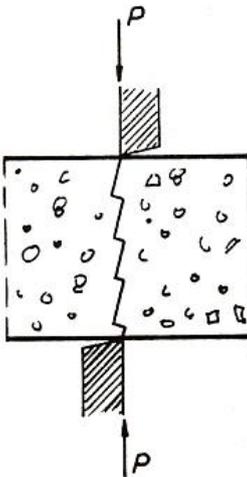


Abb. 11



$$c^2 \cdot \tau^2 = a^2 \cdot \sigma_d^2 + b^2 \cdot \sigma_z^2$$

$$\Sigma H = 0 = b \cdot \sigma_z \cdot \frac{b}{c} - a \cdot \sigma_d \cdot \frac{a}{c}$$

$$\wedge b^2 \cdot \sigma_z = a^2 \cdot \sigma_d$$

$$c^2 \cdot \tau^2 = b^2 \cdot \sigma_z \cdot \sigma_d + a^2 \cdot \sigma_d \cdot \sigma_z$$

$$c^2 \cdot \tau^2 = \sigma_d \cdot \sigma_z \cdot (a^2 + b^2)$$

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} \cdot \tau^2 = \sigma_d \cdot \sigma_z$$

$$\text{da } \frac{c^2}{a^2 + b^2} = 1 \text{ ist,}$$

$$\text{ist die Scherspannung } \tau = \sqrt{\sigma_d \cdot \sigma_z}$$

Diese Ableitung ist nur gültig, wenn die Zugspannung  $\sigma_z$  und die Druckspannung  $\sigma_d$  gleichzeitig ihre Bruchgrenze erreichen. Hingegen ist einzuwenden, daß die gleichmäßige Verteilung nicht zutrifft und die beiden Festigkeiten nicht gleichzeitig, sondern nacheinander überwunden werden.

- b) In der graphischen Darstellung der Spannungszustände und der Festigkeitsgrenzen als ihrer Hüllkurve nach Mohr [6] erhält man, ausgehend von der reinen Zugfestigkeit des Betons bis zur reinen Druckbeanspruchung des Materials und aus der Kombination verschiedener Beanspruchungsarten umseitiges Bild (Abb. 12).

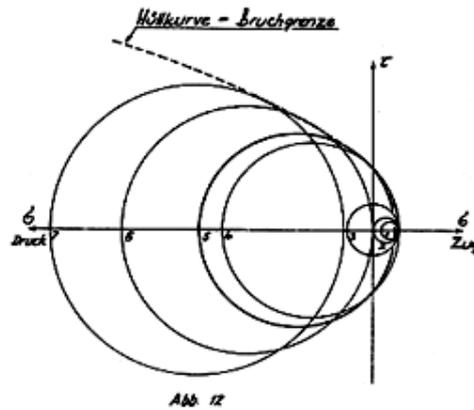


Abb. 12

Mit der als Parabel approximierten Gleichung der Hüllkurve des Betons

$$k_z \sim \frac{1}{10} k_d$$

$$\tau^2 = 0,536 k_d \cdot \sigma + 0,0536 \cdot k_d^2$$

Der spezielle Spannungskreis 5 entspricht reinem Schubbruch. Mohr nennt ihn daher den "Scherfestigkeitskreis".

Beim Beton liegen für diese Beanspruchungsart die zugehörigen Druck- und Zugspannungen unter ihren Bruchspannungen  $\sigma_d \sim 0,6 k_d$ ;  $\sigma_z \sim k_z$ . Um die Scherspannung  $\tau$  ausrechnen zu können, ersetzt Mohr die Hüllkurve angenähert durch eine Gerade.

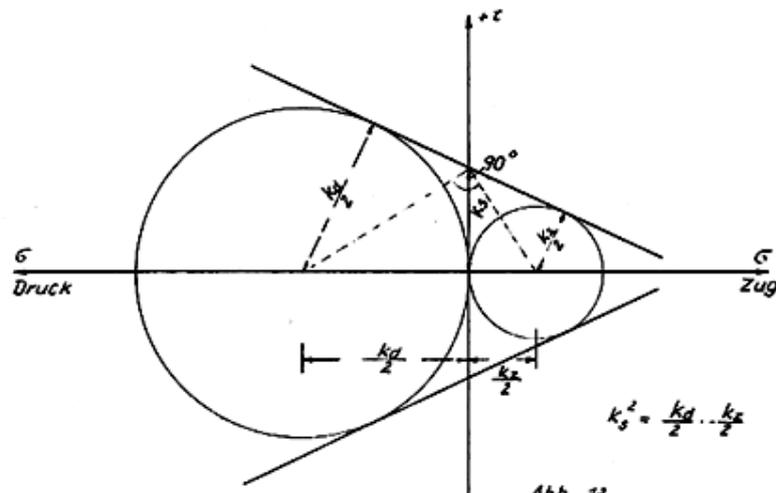


Abb. 13

Aus den geometrischen Zusammenhängen wird

$$k_s = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{k_d \cdot k_z}$$

Die Parabel liefert  $k_s = 0,73 \sqrt{k_d \cdot k_z}$

c) Aus Versuchen gewinnt Seybold [7] einen Mittelwert für die Größe der Scherfestigkeit von

$$k_s = \frac{3}{4} \sqrt{k_d \cdot k_z}$$

### Kritische Betrachtungen zur Scherfestigkeit des Betons

Den theoretischen Ableitungen von Mörsh und Mohr liegt ein vollkommen homogenes Material zugrunde. Für den inhomogenen konglomerat-ähnlichen Beton können sie daher nur angenähert zutreffen. Setzt man bei Konsolen mit  $a \leq z$  eine Scherbeanspruchung voraus, so kann man aus Bruchversuchen (S.49) für die ungerissenen Bereiche diese "Scherfestigkeit" bestimmen.

Bei B 225 ist:  $k_d = 195 \text{ kg/cm}^2$

$k_z = 20 \text{ kg/cm}^2$

$$k_s = 0,75 \sqrt{20 \cdot 195} = \underline{47 \text{ kg/cm}^2}$$

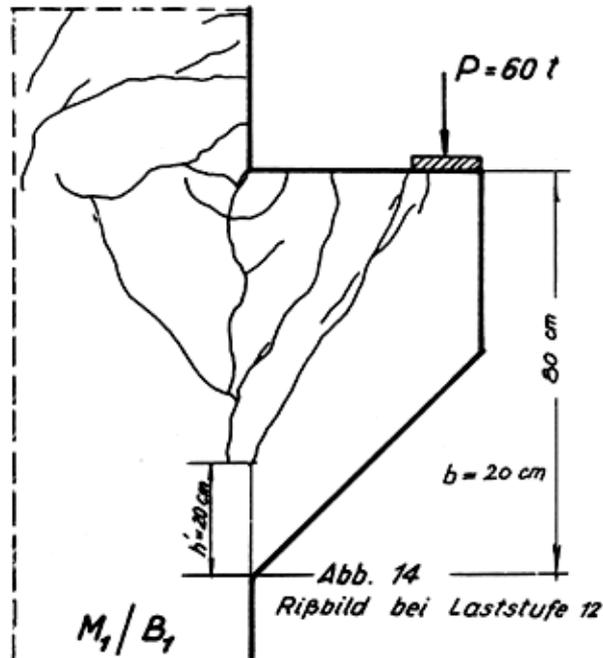


Abb. 14  
Ripbild bei Laststufe 12

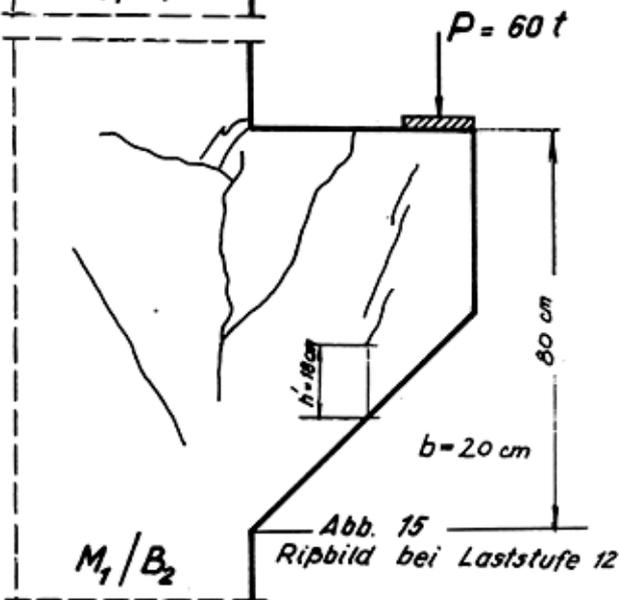


Abb. 15  
Ripbild bei Laststufe 12

Unter Vernachlässigung des Stahlquerschnittes beträgt für den restlichen, ungerissenen Querschnitt die zulässige Scherlast  $P_s$

1. bei M1/B1  $h' = 20 \text{ cm}$

$$P_s = \frac{h' \cdot b \cdot k_s}{1000} = \frac{20 \cdot 20 \cdot 47}{1000} = \underline{19,6 \text{ t}}$$

$$P_{\text{vorh}} = 60 \text{ t}$$

2. bei M1/B2

$$P_s = \frac{h' \cdot b \cdot k_s}{1000} = \frac{18 \cdot 20 \cdot 47}{1000} = \underline{16,9 \text{ t}}$$

$$P_{\text{vorh}} = 60 \text{ t}$$

Bei M1/B1 würde die vorhandene Scherspannung  $k_s = t = 150 \text{ kg/cm}^2$  und bei M1/B2 =  $166 \text{ kg/cm}^2$  unter der Last  $P = 60 \text{ t}$  betragen.

In den angeführten Fällen war die Bruchlast also wesentlich höher als sie aus der Scherfestigkeit des Druckquerschnittes gefolgert werden konnte.

Umgekehrt lagen die Riבלasten von 10 t weit unterhalb derjenigen Last von  $80 \cdot 20 \cdot 47 = 75 \text{ t}$ , die sich aus der theoretischen Scherfestigkeit ergibt. Der Grund für diese Diskrepanz liegt darin, daß der Bruch nicht in einem Abscheren besteht, das sich beim Beton kaum verifizieren läßt.

### 2.3 Die Abscherversuche des DAfE Heft 80 [8]

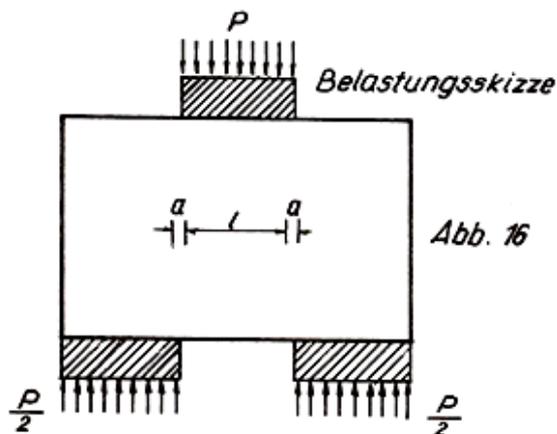


Abb. 16

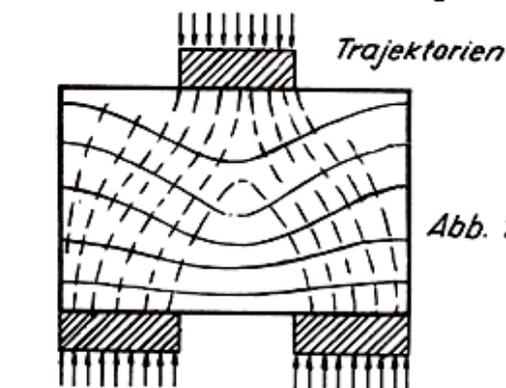


Abb. 17

Studiert man den Verlauf und die Art der Risse in den Versuchsbalken 1259, 1260, 1261, 1262, 1254, 1255, 1256, 1257, 1267, 1268, 1264, 1265, die nach der skizzierten Anordnung gelagert und bis zum Bruch belastet wurden, so kann man den Verlauf der Hauptzug- und -druckspannungen angeben. Sie decken sich für alle Bewehrungsarten weitgehend mit den aus Versuchen an homogenen Modellen gewonnenen Trajektorienbildern. Auch bei diesem klassischen "Scherversuch" ist die Größe der Hauptzugspannung für die Rißbildung entscheidend. Der Bruch wurde durch Überwindung der Druckfestigkeit in Form einer Gleitung eingeleitet, sofern die waagerechte Bewehrung genügend kräftig und gut verankert war.

Die im Abschnitt d) Heft 80 angegebenen Beziehungen zwischen der Scherfestigkeit und der Würfel- festigkeit, oder der Biegefestigkeit  $K_b$  sind spezielle, von der Form des Versuchskörpers und seiner Bewehrung entscheidend beeinflusste Größen (vgl. hierzu [8] Seite 14 unten).

## 3. DIE SPANNUNGSOPTISCHEN UNTERSUCHUNGEN DER EINZELNEN KONSOLFORMEN

### 3.1 Vorbemerkung

Die Bestimmung des ebenen Spannungszustandes in Scheiben besteht im allgemeinen aus der Lösung der Differentialgleichung  $\Delta \Delta F = 0$  unter Berücksichtigung der Randbedingungen. Für das vorstehende Scheibenproblem ist dieser Lösungsweg zu schwierig. Es lag darum nahe, mit Hilfe der Spannungsoptik den Spannungsverlauf an Modellen zu untersuchen.

Die ebene Spannungsoptik macht sich die Grundtatsache zunutze, daß gewisse durchsichtige homogene, isotrope Stoffe Doppelbrechung zeigen, die dem Spannungszustand proportional ist.

Die Hauptgleichung der Spannungsoptik lautet nach [9]

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\gamma \cdot S}{d \cdot \lambda} \quad \text{worin}$$

$\gamma$  = Gangunterschied der aus dem Modell heraustretenden Lichtstrahlen

$S$  = Spannungsoptische Konstante (vom Werkstoff und von der Art des Lichtes abhängig)

$d$  = die Modellstärke

$\lambda$  = die Wellenlänge des verwendeten Lichtes ist.

$\sigma_1$  und  $\sigma_2$  = Hauptspannungen

Setzt man für

$$\frac{y}{\lambda} = \frac{\text{Gangunterschied}}{\text{Wellenlänge}} = \delta = \text{Phasenverschiebung}$$

dann lautet die Gleichung

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\delta \cdot S}{d}$$

Ist der Gangunterschied gleich oder ein Mehrfaches der Wellenlänge, dann treten Interferenzlinien auf und man spricht von einer oder mehreren Ordnungen der dadurch entstehenden "Isochromaten". Die Hauptspannungsdifferenz ist der Ordnung direkt proportional, da  $d$  und  $S$  Konstanten sind. Die Isochromaten sind mithin die Linien gleicher Hauptspannungsdifferenzen. Da am Rande eine Hauptspannung = 0 ist, gibt die Anzahl der dort entstehenden Isochromaten ein Bild der Randspannung. Fällt eine der Hauptspannungsrichtungen mit der Polarisationsrichtung zusammen, so wird der Lichtstrahl vom Analysator absorbiert. Diese Punkte erscheinen dunkel und bilden dunkle Linien. Diese sogenannten Isoklinen sind Linien gleicher Hauptspannungsrichtungen  $\alpha$ .

Mit der Spannungsoptik ist es möglich, zwei Größen eines Spannungszustandes zu bestimmen: 1. die Hauptspannungsdifferenz  $\sigma_1 - \sigma_2$  und 2. die Richtung  $\alpha$  der Hauptspannungen. Die zur vollständigen Bestimmung eines Spannungszustandes notwendige dritte Größe kann bei Scheiben durch Differenzenrechnung ausgehend von einem bekannten Randwert  $\sigma_{y0}$  ermittelt werden (vgl. [9] Schubspannungsdifferenzverfahren). Mittels einer einfachen Gleichgewichtsbetrachtung erhält man für  $\sigma_y$  den Ausdruck

$$\sigma_y = \sigma_{y0} - \sum \Delta \sigma_y$$

$$\Delta \sigma_y = (\tau_A - \tau_B) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

worin  $\tau_A$  und  $\tau_B$  die Schubspannungen benachbarter Schnitte sind,  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die Längen des Elementes.

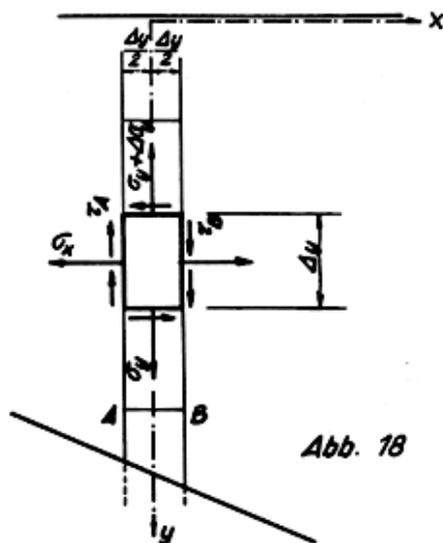


Abb. 18

Der Abstand zweier Schnitte muß so gewählt werden, daß die gemessenen Werte nicht allzusehr vom Mittelwert der über dem Element verteilten Spannung abweichen. Bei hohem Spannungsgefälle ist deshalb ein sehr enges Raster zu wählen.

Mit  $\sigma_1 - \sigma_2$ ,  $\alpha$  und  $\sigma_y$  berechnet man:

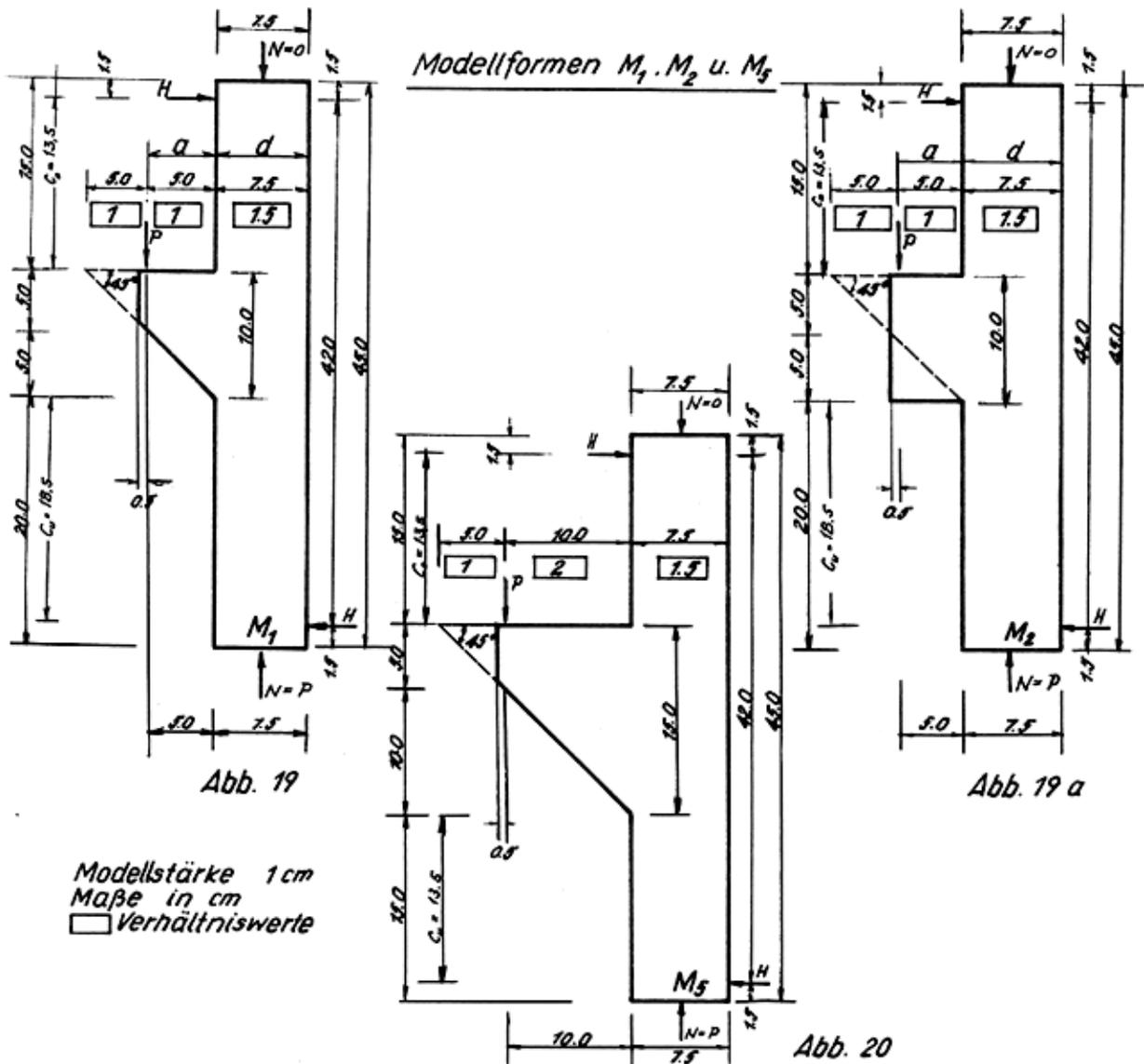
$$\sigma_x = \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_{xy}^2}$$

### 3.2 Modellformen, -abmessungen und Belastungsvorrichtung

Konsolen in Industriehallen sind zumeist in Rahmenstiele eingespannt. Oberhalb und unterhalb der Konsole befindet sich in der Regel ein Momentennullpunkt mit Quer- und Normalkraft. Der zwischen diesen "Gelenkpunkten" liegende Teil des Rahmenstiels mit Konsole kann herausgelöst betrachtet und statisch bestimmt gelagert werden, was den Vorteil hat, daß der Versuchskörper frei von Zwängungskräften bleibt.

Bei den Modellen M1 - M4 wurde bis zur Eintragsstelle der Quer- und Normalkräfte stets eine Länge  $c > 1,5 d$  eingehalten. Vorversuche haben gezeigt, daß dann die Störzone im Bereich der Auflagerung die Konsole nicht mehr beeinflusst. Wie weiter beobachtet wurde, hat eine Abweichung der Verhältnisse der Konsollänge zur Stielbreite um 20-30% von dem Wert  $a : d = 1 : 1,5$  keinen merkbaren Einfluß auf den Kräfteverlauf im Bereich der Konsole. Entscheidend dagegen wird der Spannungszustand der Konsole von der Neigung  $\alpha$  der Konsol-Unterkante bestimmt.

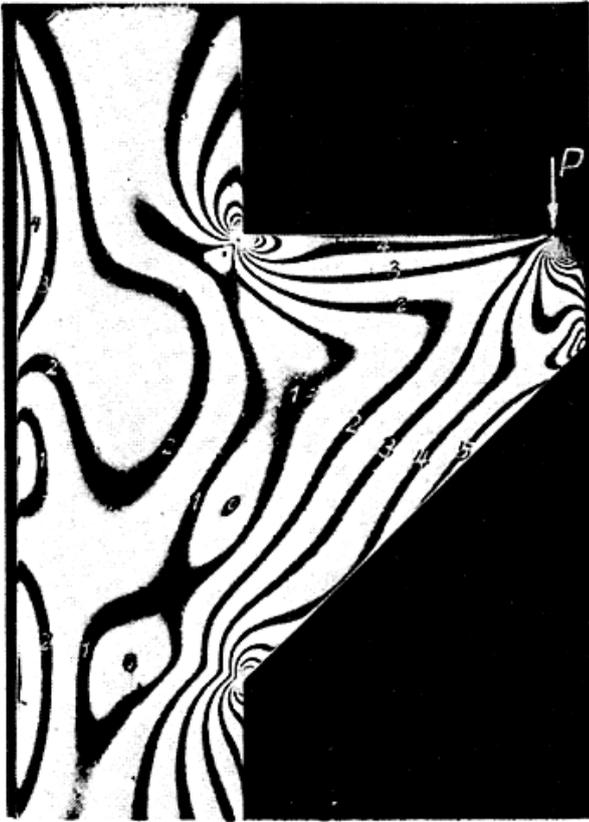
Aus der Vielzahl der möglichen, konstruktiv sinnvollen Konsolformen wurden die in Abb.19 und 20 dargestellten 2 Arten mit  $\alpha = 30^\circ$  und  $\alpha = 45^\circ$  und die entsprechenden Rechteckformen ausgewählt. Es wird in einem späteren Abschnitt gezeigt, daß sich das Verhalten aller anderen Formen auf dasjenige der Grundtypen zurückführen läßt (s.S.80).



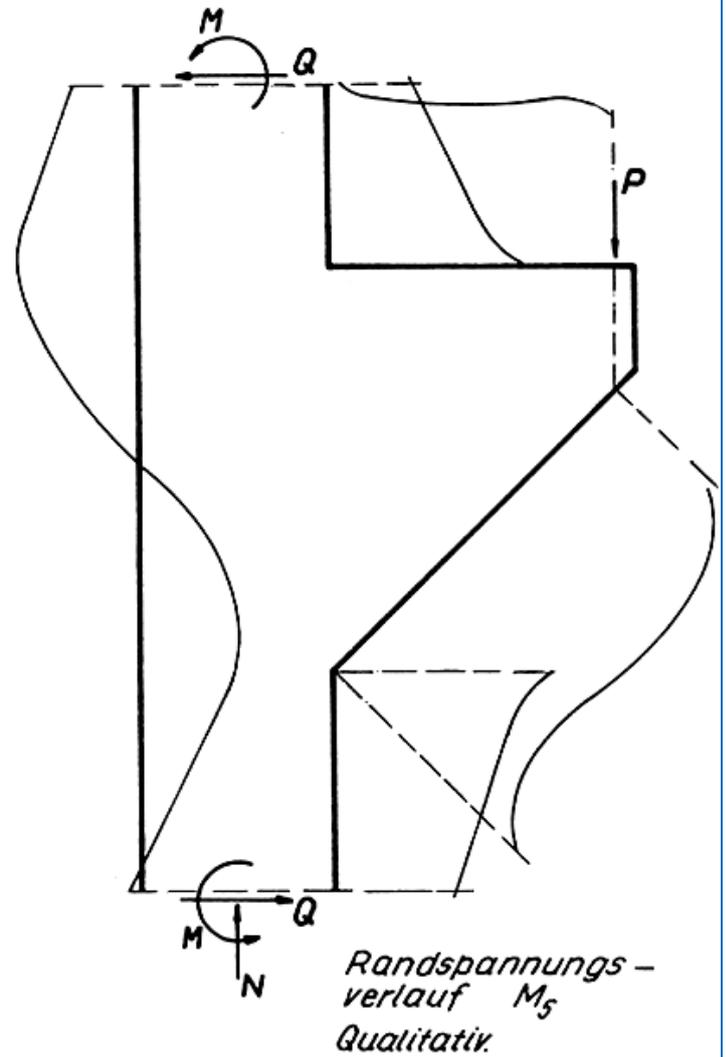


### 3.3 Die spannungsoptischen Untersuchungsmethoden

- a) Zur Veranschaulichung der vorhandenen Randspannungen wurden zunächst die Modelle M1 - M5 aus Gießharz Araldit B hergestellt und hiervon Isochromatenaufnahmen angefertigt.



*Isochromatenaufnahme  $M_5$   
Bild 5*



*Randspannungs-  
verlauf  $M_5$   
Qualitativ.*

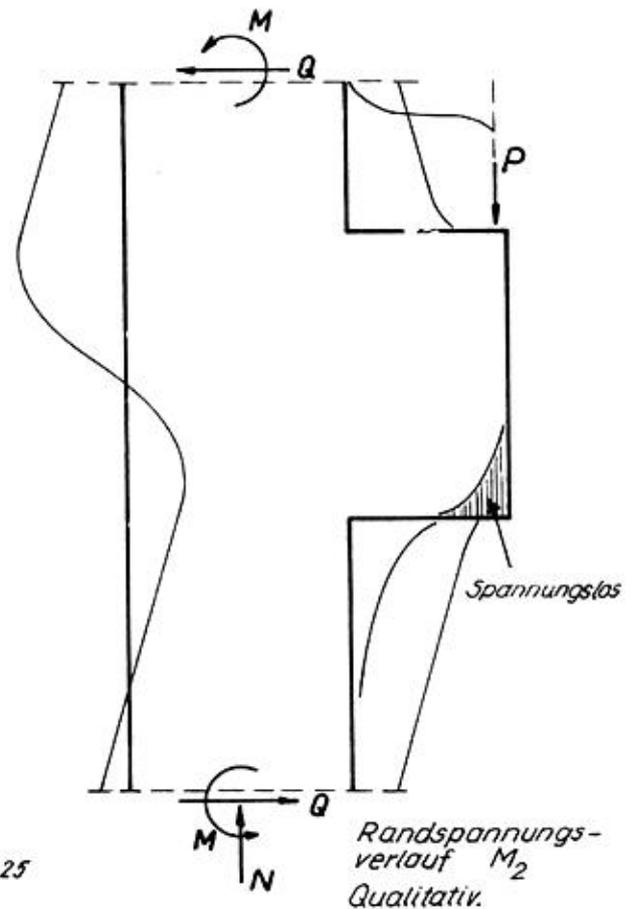
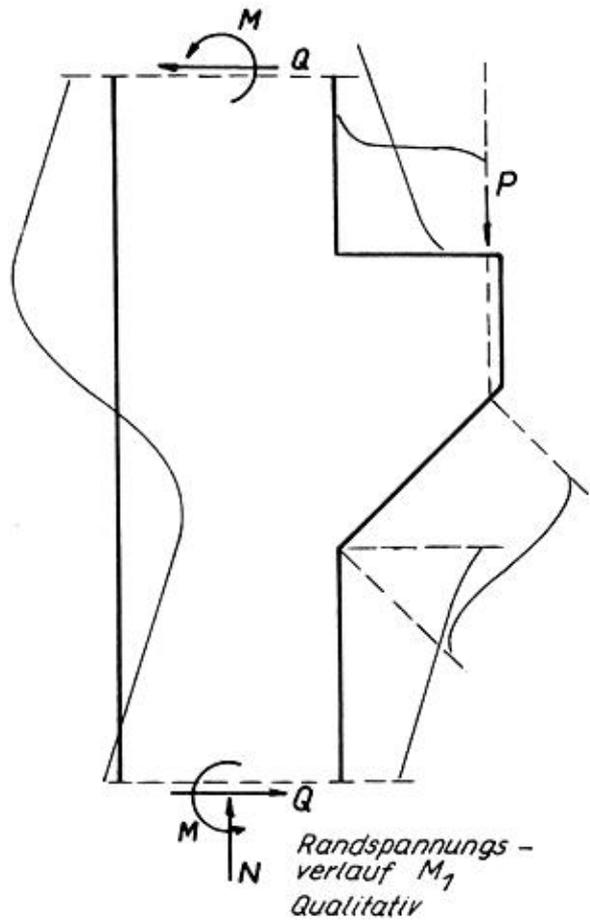
*Abb. 23*



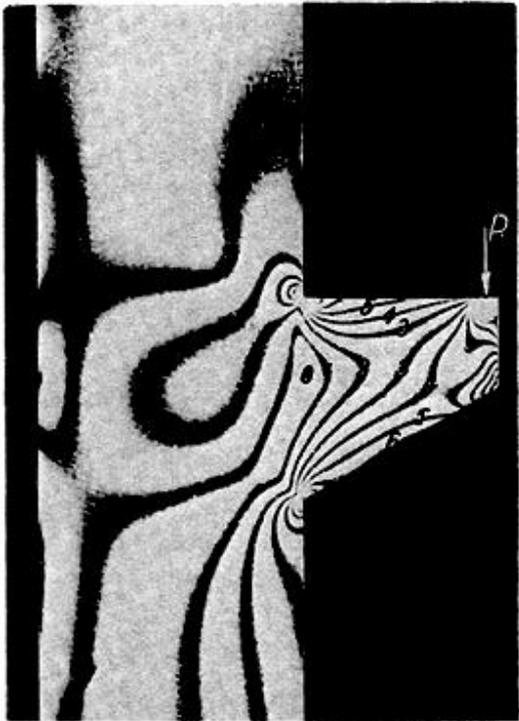
*Isocromatenaufnahme  $M_1$   
Bild 6*



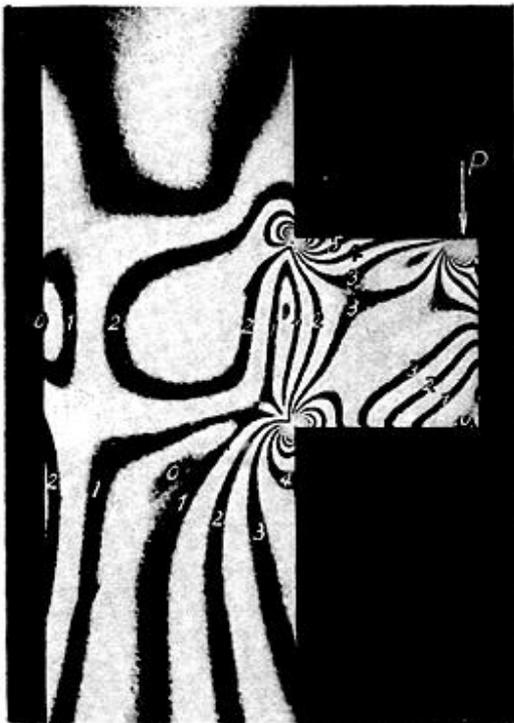
*Isocromatenaufnahme  $M_2$   
Bild 7*



*Abb. 25*



Isoschromatenaufnahme  $M_3$   
Bild 8



Isoschromatenaufnahme  $M_4$   
Bild 9

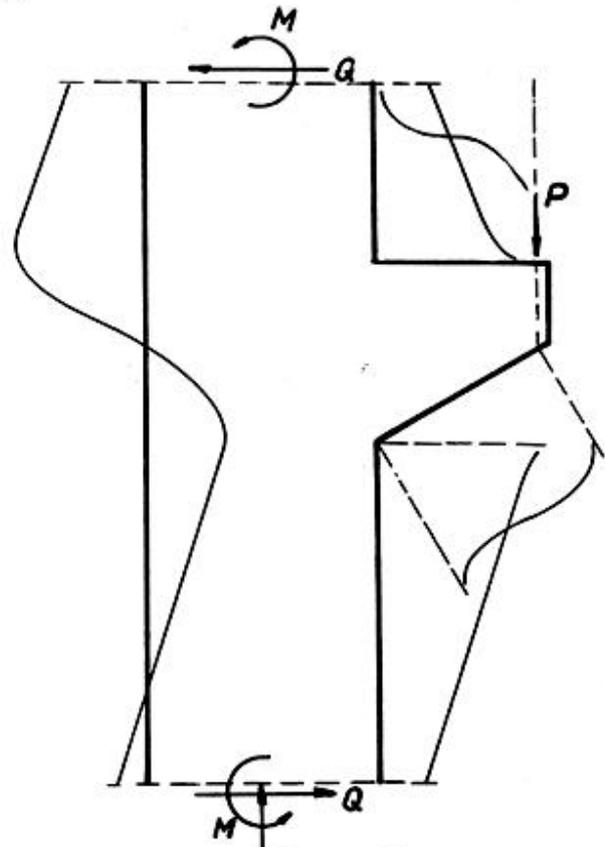


Abb. 26  
Randspannungs-  
verlauf  $M_3$   
Qualitativ

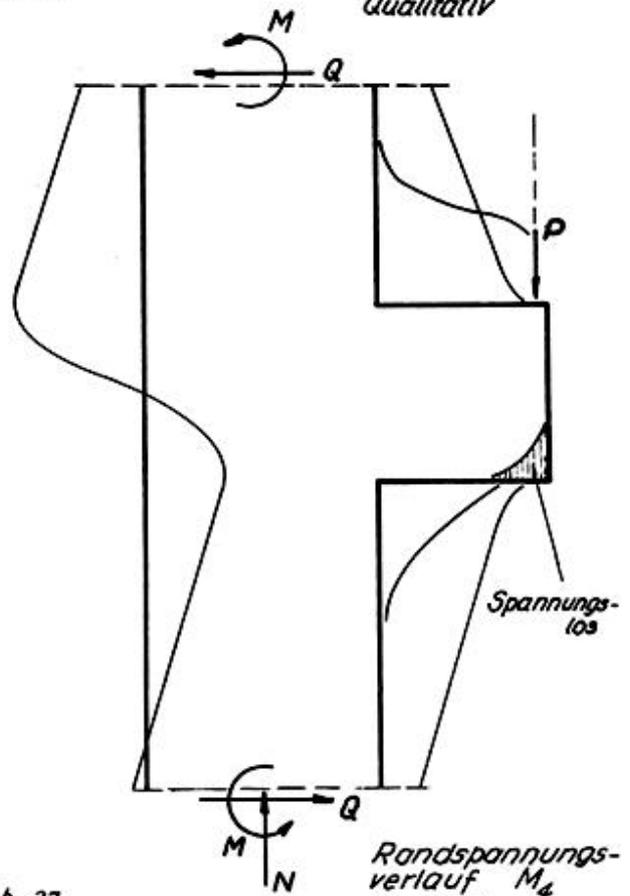


Abb. 27  
Randspannungs-  
verlauf  $M_4$   
Qualitativ.

Außerdem wurden die Modelle M1 - M4 aus Plexiglas hergestellt und mit Hilfe von Isoklinenaufnahmen die Isoklinenbilder Tafel 1 - 4 gezeichnet. Die hohe spannungsoptische Konstante des Plexiglasses ermöglicht bei normaler Belastung Isoklinenaufnahmen, ohne daß Isochromaten sichtbar werden. Sämtliche Isoklinenbilder haben im Innern und am Rande der Scheibe singuläre Punkte, die im vorliegenden Fall Hauptspannungsnullpunkte sind. Zu bemerken ist, daß sich bei M2 infolge der unteren  $90^\circ$  Ecke die Kerbspannung gegenüber M1 (Winkel  $135^\circ$ ) dort vergrößert und den singulären Punkt b verschiebt.

Tafel 1	Modell M1	Punkt a, b und c	}	s. Anhang
Tafel 2	Modell M2	Punkt a, b und c		
Tafel 3	Modell M3	Punkt a und c		
Tafel 4	Modell M4	Punkt a und c.		

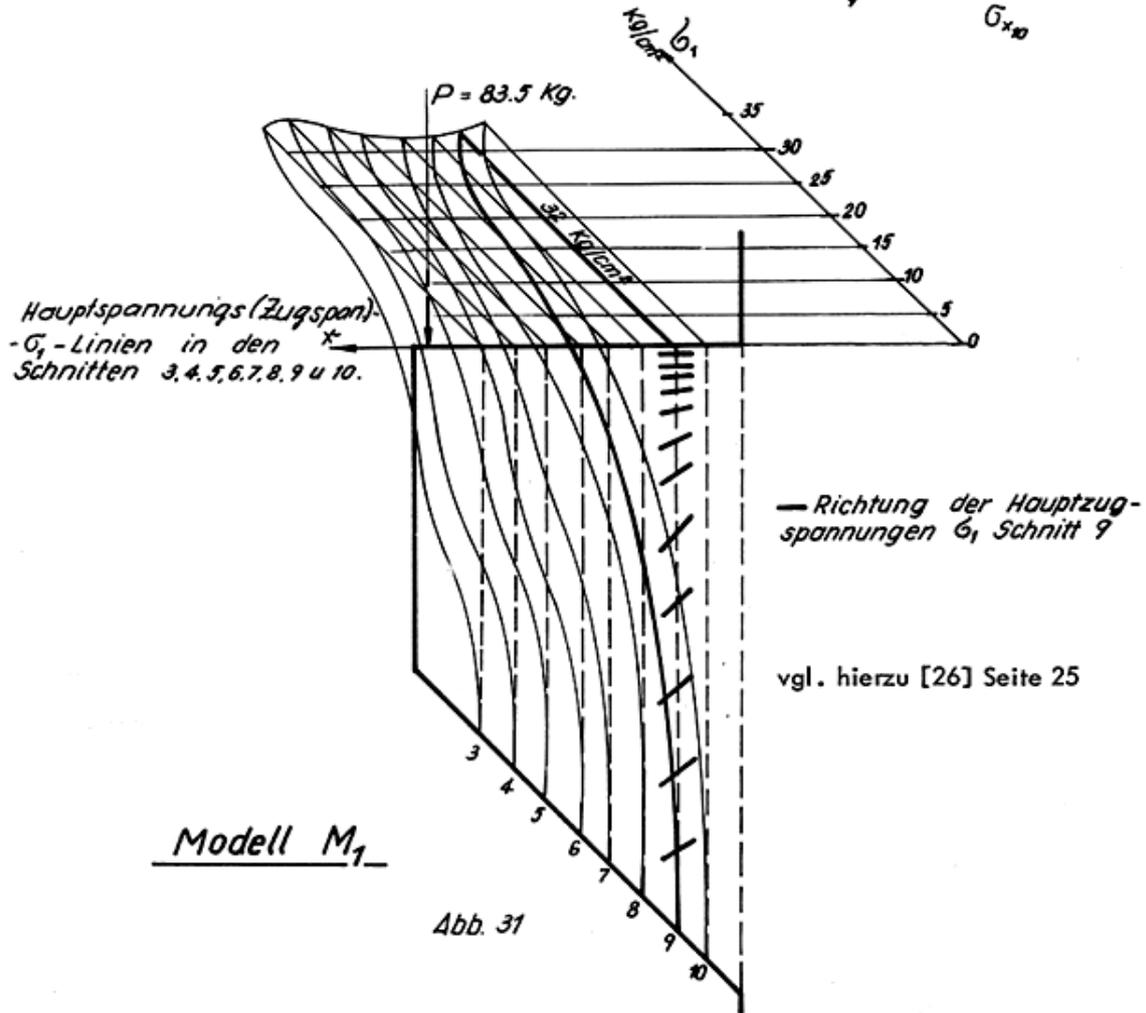
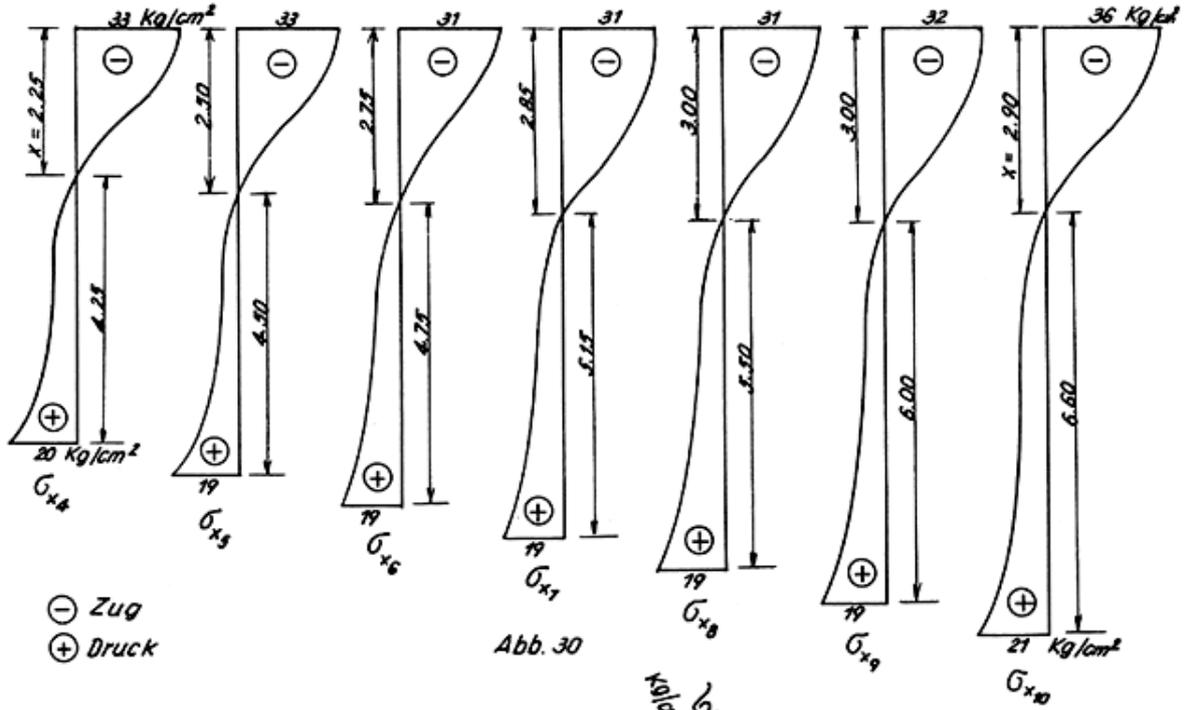
Auf Tafel 3 und 4 ist Punkt b nicht mehr vorhanden, lediglich eine Häufung der Isoklinen ist zu erkennen, die bei M3 noch stärker als bei M4 ist.

Die Tafeln 5 - 8 zeigen die mit Hilfe der Isoklinen gezeichneten Zug- und Drucktrajektorien, die bei den späteren Bruchversuchen auf die Betonkonsolen in entsprechender Vergrößerung projiziert wurden.

- b) Für die genaue Ermittlung des Spannungszustandes ist es erforderlich, die Größen  $\sigma_1 - \sigma_2$  und den Richtungswinkel  $\alpha$  der Hauptspannungen an einem Modell zu bestimmen. Im Durchlichtgerät (vgl. Teepe [10] Seite 28) ist es unter Verwendung eines Berek-Kompensators möglich, Bruchteile von Ordnungen zu bestimmen. Mit dem vorgenannten Kompensator kann man Gangunterschiede bis zu  $2 \text{ m}\mu$  messen. Es war somit möglich, beide Größen an Plexiglasmodellen zu messen. Diese sind leicht zu bearbeiten und nicht in dem Maße gegen Randeffekte empfindlich wie Aralditmodelle.

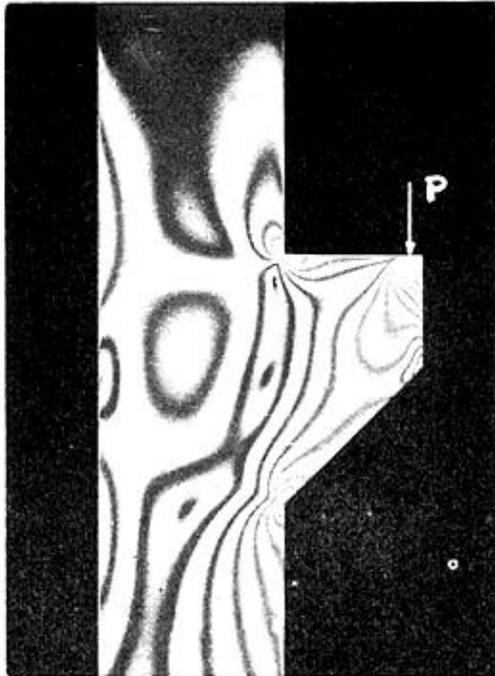


Charakteristische  $\sigma_x$ -Linien für die Schnitte 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10

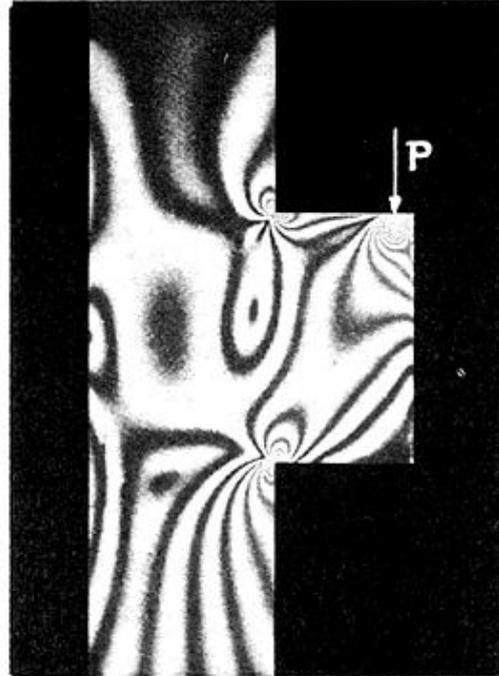


3.5 Das Modell M2

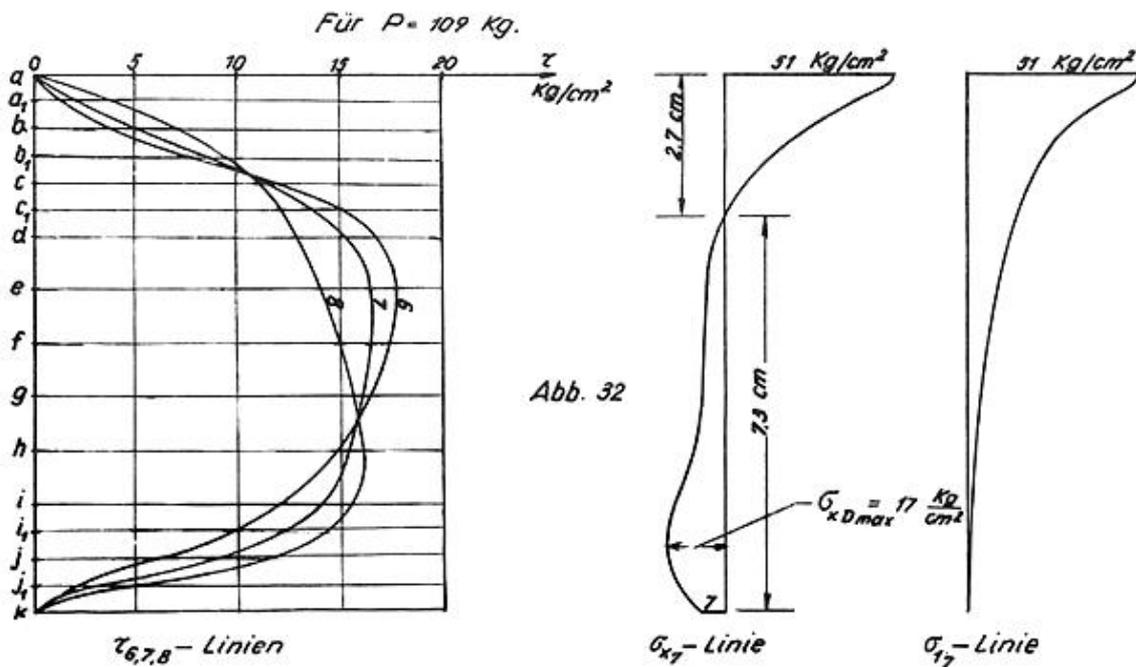
Ein Vergleich der Isochromatenaufnahmen der Modelle M1 und M2 und die Auswertung der Schnitte 6, 7 und 8 (siehe Abb.32) haben bestätigt, daß die Vergrößerung der Konsole durch Wegfall der schrägen Unterkante den charakteristischen Spannungsverlauf und die Größe der Zugzone praktisch nicht verändert.

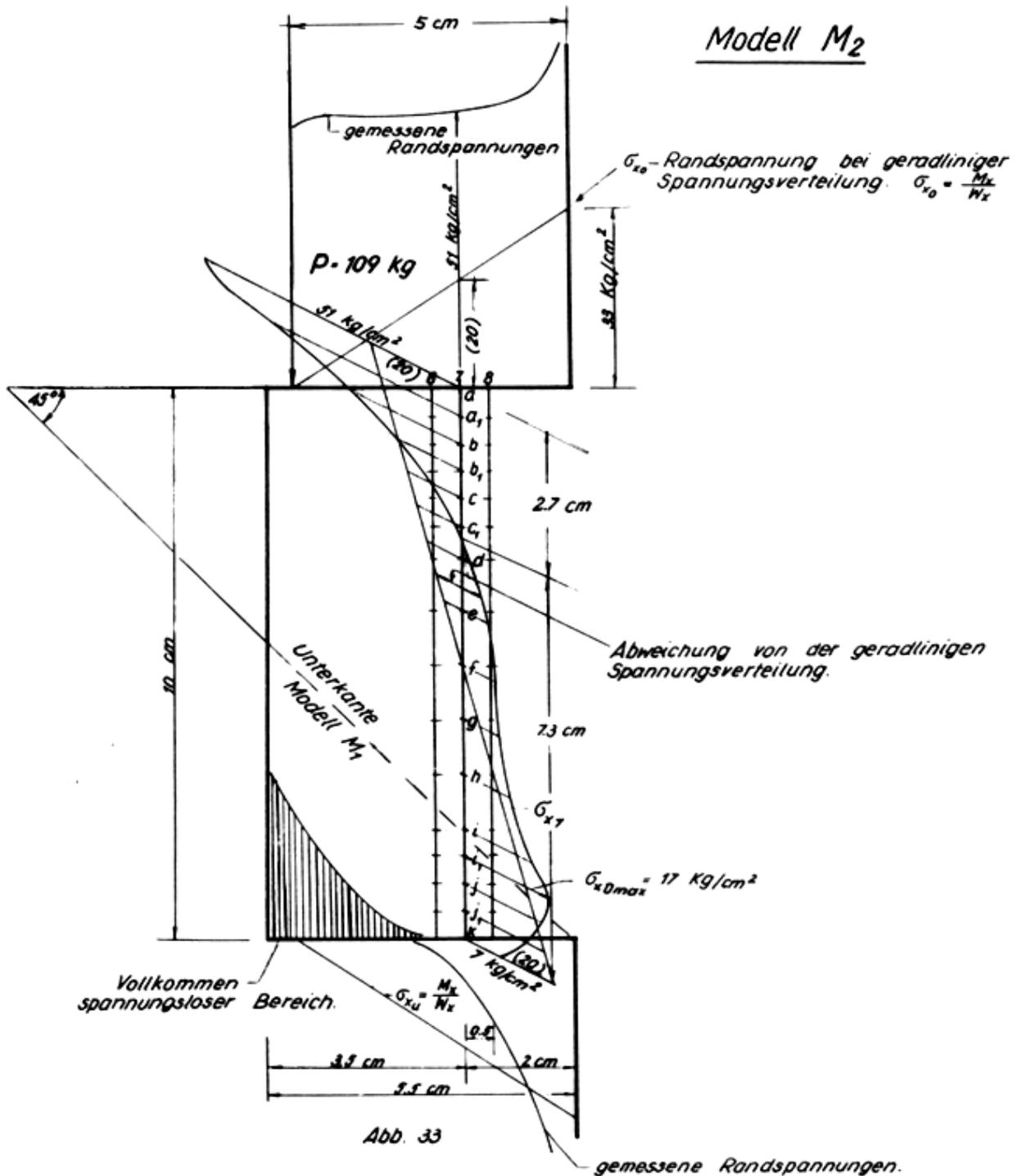


Isochromatenaufnahme M<sub>1</sub>  
Bild 10



Isochromatenaufnahme M<sub>2</sub>  
Bild 11





Gegenüber der bisher angenommenen geradlinigen Spannungsverteilung sind die Abweichungen sehr erheblich. Die vordere Ecke bleibt spannungslos. Der Anteil des spannungslosen Bereiches ist infolge der größeren Höhe (10 cm) im Vergleich zu M<sub>4</sub> (s. S. 27) größer. Zwischen der Summe aller Druckspannungen bei M<sub>1</sub> und M<sub>2</sub> besteht kein wesentlicher Unterschied.  $\sigma_d \max.$  tritt jedoch nicht mehr am Rande, sondern innerhalb des Querschnittes auf. Die Resultierende aller Hauptdruckspannungen hat zum unteren waagerechten Rand eine Neigung von etwa  $45^\circ$ . Die Nulllinie verschiebt sich nach oben. Die Zugzone verkleinert sich, wodurch die Zugspannungen am Rande sich erheblich vergrößern. Sie bleiben parallel zum Rand fast konstant.

## 3.6 Das Modell M3

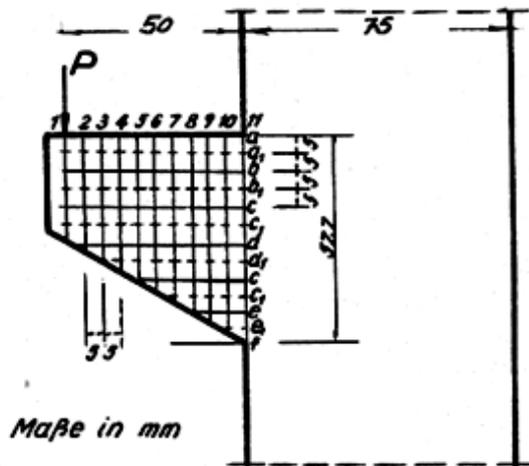


Abb. 34

Beim Vergleich der auf Seite 18 u. 19 zu findenden Isochromatenaufnahmen kann man einen grundsätzlichen Unterschied zu M1 und M2 feststellen. Am oberen Rand (Zugbereich) der Konsole verlaufen die Isochromaten nicht mehr parallel dazu wie bei der  $45^\circ$  Konsole. Die einzelnen Ordnungen enden dort. Dagegen verläuft am Druckrand die 6. Ordnung parallel zu Schräge (gerade noch sichtbar). Die ermittelten  $\sigma_x$  - Spannungslinien sind außerhalb der störenden Kerbspannungen und der Lasteintragungsstelle geradlinig.

Von den untersuchten Schnitten 3. - 10 werden die für den mittleren Bereich ermittelten Spannungslinien  $\tau_{5:7}$  und  $\sigma_{x6}$  dargestellt.

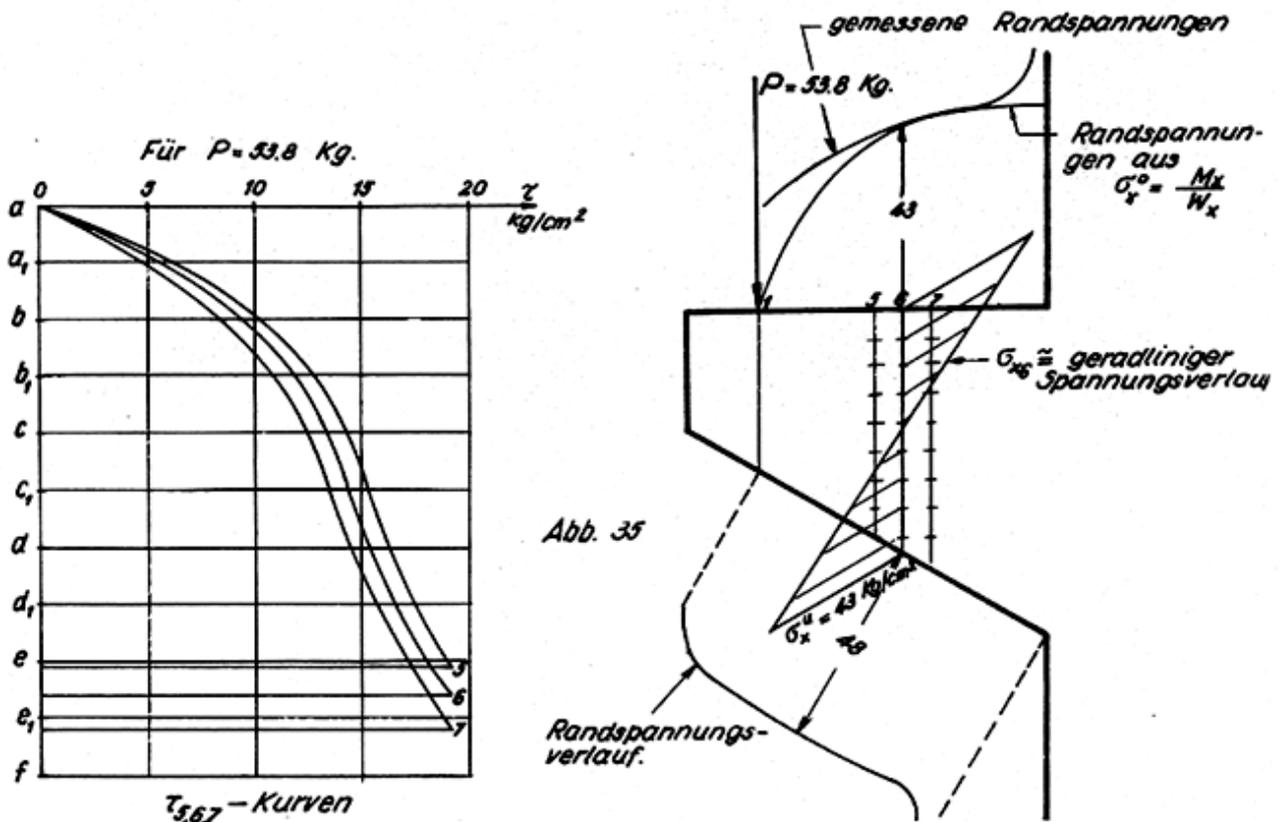
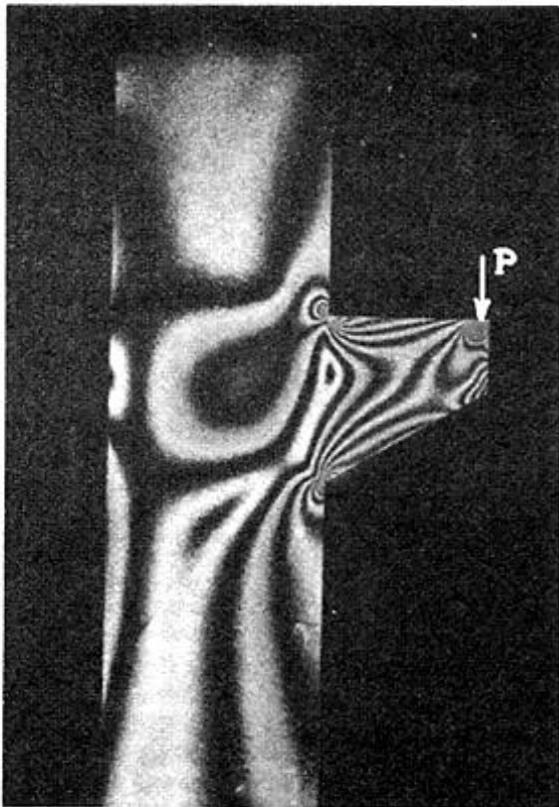


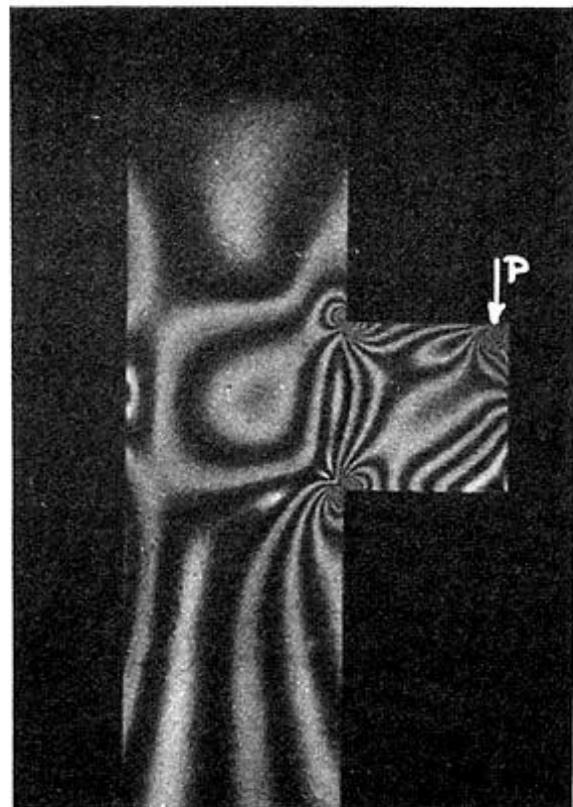
Abb. 35

### 3.7 Das Modell M 4

Auch bei dieser Konsole ist die vordere untere Ecke wie bei M 2 spannungslos. Nur ist dieser spannungslose Bereich im Verhältnis zur Konsole M 2 kleiner, da  $\frac{h}{a} = 1,15$  (bei M 2 = 2) beträgt. Der Verlauf der Zugspannungen am oberen Rand und die Summe aller Zugspannungen unterscheiden sich von M 3 nicht wesentlich. Die Nulllinie hat sich etwas zum Zugrand hin verschoben. Im Bereich der  $\sigma_x$ -Druckspannungen ist die Spannungsverteilung nicht mehr geradlinig. Bei der dargestellten  $\sigma_{x6}$ - Linie befinden sich die größten Druckspannungen noch am Rande. Bei den Schnitten 1, 2, 3, 4 und 5 ist dies nicht mehr der Fall.  $\sigma_{xd \max}$  rückt ins Innere der Scheibe, wie es beim Modell M 2 bereits zu erkennen war. Die erste Ordnung der Isochromaten (s. Bild 9 Seite 19) verläuft zum unteren Rand unter einem Winkel von ca.  $40^\circ$ .



M 3



M 4

Isochromatenaufnahmen Aralditmodelle

Bild 12

Bild 13

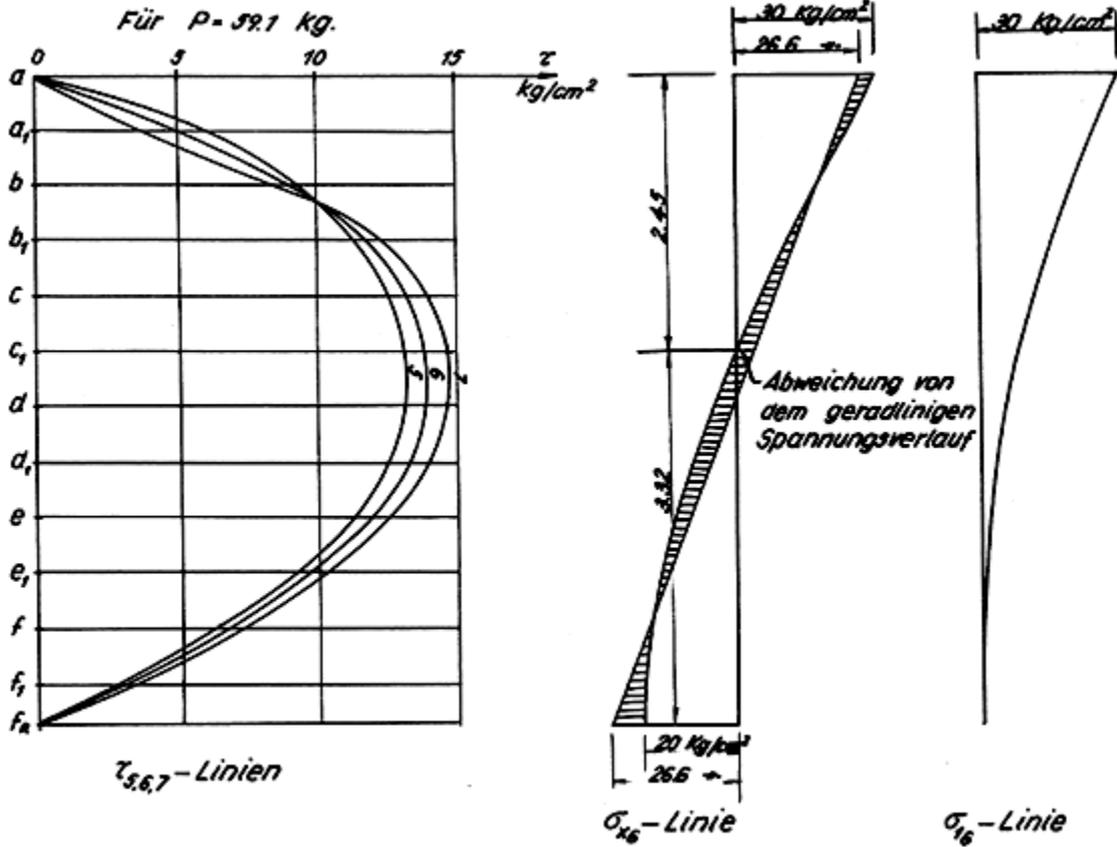


Abb. 36

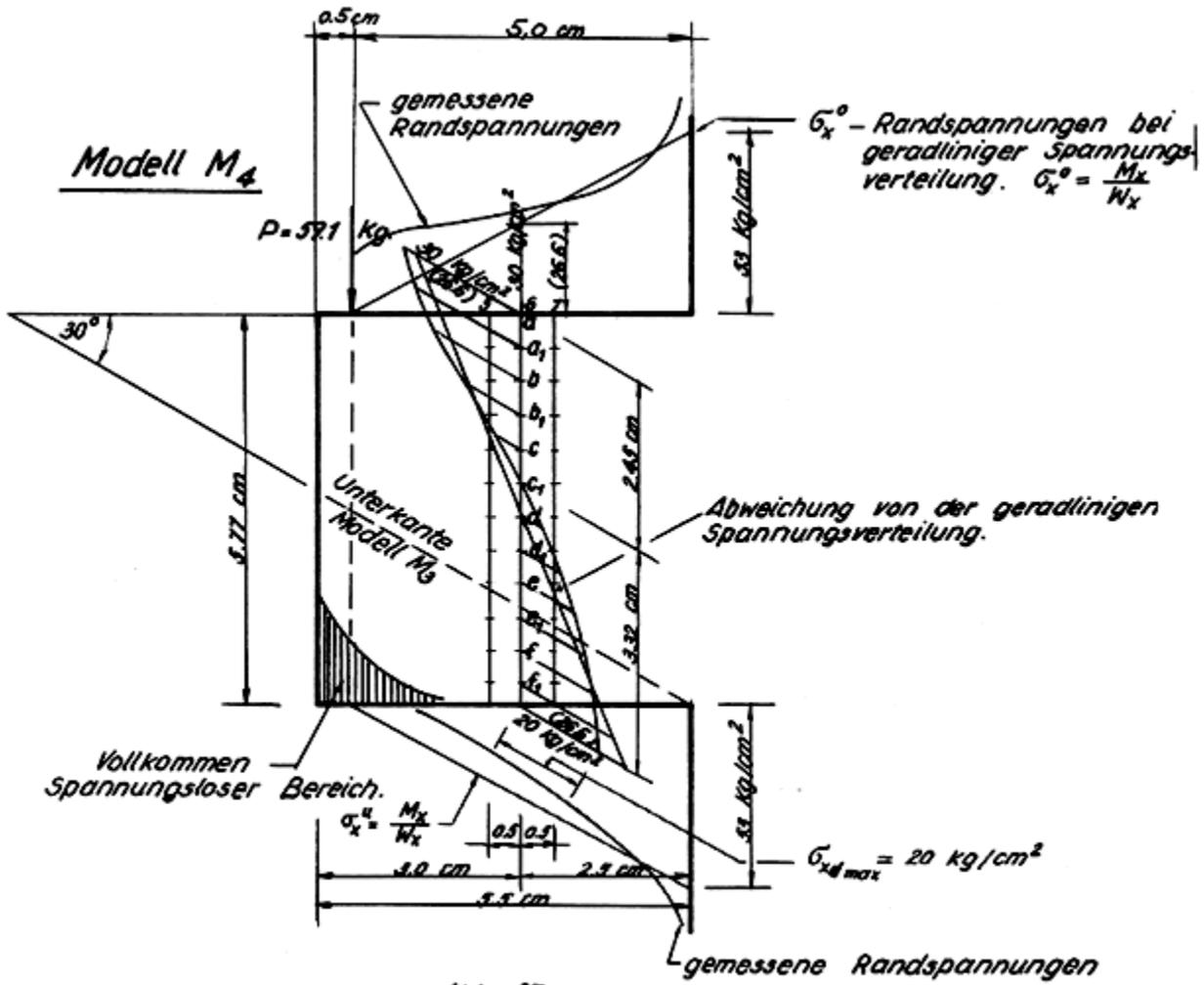


Abb. 37

### 3.8 Zusammenfassung der Ergebnisse der spannungsoptischen Untersuchungen

Der Verlauf der  $\sigma_x$  Spannungen und der Hauptzugspannungen läßt bei den Konsolformen M1 und M2 deutlich eine Stabwerkswirkung erkennen. Die Spannungen entlang des oberen Konsolrandes sind annähernd konstant. Es bildet sich trotz des scheibenartigen Tragwerks ein "Zugstab" und "Druckstab" aus. Der unter der Annahme eines strahligen Spannungszustandes ermittelte Spannungsverlauf vgl. [1] und [2] wird nicht bestätigt. Der vordere untere Bereich der rechteckförmigen Konsolen M2 und M4 bleibt spannungslos. Bei der Konsolform M3 (30° geneigte Unterkante) überlagern sich Biege- und Stabwerkswirkung. Bei M3 ist der Hebelarm der inneren Kräfte ungefähr gleich dem Abstand  $a$ . Die auftretenden Kerbspannungen haben bei den sich rein elastisch verhaltenden Gießharzmodellen einen großen Einflußbereich. Die Richtung und Größe der Resultierenden aller Hauptzugspannungen bei sämtlichen Konsolformen weichen erheblich von den bisher üblichen Berechnungsannahmen [3] ab.

### **Resumo dos Resultados dos Ensaios com Foto-Elasticidade**

A trajetória das tensões  $\sigma_x$  e das tensões principais, nos consolos M1 e M2, permite reconhecer claramente a o funcionamento como TRELIÇA.

As tensões ao longo do bordo superior dos consolos são aproximadamente constantes.

Forma-se uma barra comprimida e uma barra tracionada, apesar de se tratar de uma estrutura em chapa.

## 4. DIE DURCHFÜHRUNG DER VERSUCHE AN BETONKONSOLEN

### 4.1 Die Form der Versuchskörper

Nach den aufschlußreichen Ergebnissen der spannungsoptischen Untersuchungen interessierte besonders, inwieweit sich die Resultate der an homogenen Plexiglasmodellen vorgenommenen Messungen auf den inhomogenen, strukturell groben Stahlbeton übertragen lassen. Aus diesem Grunde wurden Stahlbeton-Versuchskörper mit nachstehenden Abmessungen hergestellt:

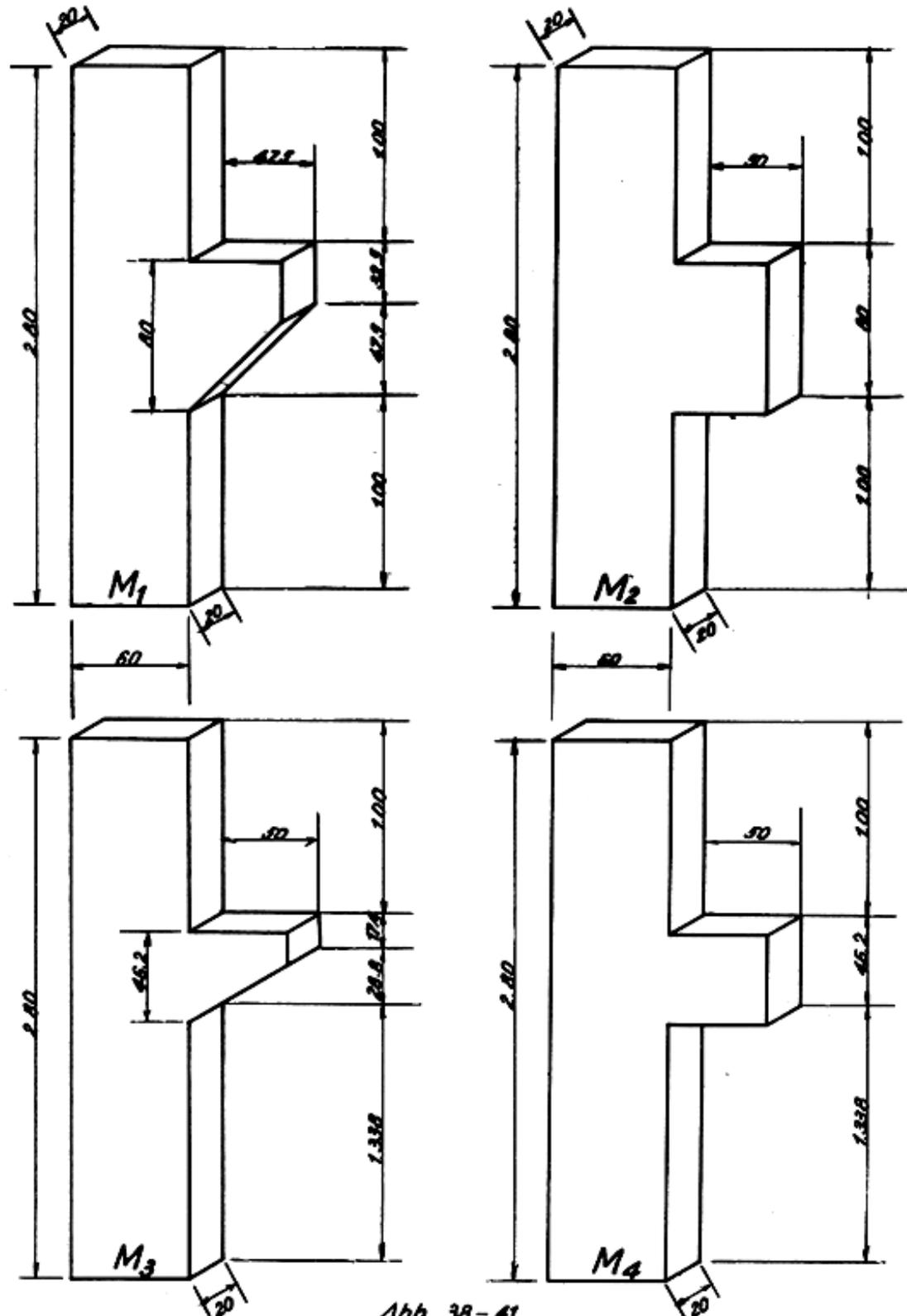


Abb. 38 - 41

Die vorgeschriebenen Mindestabmessungen für Stahlbetonbauglieder wurden eingehalten. Von Konsoloberkante bzw. -unterkante bis zu den Auflagerungspunkten sind mehr als 1,5 mal der Breite des Stieles =  $1,5 \cdot 60 \text{ cm} = 90 \text{ cm}$  vorhanden. Die Konsolabmessungen wurden so gewählt, daß für jeden Schnitt  $a_n \leq z_n$  ist. Die Formen der Konsolen M1 und M3 sind durch die (vgl. S. 15 u. 16) Verhältniswerte und die Winkel  $\alpha$  festgelegt. M2 und M4 sind die zu M1 und M3 gehörenden Rechteckformen.

## 4.2 Bemessung und Bewehrung der Versuchskörper

### Vorbemerkung

Entsprechend den Abmessungsgrößen wurde den Versuchskörpern M1 und M2 eine Bemessungslast von 20 t, M3 und M4 eine von 10 t zugrunde gelegt, damit der Bruch primär durch Versagen der Bewehrung eingeleitet wird. Bei den Modellen M1 und M2 war es außerdem bei der angenommenen Bemessungslast von 20 t möglich, die Abmessungen so zu wählen, daß im Stiel und in der Konsole sich ein ausgeprägtes Rißbild zeigte. Rißbildung und der Verlauf der Risse in den Stahlbetonkörpern sollten im Vergleich mit den aufgezeichneten Hauptzugspannungsrichtungen Aufschluß über die jeweilige Kräfteverteilung geben. Dabei interessierte besonders, ob eine sehr starke Abweichung von den Hauptspannungsrichtungen beim Übergang zum Stadium II festzustellen ist und ob vorhandene Kräfteumlagerungen bis zum Bruch andauern. Bei sämtlichen Konsolformen M1, M2, M3 und M4 wurde für die angegebene Bemessungslast jeweils eine Konsole nach Rausch (vgl. M1/A, M2/A, M3/A und M4/A) und außerdem einige entsprechend den am homogenen Modell ermittelten Kräfteverlauf bemessen und bewehrt. (Vgl. M2/B1; M2/B2; M3/B; M3/C; M4/B und M2/B3, bei der die nach Rausch ermittelte Schrägbewehrung  $F_{es}$  nicht schräg, sondern in den Bereich der größten Hauptzugspannungen prozentual parallel zum oberen Rand verlegt wurde).

Im allgemeinen wurde Betonstahl I verwandt, da die ausgeprägte Fließgrenze dieser Stahlgüte das Bruchstadium verlängert und eine gute Beobachtung zuläßt. Nur M3/A und M3/C wurden mit Stahl III  $b, \sigma_{e \text{ zul}} = 2400 \text{ kg/cm}^2$  bewehrt. (Vgl. hierzu Seite 41).

Die nach dem Durchmesser der Eisen getrennt durchgeführten Zugversuche lieferten nachstehende Ergebnisse:

Stahl-Güte	$\phi$	$P_{\text{Fließen}}$	$\sigma_{\text{Fl.}}$	$P_{\text{Bruch}}$	$\sigma_{\text{Br}}$
I	7.0	1.330	3.500	1.700	4.480
I	7.0	1.310	3.450	1.670	4.400
I	10.0	2.495	3.160	3.295	4.160
I	10.0	2.535	3.210	3.295	4.160
I	10.0	2.465	3.130	3.310	4.190
I	10.0	2.350	2.970	3.210	4.060
I	12.0	3.100	2.740	4.200	3.720
I	12.0	3.350	2.960	4.900	4.340

Stahl-Güte	$\phi$	$P_{\text{Fließen}}$	$\sigma_{\text{Fl.}}$	$P_{\text{Bruch}}$	$\sigma_{\text{Br}}$
I	16.0	5.700	2.840	7.310	3.640
I	16.0	6.200	3.090	7.950	3.950
III b	12.0	4.650	4.110	6.250	5.530
I	14.0	4.500	2.830	6.250	4.060
I	12.0	3.200	2.930	4.250	3.760
I	12.0	3.000	2.650	4.200	3.710
I	16.0	5.650	2.810	8.000	5.980

## 4.21 Konsole M1/A (Bei der Bemessung wird das Eigengewicht vernachlässigt).

$$d/h/b = 80/76/20 \quad ; \quad M_V = 8,00 \text{ tm}$$

$$kh = 12 > kh^* = 8,0 \quad \tau_V = 15 \text{ kg/cm}^2 < \text{max. } \tau_0 = 18 \text{ kg/cm}^2$$

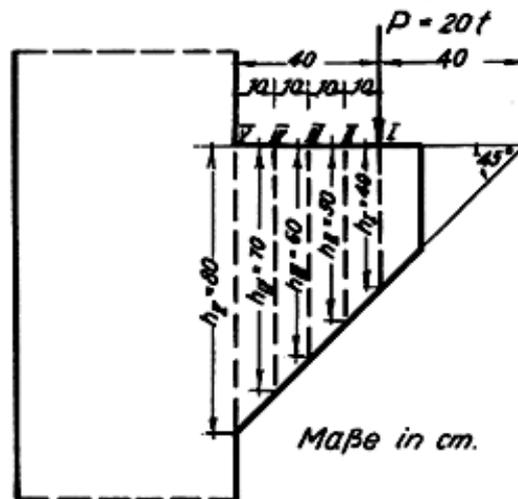


Abb. 42

## Biegebewehrung

$$Fe_V = 0,80 \cdot \frac{8,00}{0,76} = 8,4 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{IV} = 0,80 \cdot \frac{6,00}{0,66} = 7,3 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{III} = 0,80 \cdot \frac{4,00}{0,56} = 4,7 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{II} = 0,80 \cdot \frac{2,00}{0,46} = 3,5 \text{ cm}^2$$

$$Fe_I = 0$$

## Schrägbewehrung

$$Fe_s = \frac{P}{\sqrt{2} \cdot \sigma_e} \cdot \frac{h_l}{h_n} \quad ; \quad n = 1 - v$$

$$Fe_{s I} = \frac{20}{\sqrt{2} \cdot 1,4} = 10,1 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{s II} = 10,1 \cdot \frac{0,40}{0,50} = 8,1 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{s III} = 10,1 \cdot \frac{0,40}{0,60} = 6,7 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{s IV} = 10,1 \cdot \frac{0,40}{0,70} = 5,8 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{s V} = 10,1 \cdot \frac{0,40}{0,80} = 5,1 \text{ cm}^2$$

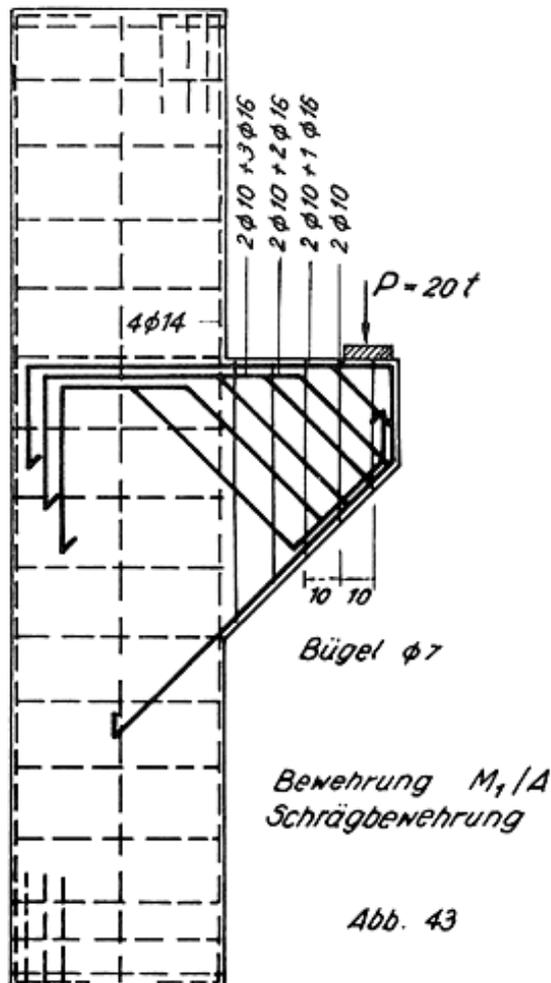


Abb. 43

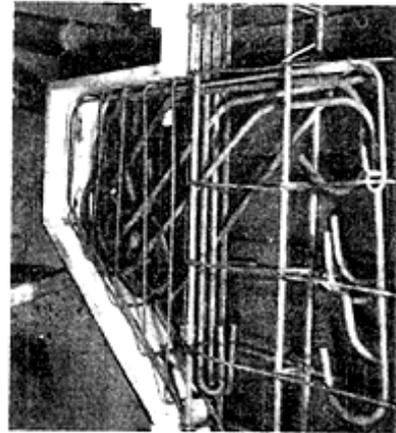


Bild 14

## 4.22 und 4.23 Konsole M1/B1 und M1/B2

Die Konsolen B1 und B2 unterscheiden sich nicht in der Bewehrungsanordnung, sondern nur in der Verankerungsart. Beide werden:

- a) nach der am Plexiglasmodell spannungsoptisch ermittelten  $\sigma_{x7}$ -Spannungslinie (vgl. Seite 22) bemessen.

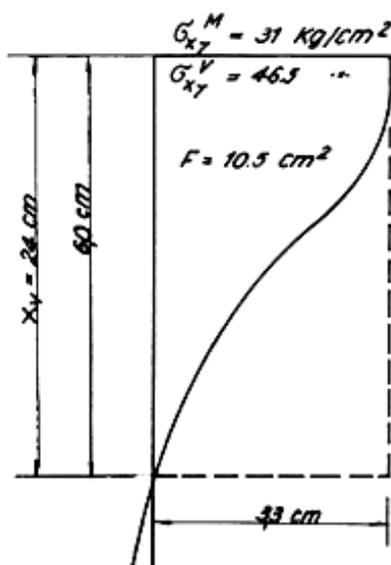


Abb. 44

Völligkeitsgrad

$$\alpha = \frac{F}{b \cdot h} = \frac{10,5}{3,3 \cdot 6,0} = 0,53$$

$$\text{Maßstabsfaktor } m_x = \frac{14 \text{ kg}}{\text{cm}}$$

Der Übertragungsfaktor von Plexiglasmodell auf Betonkörper beträgt 1,5

$$\sigma_{\text{Versuch}} = 1,5 \sigma_{\text{Modell}}$$

$$\sigma_{x7} = 1,5 \cdot 31 = 46,5 \text{ kg/cm}^2 ; x = 24 \text{ cm}$$

$$Z = \int \sigma \cdot dF = \alpha \cdot \sigma \cdot F = 0,53 \cdot 46,5 \cdot 24 \cdot 20 = \underline{\underline{11850 \text{ kg}}}$$



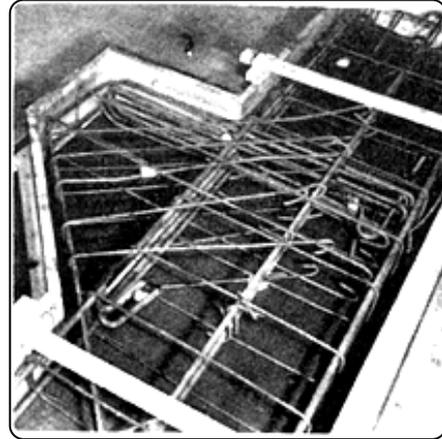
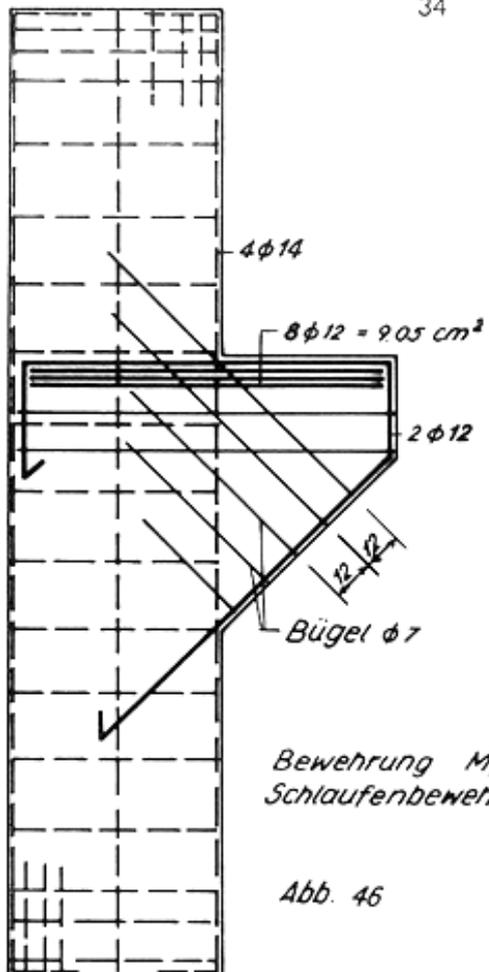


Bild 15

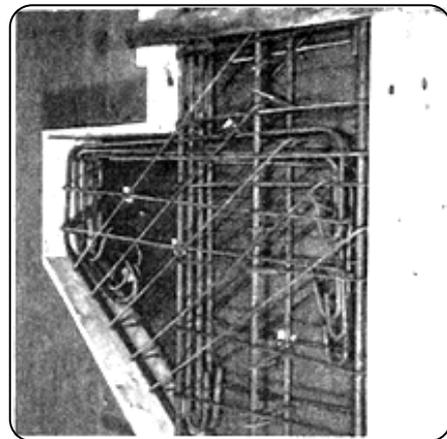
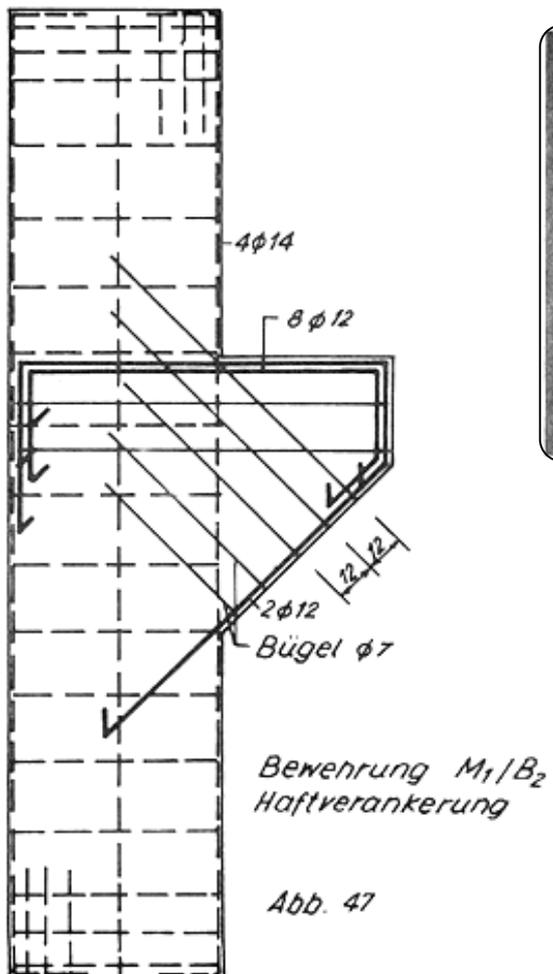


Bild 16

## 4.24 Versuchskörper M2/A

$$d/b/h = 80/76/20 \quad ; \quad M_V = 8,00 \text{ tm}$$

$$kh = 12,0 > kh^* = 8,0 \quad ; \quad \text{vorh } \tau_V = 15 \text{ kg/cm}^2 < \text{max. } \tau_0 = 18 \text{ kg/cm}^2$$

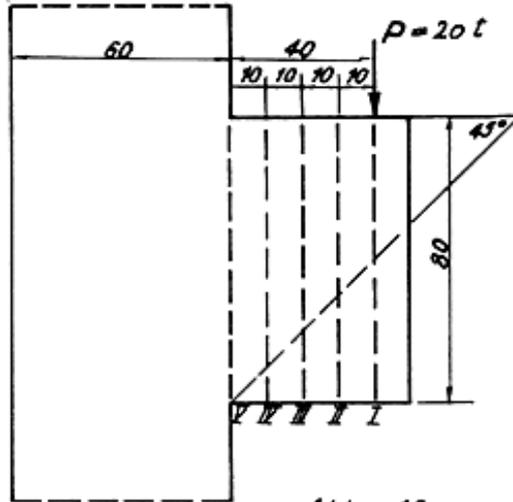


Abb. 48

## Biegebewehrung

$$Fe_V = 0,80 \cdot \frac{8,00}{0,76} = 8,4 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{IV} = 0,80 \cdot \frac{6,00}{0,76} = 6,30 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{III} = 0,80 \cdot \frac{4,00}{0,76} = 4,20 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{II} = 0,80 \cdot \frac{2,00}{0,76} = 2,10 \text{ cm}^2$$

$$Fe_I = 0$$

## Schrägbewehrung

$$Fe_{sI-V} = \frac{20}{\sqrt{2} \cdot 1,4} = 10,2 \text{ cm}^2$$

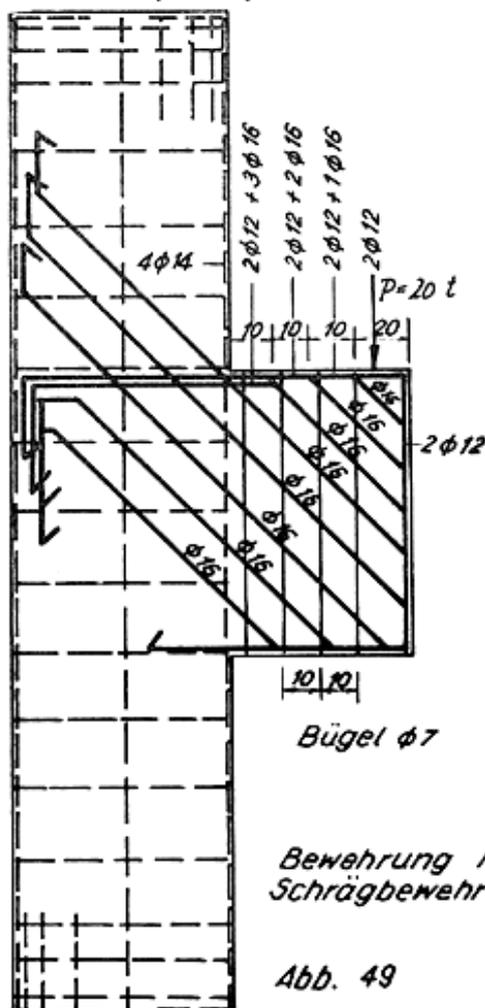
Bügel  $\phi 7$ Bewehrung M<sub>2</sub>/A  
Schrägbewehrung

Abb. 49

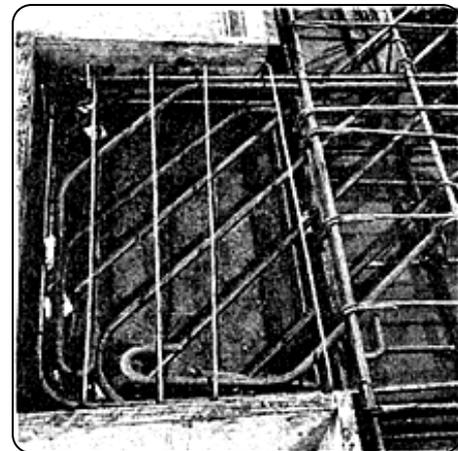


Bild 17

## 4.25 und 4.26 Versuchskörper M2/B1 und M2/B2

Die bei der Versuchsreihe M1 Körper M1/B2 gewählte Verankerung der Konsolen-Zugbewehrung durch Haftung und Haken im Druckkern des Lastausbreitungsbereichs ist nicht so wirkungsvoll wie die Schlaufenverankerung, die wie bei einer spiralbewehrten Stütze den Beton umklammert. Bei beiden Versuchskörpern M2/B1 und M2/B2 wurde deshalb die Schlaufenverankerung gewählt. Die Bewehrung unterscheidet sich nur in der Anordnung der Bügel.

a) Bemessung nach der spannungsoptisch ermittelten  $\sigma_{x7}$ -Spannungslinie

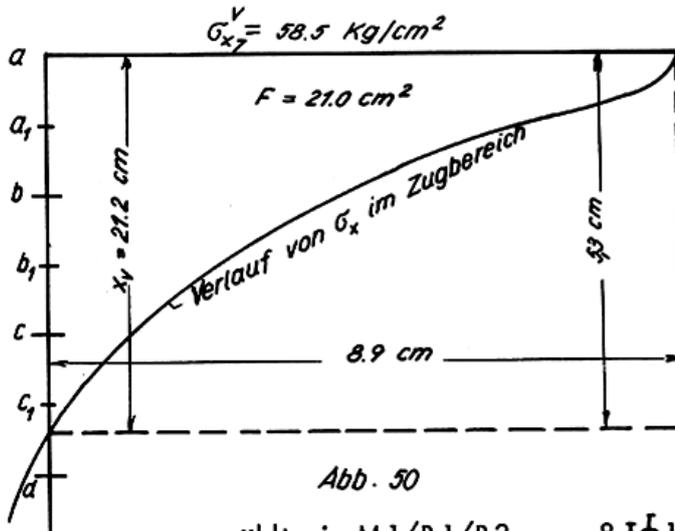


Abb. 50  
gewählt wie M1/B1/B2

$$8 \cdot \bar{\Phi} 12 = 9,05 \text{ cm}^2$$

Völligkeitsgrad

$$\alpha = \frac{F}{b \cdot h} = \frac{21,0}{8,9 \cdot 5,3} = 0,45$$

$$\sigma_{\text{Versuch}} = 1,15 \cdot \sigma_{\text{Modell}}$$

$$\sigma_{x7} = 1,15 \cdot 51 = 58,5 \text{ kg/cm}^2$$

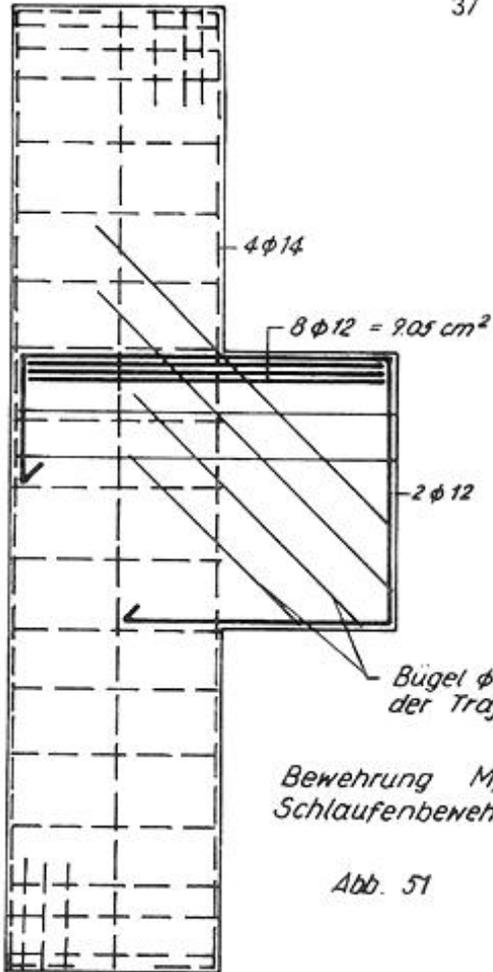
$$x = 21,2 \text{ cm}$$

$$Z = 0,45 \cdot 58,5 \cdot 21,2 \cdot 20 = \underline{11200 \text{ kg}}$$

$$F_{e \text{ erf}} = \frac{11,2}{1,4} = 8,00 \text{ cm}^2$$

Im Vergleich mit M1 (siehe Seite 32) unterscheidet sich die Summe der Zugspannungen nur um 5,5%, die Randspannungen sind jedoch bei M2 um  $12 \text{ kg/cm}^2 = 26\%$  gegenüber M1 größer. Durch die Rechteckform konzentrieren sich die Spannungen im Zugbereich (siehe Abb. 44 u. 50).

b) Die Ermittlung der Stahleinlagen nach der Stabwerksanalogie entspricht 4.22 und 4.23 b (siehe S.33).



Bewehrung  $M_2/B_1$   
Schlaufenbewehrung

Abb. 51

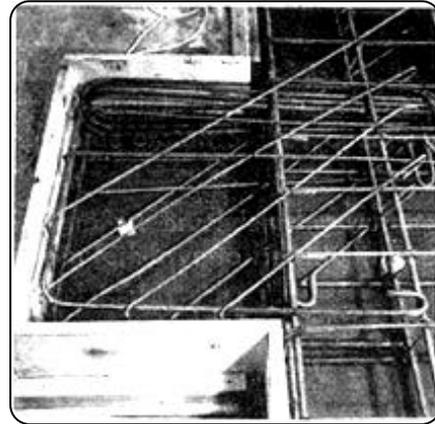
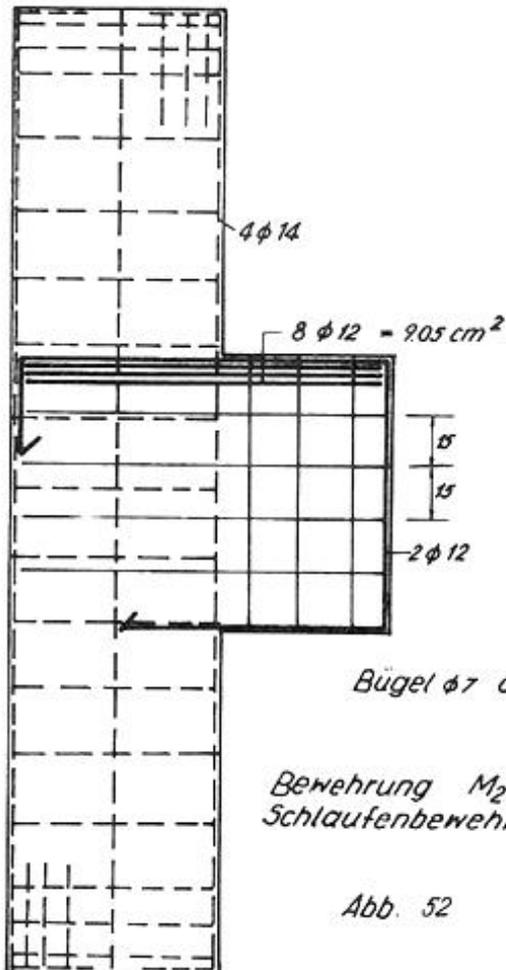


Bild 18



Bewehrung  $M_2/B_2$   
Schlaufenbewehrung

Abb. 52

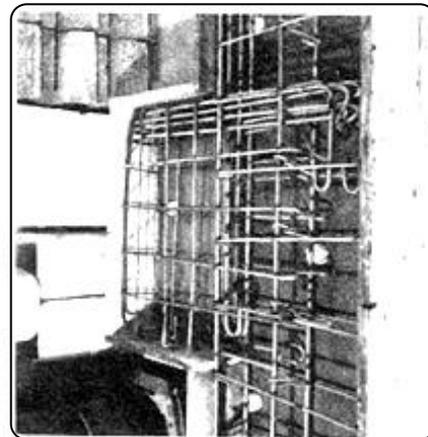


Bild 19

## 4.27 Versuchskörper M2/B3

## Vorbemerkung

Bei Rechteckkonsolen wird die nach "Rausch" einzulegende Schrägbewehrung  $F_{e_s}$  nicht im Verhältnis der Höhen abgemindert. Der vorhandene Bewehrungsprozentsatz ist deshalb verhältnismäßig sehr groß. Um einen Vergleich aus den erreichten Bruchlasten machen zu können, wurde 75 % der Bewehrung von M2/A in dieser Konsole M2/B3 nach den Trajektorienrichtungen verlegt. Durch die fehlenden 25 % wird der verminderte Wirkungsgrad der Schrägbewehrung berücksichtigt.

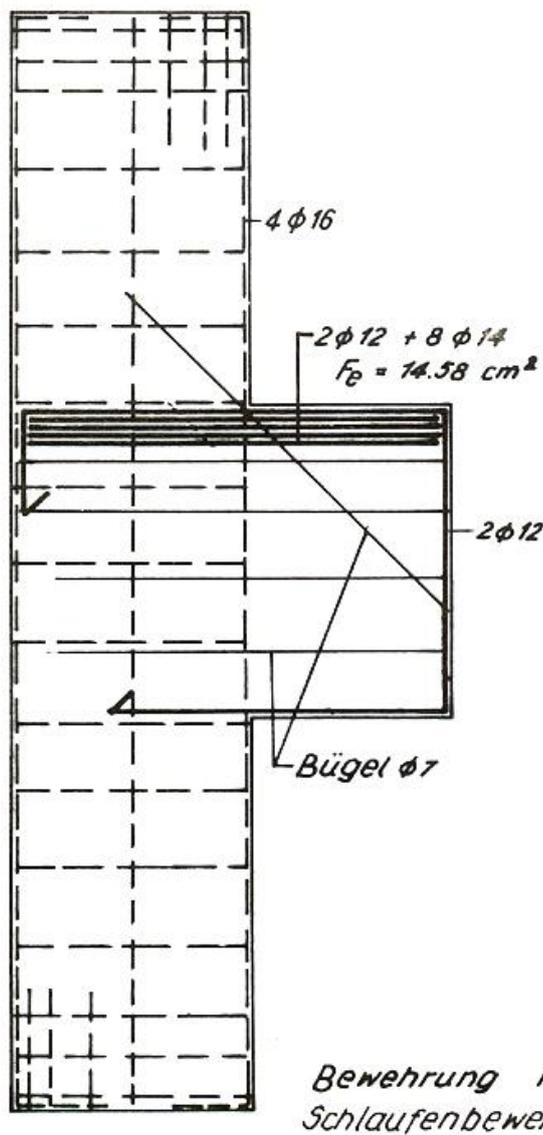


Abb. 53

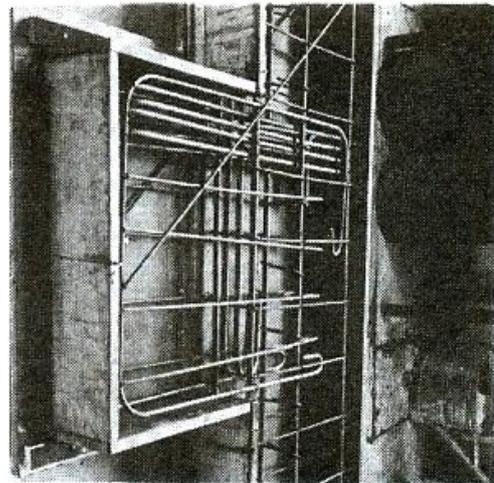


Bild 20

## 4.28 Versuchskörper M3/A

Um die Schrägeisen dieser nach Rausch bemessenen Konsole für die Bemessungslast von 10 t in vernünftigen Grenzen zu halten, wurde anstatt Stahl I quergewalzter Torstahl III b mit  $\sigma_{e_{zul}} = 2400 \text{ kg/cm}^2$  gewählt.

Auf die bei Stahl I vorhandene größere Bruchdehnung wurde verzichtet. Dafür bekommt man mit diesem profilierten Stahl III b ein feiner verteiltes Rißbild bei kleineren Verformungen.

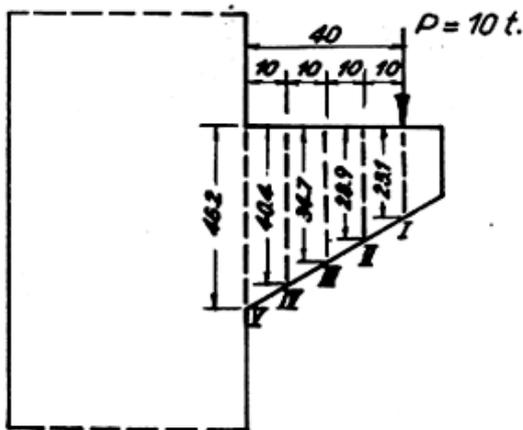


Abb. 54

## Biegebewehrung

## Schnitt V - V

## Vergleichswerte

$$M = 4,00 \text{ tm} ;$$

$$d/h/b = 46,2/43/20 ; kh = 9,6 > kh^* = 9,2$$

$$\text{vorh } \tau_V = 15 \text{ kg/cm}^2 < \text{max. } \tau_0 = 18 \text{ kg/cm}^2$$

$$Fe_V = 0,47 \cdot \frac{4,00}{0,43} = 4,37 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{IV} = 0,47 \cdot \frac{3,00}{0,37} = 3,80 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{III} = 0,47 \cdot \frac{2,00}{0,31} = 3,00 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{II} = 0,47 \cdot \frac{1,00}{0,25} = 1,90 \text{ cm}^2$$

## Schrägbewehrung

$$Fe_{sI} = \frac{10,00}{2,4 \cdot 2} = 2,95 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{sII} = 2,95 \cdot \frac{23,1}{28,9} = 2,36 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{sIII} = 2,95 \cdot \frac{23,1}{34,7} = 1,96 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{sIV} = 2,95 \cdot \frac{23,1}{40,4} = 1,70 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{sV} = 2,95 \cdot \frac{23,1}{46,2} = 1,47 \text{ cm}^2$$

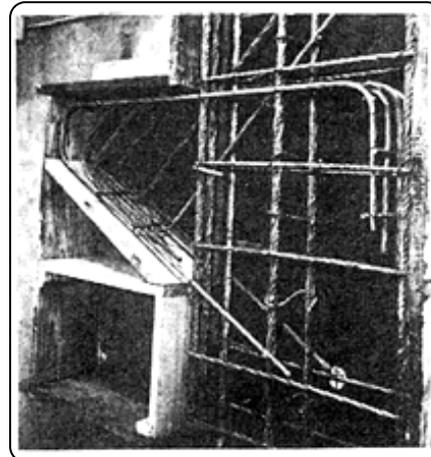
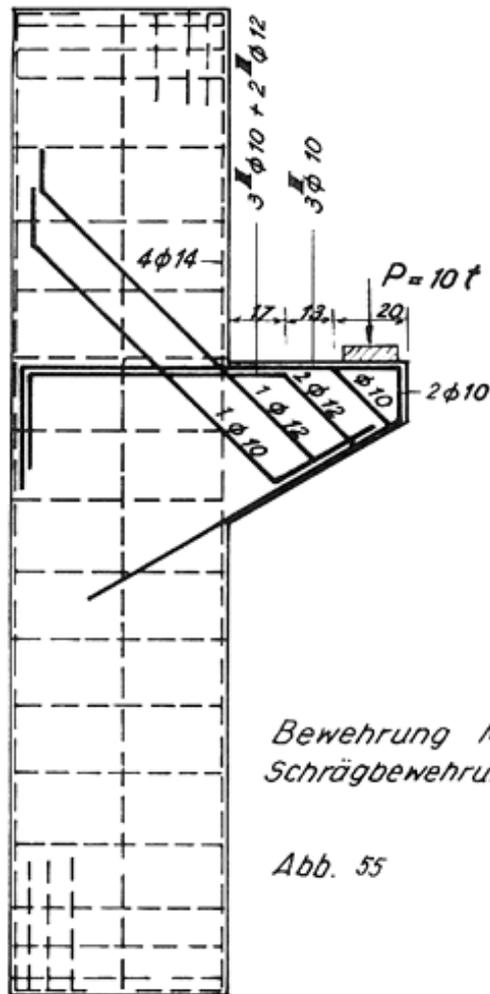


Bild 22

Bewehrung M<sub>3</sub>/A  
Schrägbewehrung

Abb. 55

#### 4.29 und 4.210 Versuchskörper M3/B und M3/C

Beide Konsolen unterscheiden sich nur durch die Stahlgüte M3/B mit Betonstahl I  
M3/C mit Betonstahl III b quengerippt

a) nach der spannungsoptisch ermittelten  $\sigma_{x7}$ -Linie

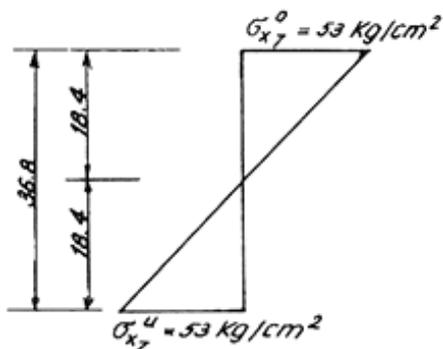


Abb. 55 a

(Stadium I)

$$\sigma_{x7} = 53 \text{ kg/cm}^2$$

$$x = \frac{h}{2} = 18,4 \text{ cm}$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$Z = \int \sigma dF = \frac{1}{2} \cdot 53 \times 20 \cdot 18,4 = \underline{\underline{9\,750 \text{ kg}}}$$

b) nach Stadium II für den Einspannquerschnitt (Vergleichsrechnung)

$$M = 10 \cdot 0,40 = 4,0 \text{ tm}$$

$$d/h/b = 46,2/43/20 \quad ; \quad kh = 9,2 \quad ; \quad ke^I = 0,83$$

$$ke^{III} = 0,47$$

$$Fe_I = 0,83 \cdot \frac{4,00}{0,43} = 7,75 \text{ cm}^2, \quad Fe_{III} = 0,47 \cdot \frac{4,00}{0,43} = 4,37 \text{ cm}^2$$

c) nach der Stabwerksanalogie

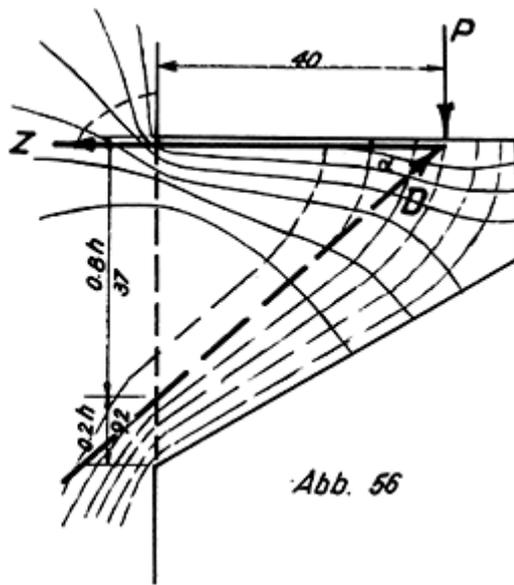


Abb. 56

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{37}{40} = 0,925$$

$$Z = \frac{P}{\operatorname{tg}} = \frac{10,0}{0,925} = 10,8 \text{ t}$$

$$Fe_I = \frac{Z}{e} = \frac{10,8}{1,4} = 7,72 \text{ cm}^2$$

$$\text{gewählt } 2^I \phi 10 + 4^I \phi 14 = 7,73 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{III} = \frac{10,8}{2,4} = 4,50 \text{ cm}^2$$

$$\text{gewählt } 4^{III} \phi 12 = 4,54 \text{ cm}^2$$

Diese Ergebnisse unterscheiden sich kaum von der Bemessung des Einspannquerschnittes nach Stadium II (s. oben).

Randspannungen  $\sigma_x$   
spannungsoptisch  
ermittelt.

$\sigma_x$ -Randspannungen  
aus  $\sigma_x = \frac{M_x}{W_x}$

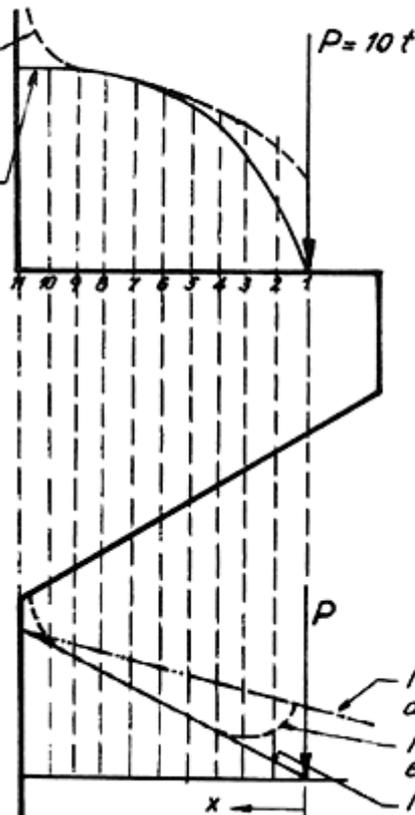
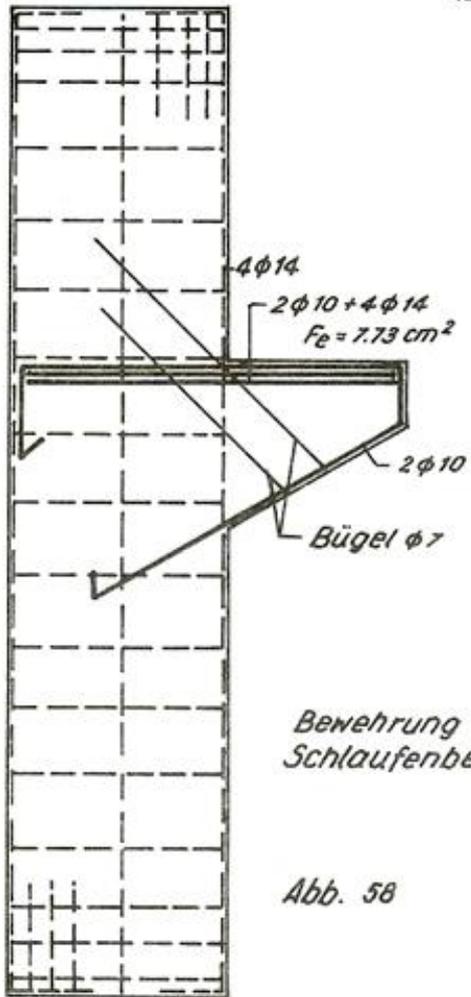


Abb. 57

Die entsprechend den Abbildungen 58 und 59 gewählten Stahleinlagen liegen konstant entlang dem oberen Rande. Diese Bewehrungsanordnung ist trotz dem nicht gleich bleibenden Randspannungsverlauf erforderlich, da im gerissenen Zustand auch bei dieser Konsolform die Stabwerkswirkung überwiegt und die Spannungsabnahme geringfügig ist.



Bewehrung  $M_3/B$   
Schlaufenbewehrung

Abb. 58

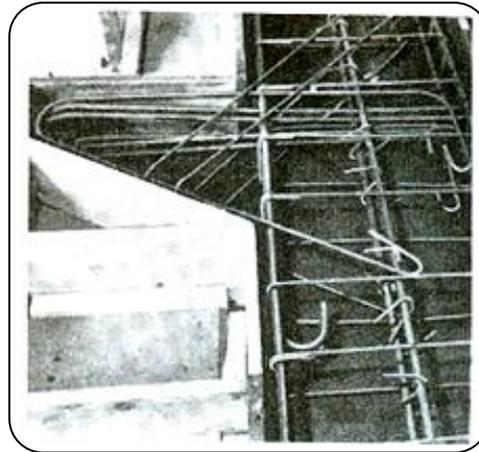
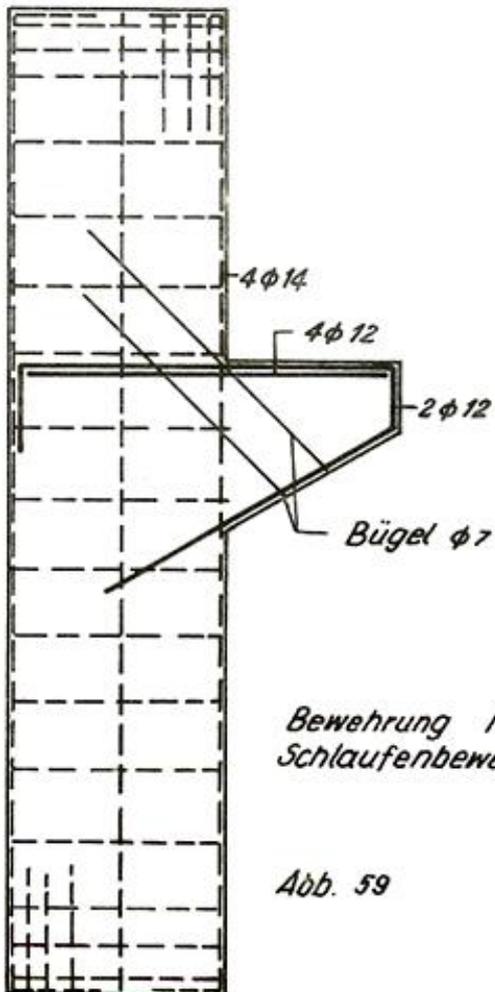


Bild 23



Bewehrung  $M_3/C$   
Schlaufenbewehrung

Abb. 59

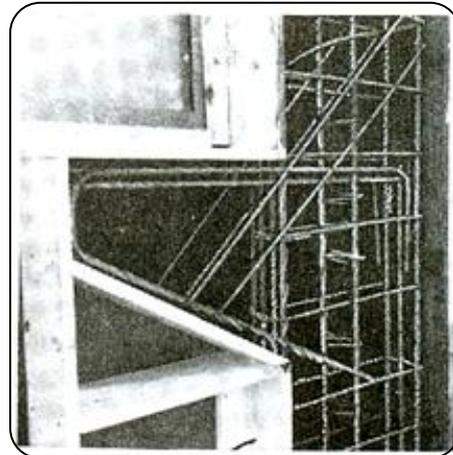


Bild 24

## 4.2.11 Versuchskörper M4/A

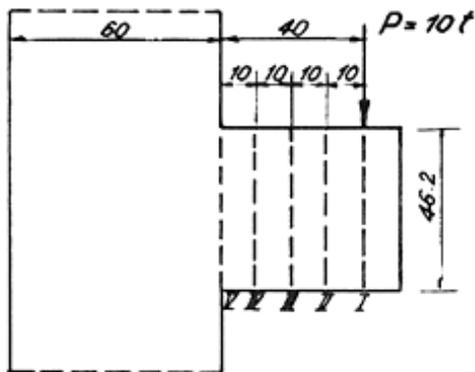


Abb. 60

Biegebewehrung Stahl I

Bemessungslast 10 t

$$M_V = 4,0 \text{ tm}$$

$$d/h/b = 46,2/43/20 ; kh = 9,6 > kh^* = 8,0$$

$$\text{vorh. } \tau_V = 15,0 \text{ kg/cm}^2 < \text{max. } \tau_0 = 18 \text{ kg/cm}^2$$

$$Fe_V = 0,83 \cdot \frac{4,00}{0,43} = 7,70 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{IV} = \frac{0,83}{0,43} \cdot 3,00 = 5,80 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{III} = \frac{0,83}{0,43} \cdot 2,00 = 3,90 \text{ cm}^2$$

$$Fe_{II} = \frac{0,83}{0,43} \cdot 1,00 = 1,90 \text{ cm}^2$$

$$Fe_I = 0$$

Schrägbewehrung

$$Fe_{\text{sl}} - V = \frac{10}{\sqrt{2} \cdot 1,4} = 5,1 \text{ cm}^2$$

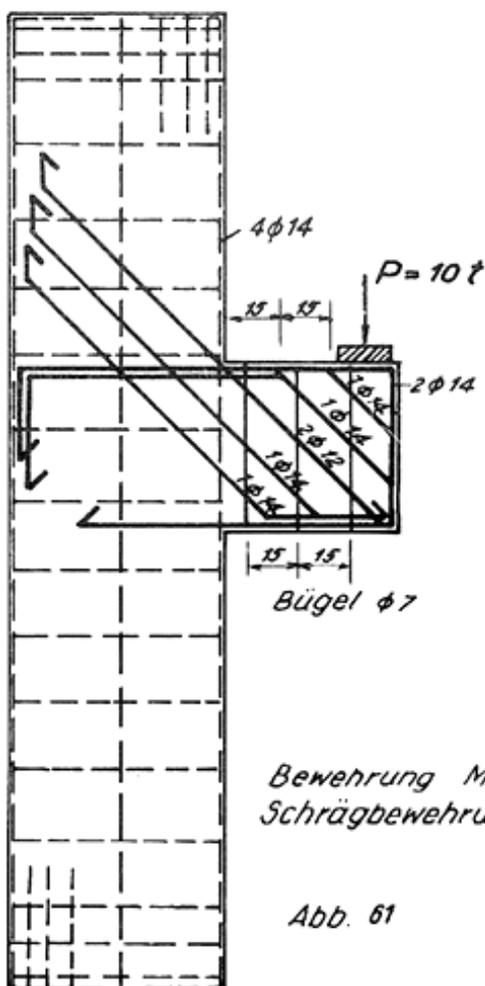
Bewehrung M4/A  
Schrägbewehrung

Abb. 61

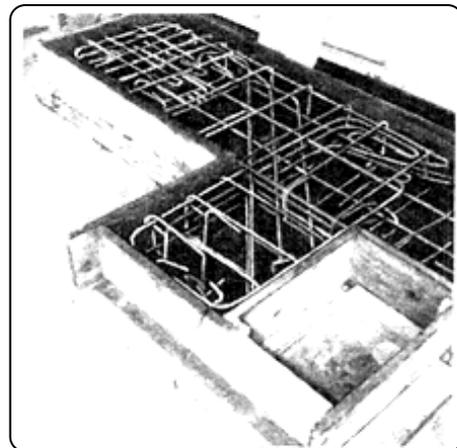


Bild 25

#### 4.2.12 Versuchskörper M4/B

Die Auswertung der Spannungskurven zeigte auch bei dieser rechteckförmigen Konsole keine wesentlichen Abweichungen in der Summe der Zugspannungen (vgl. hierzu Seite 27). Die vordere untere Ecke ist praktisch an der Tragwirkung nicht beteiligt. Die Bemessung erfolgt analog 4.2.9

$$F_e = \frac{Z}{\sigma_e} = \frac{10,8}{1,4} = 7,72 \text{ cm}^2$$

$$\text{gewählt } 2 \text{ I } \phi 10 + 4 \text{ I } \phi 14 = 7,72 \text{ cm}^2$$

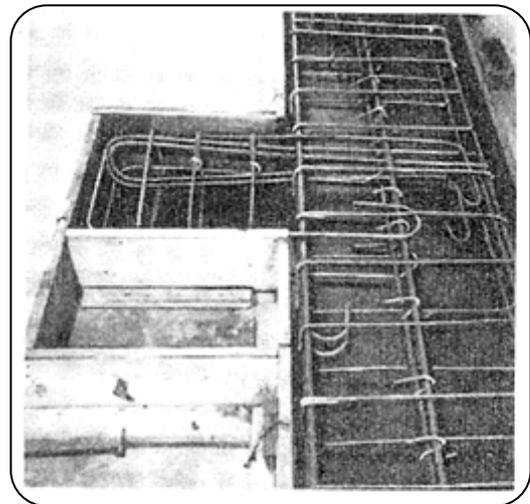
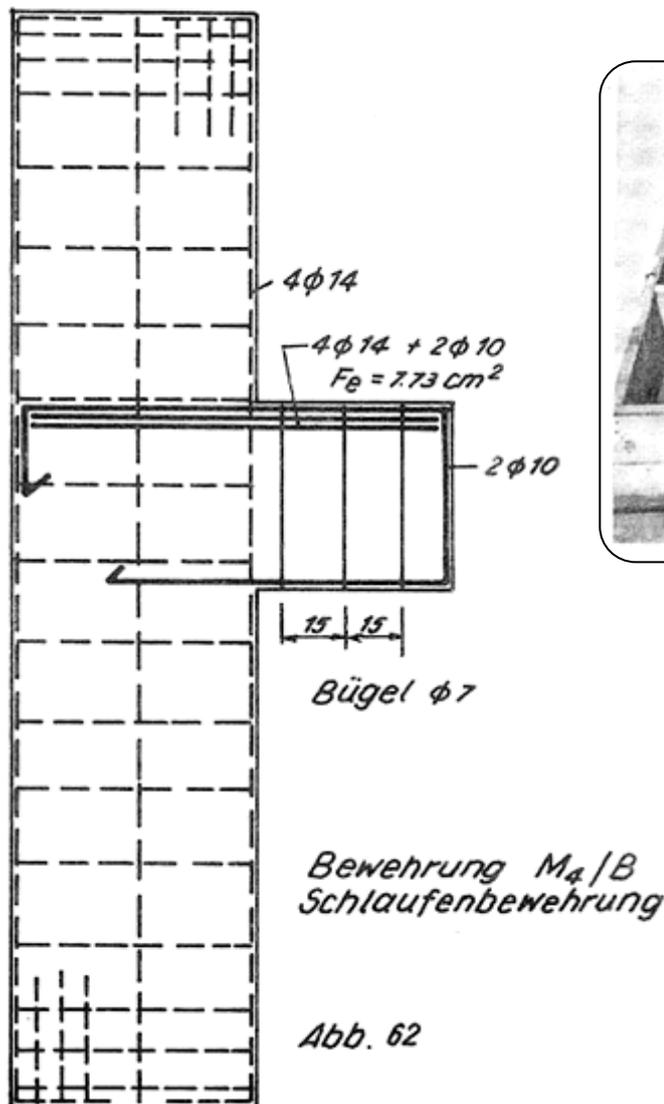


Bild 26

#### 4.3 Die Herstellung der Versuchskörper

Alle Konsolen wurden aus Beton einheitlicher Zusammensetzung mit einer Mindestbetongüte von B 225 hergestellt.

Wasser - Zement - Faktor	$W/Z = 0,58$
Zementsorte	Portlandzement Z 275
Zementgehalt	$280 \text{ kg/m}^3$ fertigen Beton
Zuschlagmaterial	Rheinkies
Kömungen	0 - 3 mm = 32 %
(Im Bereich der	3 - 7 mm = 18 %
Sieblinie D/E)	7 - 15 mm = 25 %
	15 - 30 mm = 25 %
Verdichtungsart	Tauchrüttler

Sämtliche 12 Versuchskörper wurden liegend betoniert, nach ca. 24 Stunden seitlich entschalt und 7 Tage lang mit feuchten Tüchern bedeckt. Bei einer Betonfestigkeit von ca.  $160 \text{ kg/cm}^2$  wurde jeweils eine Seitenfläche der Konsole (die beim Betonieren oben liegende) 5 - 8 mm abgeschliffen.

#### 4.4 Die Durchführung der Bruchversuche

##### 4.4.1 Die Versuchseinrichtung

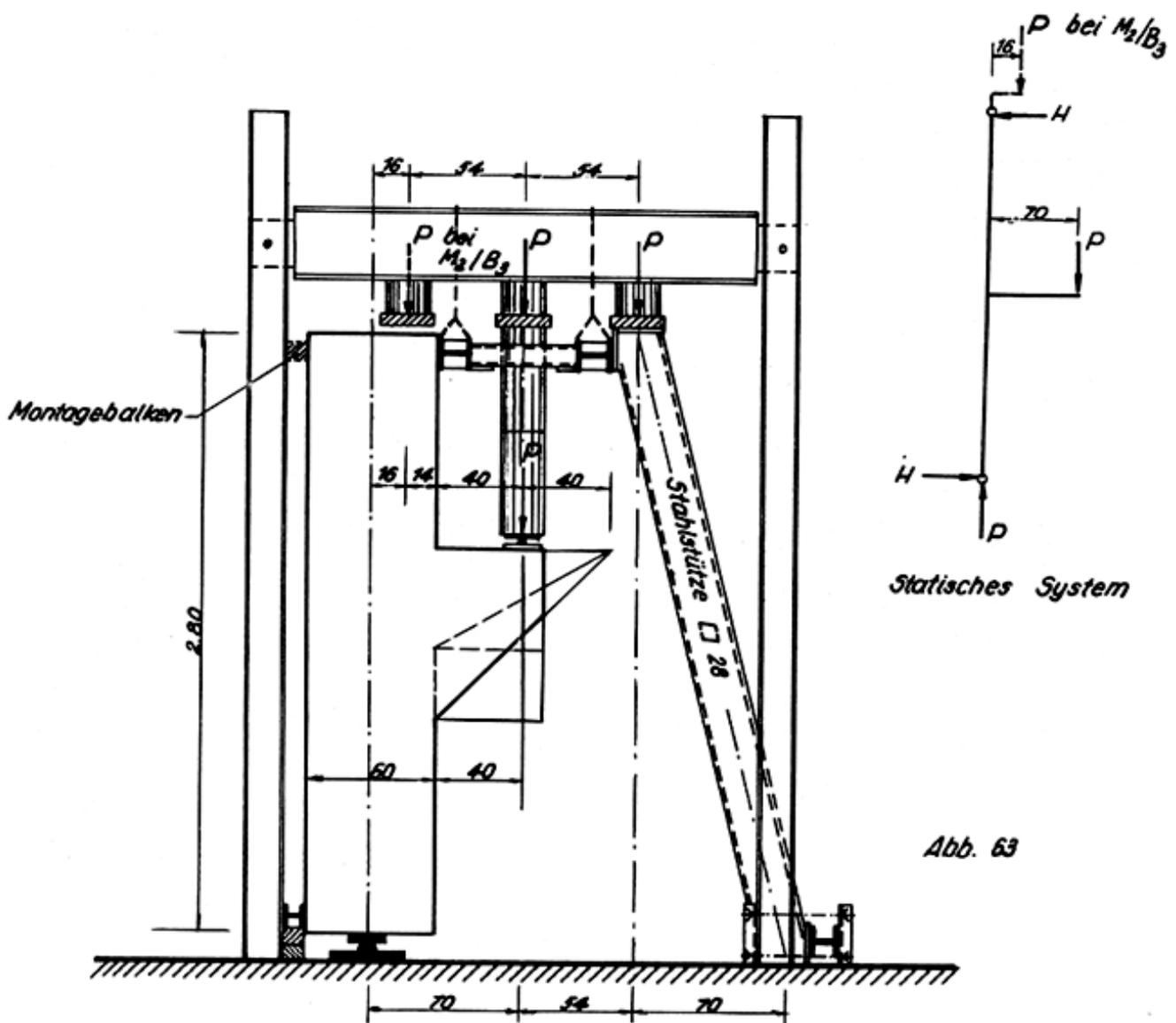


Abb. 63

Für die Bruchversuche stand eine hydraulisch arbeitende Kolbenpresse mit einer maximalen Druckkraft von 90 t je Kolben zur Verfügung. Die Körper wurden in der Versuchseinrichtung statisch bestimmt gelagert (siehe Abb. 63). Durch den mittleren Kolben wird die Konsole über einen Pendelstab mit der gewünschten Einzellast belastet. Ein zweiter Kolben drückt mit derselben Kraft (beide Kolben sind miteinander hydraulisch verbunden) auf eine Stahlstütze, die infolge ihrer Schrägstellung die obere Horizontalkraft aufnimmt. Die Versuchseinrichtung ist unempfindlich gegenüber den zu erwartenden Formänderungen und läßt eine gute Beobachtung der Versuchskörper von beiden Seiten zu.

#### 4.42 Der Belastungsvorgang

Sämtliche Konsolen mit einer Bemessungslast von  $P = 20$  t wurden in Laststufen von 5 t, die mit  $P = 10$  t in Laststufen von 2,5 t belastet. Die Mindestwartezeit nach jeder Lasterhöhung betrug 15 Minuten. Nach dieser Zeit hatte sich der Versuchskörper der jeweiligen Belastung angepaßt. Die Rißbildung war abgeschlossen. Ab Laststufe 12, der dreifachen Bemessungslast, wurde die Belastung kontinuierlich bis zum Bruch gesteigert.

#### 4.43 Messung der Hauptspannungsrichtung am Betonkörper

Mit Hilfe der Oberflächenspannungsoptik kann man die Richtung der Hauptspannungen am Beton messen. Auf die geschliffene Betonfläche wurde eine dünne Gießharzfolie aufgeklebt, auf die infolge ihrer haftfesten Verbindung mit dem Betonkörper Dehnungsgröße und Dehnungsrichtung der Betonoberfläche übertragen werden. Die zwischen Beton und Folie vorhandene Reflexionschicht (siehe Abb. 64) kann man entweder z. B. durch Verspiegeln der Unterseite der Folie herstellen, oder man durchsetzt den Kleber (Palatal) mit Aluminiumpulver. Vorversuche haben gezeigt, daß die Verspiegelung der Folie eine Gleitschicht bildet und daß dadurch ein wesentlicher Teil der anfänglichen Betondehnungen die Folie nicht erreichen.

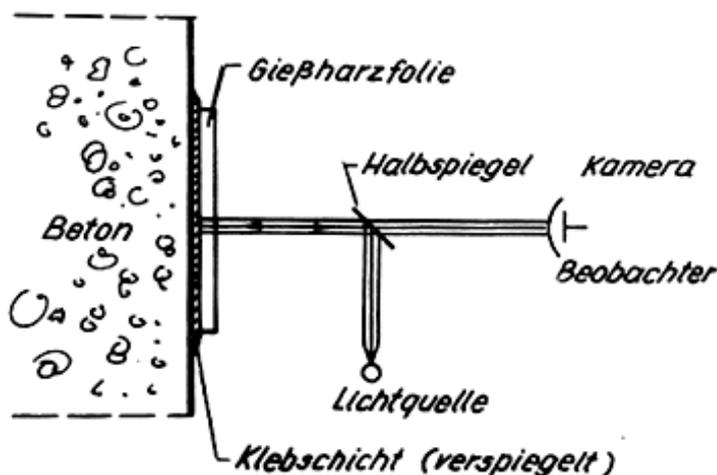
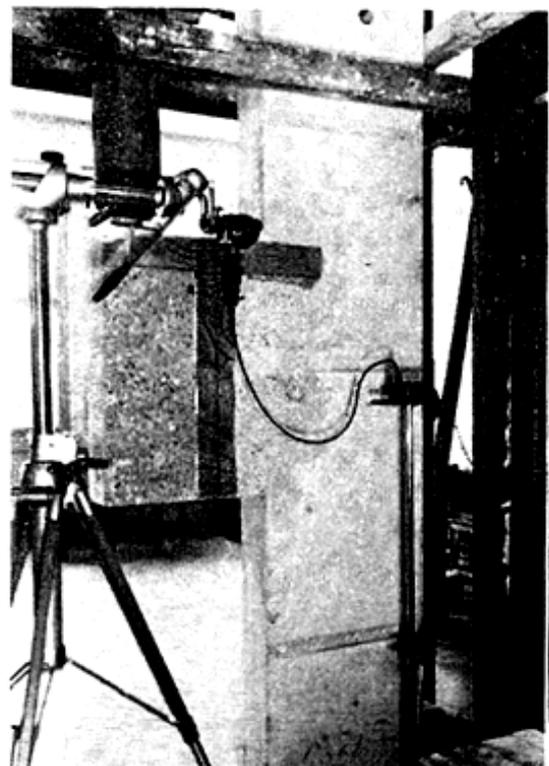


Abb. 64



Aufgeklebte Gießharzfolie

Bild 27

Wirksamer erwies sich, die durchsichtige Klebemasse mit so viel Alu-Pulver zu durchsetzen, daß die Betonstruktur nicht mehr sichtbar ist. Mittels des Reflexionspolarisierkopps (vgl. [10] S.30) können dann in der Folie vorhandene Doppelbrechungen gemessen werden. Die Empfindlichkeit dieser Dehnungsmessung liegt in derselben Größenordnung wie die elektrische Dehnstreifenmessung.

Bei der Oberflächenspannungsoptik hat noch die Dicke der Folie, die durch die Reflexion zweimal eingeht, einen entscheidenden Einfluß. Wie aus der Hauptgleichung der Spannungsoptik

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\delta}{2d} \cdot s$$

zu ersehen ist, ist die Spannungsdifferenz der doppelten Modelldicke umgekehrt proportional. Das heißt: Vergrößert man  $d$ , dann benötigt man geringere Spannungen bei konstanter Anzahl von Ordnungen.

Es soll an dieser Stelle noch erwähnt werden, daß man mit Hilfe der Oberflächenspannungsoptik nur in der Lage ist, die Richtungen der Hauptspannungen zu ermitteln. Die Bestimmung von Spannungen des Betons ist nicht möglich, da durch die grobkörnige Struktur des Betons die Dehnungsverteilung daher nicht gleichmäßig ist. Die Messung in der Folie erfolgt aber punktförmig.

Theoretisch könnte man bei starken Gießharzfolien schon bei Betonspannungen von  $5 - 10 \text{ kg/cm}^2$  eine meßbare Doppelbrechung erreichen. Der Stärke  $d$  der Folie ist aber eine obere Grenze gesetzt, weil die einseitig eingeleiteten Dehnungen sich gleichmäßig auf die Dicke der Folie verteilen müssen. Nach den gemachten Erfahrungen liefern 3 mm starke Folien sehr brauchbare Werte bei einer Hauptspannungsdifferenz ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) von ca.  $30 \text{ kg/cm}^2$ .

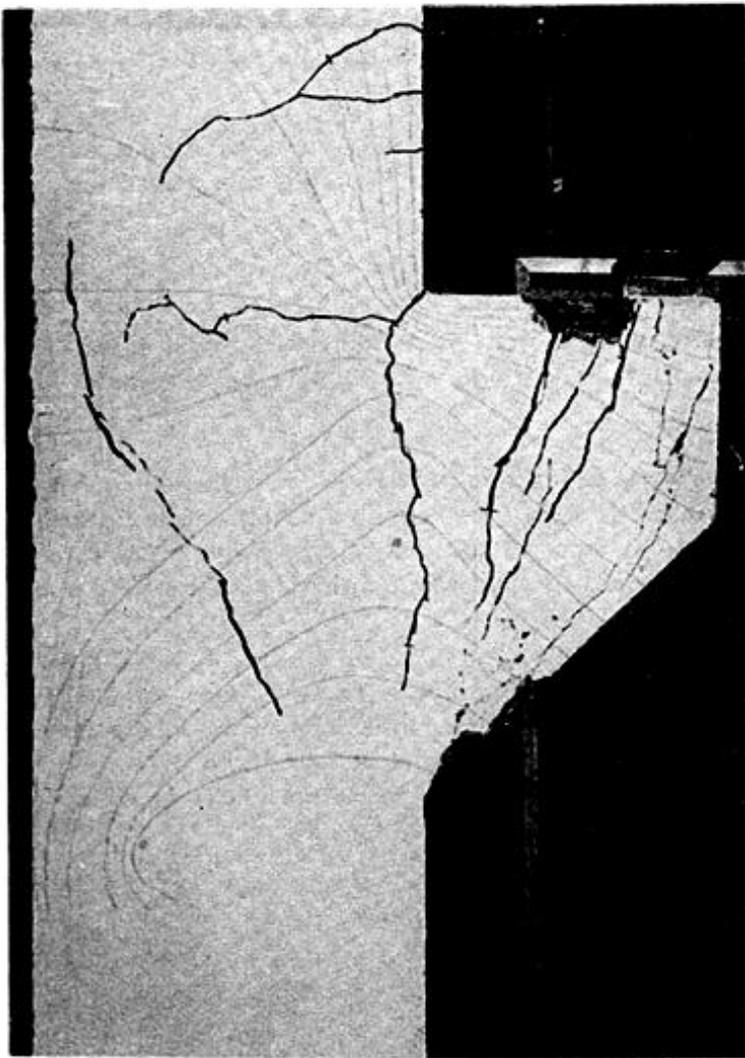
#### 4.5 Die Ergebnisse der Bruchversuche

##### 4.50 Vorbemerkung:

Die am homogenen Plexiglasmodell spannungsoptisch ermittelten Richtungen der Hauptspannungen wurden vor den Bruchversuchen auf eine Seite der Betonkörper aufgezeichnet. Diese war zur besseren Rißbeobachtung mit einer dünnen Gipschicht überzogen. Verhält sich der Stahlbetonkörper quasi homogen, dann müssen alle Risse die Hauptzugtrajektorien (durchgehende Linien) senkrecht schneiden und parallel zu den Hauptdrucktrajektorien (gestrichelte Linien) verlaufen.

Neben der im vorhergehenden Kapitel 4.3 erwähnten Messung der Isoklinen in den aufgeklebten Gießharzfolien wurden auf einen Teil der Betonkonsolen 4 cm lange Dehnungsmessstreifen aufgeklebt. Die Ergebnisse dieser elektrischen Dehnungsmessungen wurden bereits in einem Versuchsbericht [25] diskutiert. Sie werden an dieser Stelle nicht mehr wiedergegeben, da infolge der kurzen Meßlänge und Temperatureinflüsse keine brauchbaren Werte beobachtet wurden.

## 4.51 M1/A



Betongüte > B 300

Bewehrung nach Rausch s. S. 34

Bewehrungsanteil der  
Konsole 26,5 kg

Bemessungslast 20 t

Rißlast  $P_R = 15 \text{ t}$  (Laststufe 3)

Beginn der Kräfteumlagerung  
(waagerechter Querriß)

bei Laststufe 4  $P = 20 \text{ t}$

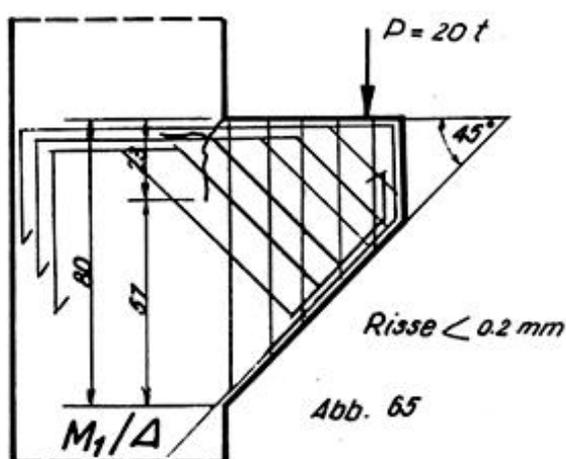
(vgl. Seite 53)

Bruchbild M1/A

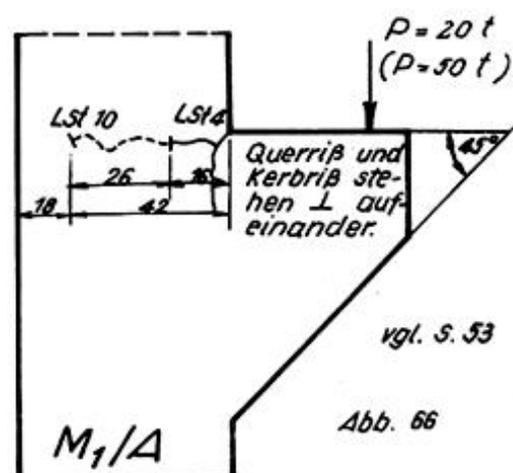
$P_{Br} = 55 \text{ t}$

Bild 28

(Bei Laststufe 11 nach einer Dauer von 15 Minuten)

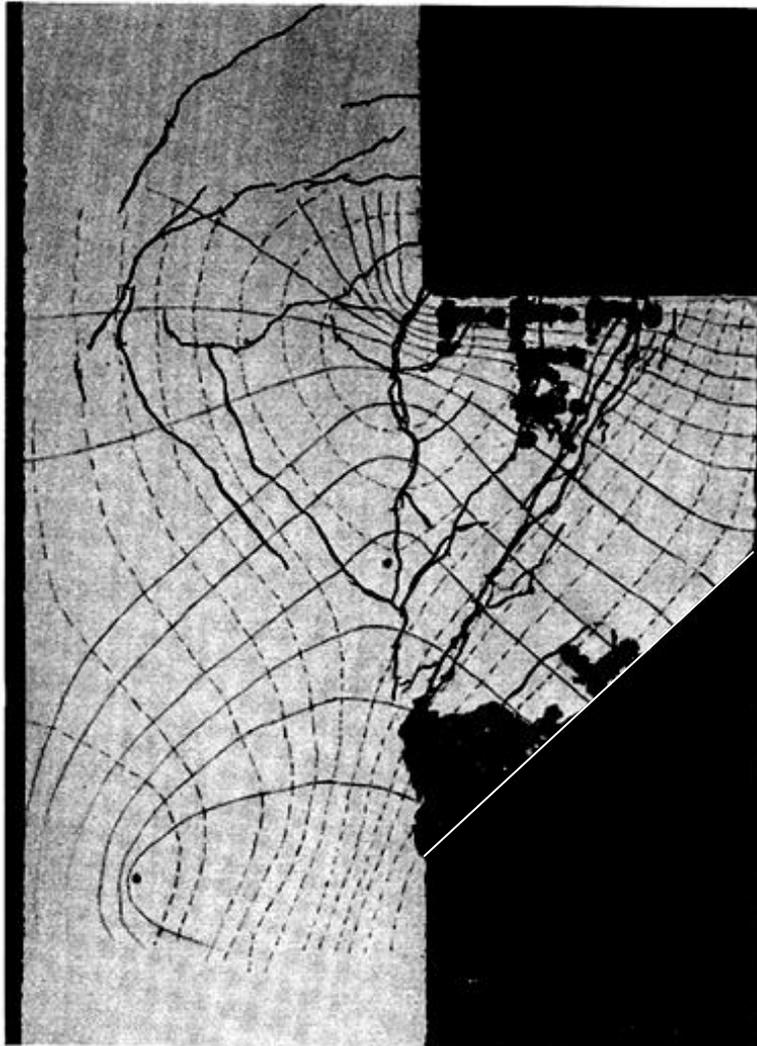


Rißbild bei Bemessungslast. Die Lage der Bewehrung ist dünneingezeichnet.



Querrißbeginn LSt 4  
→ ende LSt 10

4.52 M1/B1



Stabwerksbewehrung  
Schlaufenbewehrung  
siehe Seite 34

Bewehrungsanteil der  
Konsole 15 kg

Bemessungslast 20 t

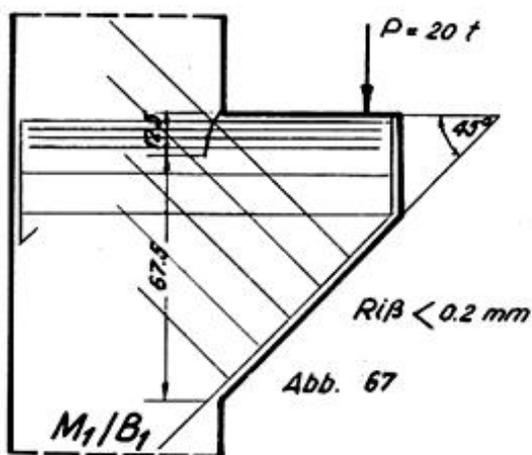
Rißlast  $P_R = 15 \text{ t}$  Laststufe 3

Querriß bei Laststufe 5  
 $P = 25 \text{ t}$

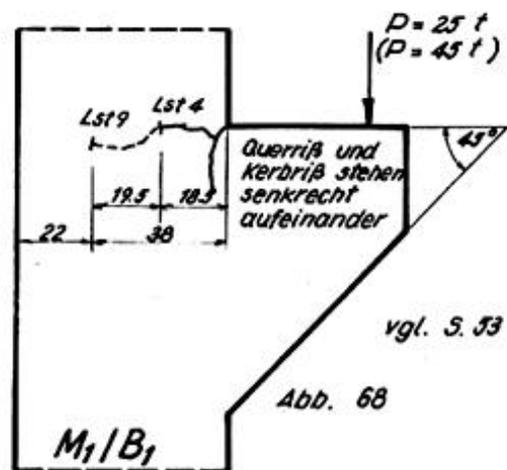
Bruchbild M1/B1

$P_{\text{Bruch}} = 66 \text{ t}$

Bild 29



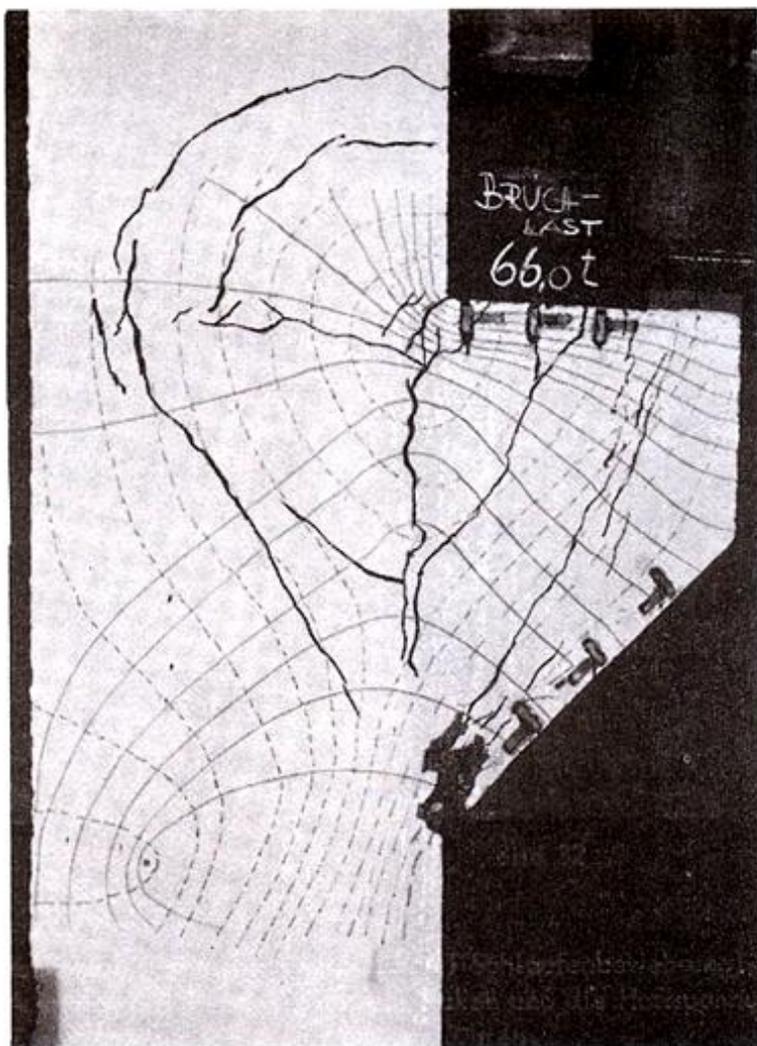
Rißbild bei Bemessungslast  
— Bewehrungsführung.



Querrißbeginn \* ende  
Lst 4  
Lst 9

vgl. S. 53

## 4.53 M1/B2



Stabwerksbewehrung  
Haftverankerung  
siehe Seite 34

Bewehrungsanteil der  
Konsole 19 kg

Bemessungslast 20 t

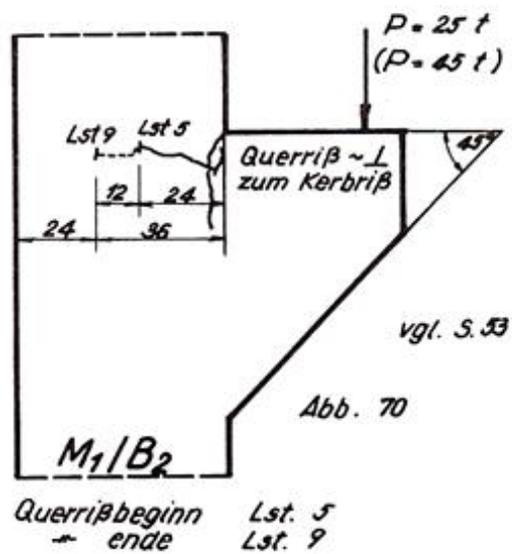
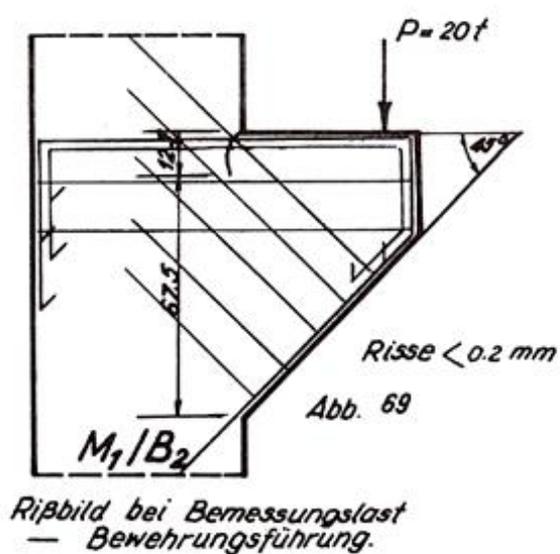
Rißlast  $P_R = 15 \text{ t}$  Laststufe 3

Querriß bei Laststufe 5  
 $P_5 = 25 \text{ t}$

Bruchbild M1/B2

$$P_{\text{Bruch}} = 66 \text{ t}$$

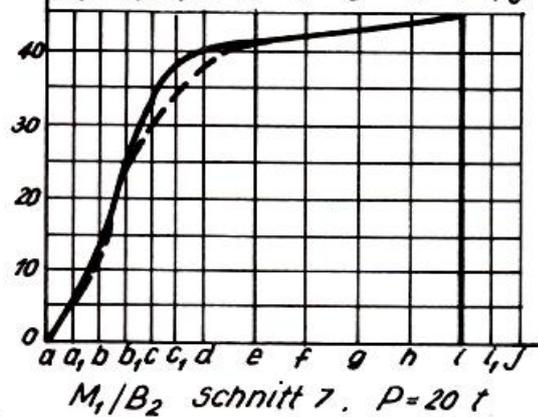
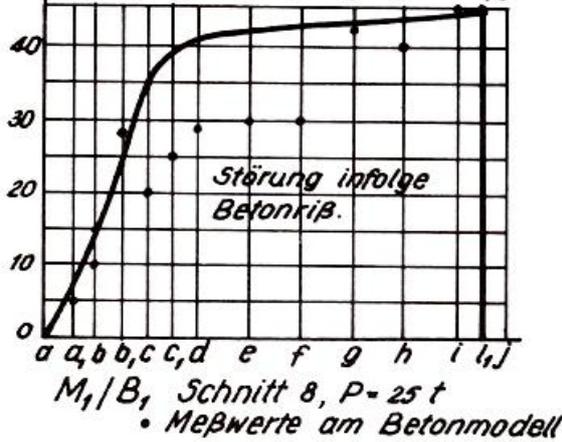
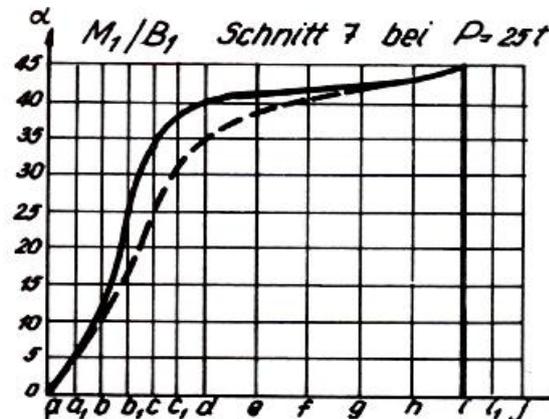
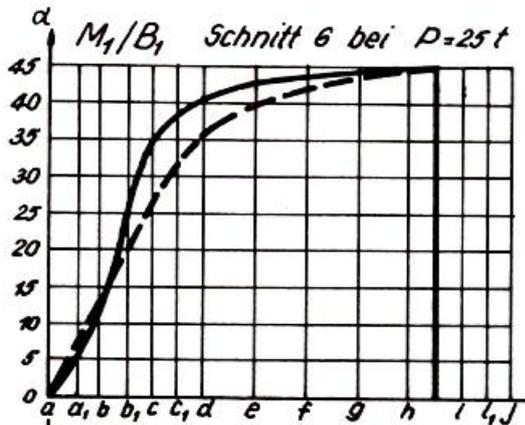
*Bild 30*



## Vergleich der Isoklinen

— am Plexiglasmodell

- - - an der Betonoberfläche



Zusammenfassung: Konsolformen M1

	M1/A	M1/B1	M1/B2
Bruchlast in t	15	66	66
Rißlast bei P in t	15	15	15
Beginn des Querrisses P in t	20	25	25
Konsolbewehrung in kg	26,5	15	19
$k_1 = \frac{\text{Bruchlast}}{\text{Bewehrung}} =$	2,08	4,40	3,48

Der Bruch sämtlicher Konsolen wird primär durch das Fließen der Bewehrung verursacht. Da sich im Zugbereich die Risse öffnen, muß der "Druckstab" eine Drehung ausführen. Sein Drehpol liegt in der unteren Ecke. Durch die starke Verdrehung wird die Druckzone verkleinert. Die dadurch entstehende hohe Druckspannung führt zur Zerstörung des Betons. Der "Druckstab" löst sich von der Konsole ab. Diese Ablösung, verbunden mit einem gegenseitigen Verschieben der Rißufer, ist erst nach der vollständigen Zerstörung des Betons in seinem Drehpol sichtbar.

Vor der vollständigen Zerstörung des Betons sind alle aufgetretenen Risse reine Trennrisse. Die Rißufer verschieben sich nicht gegenseitig, sondern entfernen sich voneinander.

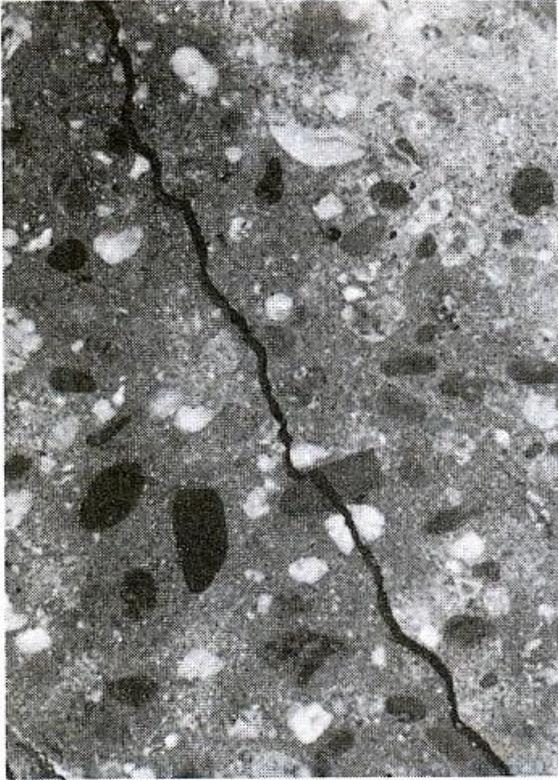


Bild 31

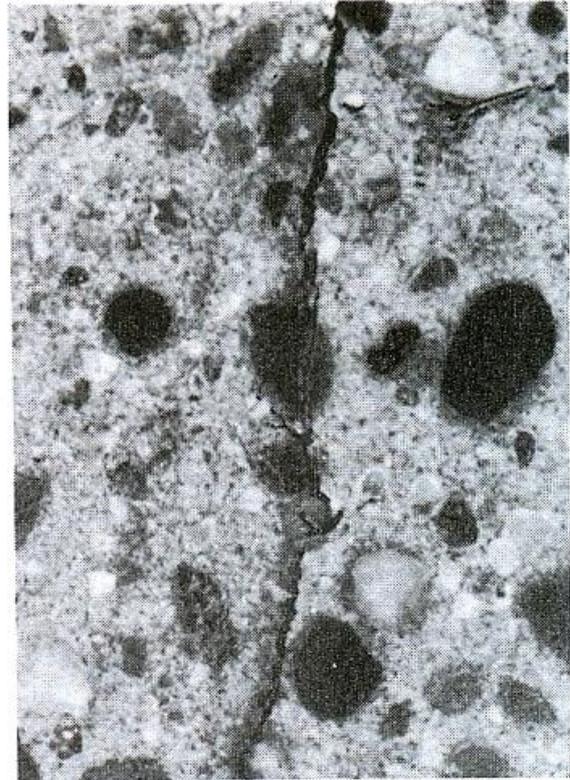
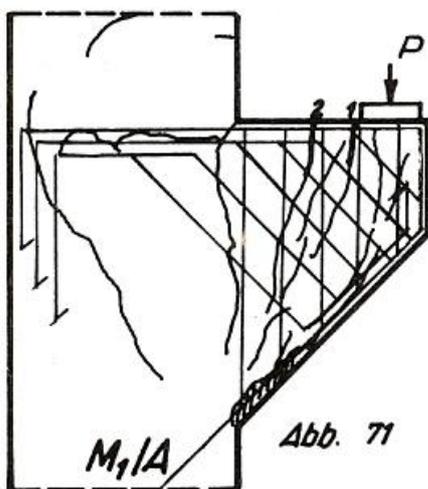


Bild 32

Wird die Bewehrung im "Druckstab" nicht verankert (vgl. M1/B1 Schlaufenbewehrung), dann bleibt dieser rissfrei. Bei M1/A und M1/B2 verursachen die Haken und die Haftspannungen der dort verankerten Stahleinlagen Zusatzspannungen, die zu Rissen führen.

#### Vergleich der Bruchlasten



Rißbild im Bruchzustand.

Die Bruchlast des nach der derzeit gültigen Bemessungsvorschrift für Konsolen mit  $a \leq z$  bewehrten Versuchskörpers M1/A war um 11 t geringer als die von M1/B1 und M1/B2. Der Bruch bei M1/A trat kurz nach Aufbringen der Last von 55 t ein. Das sichtbare starke Fließen der oberen Eisen nahe der Last (Riß 1 und 2, Abb.71) bei der letzten Laststeigerung läßt den Schluß zu, daß der Bruch wahrscheinlich bereits bei 52 - 53 t eingetreten wäre, hätte man während des Fließens der Bewehrung nicht noch die Last gesteigert.

Das Verhältnis der erzielten Bruchlasten in t zu der eingelegten Bewehrung in kg beträgt: (bezogene Bruchlasten):

$$M1/A : M1/B1 : M1/B2 = 2,08 : 4,40 : 3,48 = 100 \% : 212 \% : 167 \%$$

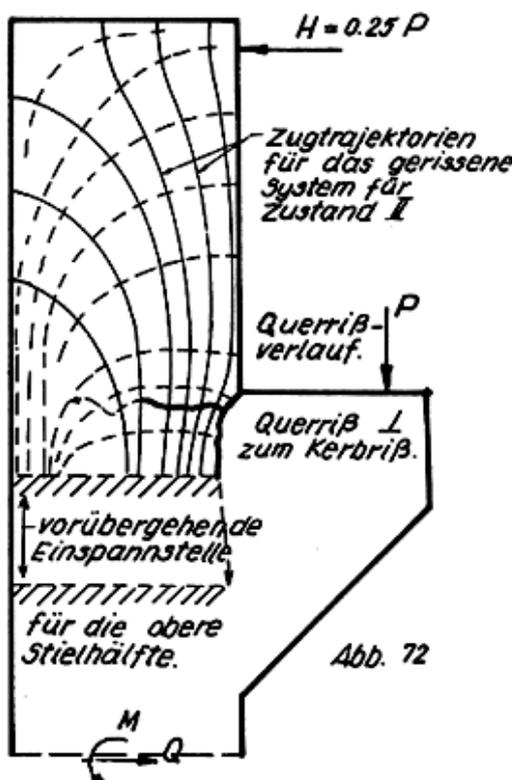
Bei M1/A klaffen die Risse 1 und 2 (vgl. Abb.71) stärker als der Kerbriß, bei M1/B1 und M1/B2 klappt der Kerbriß in der oberen Ecke am stärksten. Dort mußte die Bewehrung entsprechend den Zugtrajektorien unter  $45^\circ$  verlaufen, was jedoch konstruktiv ohne Zusatzseisen nicht möglich ist. Die Bruchversuche bestätigen weitgehend den im homogenen Plexiglasmodell spannungsoptisch ermittelten fast konstanten Spannungsverlauf entlang des oberen Randes der Konsole.

### Rißbildung und Rißverlauf

Alle drei Versuchskörper gehen bei Laststufe 3 mit  $P = 15 \text{ t}$  in den gerissenen Zustand über. Von den Kerbspannungen gefördert, beginnt der erste Riß an der Einspannstelle der Konsole in den Stiel und schneidet senkrecht die aufgezeichneten Zugtrajektorien. Dieser Riß verursacht vorübergehend eine Kräfteumlagerung. Geht man von der Annahme aus, daß der Riß auf seine Länge die Konsole vom Stiel abtrennt, dann ändert sich das Trajektorienbild (vgl. Abb.72). Der bei allen

Versuchskörpern auftretende waagerechte Querriß läuft zwar zu den Zugtrajektorien des homogenen Körpers Zustand I parallel, also "falsch", schneidet aber die Zugtrajektorien senkrecht, die für den Zustand II gültig sind. Die Mitwirkung der Stahleinlagen kann man im Anfangsstadium vernachlässigen. Ein genaues Studium der Bruchbilder mit den Rißskizzen (Seite 48, 49 und 50) und die direkten Beobachtungen bei den Bruchversuchen ließen erkennen, daß im fast vollständig gerissenen Versuchskörper diese Kräfteumlagerung nicht mehr vorhanden ist. Dieser wirkt durch seine Stahleinlagen wieder quasi homogen. Es sei vorweggenommen, daß sich bei einem später beschriebenen Versuch (M2/B3) diese Kräfteumlagerung nicht auswirkte, weil bis zur Laststufe 8  $P = 40 \text{ t}$  (2-fache Gebrauchslast) auch in der oberen Hälfte des Stieles eine Normalkraft eingetragen wurde (siehe Seite 57).

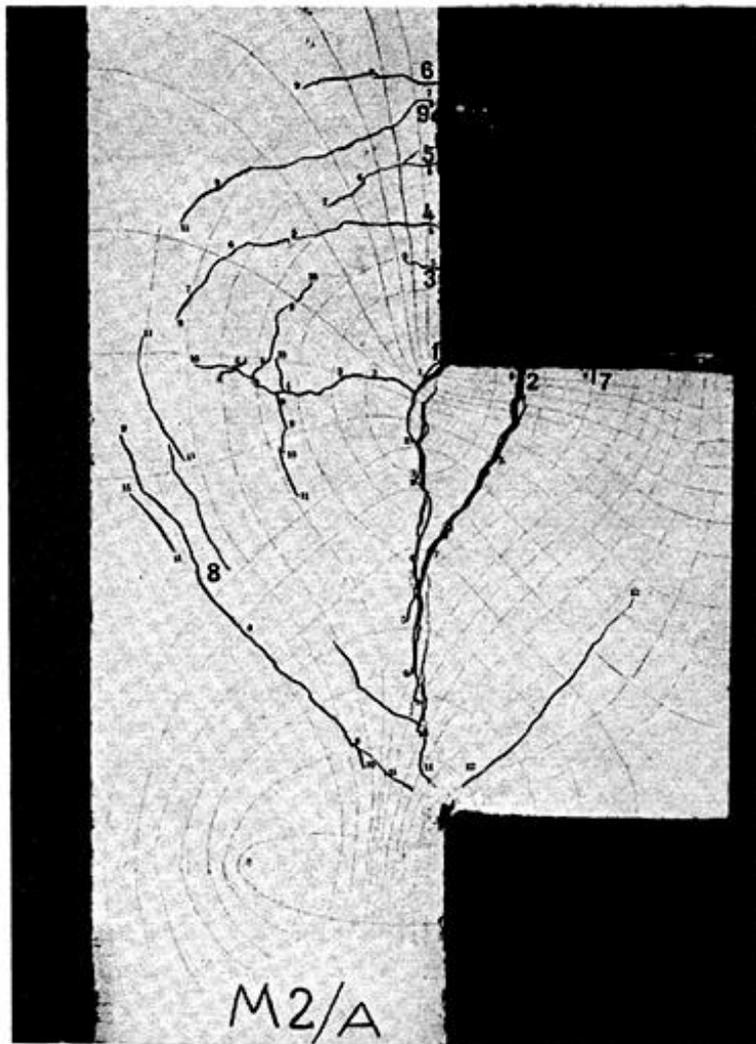
Vergleicht man den Verlauf der Risse mit den aufgezeichneten Trajektorien, dann werden die im homogenen Modell gemessenen Hauptspannungsrichtungen unter Berücksichtigung der beim inhomogenen, grobkörnigen Stahlbeton zulässigen Toleranz weitgehend bestätigt.



Der anfängliche Rißverlauf ist nicht von der Anordnung der Bewehrung abhängig. Weicht die Bewehrungsführung von der Richtung der Resultierenden der Hauptzugspannungen erheblich ab wie bei M1/A, dann ändert sich der Hauptspannungsverlauf nicht. Lediglich der Wirkungsgrad der Stahleinlagen wird vermindert und gleichzeitig die bezogene Bruchlast verringert.

Der Vergleich der Isoklinen des homogenen Plexiglasmodells mit den im Reflexionspolariscope beobachteten Isoklinen an der Betonoberfläche bekräftigt die vorhergehenden Aussagen.

## 4.54 M2/A



Betongüte > B 225

Bewehrung nach Rausch  
siehe Seite 35

Bewehrungsanteil der  
Konsole 37,3 kg

Bemessungslast 20 t

Rißlast  $P_R = 10 \text{ t}$

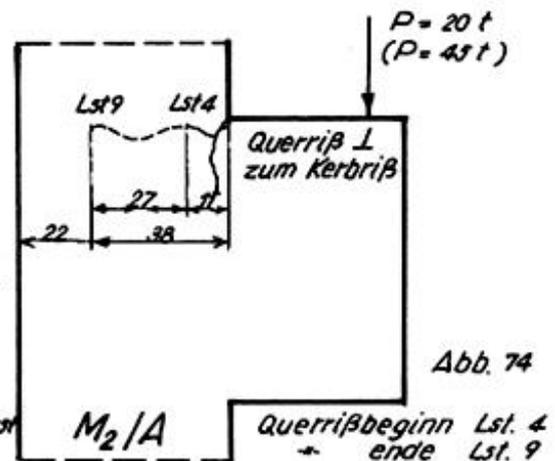
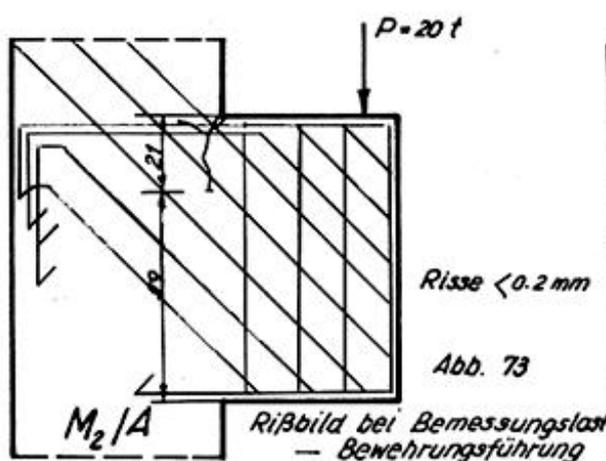
Laststufe 2

waagerechter Querriß  
bei Laststufe 4  $P = 20 \text{ t}$

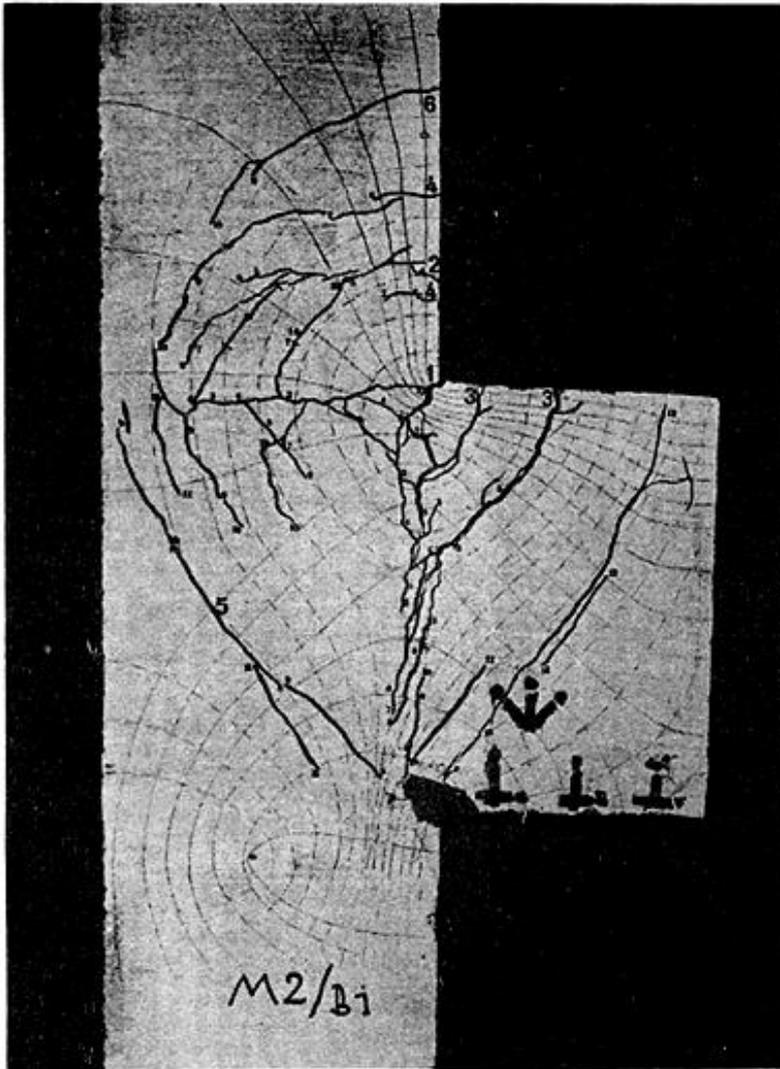
Bruchbild M2/A  
 $P_{\text{Bruch}} = 65 \text{ t}$

Bild 33

Die großen Zahlen am Zugrand geben die Reihenfolge der Risse an, während die kleinen Zahlen die Rißbildung bezeichnen. Da bei der Laststufe 1 noch keine Risse auftraten, können die kleinen Zahlen (n) auf die Laststufe bezogen werden durch die Gleichung  $(n + 1) = \text{Laststufe}$ . Z.B. sind alle Rißlängen mit der Ziffer 3 bei Laststufe 4 mit  $P = 20 \text{ t}$  entstanden.



## 4.55 M2/B1



Betongüte > B 225  
(B 280)

Bewehrung siehe Seite 37

Schlaufenverankerung  
Bügel schräg

Bewehrungsanteil 16,7 kg

Bemessungslast = 20 t

Rißlast  $P_R = 10$  t  
Laststufe 2

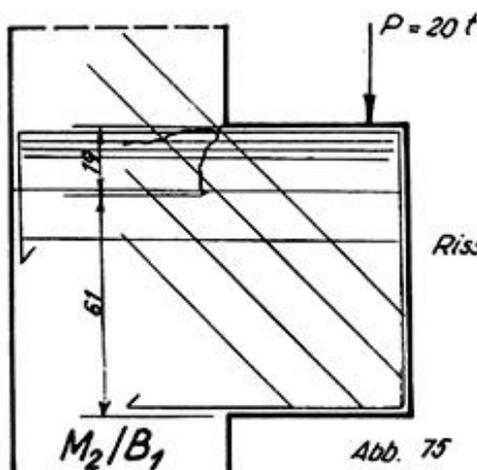
waagerechter Querriß  
bei Laststufe 4 = 20 t

Bruchbild M2/B1

Bild 34

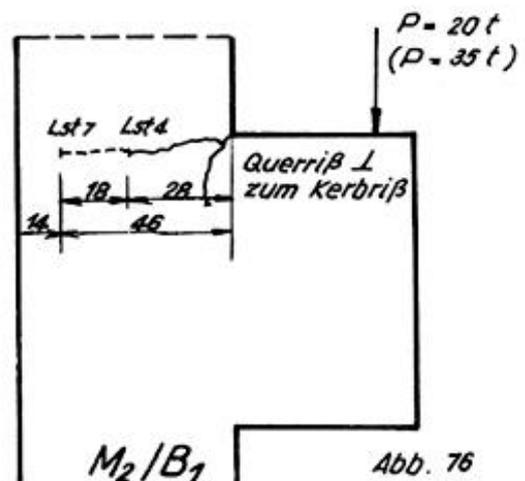
$$P_{\text{Bruch}} = 63 \text{ t}$$

Die kleinen Zahlen (n) können durch  $(n + 1) =$  Laststufe auf die vorhandene Last bezogen werden.



Rißbild bei Bemessungslast  
— Bewehrungsführung.

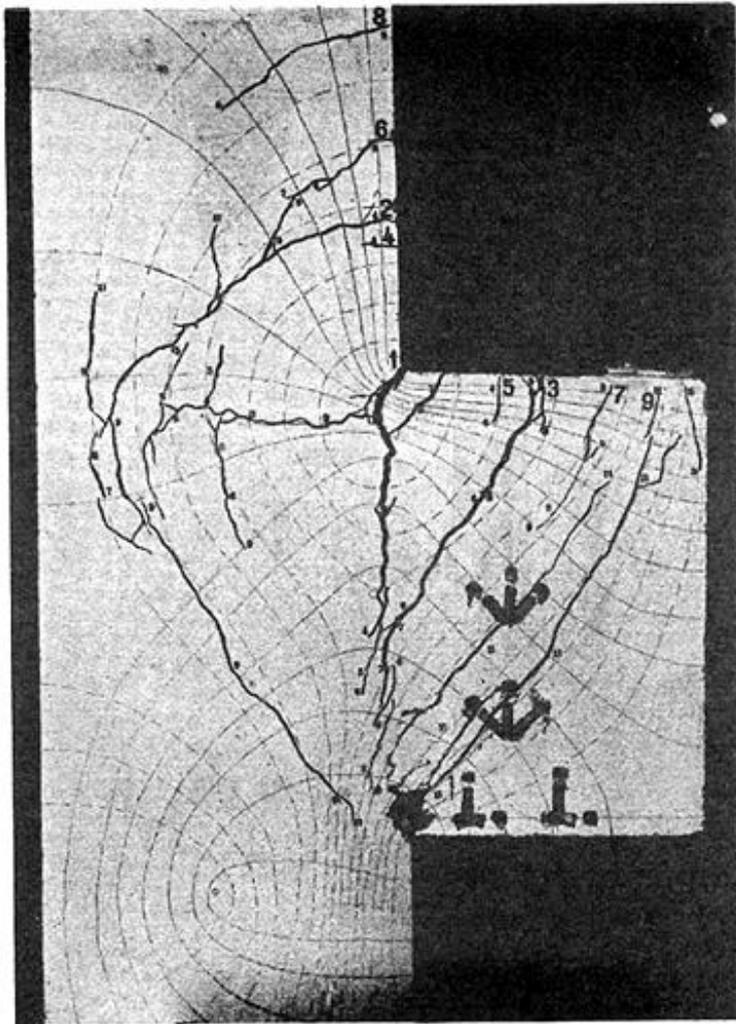
Risse < 0.2 mm



Querrißbeginn Lst 4  
+ ende Lst 7

Querriß  $\perp$   
zum Kerbriß

## 4.56 M2/B2



Betongüte > B 225

(B 280)

Bewehrung siehe Seite 37

Schlaufenbewehrung

Bügel orthogonal

Bewehrungsanteil 18,2 kg

Bemessungslast 20 t

Rißlast  $P_R = 10 t$

Laststufe 2

waagerechter Querriß

bei Laststufe 3  $P = 15 t$

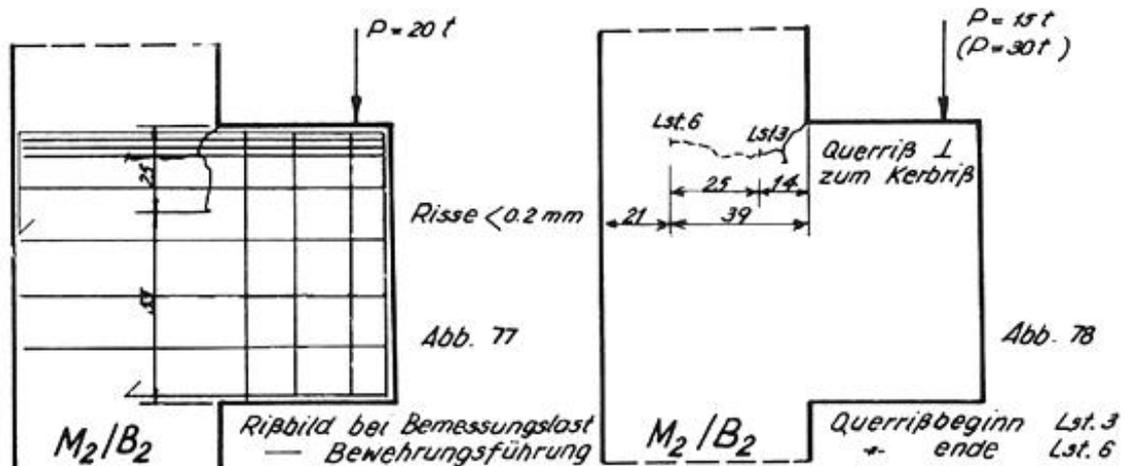
Die kleinen Zahlen (n) können durch die Gleichung  $(n + 1) = \text{LSt.}$  auf die Laststufe bezogen werden.

Bruchbild M2/B2  
 $P_{\text{Bruch}} = 58,5 t$

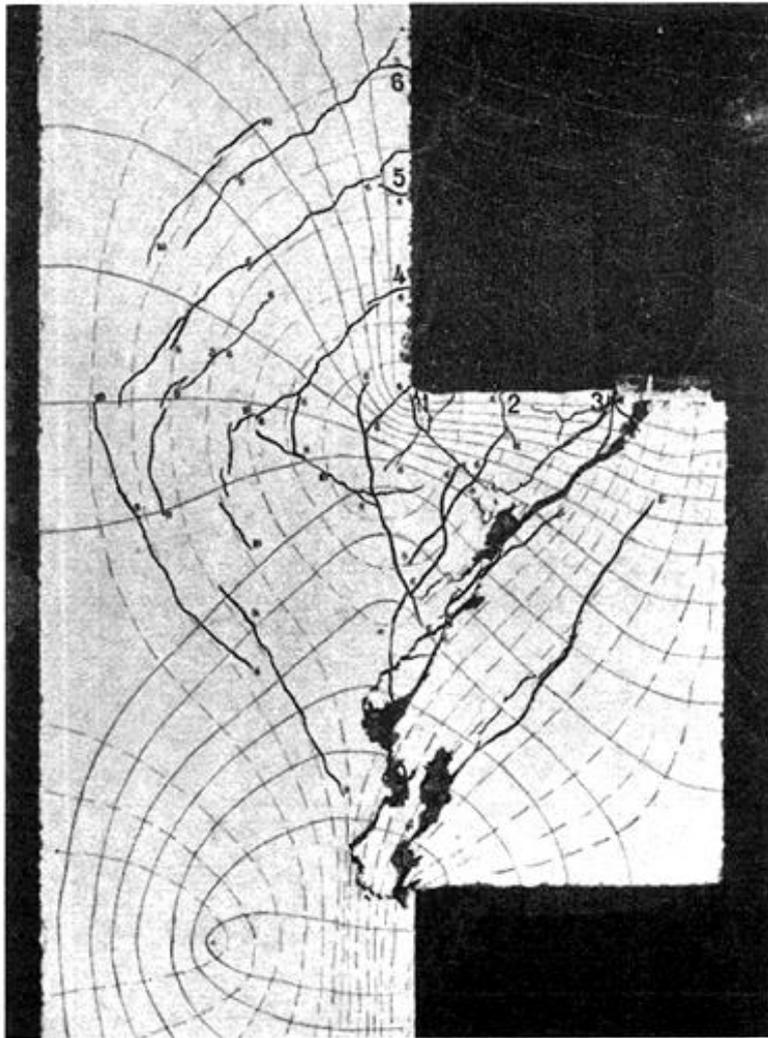
Bild 35

Anmerkung:

Die geringere Bruchlast und der um eine Laststufe früher bei  $P = 15 t$  entstandene Querriß wurde in der Hauptsache durch eine Verschiebung des Bewehrungskorbes beim Betonieren verursacht. Die Betonüberdeckung am oberen Rande betrug 5 cm, bei den Vergleichskörpern M2/A und M2/B1 2 cm. Außerdem sind die orthogonal angeordneten Bügel ungünstiger.



4.57 M2/B3



Betongüte > B 225  
( B 275 )

Bewehrung siehe Seite 38

Schlaufenverankerung  
vgl. Anmerkung S.38

Rißlast  $P_R = 15 t$

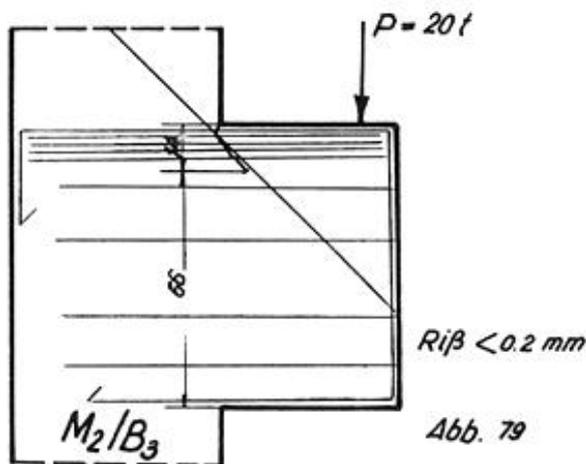
Bei diesen Bruch- und Rißbildern sind die zusätzlichen Schnittkräfte bis Laststufe 8  $P = 40 t$  in der oberen Stielhälfte zu berücksichtigen. Vgl. hierzu Seite 45. Der Querriß infolge Kräfteumlagerung bildet sich nicht.

Die kleinen Zahlen (n) können auf die Laststufe durch  $n + 1 = LSt.$  bezogen werden.

Bruchbild M2/B3

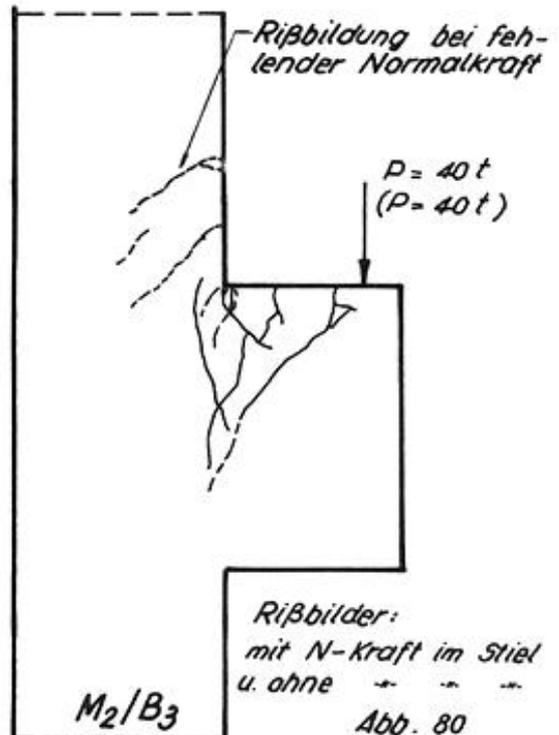
$P_{Bruch} = 74 t$

Bruch infolge Versagen der Betondruckzone.



Rißbild bei Bemessungslast  
— Bewehrungsführung

*Bild 36*



Rißbilder:  
mit N-Kraft im Stiel  
u. ohne  
Abb. 80

Im Reißbild auf Seite 57 fehlt die bisher bei allen Versuchskörpern feststellbare Kräfteumlagerung, die durch den parallel zu den Zugtrajektorien sich bildenden Querriß sichtbar wird. Ursache dieser Erscheinung ist die auf den Stiel exzentrisch drückende Normalkraft. Die Größe der Exzentrizität war durch die Kolbenabstände der Presse festgelegt. Das gegendrehende Moment verursacht den Verlauf des 1. Risses. Aufschlußreich sind dann die verschiedenartigen Reißbilder bei Laststufe 8  $P = 40$  t mit und ohne Normalkraft (vgl. Abb. 80).

Bis zur Zerstörung des Betons im "Drehpol" treten nur Trennrisse auf. Die im Bruchbild sichtbare Verschiebung des "Druckstabes" erfolgte erst nach der vollständigen Zerstörung des Betons. Die Rißweiten sind kleiner als 1 mm. Die Bewehrung hat bei der erreichten Bruchlast von 74 t eine Stahlspannung von  $\sigma_e = 3,16$  t/cm<sup>2</sup>, wenn man die Mitwirkung des Betons ausschließt. Der Stahl erreicht beim Bruch also gerade die Fließgrenze. Diese Bruchlast von 74 t kann deshalb mit der von  $M_2/A = 65$  t nicht verglichen werden, da der Bruch dieser Konsole primär durch Versagen des Betons früher eintrat. Die Bruchlast liegt jedoch schon wesentlich über der von  $M_2/A$ .

$$M_2/A : M_2/B_3 = 1,74 : 2,36 \\ 100 \% : 136 \%$$

Bestätigt wird durch diesen Versuch, wie sehr der Wirkungsgrad der Bewehrung vergrößert wird, wenn man die Schrägbewehrung ungefähr in die Richtung der größten Hauptzugspannungen parallel zum oberen Rand legt.

#### Vergleich der Isoklinen

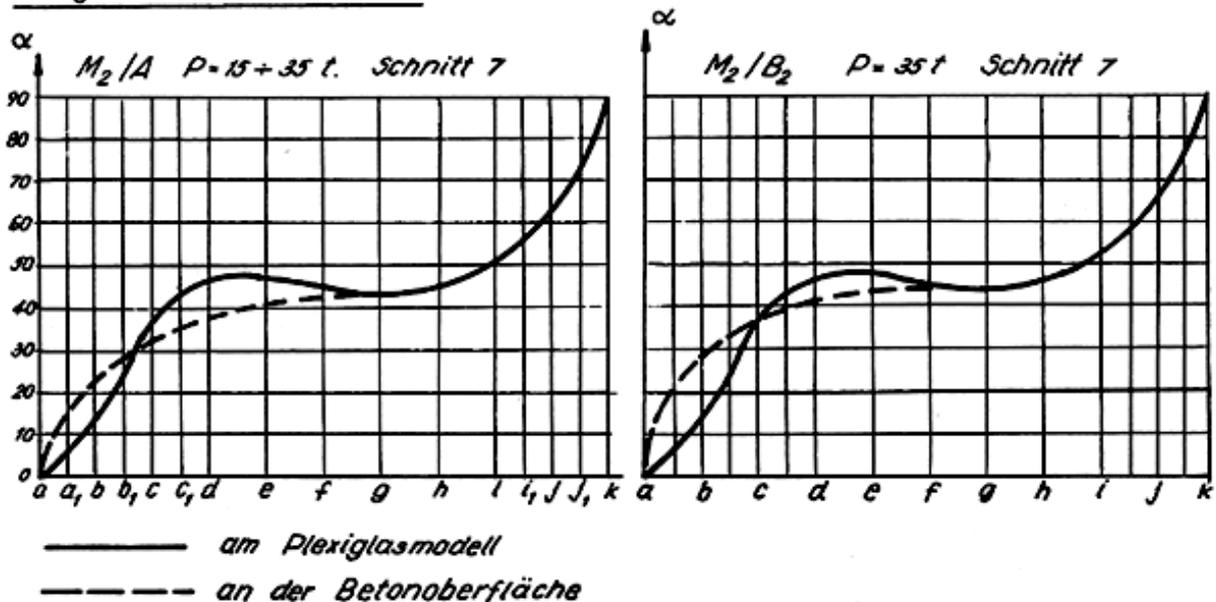
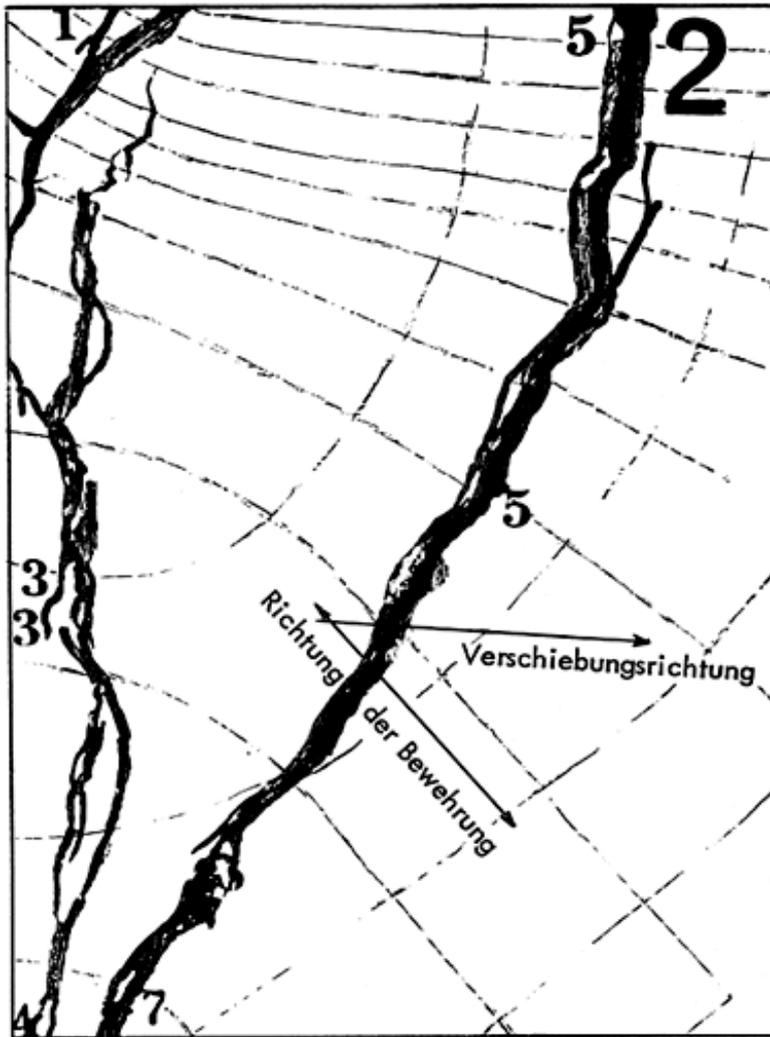


Abb. 81 u. 82

#### Zusammenfassung: Konsolformen M2

	M2/A	M2/B1	M2/B2	M2/B3
Bruchlast	65	63	58,5	74
Rißlast bei P in t	10	10	10	—
Beginn des Querrisses P in t	20	20	15	—
Konsolbewehrung in kg	37,3	16,7	18,2	31,4
$k_1 = \frac{\text{Bruchlast}}{\text{Bewehrung}}$	1,74	3,80	3,22	2,36



Bruchbild M2/A

(Ausschnitt)  
Bild 37

Die nachfolgenden Erläuterungen beziehen sich zunächst nur auf die Versuchskörper M2/A, M2/B1 und M2/B2. Der Bruch wurde, wie bei der Versuchsreihe M1, primär durch das Fließen der Bewehrung verursacht. Bei allen Rechteckkonsolen bleibt die untere vordere Ecke rissefrei. Sie ist spannungslos, wie im spannungsoptischen Modell sichtbar war (vgl. Seite 18). Während bei M2/A die in der Konsole reichhaltig vorhandene gleichmäßig verteilte Schrägbewehrung eine Rißverteilung verhindert, und die gesamten Dehnungen in Riß 2 auftreten, ist das Rißbild bei M2/B1 und M2/B2 ausgeprägter. Durch diesen Umstand bildet sich bei M2/A im gerissenen Zustand deutlich ein Stabwerk aus. Trotz der Schrägbewehrung ist die Verschiebungsrichtung der Rißufer vom Drehpol des "Druckstabes" abhängig. Die Abweichung der Verschiebungsrichtung von der Bewehrungsrichtung ( $45^\circ$ ) ist erheblich. Sie wird noch größer, verlegt man die Schrägbewehrung im Winkel von  $60^\circ$ .

Die Horizontalkomponente der unter  $45^\circ$  verlaufenden Schrägbewehrung und die oberen Zugeinlagen bilden den "Zugstab". Die Rißufer können sich nur tangential zum unten liegenden Drehpol verschieben (siehe Bild). Es lag nach diesem Ergebnis nahe, die Schrägbewehrung im Verhältnis ihres Drehpolabstandes und nur mit ihrem horizontalen Anteil (75 %) in einen neuen Versuchskörper M2/B3 parallel zum oberen Rand einzulegen (vgl. Seite 38).

### Vergleich der Bruchlasten

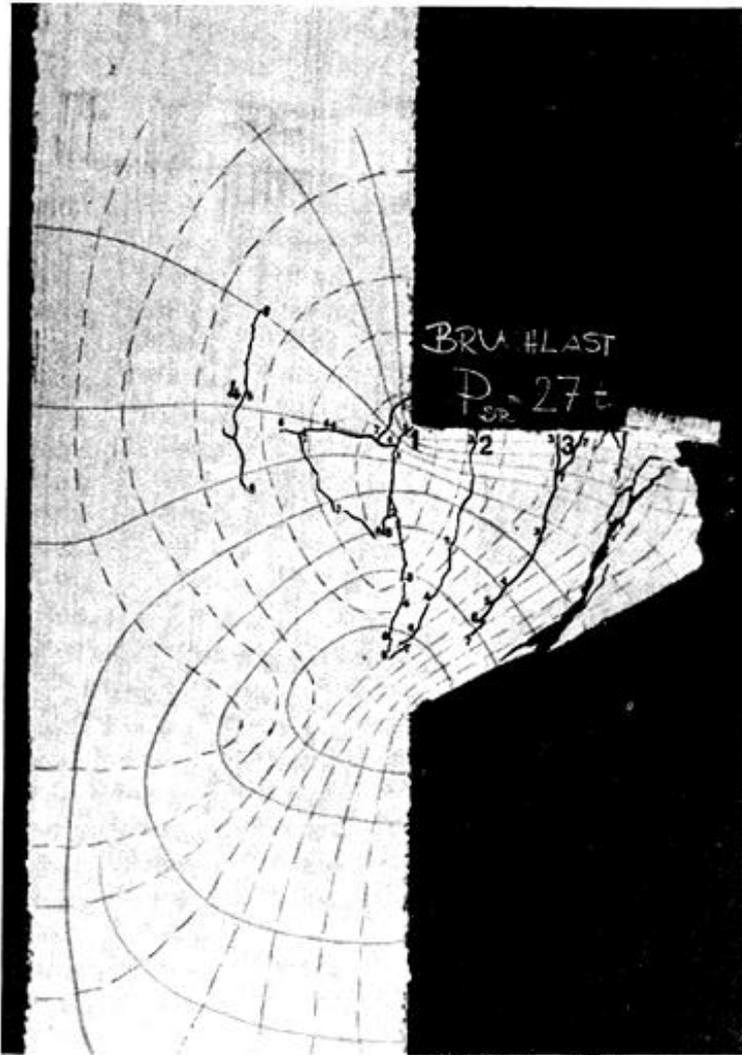
Die auf den Bewehrungsanteil bezogenen Bruchlasten sind:

$$\begin{aligned} \text{M2/A} : \text{M2/B1} : \text{M2/B2} &= 1,74 : 3,80 : 3,22 \\ &= 100\% : 218\% : 185\% \end{aligned}$$

Bezieht man die Bruchlasten auf den in einem Schnitt vorhandenen Querschnitt der Stahleinlagen, dann erhält man ähnliche Prozentsätze.

Rißbildung und die Art der Risse bestätigen wieder weitgehend den spannungsoptisch gefundenen Verlauf der Hauptspannungen. Auch weichen die gefundenen Isoklinen am Beton und im Plexiglasmodell nicht stark voneinander ab (siehe S. 58). Im übrigen gelten auch hier die Anmerkungen von Seite 53. Obwohl die Bruchursache bei den Versuchskörpern M2/A und M2/B3 verschieden ist, kann man trotzdem schon aus dem Vergleich der Bruchlasten von  $\text{M2/A} : \text{M2/B3} = 65 \text{ t} : 74 \text{ t}$  und der Bewehrung von  $\text{M2/A} : \text{M2/B3} = 100\% : 75\%$  ersehen, daß eine parallel zum oberen Rand verlegte Bewehrung wirkungsvoller ist.

## 4.58 M3/A



Betongüte > B 225

Stahlgüte III b quengerippt

Bewehrung nach Rausch  
s. Seite 40

Bewehrungsanteil der  
Konsole 9,4 kg

Bemessungslast 10 t

Rißlast  $P_R = 7,5 t$   
Laststufe 3

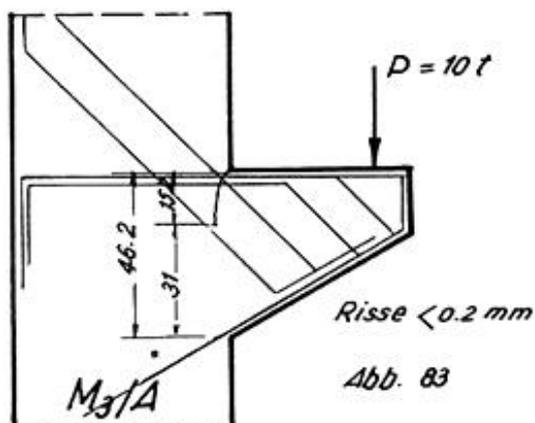
waagerechter Querriß  
bei LSt. 6  $P = 15 t$

Bruchbild M3/A

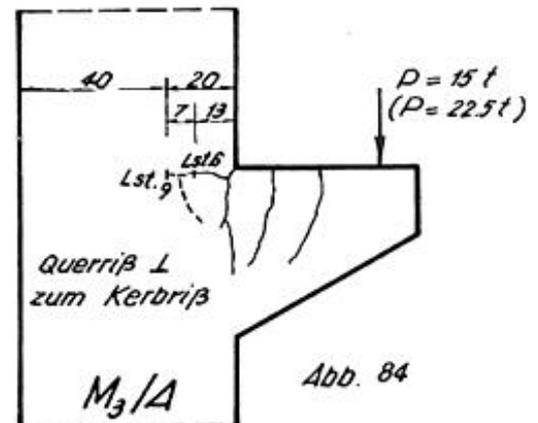
Bild 38

$P_{\text{Bruch}} = 27 t$

Die Kräfteumlagerung dauerte bis zur LSt. 8  $P = 20 t$ .  $(n + 2)$  ergibt die jeweilige Laststufe, worin  $(n)$  die kleinen Rißzahlen sind.

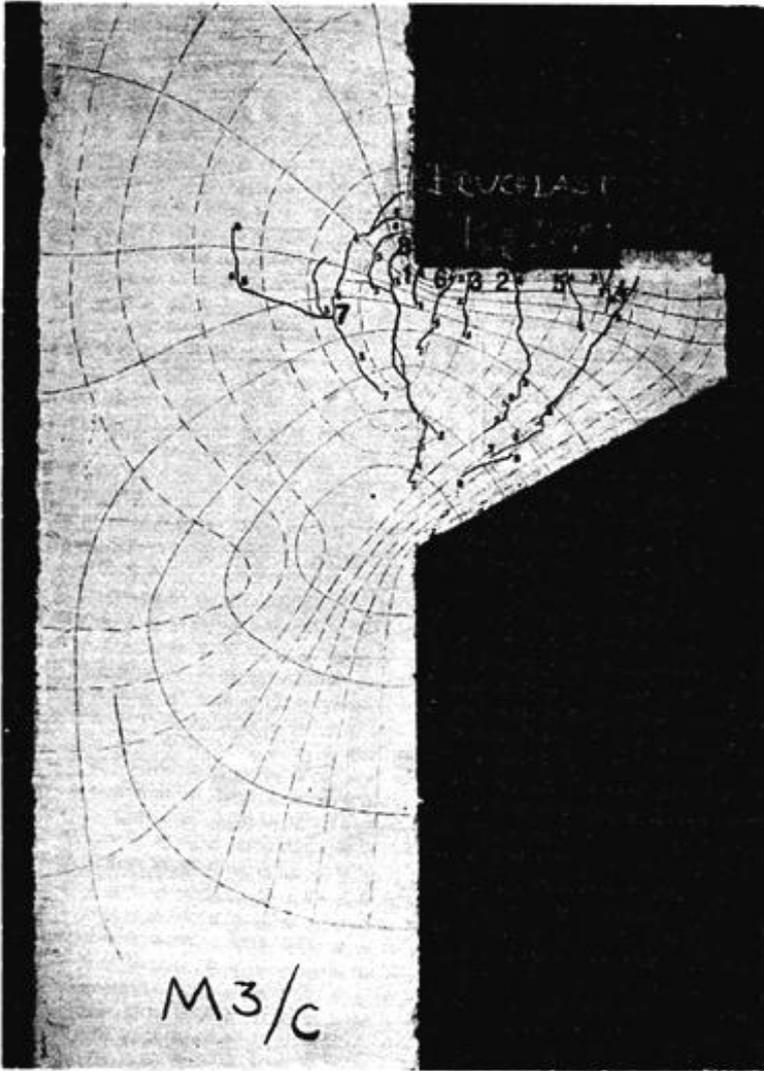


Rißbild bei Bemessungslast  
— Bewehrungsführung



Querrißbeginn bei Lst. 6  
+ ende bei Lst. 9

4.59 M3/C



Betongüte &gt; B 225

Stahlgüte III b quengerippt

Stabwerksbewehrung  
siehe Seite 42Bewehrungsanteil der  
Konsole 8,4 kg

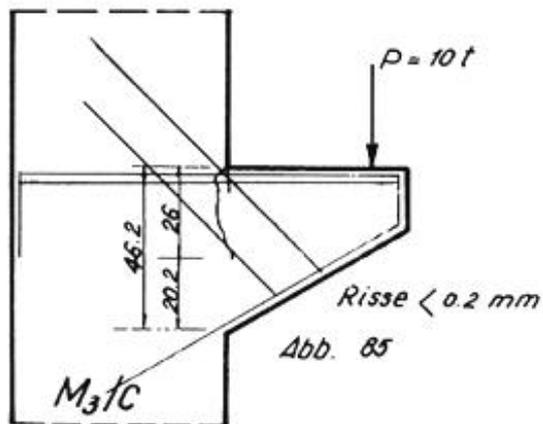
Bemessungslast 10 t

Rißlast  $P_R = 10 \text{ t}$ Querriß bei LSt. 6  $P = 15 \text{ t}$ 

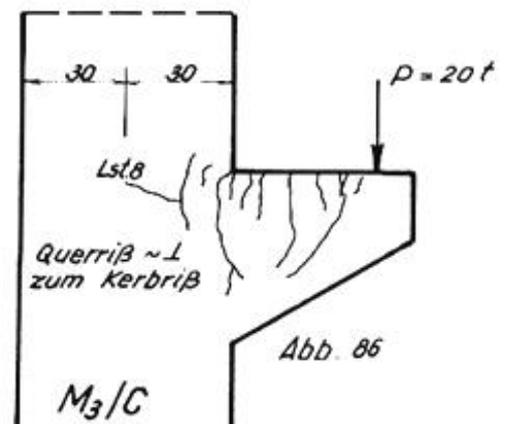
Bruchbild M3/C  
 $P_{\text{Bruch}} = 28,5 \text{ t}$

Bild. 39

Die Kräfteumlagerung dauerte bis zur LSt. 8  $P = 20 \text{ t}$ , ( $n + 3$ ) ergibt die jeweilige Laststufe.

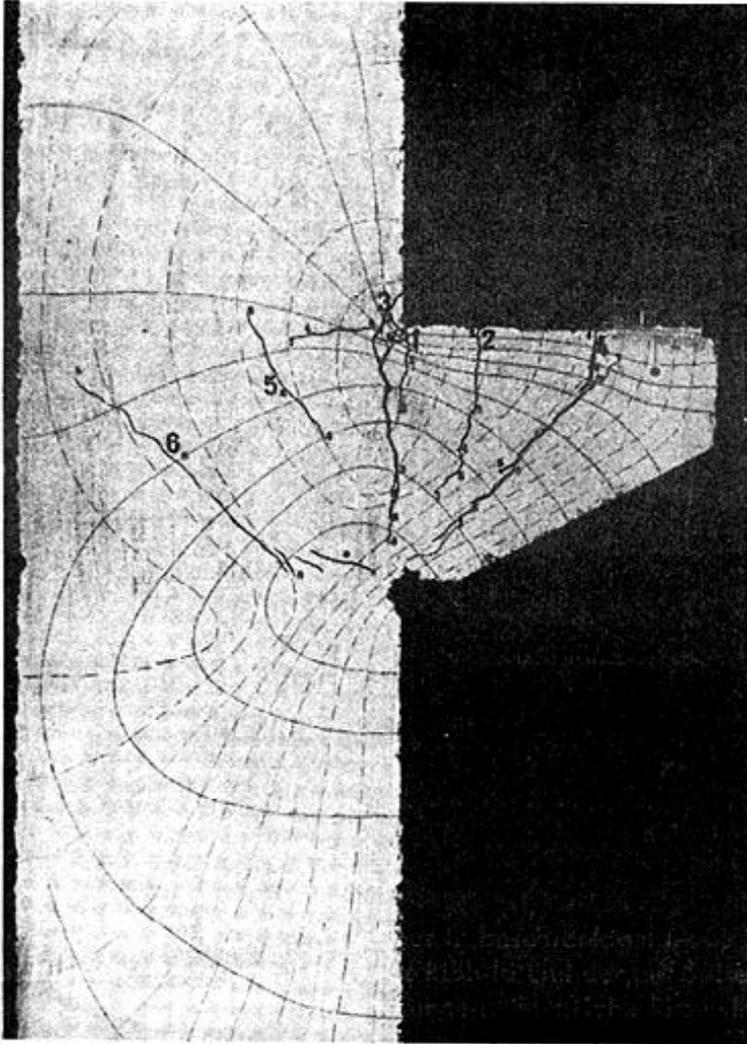


Rißbild bei Bemessungslast  
 — Bewehrungsführung St. III b



Querrißbeginn und -ende  
 bei Lst. 8

4.510 M3/B



Betongüte &gt; B 225

Stahlgüte I

Stabwerksbewehrung  
siehe Seite 42

Bemessungslast 10 t

Rißlast  $P_R = 7,5 t$ 

Laststufe 3

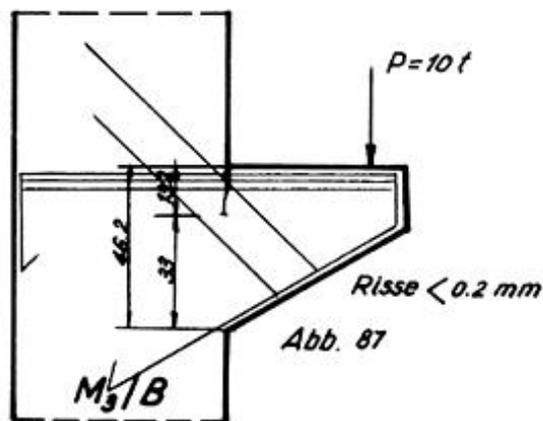
Querriß bei LSt.6  $P = 15 t$ 

Bruchbild M3/B

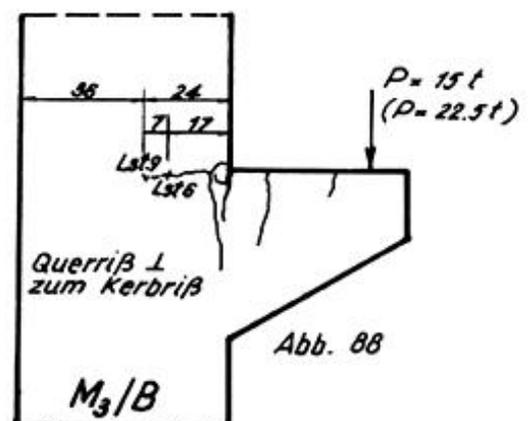
 $P_{\text{Bruch}} = 27 t$ 

Bild 40

Die Kräfteumlagerung dauerte bis zur Laststufe 9  $P = 22,5 t$ . (n + 2) ergibt die jeweilige Laststufe.

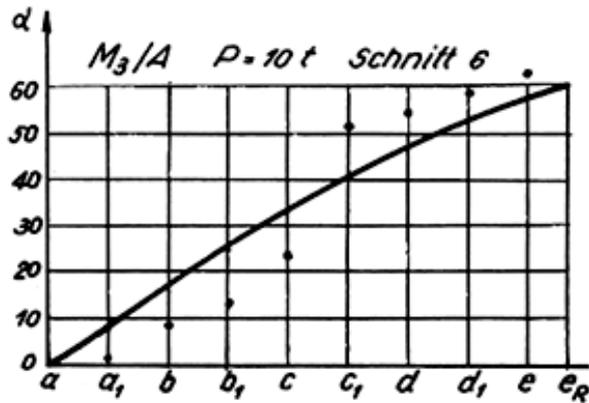


Rißbild bei Bemessungslast  
— Bewehrungsführung St. I



Querrißbeginn bei Lst. 6  
— ende bei Lst. 9

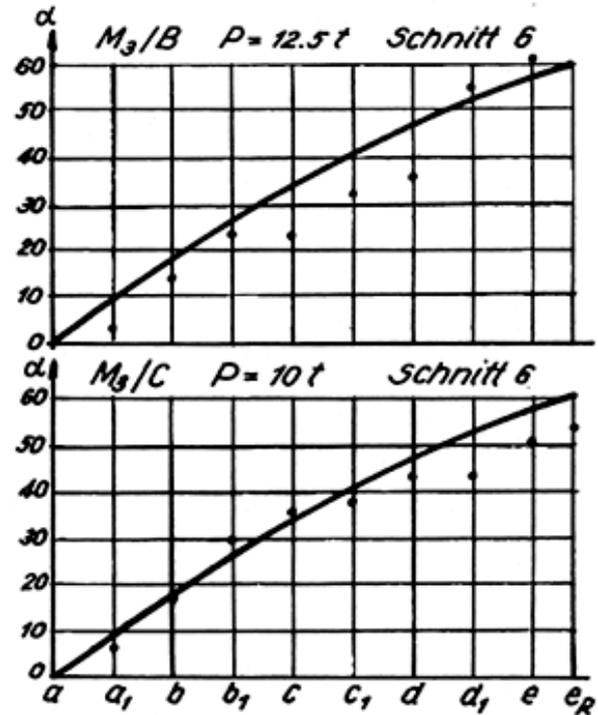
### Vergleich der Isoklinen



— am Plexiglasmodell

... Meßwerte am Betonmodell

Abb. 89 - 91



### Zusammenfassung: Konsolformen M3

	M3/A	M3/C	M3/B
Bruchlast	27	28,5	27
Rißlast bei P in t	7,5	10	7,5
Beginn des Querrisses P in t	15	15	15
Konsolbewehrung in kg	9,4	8,4	--
$k_1 = \frac{\text{Bruchlast}}{\text{Bewehrung}}$	2,87	3,40	--

Der Bruch der Konsolen wurde wiederum primär durch das Fließen der Bewehrung verursacht. Die flachere Neigung der Konsolunterkante vermindert etwas die Wirtschaftlichkeit der Stabwerksbewehrung im Vergleich zu den Konsolformen M1 und M2. Das Verhältnis der bezogenen Bruchlasten ( $k_1$ -Werte) beträgt:

$$\begin{aligned} M3/A : M3/C &= 2,87 : 3,40 \\ &= 100 \% : 118 \% \end{aligned}$$

Die einfachere Bewehrungsführung und die Umklammerung des Betons im Bereich der Lasteintragung durch die Schlaufenbewehrung sind zusätzliche Vorteile, die in den Verhältniszahlen nicht zum Ausdruck kommen. Die nachstehenden Aufnahmen zeigen die zerstörte Konsole M3/A, nachdem eine Haftung zwischen Beton und querverripptem Stahl nicht mehr vorhanden war. Dicht neben der Lasteintragungsstelle zeigte sich vor Erreichen der Bruchlast ein starker Riß (siehe Bild 41). Er wird durch die nach der bisherigen Bemessungsart zu schwache obere Bewehrung verursacht. Eine sekundäre Erscheinung ist dann das "Abdrehen" des vorderen Konsolteiles. Der Kerbriß bleibt trotz der dort vorhandenen größeren Spannung fast unsichtbar. Die Spannung in der Bewehrung hat in der Kerbe die Fließgrenze noch nicht überschritten, (im Gegensatz zu der neben der Lasteintragung siehe Pfeil).



Bild 41



Bild 42

## Bruchbilder M3/A

Infolge der geringeren Bemessungslast sind im Bereich des Stiels nur in beschränktem Maße Risse aufgetreten. Die Kräfteumlagerung ist auch hier zu beobachten. Das Reißbild und der auf Seite 63 dargestellte Isoklinenvergleich bestätigen die spannungsoptischen Messungen. Sämtliche Risse sind Trennrisse.

## Reißaufnahmen (vergrößert)

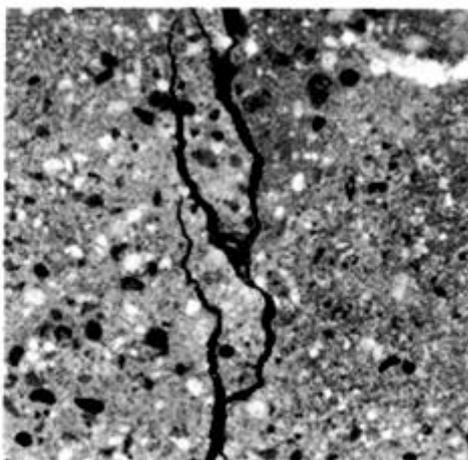


Bild 43

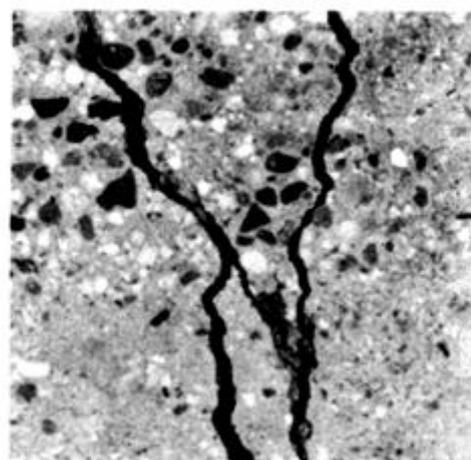
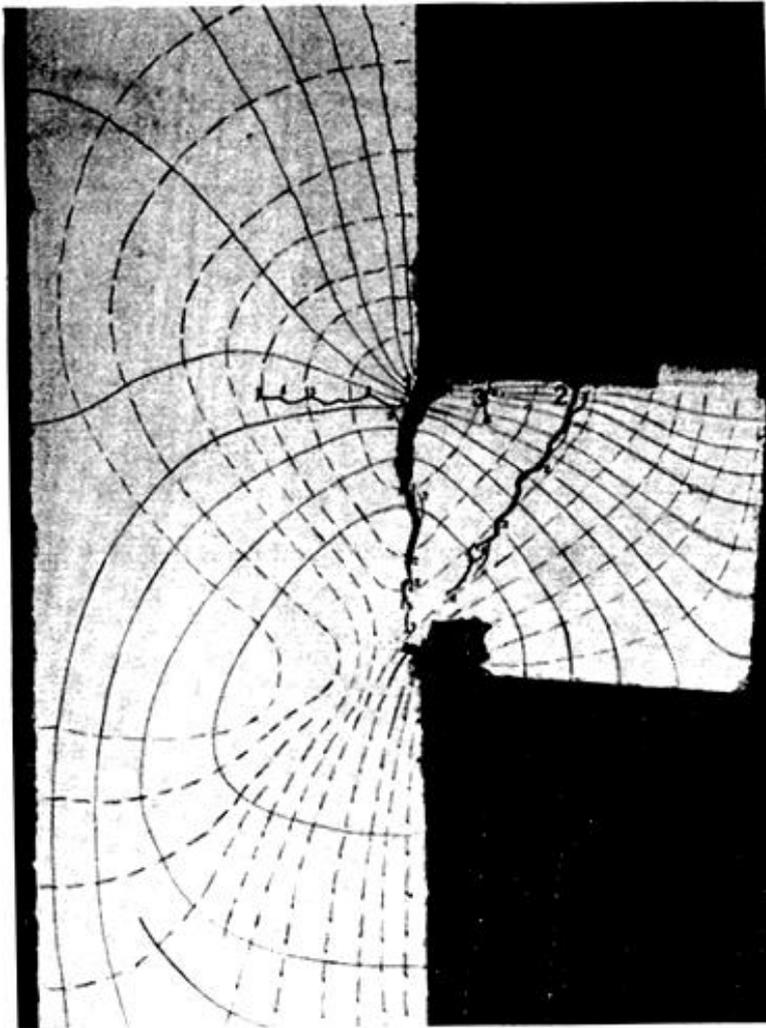


Bild 44

## 4.5.11 M4/A



Betongüte > B 225

Betonstahl I

Bewehrung nach Rausch  
siehe Seite 43

Bewehrungsanteil 21,4 kg

Bemessungslast 10 t

Rißlast  $P_R = 10$  t

Laststufe 4

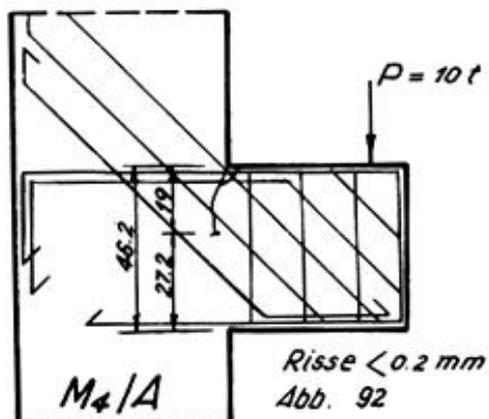
Querriß bei  $P = 12,5$  t

Laststufe 5

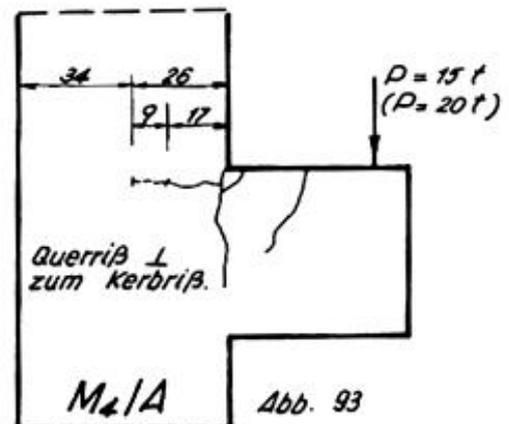
Bruchbild M4/A  
 $P_{\text{Bruch}} = 27,5$  t

Bild 45

Die Kräfteumlagerung dauerte bis zur Laststufe 8  $P = 20$  t.  $(n + 3)$  ergibt die jeweilige Laststufe.

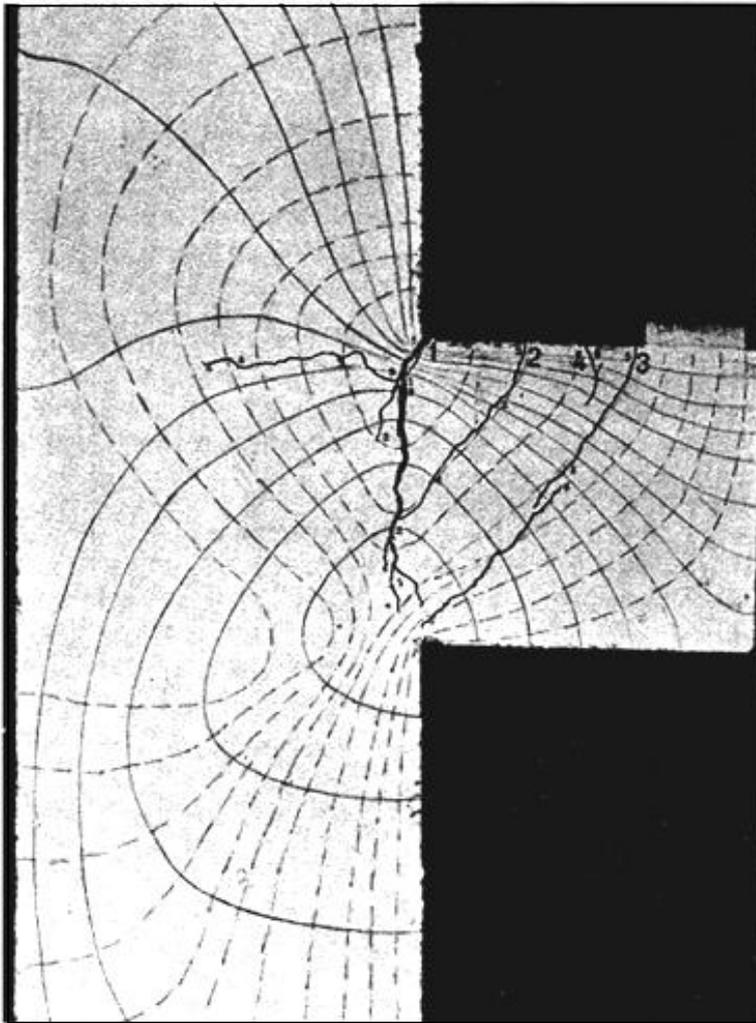


Rißbild bei Bemessungslast  
— Bewehrungsführung



Querrißbeginn bei Lst. 6  
... ende bei Lst. 8

## 4.5.12 M4/B



Betongüte > B 225

Betonstahl I

Stabwerksbewehrung  
siehe Seite 44

Bewehrungsanteil der  
Konsole 10,9 kg

Bemessungslast 10 t

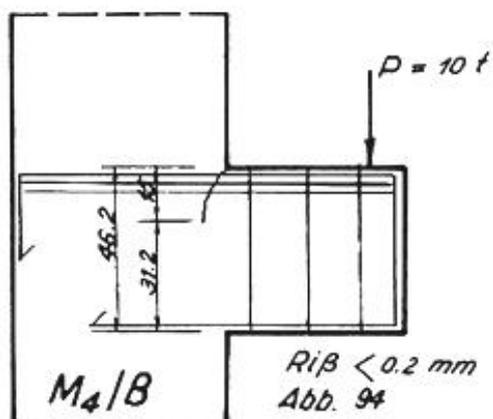
Rißlast  $P_R = 10$  t  
Laststufe 4

Querriß bei  $P = 15$  t  
Laststufe 6

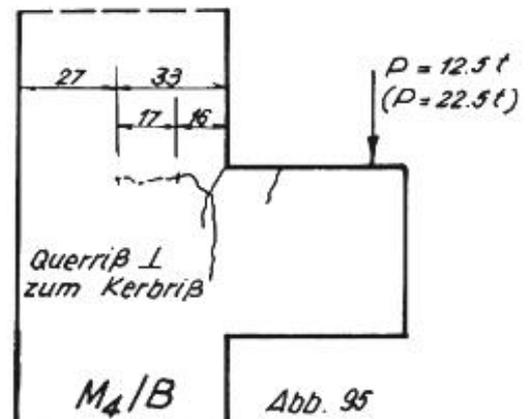
Bruchbild M4/B  
 $P_{\text{Bruch}} = 24,5$  t

Bild 46

Die Kräfteumlagerung dauerte bis zum Bruch. (n + 3) ergibt die jeweilige Laststufe. Der gestrichelte Riß befindet sich auf der Rückseite.



Rißbild bei Bemessungslast  
— Bewehrungsführung.



Querrißbeginn bei Lst. 5  
ende bei Lst. 9

Isoklinenvergleich

———— am Plexiglasmodell

• • Meßwerte am Betonmodell  $P_{10t}$   
 x x — — — —  $P_{12,5t}$

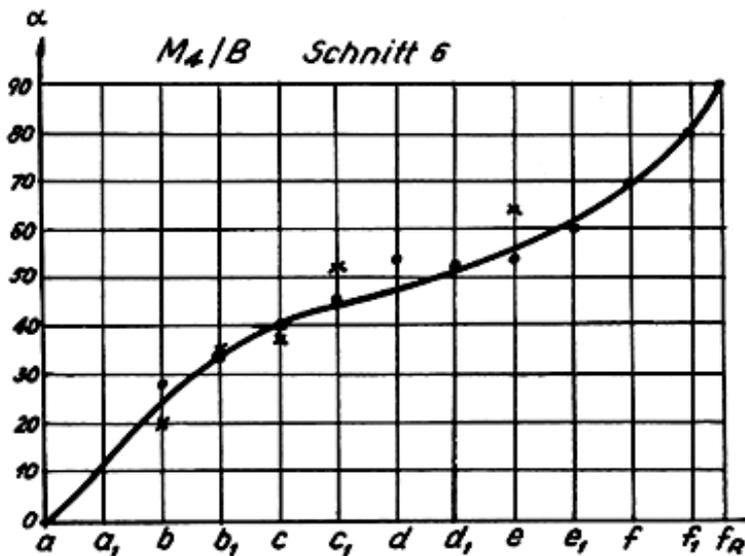


Abb. 96

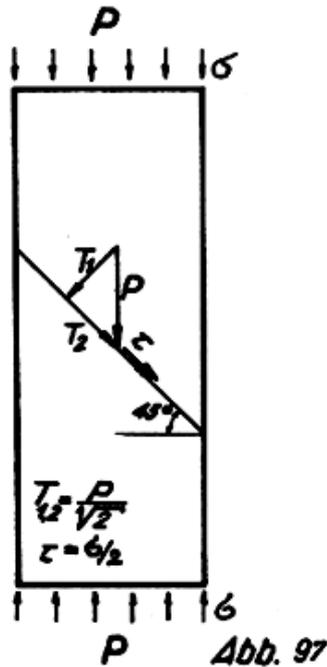
Zusammenfassung: Konsolformen M4

	M4/A	M4/B
Bruchlast	27,5	24,5
Rißlast bei P in t	10	10
Beginn des Querrisses P in t	12,5	15
Konsolbewehrung in kg	21,4	10,9
$k_1 = \frac{\text{Bruchlast}}{\text{Bewehrung}}$	1,29	2,25

Der Bruch der Konsolen M4/A und B wurde wieder primär durch das Fließen der Bewehrung verursacht. Bei M4/A hält wie bei M2/A die Schrägbewehrung den "Druckstab" rissefrei, dessen Drehpol gut sichtbar in der unteren Ecke liegt. Bei diesem Versuch machte der Beton die großen Drehungen mit, ohne vollständig zerstört zu werden. Die Fließdehnung des Stahls ist gut zu erkennen. Im Vergleich dazu sind die Rißweiten bei M4/B kleiner.

#### 4.5.13 Zusammenfassende Betrachtungen zu den Bruchversuchen

Die Überschreitung der Betonzugfestigkeit ist stets die Ursache der zu beobachtenden Rißbildung und des Rißverlaufs. Alle Risse sind aus diesem Grunde Trennrisse und verlaufen weitgehend senkrecht zu den Hauptzugspannungsrichtungen. Schubrisse, die auf ein Abscheren des Betons infolge von Schubspannungen zurückzuführen wären, konnten nicht beobachtet werden. Die anfängliche Rißbildung ist fast ganz unabhängig von der Art der Bewehrungsführung. Die Hauptzugspannungsrichtung des homogenen Körpers bleibt auch im gerissenen Zustand annähernd erhalten, wenn man von den kurzzeitigen Kräfteumlagerungen entsprechend ihrer geringen Bedeutung absieht.



Wie bei einer mittig gedrückten Stütze die Größe von Schubspannungen unwesentlich ist, die in einem zur Hauptdruckrichtung um einen beliebigen Winkel geneigten Schnitt auftreten, so wenig kann bei Konsolen und kurzen Kragarmen das wahre Tragverhalten nach den "Scherspannungen" in senkrechten Schnitten beurteilt werden.

Das bei den spannungsoptischen Versuchen festgestellte stabwerksartige Tragverhalten von homogenen Modellen ist bei den Betonversuchen ebenfalls zu beobachten. Es wird durch die Bildung von Rissen im Beton noch stärker ausgeprägt.

Bei den Rechteckkonsolen (Modellform M2 und M4) bleibt die vordere, untere Ecke spannungsfrei. Eine parabolische Lastverteilung auf die gesamte Höhe des Querschnittes unter der Einzellast war nicht zu beobachten, demzufolge auch keine lineare Verteilung der  $\sigma_x$ .

Die bezogenen Bruchlasten der Konsolen mit der nach der Hauptzugrichtung eingelegten Bewehrung sind erheblich größer als die bezogenen Bruchlasten der Konsolen, die nach der jetzigen Bemessungsart berechnet und bewehrt sind. Mit Ausnahme des Versuchs M2/B3 wird der Betonbruch erst durch die infolge Fließens der Bewehrung verursachte Drehung eingeleitet. Die primäre Bruchursache ist also das Fließen der Stahleinlagen. Die Betonzerstörung ist sekundär. Die Größe der Betondruckspannung kann nicht angegeben werden, da sie infolge der Kerbwirkung sehr groß ausfällt, aber nur ganz lokal auftritt.

## 5. ELASTIZITÄTSTHEORETISCHE UNTERSUCHUNG DES PROBLEMS

### 5.1 Die strenge Lösung des Problems

Zur Bestimmung des Spannungszustandes in Scheiben faßt man im allgemeinen die Differentialgleichungen aus den Gleichgewichtsbedingungen, aus den geometrischen Zusammenhängen und aus den Spannungs-Dehnungs-Gleichungen in einer einzigen Differentialgleichung  $\Delta \Delta F = 0$  zusammen. Dies ist durch die Einführung der Airy'schen Spannungsfunktion möglich. Die einzige Unbekannte bleibt die Spannungsfunktion  $F$ . Bei einfachen Problemen kann man diese Differentialgleichung unter Einhaltung der Randbedingungen integrieren und somit zur strengen Lösung des Problems gelangen. Die strenge Lösung des anstehenden Problems der in einem Stiel eingespannten Konsole ist wegen unüberwindlicher mathematischer Schwierigkeiten nicht möglich.

Mit der Einführung der Airy'schen Spannungsfunktion und deren Lösung unter Berücksichtigung der Randbedingungen für die keilförmige in einer Richtung unendlich ausgedehnten Scheibe kann, wie bereits früher gezeigt wurde, keine brauchbare Lösung gefunden werden, da sie die Zusammenwirkung mit dem Stiel nicht erfaßt. Vergleiche hierzu 1.2 Seite 3 ff. Tafel 12 und 13.

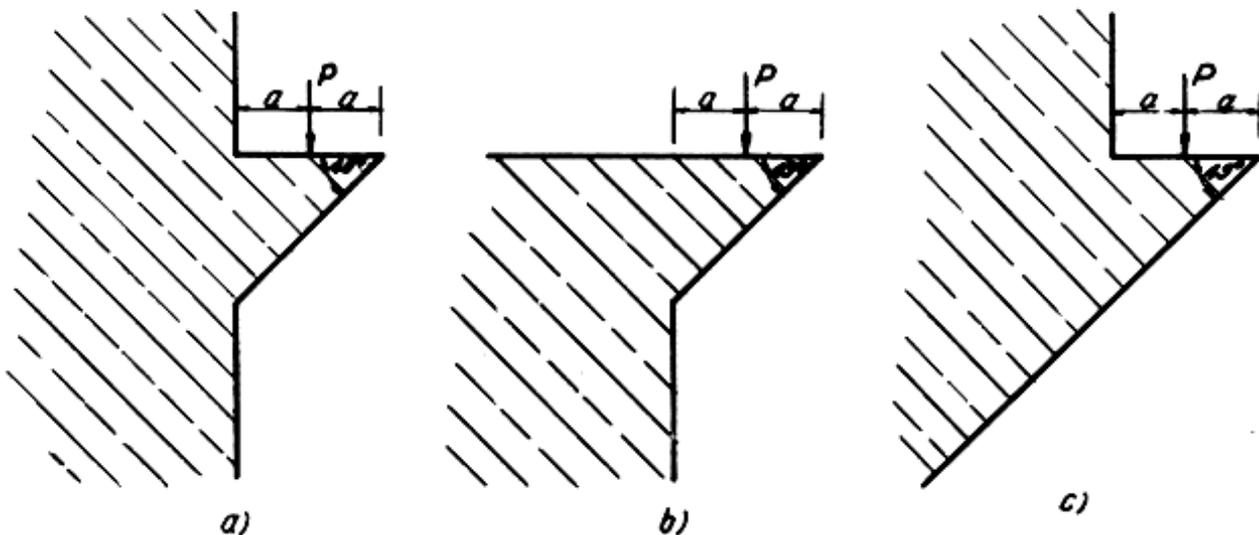
## 5.2 Näherungslösung des Problems mit Hilfe der Differenzenrechnung

Randwertprobleme können näherungsweise gelöst werden, wenn die Randbedingungen nur in einer bestimmten Anzahl von ausgewählten Randpunkten erfüllt werden. Die Berechnung erstreckt sich dann nicht über das gesamte Kontinuum der Scheibe, sondern beschränkt sich nur auf eine bestimmte Anzahl von Scheibenpunkten. Neben einem großen Aufwand an Rechenarbeit besitzt die Differenzenrechnung den Nachteil, daß sie keine allgemeinen Lösungen liefert. Auf das anstehende Problem angewandt, müßte man infolge des großen Spannungsgefälles ein sehr enges Raster wählen. Hinzu kommt, daß infolge der unregelmäßigen Form der Scheibe auch bei entsprechend großem Rechenaufwand keine ausreichend genauen Ergebnisse erzielt würden.

## 5.3 Lösung des Problems durch Vereinfachung der geometrischen Form der Scheibe

Die Lösungen der Spannungszustände in einer Halbscheibe, einer Viertelscheibe oder eines Keiles für die häufigsten Belastungsarten: stetige Randbelastung, Schubbelastung oder Einzellast sind in der Literatur angegeben. Es ergab sich deshalb die Frage, ob das anstehende Problem nicht näherungsweise gleichgesetzt werden kann mit den Problemen:

- a) Halbscheibe mit Keilspitze unter Einzellast
- b) Viertelscheibe mit Keilspitze unter Einzellast
- c) Kombination Halbscheibe mit keilförmiger Scheibe unter Einzellast.



Beim Studium des in Tafel 9, Tafel 10 und Tafel 11 aufgezeichneten Verlaufs der Isoklinen, ferner durch Vergleich des im Anhang Seite 102 zu findenden Verlaufs der Isochromaten dieser Näherungsformen mit den Isochromatenbildern auf Seite 18 und 19 ist leicht zu erkennen, daß durch den Übergang zu nicht mehr endlichen Scheibenformen kein identischer Verlauf der Hauptspannungsdifferenz mehr vorhanden ist. Der Spannungszustand im "Druckstab" der Konsole kann nicht angenähert bestimmt werden durch das Problem der Viertelscheibe mit Keilspitze unter Einzellast (Form b). Ebenso liefert die kombinierte Halb- und keilförmige Scheibe (Form c) unter Einzellast keinen gleichen Spannungsverlauf, wie er im "Zugstabbereich" der in eine Stütze eingespannten Konsole vorhanden ist.

#### 5.4 Das Verfahren zur Bestimmung der Hauptspannungssumme in Scheiben von Prof. Dr.-phil. Udo Wegner [11]

Wie bereits erwähnt, bereitet beim vorliegenden Problem die Ermittlung des Spannungszustandes durch rein mathematische Methoden größte Schwierigkeiten. Das Scheibenproblem wird durch die gegenseitige Beeinflussung von Konsole und Stiel recht kompliziert und stellt einen mehrfach zusammenhängenden Bereich dar. Die spannungsoptisch ermittelten Spannungslinien wurden zwar durch die Bruchversuche bestätigt, sie allein befriedigen jedoch nicht. Wenn auch nach dem heutigen Stand der Modellstatik die am Modellversuch ermittelten Werte für den Ingenieur hinreichend genau genug sind, so haften diesen Meßwerten infolge Randstörungen am Modell und infolge Meßschwierigkeiten am Rande Fehler an, die die Genauigkeit der Ergebnisse einschränken.

Es lag darum nahe, ein einfaches, gut konvergierendes Approximationsverfahren ausfindig zu machen, das  $(\sigma_1 + \sigma_2)$  im Innern und am Rande festlegt, welches Ausgangswerte benützt, die nicht experimentell am Modell gefunden wurden.

Professor Wegner hat ein solches Verfahren schon im Jahre 1936 entwickelt und mit Erfolg angewendet. Der Übersicht halber werden die Grundlagen des Verfahrens kurz wiedergegeben:

$F(x, y)$  sei die Airy'sche Spannungsfunktion für die belastete Scheibe, die der partiellen Differentialgleichung  $\Delta \Delta F = 0$  genügt.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^s X(s) \cdot ds ; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = - \int_0^s Y(s) \cdot ds$$

X und Y = Komponenten der Randkräfte  
S = Bogenlänge.

Führt man die kurveninvarianten Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial n} \quad \text{ein}$$

$\partial n$  = Linienelement der Randkurve c längs der äußeren Normalen, wobei C das einfach zusammenhängende Gebiet umschließt,

dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial s} \Big|_c = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_c \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_c \cdot \frac{dy}{ds}$$

wenn C:  $(x(s); y(s))$  ist

Außerdem ist

$$\frac{\partial F}{\partial s} \Big|_c = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_c \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_c \cdot \frac{dx}{ds}$$

wird  $\frac{\partial F}{\partial s} \Big|_c = f(s)$  ;  $\frac{\partial F}{\partial n} \Big|_c = g(s)$  gesetzt, dann sieht man sofort die mechanische Bedeutung von  $f(s)$ .  $f(s)$  ist das Moment aller zwischen Anfangs- und Endpunkt der Integration angreifenden äußeren Kräfte, bezogen auf den Endpunkt der Integration.  
 $g(s)$  ist die Normalkomponente aller Kräfte.

Das obige Differentialgleichungsproblem ist äquivalent dem Variationsproblem

$$\frac{1}{2} \iint_D (\Delta F)^2 \cdot dx \cdot dy = \text{Extremum}$$

mit den Randbedingungen

$$F|_c = f(s) ; \quad \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_c = g(s)$$

Mit Hilfe von 2 Lagrange'schen Parametern kann dieses durch die Randbedingungen gebundene Variationsproblem in ein freies Variationsproblem umgewandelt werden. Eliminiert man nun die Lagrange'schen Parameter durch Relationen, die sich aus den natürlichen Randbedingungen ergeben, so erhält man ein in den Randbedingungen äquivalentes Variationsproblem in der Form

$$\frac{1}{2} \iint \varphi^2 dx \cdot dy + \int_C \left\{ f(s) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_C - g(s) \cdot \varphi \Big|_C \right\} ds = \text{Extremum}$$

unter der Nebenbedingung  $\Delta \varphi = \Phi$  ;  $\varphi = \Delta F = \sigma_1 + \sigma_2$

Für  $\varphi$  macht man folgenden linearen Ansatz von ebenen Potentialfunktionen

$$\varphi = c_0 + \sum_{k=1}^n \hat{c}_k \hat{\varphi}_k + \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k$$

und  $\varphi_k + i \hat{\varphi}_k = f_k(x + iy)$

$\varphi_k$  und  $\hat{\varphi}_k$  sind zueinander konjugierte Potentialfunktionen.  $f_k(x + iy)$  sind im Gebiet G reguläre analytische Funktionen. Greifen, wie im vorliegenden Fall, am Rande Einzelkräfte und Einzelmomente an, dann kann man diese Singularitäten in  $\varphi$  berücksichtigen.

Ansatz des freien Variationsproblems

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 4 \Re(\varphi'(z)) = \Phi(x, y)$$

$$\frac{1}{2} \iint \Phi^2 dx \cdot dy + \int_C \left\{ f(s) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_C - g(s) \Phi \Big|_C \right\} ds = \text{Minimum}$$

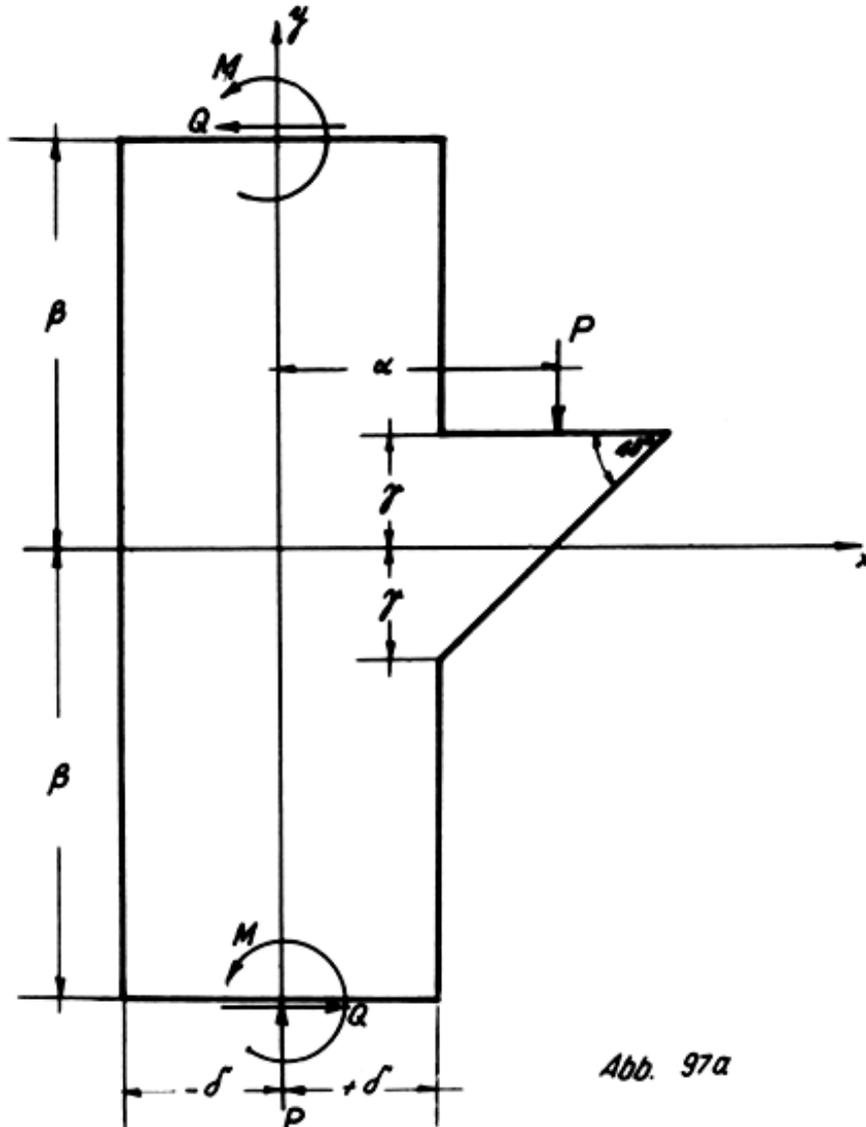


Abb. 97a

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{iP}{2\pi} [\ln(\alpha + i\gamma - z) - \ln(-i\beta - z)] + \\ &+ \frac{Q}{2\pi} [\ln(i\beta - z) - \ln(-i\beta - z)] + \\ &+ \frac{iM}{2\pi} \left[ \frac{1}{(i\beta - z)} + \frac{1}{(-i\beta - z)} \right] + C_0 + C_1 z + \dots \end{aligned}$$

Durch geeignete Wahl von  $\beta$  wird  $M = 0$  und  $\varphi(z)$  vereinfacht sich

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{iP}{2\pi} \left[ \frac{1}{-i\beta - z} - \frac{1}{\alpha + i\gamma - z} \right] + \\ &+ \frac{Q}{2\pi} \left[ \frac{1}{-i\beta - z} - \frac{1}{-i\beta - z} \right] + C_1 + C_2 z + \dots \end{aligned}$$

Aufspaltung in Real- und Imaginärteil  $z = x + iy$

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{1}{z + i\beta} + \frac{1}{\alpha + i\gamma - z} \right] \cdot \frac{iP}{2\pi} = \\ &= - \left[ \frac{1}{x + i(y + \beta)} + \frac{1}{(\alpha - x) + i(\gamma - y)} \right] \cdot \frac{iP}{2\pi} = \\ &= - \left[ \frac{x - i(y + \beta)}{x^2 + (y + \beta)^2} - \frac{(\alpha - x) - i(\gamma - y)}{(\alpha - x)^2 + (\gamma - y)^2} \right] \cdot \frac{iP}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\text{I.) } \mathcal{R}_2 \left[ \frac{iP}{2\pi} \left( \frac{1}{-i\beta - z} - \frac{1}{\alpha + i\gamma - z} \right) \right] = \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{y + \beta}{x^2 + (y + \beta)^2} - \frac{\gamma - y}{(\alpha - x)^2 + (\gamma - y)^2} \right]$$

$$\text{II.) } \mathcal{R}_2 \left[ + \frac{Q}{2\pi} \left( \frac{1}{-i\beta - z} - \frac{1}{-i\beta - z} \right) \right] = \frac{Q}{2\pi} \left[ \frac{-x}{x^2 + (\beta + y)^2} + \frac{x}{x^2 + (\beta - y)^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= 4 \left\{ \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{y + \beta}{x^2 + (y + \beta)^2} - \frac{\gamma - y}{(\alpha - x)^2 + (\gamma - y)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q}{2\pi} \left[ -\frac{x}{x^2 + (\beta + y)^2} + \frac{x}{x^2 + (\beta - y)^2} \right] \right\} + C_1 + C_2 x + C_3 (x + iy)^2 + \dots \end{aligned}$$



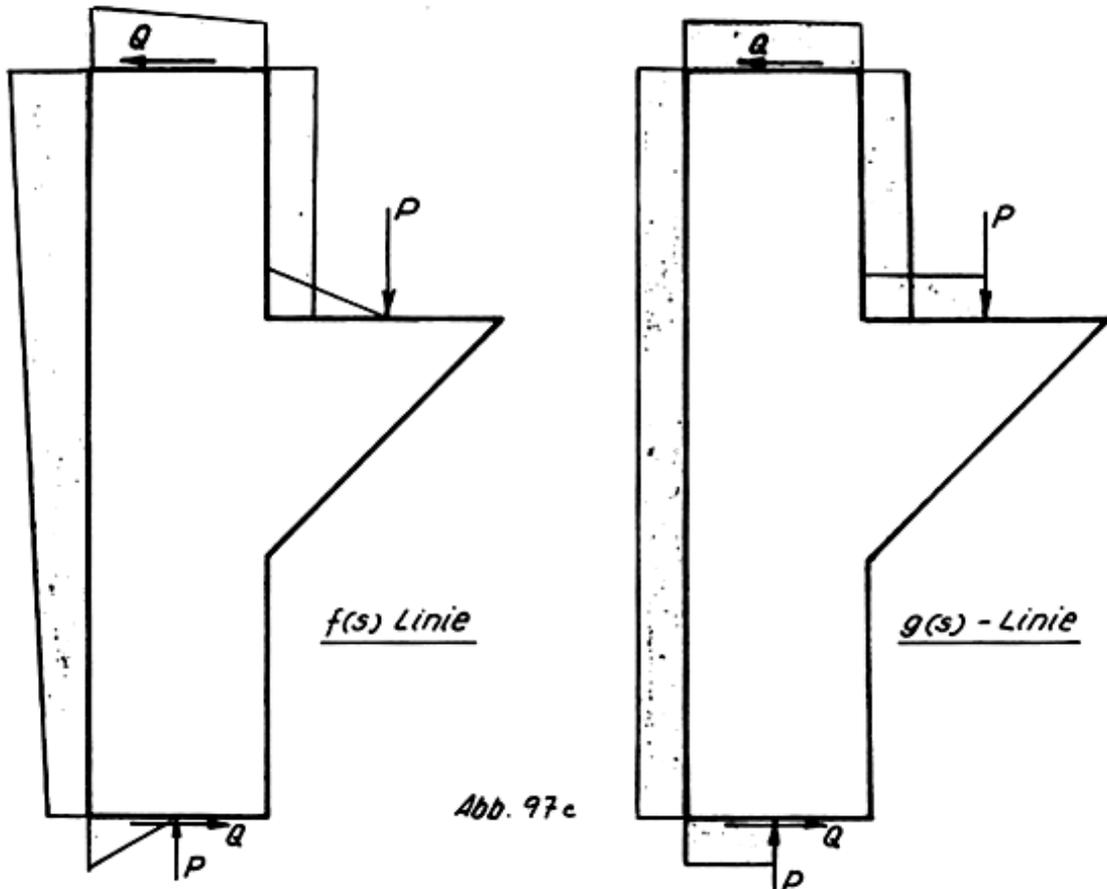


Abb. 97c

für die Bereiche  
 $\gamma \leq y \leq \beta$   
 $-\delta < x < \alpha$

$$f(s) = (\alpha - x) P$$

$-\beta \leq y \leq \beta$  ;  $x = -\delta$   
 $y = -\beta$  ;  $-\delta \leq x \leq 0$

$$f(s) = (\alpha - x) \cdot P - \frac{P \cdot \alpha}{2\beta} (\beta - y)$$

$$g(s) = \text{const} = P$$

Die Lösung des freien Variationsproblems lieferte

$$2C_1 + 0,1813 C_2 + 0,0427 C_3 - 0,9502 C_4 + 0,0299 C_5 = 2,0437 P$$

$$0,1813 C_1 + 0,6082 C_2 + 0,0299 C_3 + 0,0682 C_4 + 0,0223 C_5 = -0,1814 P$$

$$0,0427 C_1 + 0,0299 C_2 + 1,1147 C_3 + 0,0182 C_4 + 0,0106 C_5 = -2,7537 P$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems wurde für  $C_1, C_2, C_3$  durchgeführt.

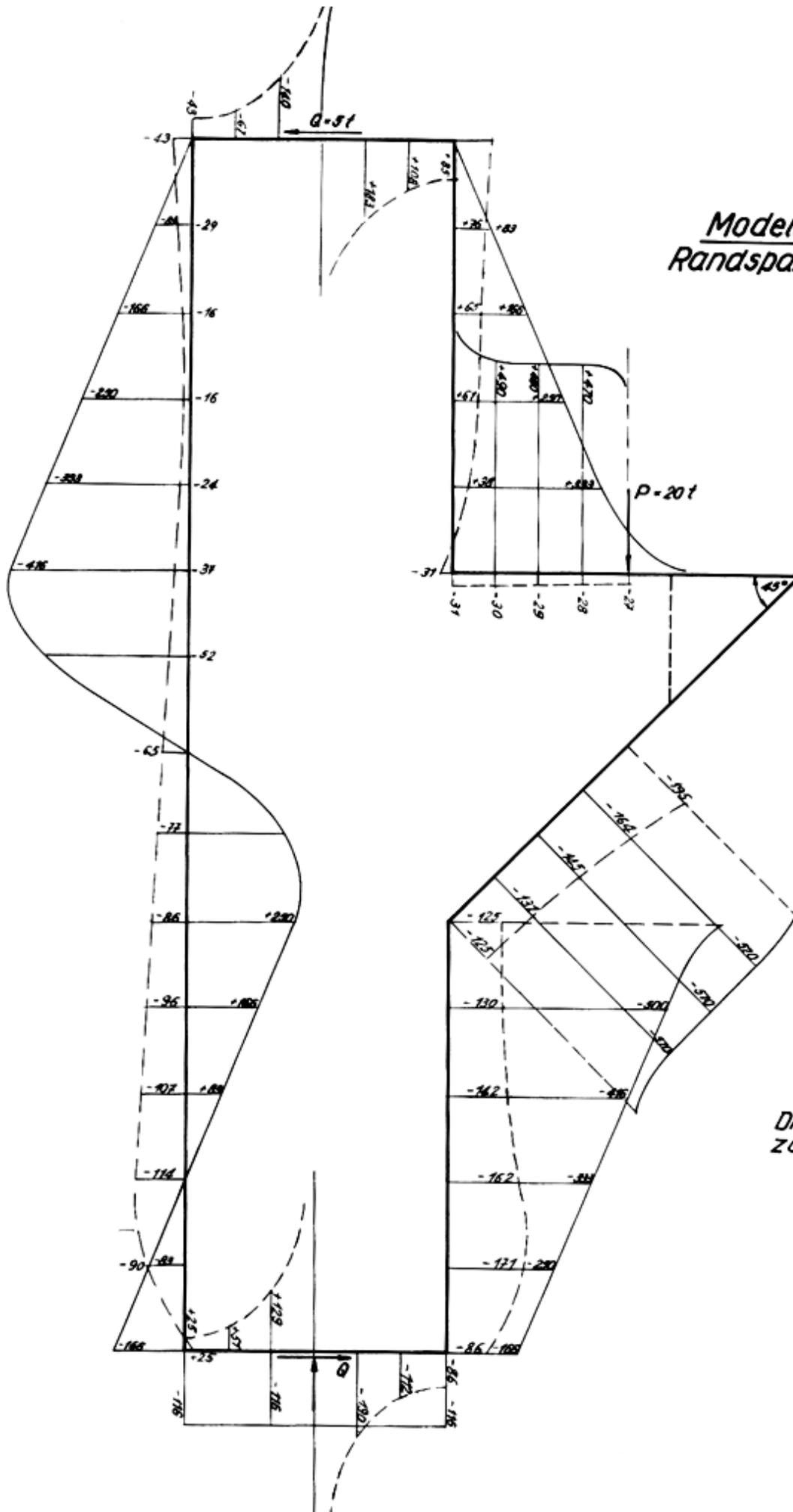
$$C_1 = + 1,1214 P$$

$$C_2 = - 0,5047 P$$

$$C_3 = - 2,4996 P$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \phi(x, y) = 4 \cdot \left\{ \frac{P}{2\pi} \cdot \left[ -\frac{y + \beta}{x^2 + (y + \beta)^2} - \frac{\gamma - y}{(\alpha - x)^2 + (\gamma - y)^2} \right] \right\}$$

Modell M<sub>1</sub>  
 Randspannungsverlauf



Druck (-)  
 Zug (+)

$$+ \frac{Q}{2\pi} \left[ -\frac{x}{x^2 + (\beta + y)^2} + \frac{x}{x^2 + (\beta - y)^2} \right] + 1.1214P - 0.5047Px - 2.4996Py \}.$$

worin  $Q = + \frac{P \cdot \alpha}{2\beta}$  bedeutet.

Die Auswertung des Ergebnisses ist auf dem nachfolgenden Doppelblatt zu finden.

### 5.5 Untersuchung der Trajektorien in der Nähe der einspringenden Ecke

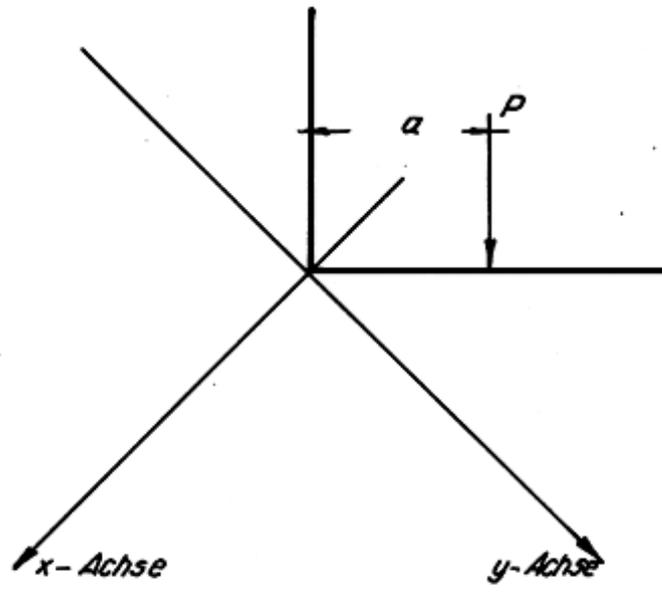


Abb. 97d

Aufstellung der 3 Spannungsgrößen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  in komplexer Schreibweise für das obige Spannungsproblem der Scheibe.

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau = \frac{\sqrt{2} \cdot P \cdot (1-i)}{8 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{1}{\left[1 + i \left(\frac{z}{a}\right)^{2/3}\right]^2} \cdot \left\{ \left(\frac{z}{a}\right)^{-3/3} \frac{z}{a} + 3i \left(\frac{z}{a}\right)^{-5/3} \cdot \frac{\bar{z}}{a} + i \left(\frac{z}{a}\right)^{-3/3} - 4 \left(\frac{z}{a}\right)^{1/3} \right\}$$

wobei  $z = x + iy$  ;  $\bar{z} = x - iy$  ist.

Trennung in Real- und Imaginärteil liefert bei den folgenden Abkürzungen

$$z = r \cdot e^{i\chi} = r \cdot (\cos \chi + i \cdot \sin \chi)$$

$$\frac{\chi}{3} = \gamma ; \left(\frac{r}{a}\right)^{1/3} = \rho$$

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{\sqrt{2} \cdot P}{8 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{1}{(1 + 2\rho^2 \sin 2\gamma + \rho^4)^2} \cdot Z_1$$

$$\begin{aligned}
Z_1 \equiv & \rho^{-1} [\cos \gamma + \sin \gamma + \cos 7\gamma - \sin 7\gamma] + \\
& + \rho^1 [-4 \cos \gamma - 4 \sin \gamma + 2 \cos 3\gamma - 2 \sin 3\gamma + 3 \cos 5\gamma + 3 \sin 5\gamma - \\
& - 2 \cos 9\gamma - 2 \sin 9\gamma] + \\
& + \rho^3 [8 \cos \gamma + 8 \sin \gamma - 2 \cos 3\gamma + 2 \sin 3\gamma + 6 \cos 7\gamma - 6 \sin 7\gamma] + \\
& + \rho^5 [-3 \cos \gamma - 3 \sin \gamma + 4 \cos 5\gamma + 4 \sin 5\gamma].
\end{aligned}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{2} \cdot P}{16 \pi a} \cdot \frac{1}{(1 - 2\rho^2 \sin^2 \gamma + \rho^4)^2} \cdot Z_2$$

$$\begin{aligned}
Z_2 \equiv & \rho^{-1} [\cos \gamma - \sin \gamma - \cos 7\gamma - \sin 7\gamma] + \\
& + \rho^1 [4 \cos \gamma - 4 \sin \gamma - 2 \cos 3\gamma - 2 \sin 3\gamma + 3 \cos 5\gamma - \\
& - 3 \sin 5\gamma - 2 \cos 9\gamma + 2 \sin 9\gamma] + \\
& + \rho^3 [8 \cos \gamma - 8 \sin \gamma - 6 \cos 7\gamma - 6 \sin 7\gamma] + \\
& + \rho^5 [-3 \cos \gamma + 3 \sin \gamma + 4 \sin 5\gamma - 4 \cos 5\gamma].
\end{aligned}$$

$$\sigma_y + \sigma_x = \frac{2\sqrt{2} \cdot P}{3\pi \cdot a} \cdot \frac{1}{(1 - 2\rho^2 \sin^2 \gamma + \rho^4)^2} \cdot Z_3$$

$$\begin{aligned}
Z_3 \equiv & \rho^{-1} (\cos \gamma - \sin \gamma) - \rho^1 [\cos \gamma - \sin \gamma - 2 \cos 3\gamma] + \\
& + \rho^3 [2 \cos \gamma - \cos 5\gamma - \sin 5\gamma] - \rho^5 [-\cos 3\gamma + \sin 3\gamma]
\end{aligned}$$

Für kleine Werte von  $r$  (also in der Nähe der Ecke) wird:

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{8 \cdot \pi \cdot a} \cdot P \cdot \rho^{-1} [\cos \gamma + \sin \gamma + \cos 3\gamma - \sin 3\gamma]$$

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{16 \cdot \pi \cdot a} \cdot P \cdot \rho^{-1} [\cos \gamma - \sin \gamma - \cos 3\gamma - \sin 3\gamma]$$

$$\sigma_y + \sigma_x = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \pi \cdot a} \cdot P \cdot \rho^{-1} \cdot (\cos \gamma - \sin \gamma)$$

Die Differentialgleichungen der Hauptspannungstrajektorien

$$\begin{aligned} \frac{1}{3r} \cdot \frac{dr}{d\gamma} \cdot (\cos 2\gamma + \cos 4\gamma + \sin 4\gamma + 2 \cos 10\gamma - \sin 10\gamma \pm \\ \pm 4 \cos 3\gamma \cdot \sqrt{1 - \sin 6\gamma}) \\ = 2 \sin 4\gamma - 2 \cos 4\gamma + 2 \cos 10\gamma - 2 \sin 10\gamma \mp 4 \sin 3\gamma \cdot \sqrt{1 - \sin 6\gamma} \end{aligned}$$

Für kleine Werte von  $\chi$ , d.h. auch für kleinere Werte von  $\gamma$  wird:

$$\frac{1}{3r} \cdot \frac{dr}{d\gamma} \cdot (4\gamma - 10\gamma \pm 4\sqrt{1 - 6\gamma}) = 28\gamma$$

d.h. da  $\gamma = \frac{\chi}{3}$  war, ist

$$\ln r = \frac{14}{3} \int \frac{d\chi}{-1 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\chi^2} - \frac{2}{\chi}}} + C$$

Integration und Entwicklung für kleine Werte von  $\chi$ :  $r = C \cdot e^{-c\chi}$

mit  $C =$  einer willkürlichen Konstanten

$c = -6,1$  erhält man für die eine Schar von Trajektorien  $\epsilon \approx 95^\circ$  konstant für alle Trajektorien der einen Schar in der Nähe des Nullpunktes.

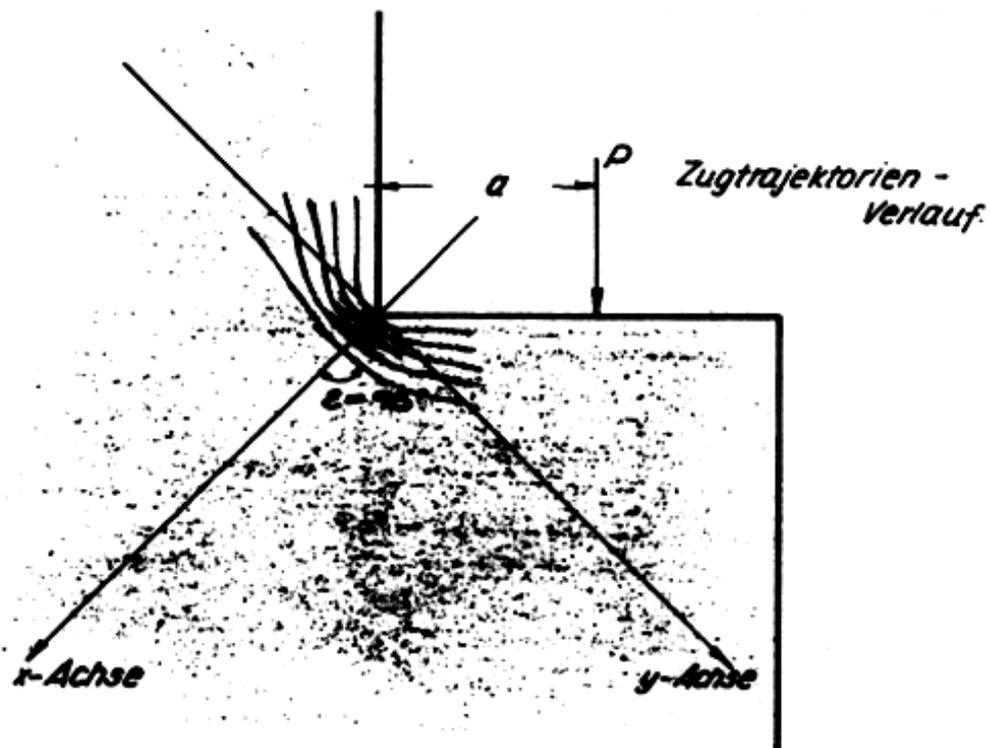


Abb. 97

### 5.6 Untersuchung über die Form des Risses in der Nähe des Nullpunktes

Aus der allgemeinen Form der Elastizitätsbeziehungen nach Prof. Wegner lautet die Reißbedingung für spröde Körper:

$$|\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}| = \text{constant}$$

Dann lautet die Gleichung für den Winkel  $\eta$  des vom Nullpunkt ausgehenden Risses

$$\text{ctg } \eta = \frac{2(\pi - \alpha) \cdot X \cdot Y - \pi (X^2 + Y^2) \sin \alpha' \cdot \cos \alpha'}{(\pi - \alpha')(X^2 - Y^2) + (X^2 + Y^2) \cdot (\alpha' - \pi \cdot \sin^2 \alpha')}$$

mit  $\alpha' = \frac{\pi}{4}$

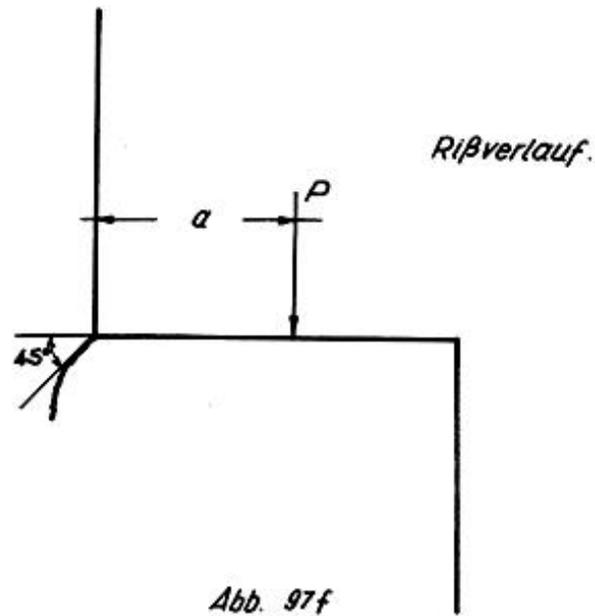
$$X = P \cdot \cos 45^\circ = P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Y = P \cdot \sin 45^\circ = P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

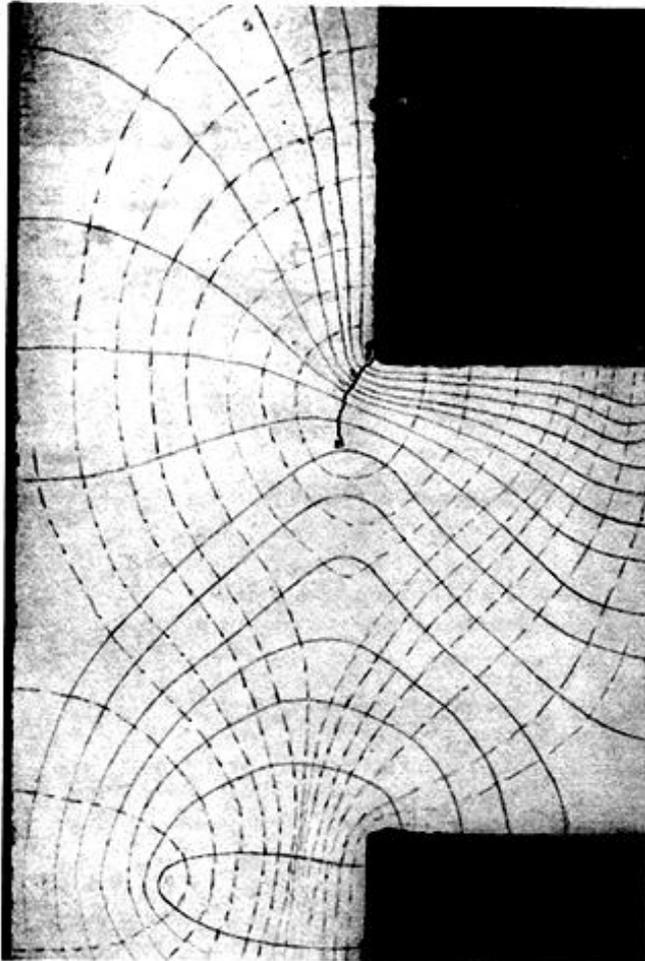
$$\text{ctg } \eta = \frac{2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot P^2 \cdot \frac{1}{2} - \pi \cdot P^2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{P^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{\frac{3}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi}{-\frac{\pi}{4}} = -1$$

$\eta = -45^\circ$

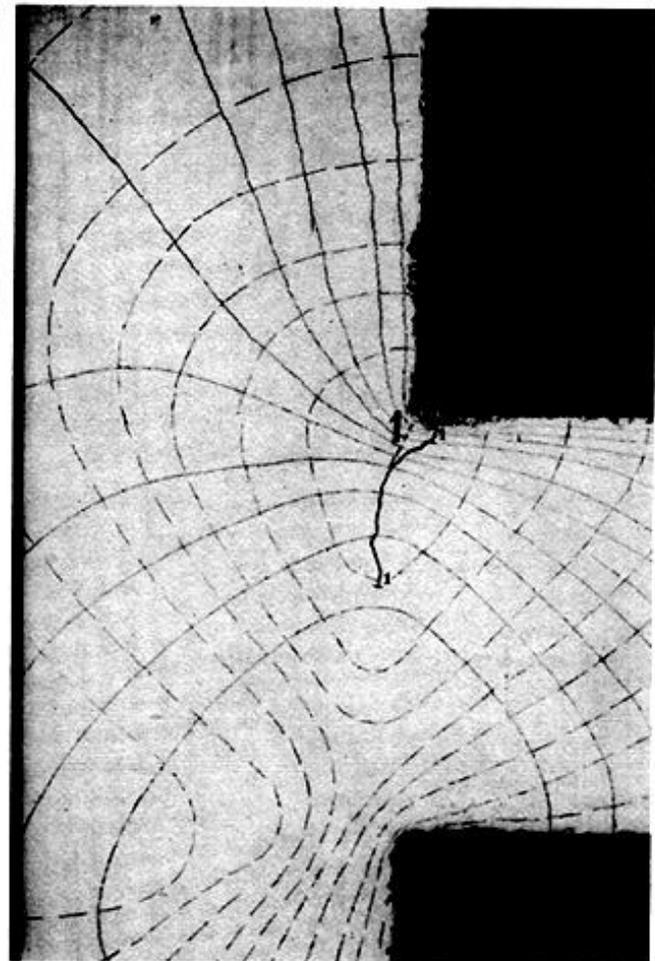
Ergebnis: RiB bildet sich im Winkel von  $45^\circ$  bei gleichen Längen der Scheibenbereiche, die Kurve ist konvex und unabhängig von  $a$ .



Beim Vergleich mit den durchgeführten Bruchversuchen ist zu beachten, daß die auf Seite 78 angegebene Elastizitätsbeziehung für unendlich ausgedehnte Bereiche gilt, und das Ergebnis nur angenähert bei den gegebenen endlichen Ausdehnungen der Versuchskörper auf die Modelle M1 und M2 übertragen werden kann. Vgl. Bruchbilder Seite 48 ff.



*Rißbild bei Lst. 3 P=15*



*Rißbild bei Lst. 4 P=20 t*

## 6. VORSCHLAG ZUR BERECHNUNG, BEMESSUNG UND BEWEHRUNGSFÜHRUNG DER KONSOLEN UND KURZEN KRAGARME

### 6.11 Konsolformen

Es soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, inwieweit man die üblichen und konstruktiv sinnvollen Konsolformen auf die untersuchten Formen zurückführen kann. Die Modelle M1 und M3 sind durch den Winkel  $\alpha$  und das Verhältnis

$d : a : e = 1,5 : 1,0 : \geq 1,0$  festgelegt (siehe Abb.98).

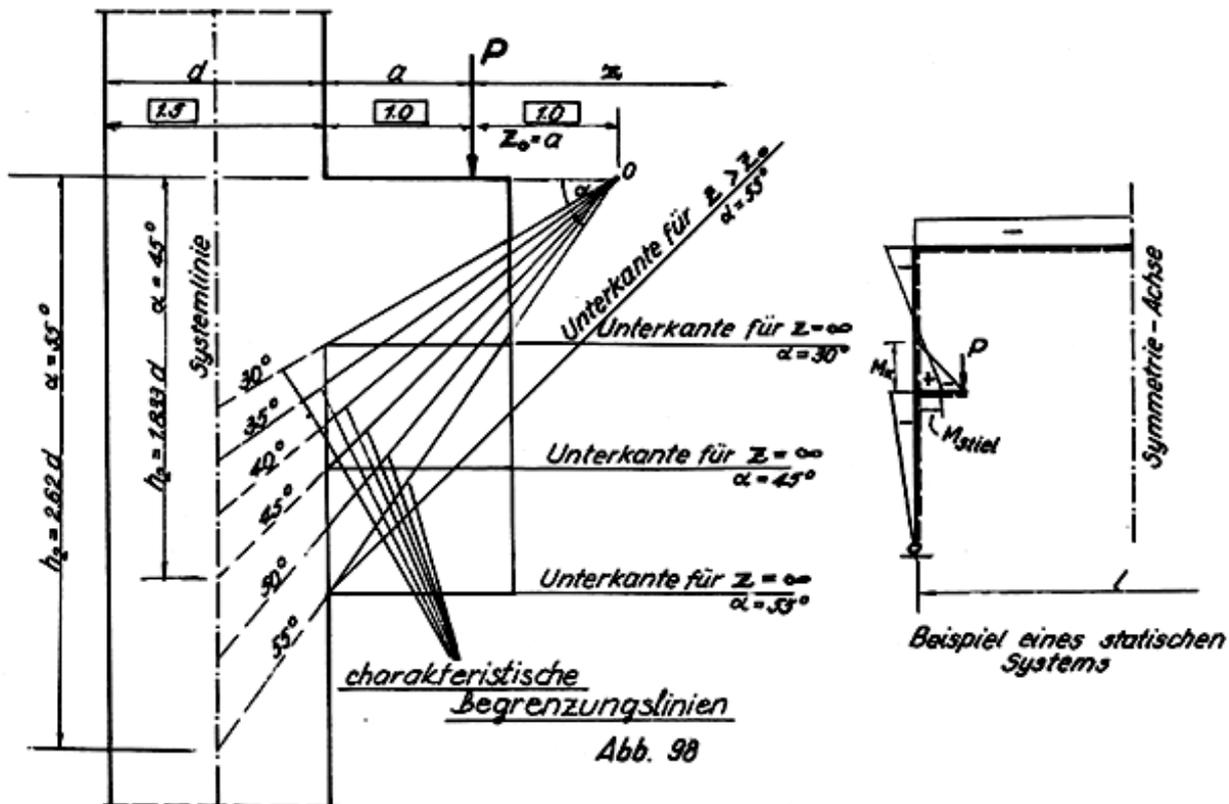


Abb. 98

Der Konstruktion legt man im allgemeinen die vorhandenen Schnittkräfte zugrunde. Das Konsolmoment kann im ungünstigsten Fall doppelt so groß wie das Stielmoment werden. Ist  $M_K = 2 M_{St}$  dann sollte  $h_2 = 2 \cdot d$  werden.  $M_K = 2 M_{St}$  ist aber ein Sonderfall. Durch die Steifigkeitsverhältnisse des statischen Systems, die Überlagerung anderer Lastfälle und durch die im Stiel fast immer vorhandene Normalkraft (Druckkraft) verschiebt sich das Verhältnis der Momente zugunsten des Stiels.  $M_K \leq 2 M_{St} \rightarrow h_2 \leq 2 d$ . Bei  $\alpha = 45^\circ$  wird  $h_2 = 1,833 \cdot d$ . Daraus ist zu erkennen, daß Konsolkonstruktionen mit  $\alpha \geq 45^\circ$  wenig sinnvoll sind. Konsolen mit z.B.  $\alpha = 60^\circ$  besitzen an der Einspannstelle eine zu große Konstruktionshöhe. Die Konsolform mit  $\alpha \cong 45^\circ$  stellt somit eine obere Grenze dar.

Außerdem sind der Neigung der Unterkante der Konsol durch die zur Verankerung der Stahleinlagen erforderliche Konstruktionshöhe im Bereich der Lasteintragung Grenzen gesetzt. Durch die Festlegung des Punktes O ( $Z_0 = a$ ) (siehe Abb.98) wird die Konsolform durch die charakteristischen Begrenzungslinie festgelegt. Wählt man aus konstruktiven Gründen eine Konsolform, deren Begrenzungslinien sich im Bereich  $z \geq Z_0$  schneiden, dann wird der Kräftezustand nicht verändert. Beim kurzen Kragarm (Modellform M2 mit  $Z_0 = \infty$ ) bleibt die untere vordere Ecke spannungslos.

Die vorliegenden Untersuchungen theoretischer und praktischer Art und einige spannungsoptische Vorversuche an Konsolmodellen mit variablen  $\alpha$  ließen erkennen, daß bei einer Konsol mit  $\alpha = 30^\circ$  (Modellform M3) die Randspannungen am oberen Rand beim homogenen Modell sich mehr der Momentenlinie anpassen und nicht mehr konstant entlang dem Rande bleiben. Dem "stabwerksähnlichen" Verhalten wird ein Biegezustand überlagert. Die ermittelten  $\sigma_x$ -Linien sind

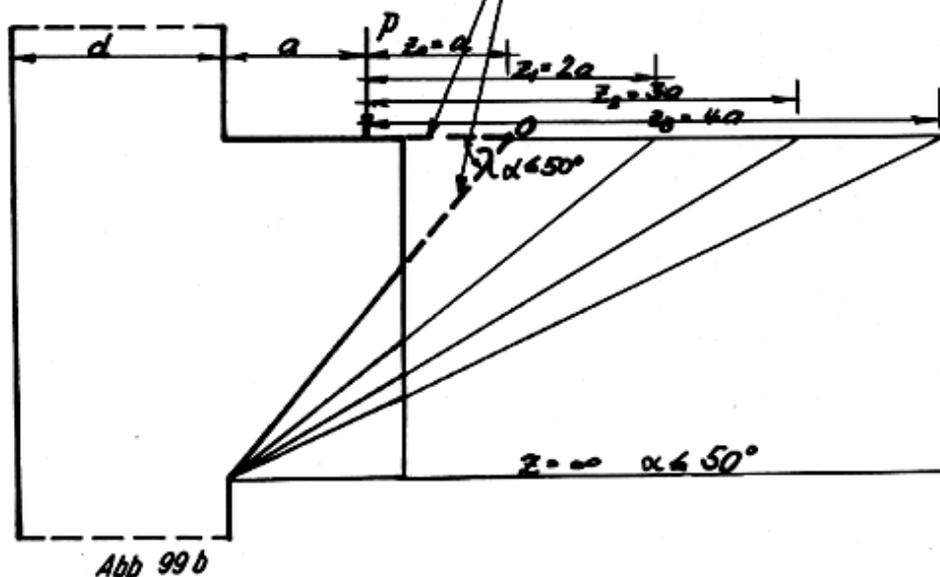
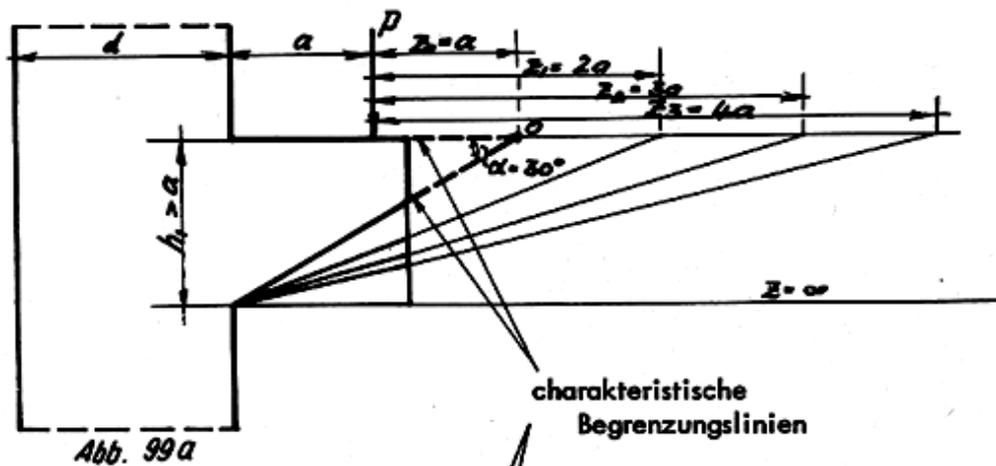
außerhalb der Störstellen wieder geradlinig. Berücksichtigt man beim Stahlbeton, daß seine Zugzone unter Gebrauchslast teilweise gerissen ist, und der Rißzustand das stabwerkähnliche Verhalten fördert (vgl. hierzu Seite 59), dann kann man Konsolen mit vorwiegend "stabwerkähnlichem" Verhalten durch den Winkel  $30^\circ < \alpha < 45-50^\circ$  begrenzen.

## 6.12 Vorschlag zur Bestimmung des Begriffsbereichs

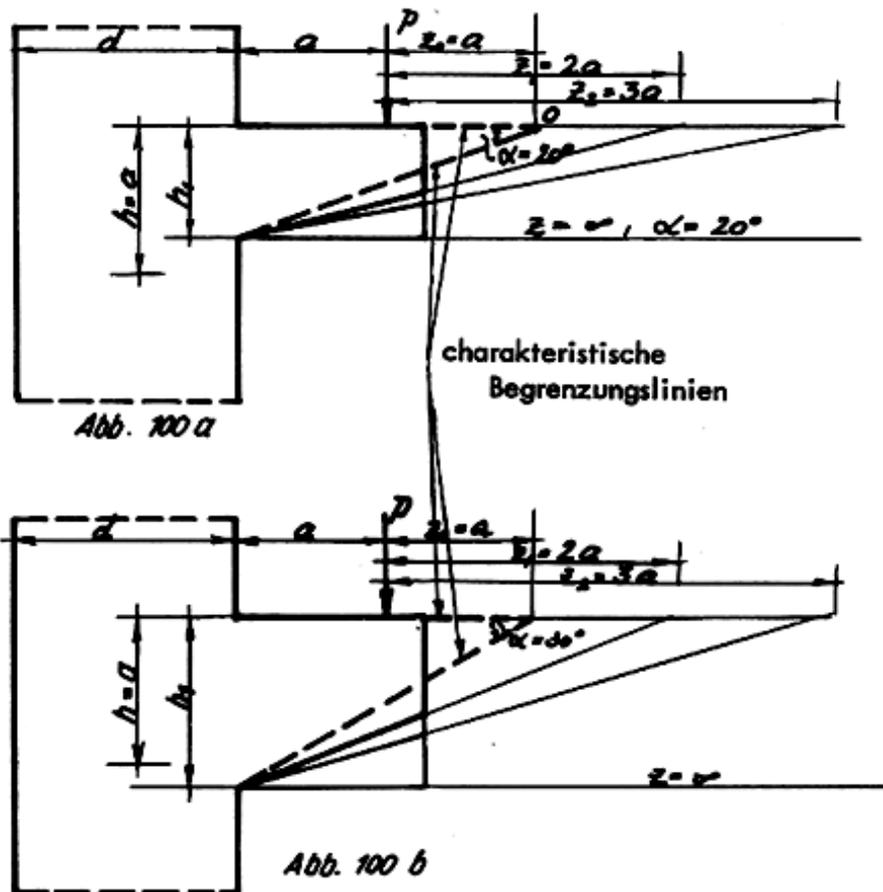
### Konsolen - kurze Kragarme

Gemäß den bisherigen Überlegungen wird vorgeschlagen:

1. Konsolen und kurze Kragarme sind solche Konstruktionsglieder, deren Länge  $a <$  ihrer Höhe  $h_1$  ist, siehe Abb. 99. (Störbereich nach dem Prinzip von de Saint-Venant).
2. Konsolen mit einem Winkel  $\alpha > 30^\circ$  gleichbedeutend mit  $\frac{h_1}{a} > 1,2$  können nach der Stabwerksanalogie berechnet und bemessen werden. Hierbei ist zu beachten, daß der Winkel  $\alpha$  der Öffnungswinkel der charakteristischen Begrenzungslinien der Konsole ist. Der Abstand des Punktes  $O$  von der Last  $P$  ist durch die Strecke  $Z_0 = a$  festzulegen. Für die Bemessung der Konsole ist es unbedeutend, wenn die Unterkante der Konsole eine geringere Neigung hat oder sogar parallel zum oberen Rand verläuft, d.h. wenn  $z > Z_0$  wird.



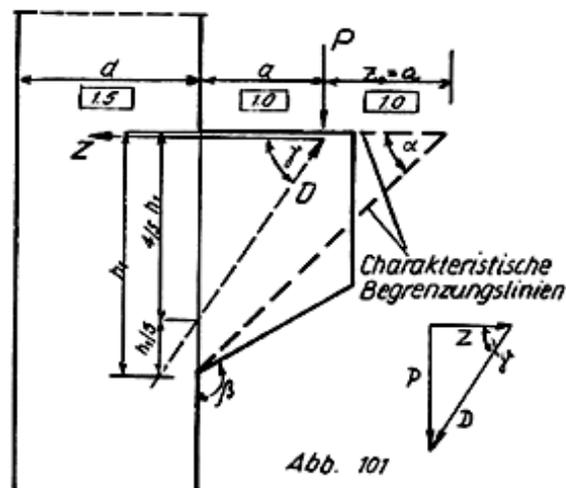
3. Konsolen mit  $\alpha < 30^\circ$  ( $\frac{h_1}{a} < 1,2$ ) oder auch die entsprechenden Rechteckkonsolen sind als Biegebalken zu berechnen. Die Bewehrung darf aber nicht entsprechend der Momentenabnahme abgestuft werden, damit die im Bereich der Lastausbreitung vorhandenen Quersugspannungen durch Bewehrung gedeckt werden.



## 6.2 Bemessungs- und Bewehrungsvorschlag

### 6.2.1 Konsolen mit $a \leq h_1$ ; $\alpha > 30^\circ$

#### 6.2.1.1 Ermittlung der Stahleinlagen



$P$  wird mit der Richtung der Zugkraft angenähert parallel zum Rand und der Druckkraftresultierenden gemäß nebenstehender Skizze zum Schnitt gebracht. Der lotrechte Abstand der Druckkraftresultierenden von der unteren Ecke beträgt im Gebrauchszustand  $\sim \frac{h_1}{5}$ .

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{Z} = \frac{0,8 \cdot h_1}{a}$$

$$Z = \frac{a}{0,8 \cdot h_1} \cdot P; F_e = \frac{Z}{\sigma_e}$$

Für eine Neigung von  $Z$  siehe Tabellen A und B (Seite 91, 92).

### 6.2.12 Berechnung der vorhandenen Betonspannungen

Bisher wurde gefordert, daß die für den Zustand II gültigen Druckspannungen  $\sigma_x$  an der Einspannstelle  $\leq \sigma_{bzul}$  bleiben. Die Größe dieser errechneten  $\sigma_x$ -Spannungen liegt aber weder annähernd im Bereich der vorhandenen Hauptdruckspannungen und ihren Richtungen, noch sind es Komponenten dieser Hauptdruckspannungen. Bei der Konsolform M1 (45° geneigte Unterkante) treten abgesehen von den wesentlich größeren Kerbspannungen an der einspringenden Ecke die größten Druckspannungen am Rande auf und verlaufen parallel zum Rand. (Abweichung von der  $\sigma_x$ -Richtung = 45°). Beim kurzen Kragarm Modellform M2 (Unterkante parallel zur Oberkante) liegen die größten Druckspannungen im Innern der Scheibe. Ihre Richtung ist keineswegs parallel zum Rand, sondern um 45° dazu geneigt.

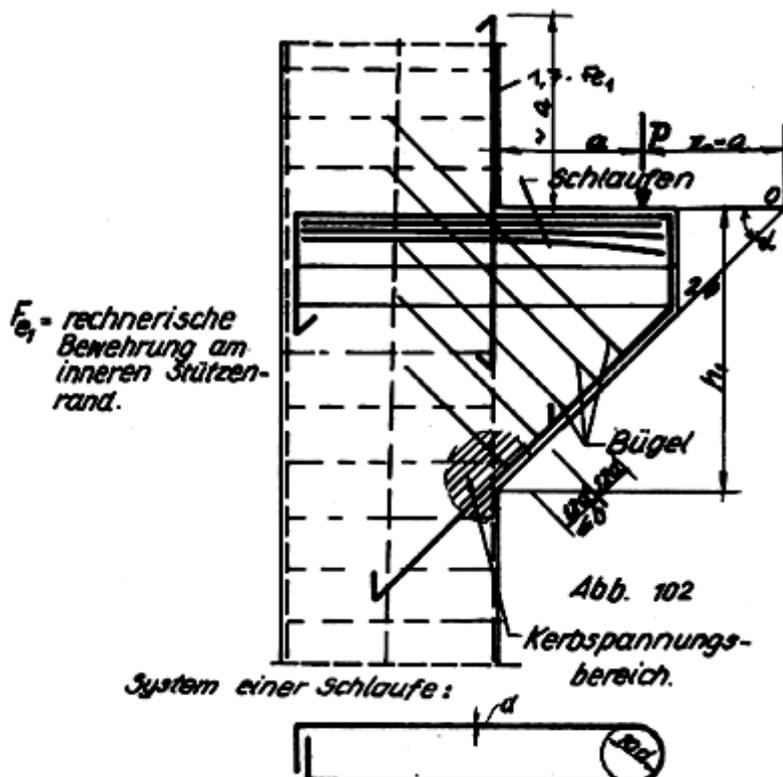
Die Betondruckspannungen infolge der Kerbwirkung in der unteren Ecke sind von der Konsolform, dem Winkel  $\beta$  abhängig. Durch die Plastifizierungsfähigkeit des Betons wird die Spannungsspitze jedoch abgebaut. Die größte Druckspannung im Gebrauchszustand ist daher wie z.B. auch in jeder Rahmen-Druckecke unbekannt.

Die Bruchversuche haben weiter deutlich gezeigt, daß bei gerissener Zugzone der Betondruckbereich wie ein "Druckstab" wirkt, der schließlich wie eine Stüle durch Bildung von Gleitflächen zerstört wird. Die Breite des Druckstabes ist von der Rißbildung abhängig. Es wird von den Versuchen und der Erfahrung bestätigt, daß bei Einhaltung von

vorh.  $\sigma < \text{zul. } \sigma$  und vorh.  $\tau < \text{max. } \tau_0$ ,

berechnet mit den üblichen Ansätzen, die geforderte Sicherheit gegen Betonbruch vorhanden ist. Die genannten Grenzen bewirken, daß die Betonabmessungen nicht zu gering ausfallen. Bei den Versuchen handelt es sich um Konsolen mit "schwacher" Bewehrung. Konsolen mit "starker" Bewehrung können wohl kaum ausgeführt werden, da die Stahleinlagen schwer unterzubringen sind (vgl. Abb. 53 Seite 38. Die Bewehrung von M2/B3 fällt noch unter den Begriff "schwache Bewehrung").

### 6.2.13 Bewehrungsführung



Die wirksamste Bewehrungsführung ist, wie in Abb. 102 dargestellt, die Schlaufenbewehrung, sowohl im Hinblick auf das Einbringen des Betons als auch im Hinblick auf die bei Kranbahnkonsolen stets vorhandenen Aussparungen. Sie umschließt den Lasteintragungsbereich. Bei der Wahl der Durchmesser ist zu beachten, daß bei vorgegebener Konsolbreite der lichte Innendurchmesser der Stahleinlagen  $10 \cdot d$  betragen muß. Die Schlaufen werden im Stiel verankert. Zwei der insgesamt notwendigen Bewehrungsstäbe werden an den Außenseiten entlang geführt. Im Druckbereich sind diese durch Bügel gegen Ausknicken zu sichern. Diese Bügel können gleichzeitig in Richtung der Zugtrajektorien verlegt werden. Die Anzahl und der Querschnitt der zu wählenden Bügel soll mindestens

$$F_B = \frac{Z}{4 \cdot \sigma_e}$$

betragen.

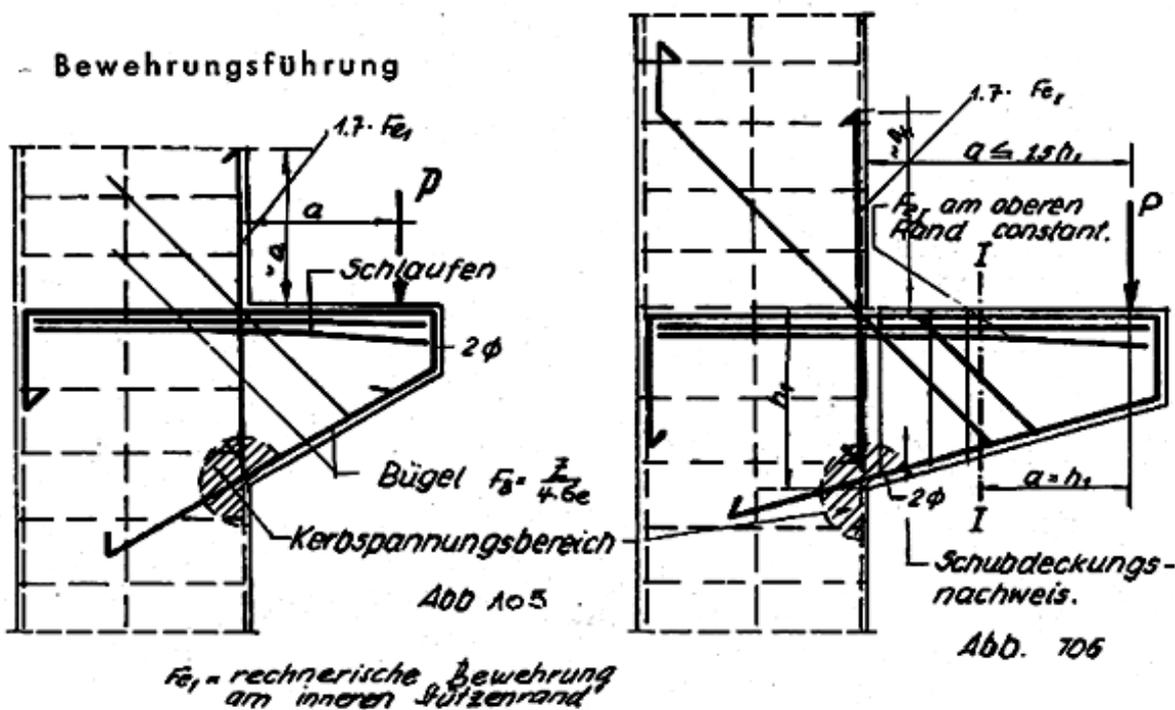
Für Doppel- und Rechteckkonsolen gelten ähnliche Gesichtspunkte. Wie die Trajektorienbilder zeigen, wird unmittelbar an der einspringenden Ecke auch eine senkrechte Bewehrung  $F_{e1}$  gebraucht. Aus den Isochromatenbildern ist abzulesen, daß sie zufolge der Kerbwirkung fast so groß wie diejenige aus der waagerechten Zugkraft wird, wenn die Stütze keine Auflast besitzt. Am besten wären unter  $45^\circ$  verlaufende, die Ecke berührende Stäbe, die jedoch nur auf eine sehr kurze Strecke ausgenutzt und die Bewehrung sehr komplizieren würden. Es wird daher vorgeschlagen, die rechnerische senkrechte Bewehrung am inneren Stützenrand oberhalb der Konsole auf eine kurze Strecke auf das 1,7-fache zu vermehren.

### 6.2.2 Konsolen und kurze Kragarme mit $\alpha < 30^\circ$ $a = h_1$ und $a < 1,5 h_1$

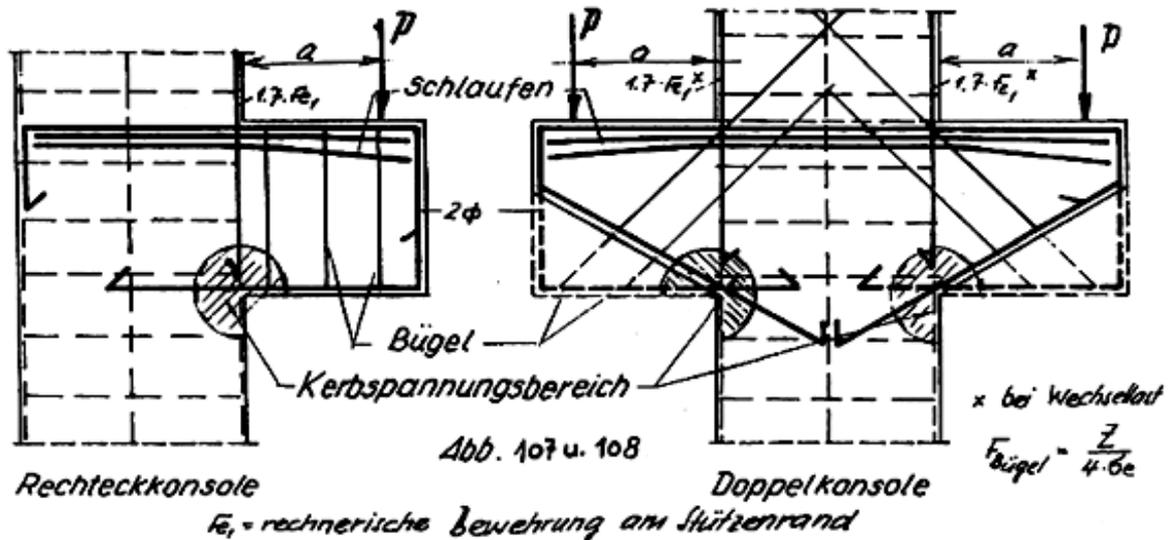
Wenn auch bei diesen Konsolen das stabwerksähnliche Verhalten nicht mehr überwiegt, wird dennoch vorgeschlagen, den Stahlquerschnitt bei Konsolen mit  $a = h_1$  für die Einspannstelle wie üblich als  $F_e = \frac{M}{z_1 \cdot \sigma_e}$

zu ermitteln und konstant entlang dem oberen Rand als Schlaufenbewehrung einzulegen. Dies gilt auch für Konsolen und kurze Kragarme mit  $h_1 < a < 1,5 h_1$  für den Bereich  $x < h_1$  (vgl. Abb. 105 und 106). Für den Bereich  $h_1 < x < 1,5 h_1$  muß dagegen die Deckung der Hauptzugspannungen ("Schubsicherung") nachgewiesen werden.

Die Abmessungen dieser Konsolen sind unter Einhaltung der zulässigen Spannungen vorh.  $\sigma < \text{zul. } \sigma$  und vorh.  $\tau < \text{max. } \tau_0$  zu wählen.



Die Bügel sind nach Möglichkeit nicht orthogonal, sondern wie in Abb. 105 dargestellt, dem Trajektorienverlauf entsprechend anzuordnen. Zwei Einlagen der oberen Zugbewehrung werden als Montageeisen entlang den Rändern durchgeführt und im Druckbereich von den Bügeln gehalten. Die restlichen Zugeinlagen sind nach Möglichkeit als Schlaufen auszubilden. Für Doppel- und Rechteckkonsolen gelten wieder ähnliche Konstruktionsprinzipien.



## 7. ZUSAMMENFASSUNG

Konsolen und kurze Kragarme mit einer Einzellast am oberen Rande sind Konstruktionsglieder, deren Länge  $a$  vom eingespannten Rand bis zur Last kleiner oder gleich ihrer Höhe  $h$  ist. Der nach dem Prinzip von de Saint Venant bekannte Lastausbreitungsbereich entspricht also gerade der Größe der Konsolen. Infolge dieser Lastausbreitung und der elastischen Einspannung der Konsolen in Stützen oder Wände ist keine geradlinige Spannungsverteilung vorhanden.

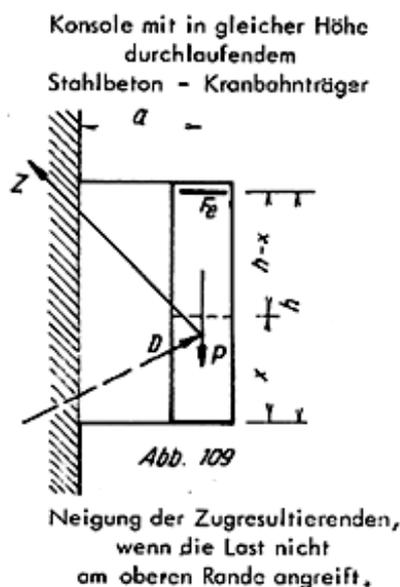
Bei den bisherigen Annahmen der allgemein üblichen Bemessung der Konsolen auf der Grundlage des Geradliniengesetzes werden zwar die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, die Verträglichkeitsbedingungen jedoch nicht eingehalten.

Die vorliegenden Untersuchungen zeigen, daß sowohl in Rechteckkonsolen als auch in Konsolen mit geneigter Unterkante ein stabwerksähnlicher Kräftezustand vorherrscht, der beim Stahlbeton infolge der gerissenen Zugzone sich noch stärker ausprägt. Die durchgeführten Bruchversuche an Betonkonsolen bestätigen die modellstatischen und theoretischen Untersuchungen. Bei Konsolen, deren Bewehrung in die Richtung der Resultierenden aller Hauptzugspannungen verlegt wird, wurden wesentlich höhere bezogene Bruchlasten erreicht als bei Konsolen mit Schrägbewehrung und nach außen hin abnehmender Zugbewehrung.

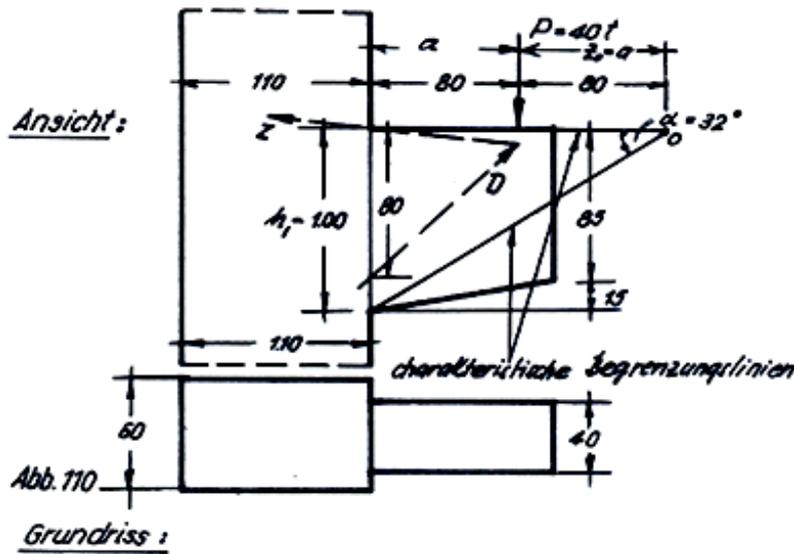
Die bei den Bruchversuchen entstehenden Risse sind reine Trennrisse und verlaufen im wesentlichen parallel zu den Drucktrajektorien. Die Bruchversuche bestätigen weiter, daß im Bereich der Lasteintragung eine nach der bisher angenommenen Momentenabnahme abgestufte Bewehrung vorzeitig zum Bruch führt. Der Querschnitt der Zugbewehrung muß über die Länge des oberen Randes konstant bleiben. Die beste Verankerung gewährleistet die Schlaufenbewehrung, da für eine Haftverankerung nicht genügend Haftlänge zur Verfügung steht.

Über die vorhandenen Betondruckspannungen unter Gebrauchslast kann man keine Aussage machen. Es wurde nur festgestellt, daß bei Einhaltung von  $\sigma_b < \text{zul } \sigma_b$  und vorh.  $\tau < \text{max. } \tau_0$  am Einspannungsquerschnitt genügende Sicherheit gegen Betonbruch vorhanden ist.

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Untersuchungen nur für Lasteintragung am oberen Rand gelten. Wird die Last weiter unten, etwa durch einen Längsträger eingetragen, verschiebt sich das Kräftebild im Sinne einer Neigung der Zugresultierenden.



## 8. BERECHNUNGSBEISPIELE NACH DER STABWERKSANALOGIE

8.1 Zu berechnen ist eine Konsole für  $P = 40 \text{ t}$  und nebenstehend skizzierter Abmessungen

Gegeben: B 225, Stahl III b  
 gewählt: Schlaufenbewehrung  
 $\alpha > 30^\circ$ ;  $a < h_1$

$$Z = \frac{a}{0,8 \cdot h_1} \cdot P; F_e = \frac{Z}{\sigma_e}$$

Verwendung der Tafeln A und B  
 auf Seite 91 und 92.

Der Formel für  $Z$  und den Tafelwerten liegt die Annahme zugrunde, daß die Resultierende der Zugeinlagen durch den Punkt  $k$  verläuft. In Wirklichkeit ist dies jedoch nicht möglich. Die Zugkraftresultierende hat vom Punkt  $k$  den Abstand  $h'$ . Durch Verschiebung der Druckkraftresultierenden um den gleichen Anteil wird der Fehler dieser Annahme korrigiert.

a) Nachweis der Betondruckspannungen.

Vergleichsrechnung für einen Biegebalken

$$M_e = P \cdot a = 40 \cdot 0,8 = 32 \text{ tm}$$

$$d = h_1 = 1,00 \text{ m}; b = 0,40 \text{ m}; h = 100 - 5 = 95 \text{ cm}$$

$$kh = \frac{h}{\sqrt{\frac{M}{b}}} = \frac{95}{\sqrt{\frac{32}{0,4}}} = 10,6 > 9,2; \text{ vorh. } \tau = \frac{40000}{40 \cdot 95 \cdot 0,89} = 12 \text{ kg/cm}^2 < \text{ max. } \tau_0 = 18 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b / \sigma_e = 67 / 2400 < \sigma_b \text{ zul} / \sigma_e = 80 / 2400$$

d.h. Sicherheit gegen Betonbruch vorhanden!

b) Ermittlung der erforderlichen Bewehrung

$$\alpha = 32^\circ; ke' = 0,9 \text{ aus Tafel A}$$

für  $\beta = 7^\circ$  (Bewehrung leicht abgebogen).

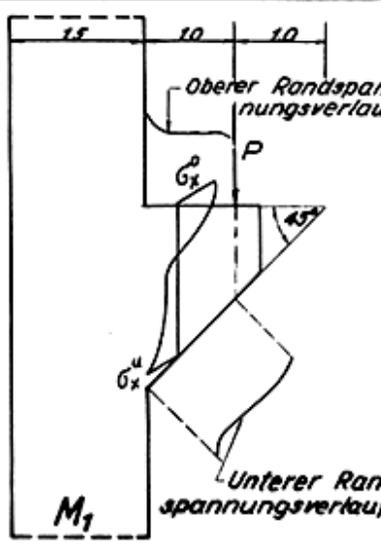
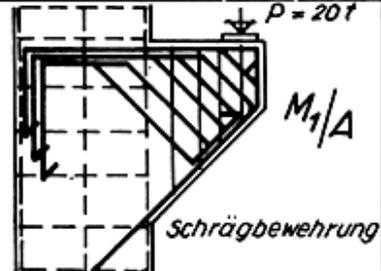
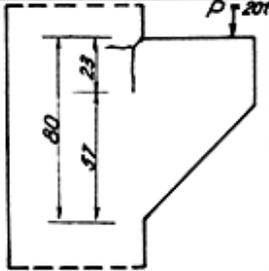
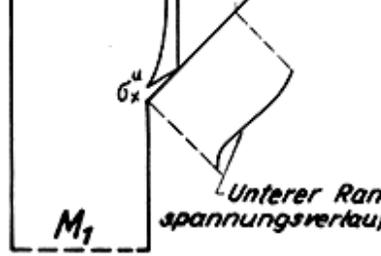
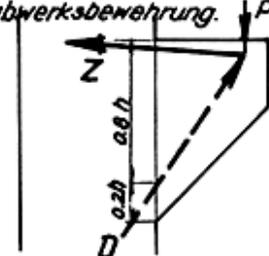
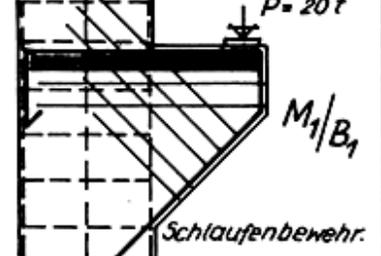
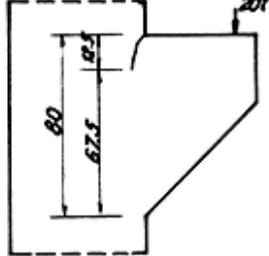
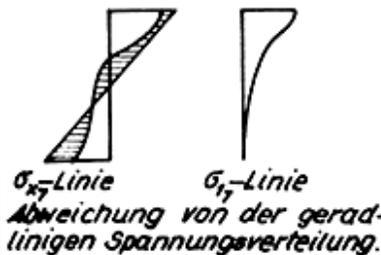
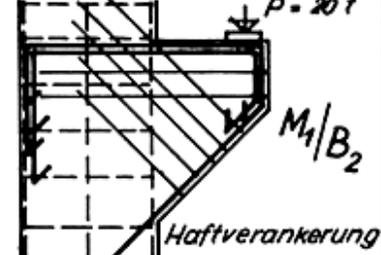
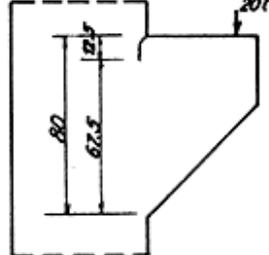
$$Z = P \cdot ke' = 40 \cdot 0,9 = 36 \text{ t}$$

$$F_e = \frac{36}{2,4} = 15 \text{ cm}^2$$

gewählt 10 III  $\phi 14$  mit  $F_e = 15,4 \text{ cm}^2$

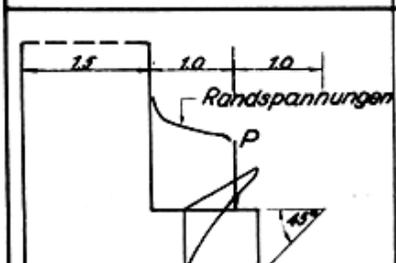
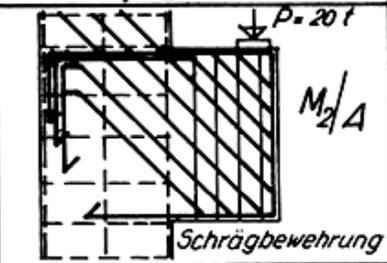
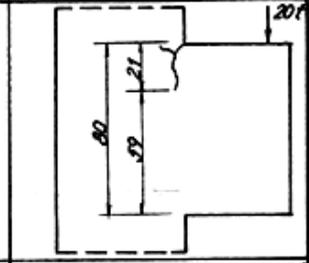
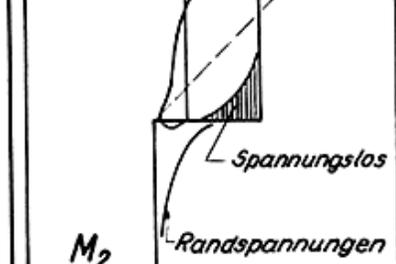
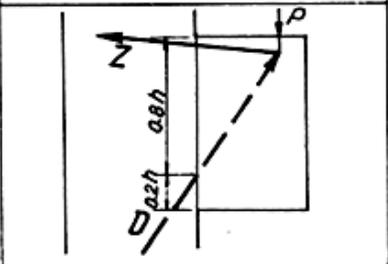
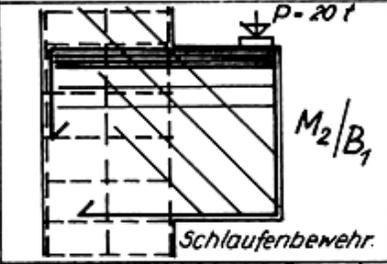
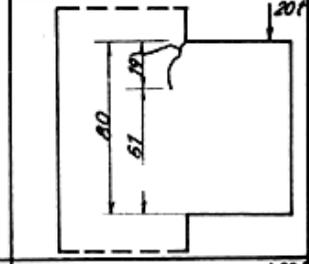
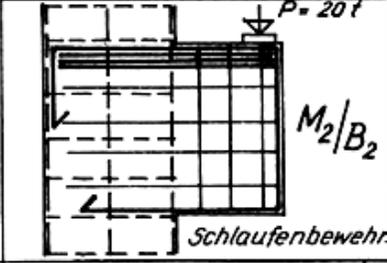
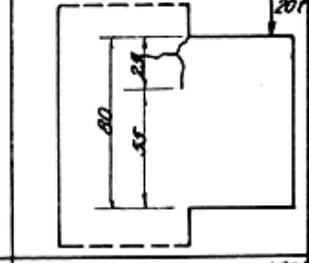
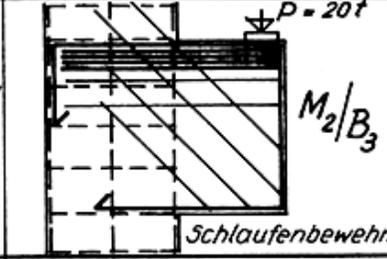
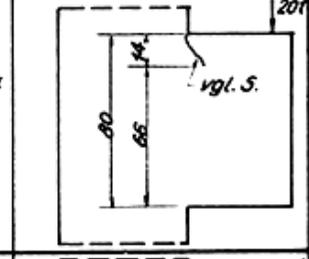
Eine eventuell vorhandene H-Kraft wird linear addiert, wenn sie ungefähr in Höhe der Stahleinlagen angreift.

## RESUMO DOS RESULTADOS - entre as páginas 87 e 88

<h3>Zusammenfassung der Ergebnisse</h3>		Bezeichnung: $P_R = \text{Rißlast}$ $P_{Br} = \text{Bruchlast}$ $k_i = \frac{\text{Bruchlast [t]}}{\text{Bewehrung [Kg]}} = \frac{P_{Br}}{kg} = \text{bezogene Bruchlast}$				
Konsolformen, Spannungslinie Spannungsoptisch	Bewehrungsgrundlagen:	Bewehrungssystem:	Rißlast	Bruchlast u. Ursache	bezogene Bruchlast	Rißbild Bemessungslast
Formato do consolo Linhas de tensões	Armadura segundo: Rausch ; Treliça ; Integral	Tipo de Armadura	Carga de fissuração	Carga de ruptura e causa da ruptura	Carga de ruptura em tonelada / quilograma de armadura	Fissuração para a carga de serviço
 <p style="text-align: center;"><math>M_1</math></p>	<p>nach Rausch <math>a &lt; z</math></p> $F_e = k_e \cdot \frac{M}{h_n}$ $F_{es} = \frac{P}{\sqrt{2}} \cdot \frac{h_n}{G_e}$ <p>Betonstahl I</p>	 <p style="text-align: center;"><math>M_1/A</math></p> <p style="text-align: center;">Schrägbewehrung</p>	15 t	55 t	2.08	 <p style="text-align: center;"><math>P = 20t</math></p>
 <p style="text-align: center;"><math>M_1</math></p>	<p>Stabwerksbewehrung.</p> 	 <p style="text-align: center;"><math>M_1/B_1</math></p> <p style="text-align: center;">Schlaufenbewehrung.</p>	15 t	66 t	4.40	 <p style="text-align: center;"><math>P = 20t</math></p>
 <p style="text-align: center;"><math>M_1</math></p>	<p>a.) Graphisch <math>z = 12.4 t</math></p> <p>b.) <math>\sigma_{xy}</math>-Linie</p> $z = \int \sigma_x dF = 11.9 t$ $F_e = \frac{z}{\sigma_e} = \frac{12.4}{1.4} = 8.9 t$ <p>gewählt: <math>8 I \phi 12 = 905 \text{ cm}^2</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>M_1/B_2</math></p> <p style="text-align: center;">Haftverankerung</p>	15 t	66 t	3.48	 <p style="text-align: center;"><math>P = 20t</math></p>

# Zusammenfassung der Ergebnisse

Bezeichnung:  $P_R$  = Ripplast  
 $P_{Br}$  = Bruchlast  
 $k_i = \frac{\text{Bruchlast [t]}}{\text{Bewehrung [Kg]}} = \frac{P_{Br}}{kg}$  - bezogene Bruchlast

Konsolformen, Spannungslinie Spannungsoptisch	Bewehrungsgrundlagen:	Bewehrungssystem:	Ripplast	Bruchlast u. Ursache	bezogene Bruchlast	Rißbild Bemessungslast
<p>Formato do consolo Linhas de tensões</p>	<p>Armadura segundo: Rausch; Treliça; Integral</p>	<p>Tipo de Armadura</p>	<p>Carga de fissuração</p>	<p>Carga de ruptura e causa da ruptura</p>	<p>Carga de ruptura em toneladas / quilogramas de armadura</p>	<p>Fissuração para a carga de serviço</p>
	<p>nach Rausch <math>a &lt; z</math></p> $F_b = k_e \cdot \frac{M}{h}$ $F_{b5} = \frac{P}{\sqrt{2} \cdot G_b}$ <p>Betonstahl I</p>		<p>10 t</p>	<p>65 t</p>	<p>1.74</p> <p><math>F_{ekons.} = 37.3</math></p> <p><math>k_1 = \frac{65}{37.3}</math></p>	
			<p>10 t</p>	<p>63 t</p>	<p>3.80</p> <p><math>F_{ekons.} = 16.7</math></p> <p><math>k_1 = \frac{63}{16.7}</math></p>	
	<p>a.) Graphisch <math>z = 12.4 t</math></p> <p>b.) <math>G_{xy}</math> Linie</p> $z = \int G_x z dF = 11.2 t$ $F_b = \frac{z}{G_b} = \frac{12.4}{1.4} = 8.0 t$ <p>gewählt: <math>8 \cdot I \phi 12 = 905 \text{ cm}^2</math></p>		<p>10 t</p>	<p>58.5 t</p>	<p>3.22</p> <p><math>F_{ekons.} = 18.2</math></p> <p><math>k_1 = \frac{58.5}{18.2}</math></p>	
<p>Abweichung von der geradlinigen Spannungsverteilung.</p>	<p>Die nach Rausch ermittelte Schrägbewehrung <math>F_{b5}</math> wurde parallel zum oberen Rand eingelegt.</p> $F_{erorb} = 2 \cdot I \phi 12 + 8 \cdot I \phi 14$ <p>mit <math>F_b = 14.58 \text{ cm}^2</math></p>		<p>—</p>	<p>74 t</p>	<p>2.36</p> <p><math>F_{ekons.} = 31.4</math></p> <p>Versagen der Beton druckzone</p> <p><math>k_1 = \frac{74}{31.4}</math></p>	

# Zusammenfassung der Ergebnisse

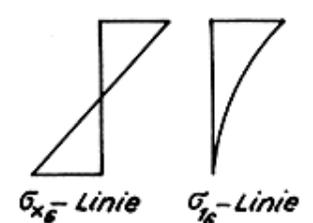
Bezeichnung:  $P_R$  = Rißlast  
 $P_{Br}$  = Bruchlast  
 $k_i = \frac{\text{Bruchlast [t]}}{\text{Bewehrung [kg]}} = \frac{P_{Br}}{kg}$  = bezogene Bruchlast

Konsolformen, Spannungslinie Spannungsoptisch	Bewehrungsgrundlagen:	Bewehrungssystem:	Rißlast	Bruchlast u. Ursache	bezogene Bruchlast	Rißbild Bemessungslast
--	-----------------------	-------------------	---------	-------------------------	-----------------------	---------------------------

Formato do consolo Linhas de tensões	Armadura segundo: Rausch; Treliza; Integral	Tipo de Armadura	Carga de fissuração	Carga de ruptura e causa da ruptura	Carga de ruptura em toneladas / quilogramas de armadura	Fissuração para a carga de serviço
	<p>nach Rausch <math>a &lt; z</math></p> $F_e = k_e \cdot \frac{M}{h_n}$ $F_{e3} = \frac{P}{\sqrt{2} \cdot \sigma_e} \cdot \frac{h_0}{h_n}$ <p>Betonstahl III b Querverrippt</p>	<p><math>P = 10 t</math>  <math>M_3/A</math>            Stahl III b            Schrägbewehrung</p>	7.5 t	27 t	2.88	
	<p><math>P</math>  <math>M_3/B</math>            Stahl I            Schlaufenbewehrung</p>	<p><math>P = 10 t</math>  <math>M_3/B</math>            Stahl I            Schlaufenbewehrung</p>	7.5 t	27 t	—	
	<p>a) graphisch <math>z = 10.8 t</math>            b) nach Stadium II für            den Einspannquerschnitt</p> $F_e = k_e \cdot \frac{M_e}{h}$ <p>gewählt:  <math>4 \cdot III b \phi 12 = 4.54 \text{ cm}^2</math>  <math>2 \cdot I \phi 10 + 4 \cdot I \phi 14 = 7.73 \text{ cm}^2</math></p>	<p><math>P = 10 t</math>  <math>M_3/C</math>            Stahl III b            Schlaufenbewehrung</p>	10 t	28.5 t	3.40	

$F_{ekons.} = 9.4 \text{ kg}$   
 Fließen der Stahl eintrogen (Fl. d. St.)  
 $k_1 = \frac{27}{9.4}$

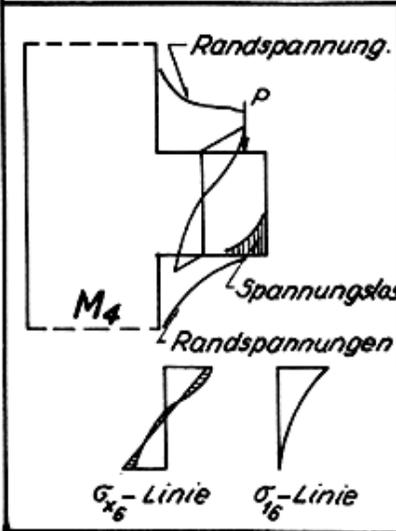
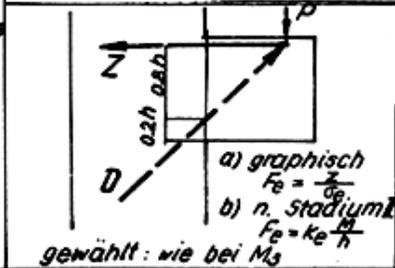
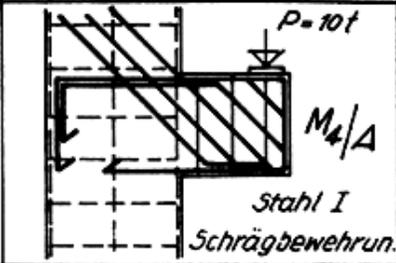
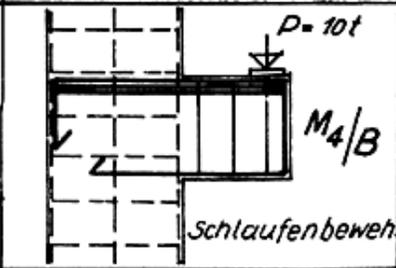
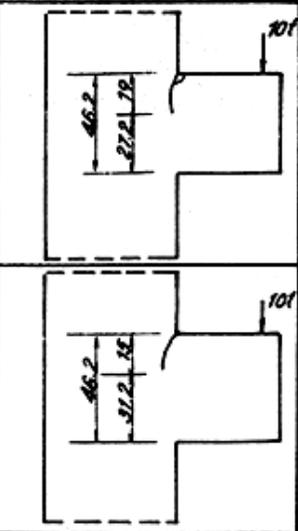
$F_{ekons.} = 8.4$   
 Fl. d. St.  
 $k_1 = \frac{28.5}{8.4}$

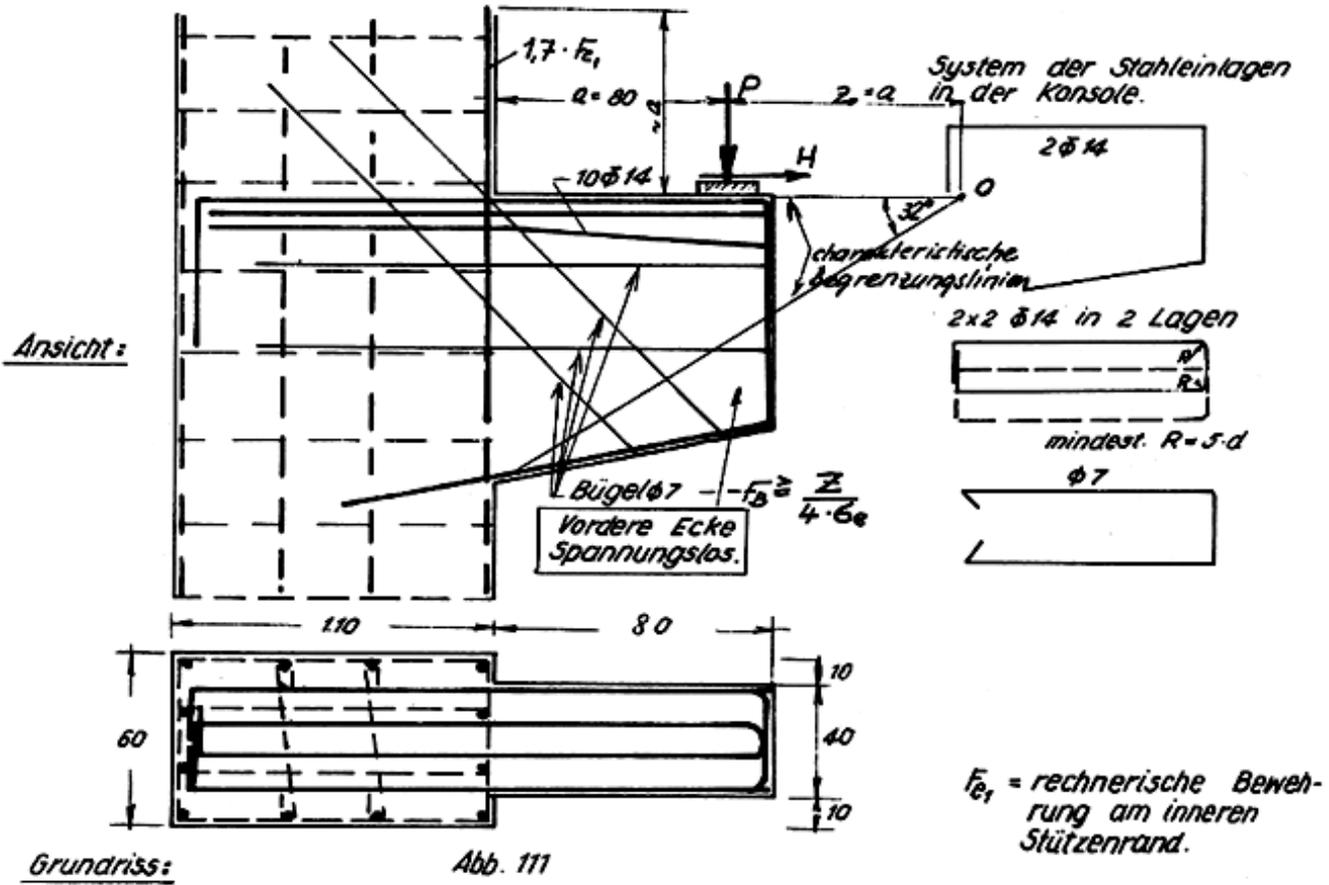


# Zusammenfassung der Ergebnisse

Bezeichnung:  $P_R$  = Ripplast  
 $P_{Br}$  = Bruchlast

$$k_i = \frac{\text{Bruchlast [t]}}{\text{Bewehrung [Kg]}} = \frac{P_{Br}}{kg} = \text{bezogene Bruchlast}$$

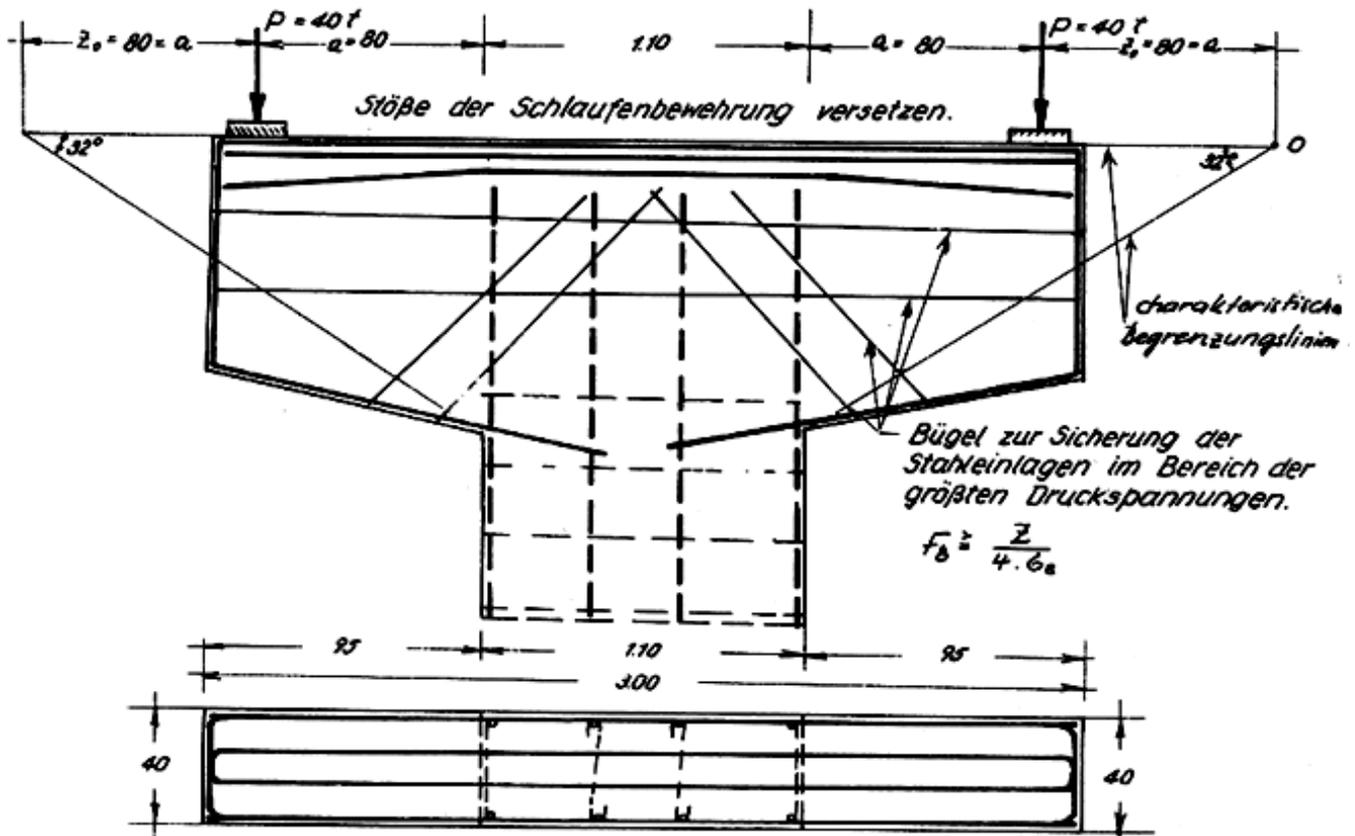
Konsolformen, Spannungslinie Spannungsoptisch	Bewehrungsgrundlagen:	Bewehrungssystem:	Ripplast	Bruchlast u. Ursache	bezogene Bruchlast	Ripfbild Bemessungslast
<p>Formato do consolo Linhas de tensões</p>	<p>Armadura segundo: Rausch; Treliça; Integral</p>	<p>Tipo de Armadura</p>	<p>Carga de fissuração</p>	<p>Carga de ruptura e causa da ruptura</p>	<p>Carga de ruptura em toneladas / quilogramas de armadura</p>	<p>Fissuração para a carga de serviço</p>
 <p>Randspannung.</p> <p><math>M_4</math></p> <p>Spannungslinie</p> <p>Randspannungen</p> <p><math>\sigma_{x/6}</math>-Linie</p> <p><math>\sigma_{y/6}</math>-Linie</p>	<p>nach Rausch <math>a-z</math></p> $F_e = k_e \frac{M}{h}$ $F_{es} = \frac{P}{\sqrt{2} \cdot G_e}$ <p>Betonstahl I</p>  <p>a) graphisch <math>F_e = \frac{M}{G_e}</math></p> <p>b) n. stadiuml. <math>F_e = k_e \frac{M}{h}</math></p> <p>gewählt: wie bei <math>M_3</math></p>	<p><math>P = 10t</math></p> <p><math>M_4/A</math></p> <p>Stahl I</p> <p>Schrägbewehrung.</p>  <p><math>P = 10t</math></p> <p><math>M_4/B</math></p> <p>Schlaufenbewehr.</p> 	<p>10 t</p> <p>10 t</p>	<p>27.5 t</p> <p>24.5 t</p> <p>Fl. d. St.</p> <p>Fl. d. St.</p>	<p>1.29</p> <p><math>F_{ekons.} = 21.4</math></p> <p><math>k_1 = \frac{27.5}{21.4}</math></p> <p><math>F_{ekons.} = 10.9</math></p> <p><math>k_1 = \frac{24.5}{10.9}</math></p>	 <p>0.27 mm</p> <p>0.31 mm</p>



## 2. Doppelkonsole mit 2 gleichen Lasten

Abmessungen und Materialgüten wie vor;  $P = 40 \text{ t}$

Bewehrungsführung: vgl. hierzu Anhang Tafel 15, 16 und 17.





## a) Nachweis der Betonspannungen

$$M_{II-II} = P \cdot a + g_m \cdot \frac{a^2}{2}, \quad g_m = 0,25 \cdot 0,20 \cdot 2,4 = 0,12 \text{ t/m}$$

$$M_{II-II} = 5 \cdot 0,45 + 0,12 \cdot \frac{0,45^2}{2} = 2,25 + 0,01 = 2,26 \text{ tm}$$

$$d = h_{II-II} = 30 \text{ cm}; \quad h_{II} = 27 \text{ cm}; \quad b = 0,30$$

$$kh = \frac{27}{\sqrt{\frac{2,26}{0,30}}} = 9,00 > kh = 8,0; \quad Q_{II} \sim Q_I$$

$$\tau_{II} = \frac{Q_{II}}{b \cdot z} = \frac{5070}{25 \cdot 27 \cdot 0,89} = 8,4 \text{ kg/cm}^2 < \tau_{0\max} = 18 \text{ kg/cm}^2$$

Im Bereich  $a > h_I$  ist der Schubdeckungsachweis zu führen.

$$\tau_I = \frac{5070}{25 \cdot 22 \cdot 0,89} = 10,3 \text{ kg/cm}^2 < 18 \text{ kg/cm}^2$$

$$T_{\text{erf}} = \frac{1}{2} \cdot (8,4 + 10,3) \cdot 15 \cdot 25 = 3520 \text{ kg}$$

gewählt Schrägisen 1 I  $\phi$  10 + 1 I  $\phi$  12 mit  $T_{\text{vorh.}} = 3,79 \text{ t} > 3,52 \text{ t}$

## b) Ermittlung der erforderlichen Bewehrung

$$M_{II-II} \text{ an der Einspannstelle} = 2,26 \text{ tm}$$

$$Fe_{II} = 0,83 \cdot \frac{2,26}{0,27} = 7,00 \text{ cm}^2$$

$$M_{I-I} = 5,00 \cdot 0,30 = 1,50 \text{ tm (Eigengewicht vernachlässigt).}$$

$$d = h_{I-I} = 25 \text{ cm}; \quad h = 22 \text{ cm}; \quad b = 30 \text{ cm}$$

$$kh = 9,0 > kh^* = 8,0; \quad \text{vorh. } \tau = 10,3 \text{ kg/cm}^2 < 18 \text{ kg/cm}^2$$

Sicherheit gegen Betonbruch vorhanden

$$Fe_{I-I} = 0,83 \cdot \frac{1,50}{0,22} = 5,70 \text{ cm}^2$$

$$\text{Nach der Stabwerksanalogie:} \quad \text{tg } \alpha = \frac{22,8}{60} = 0,380$$

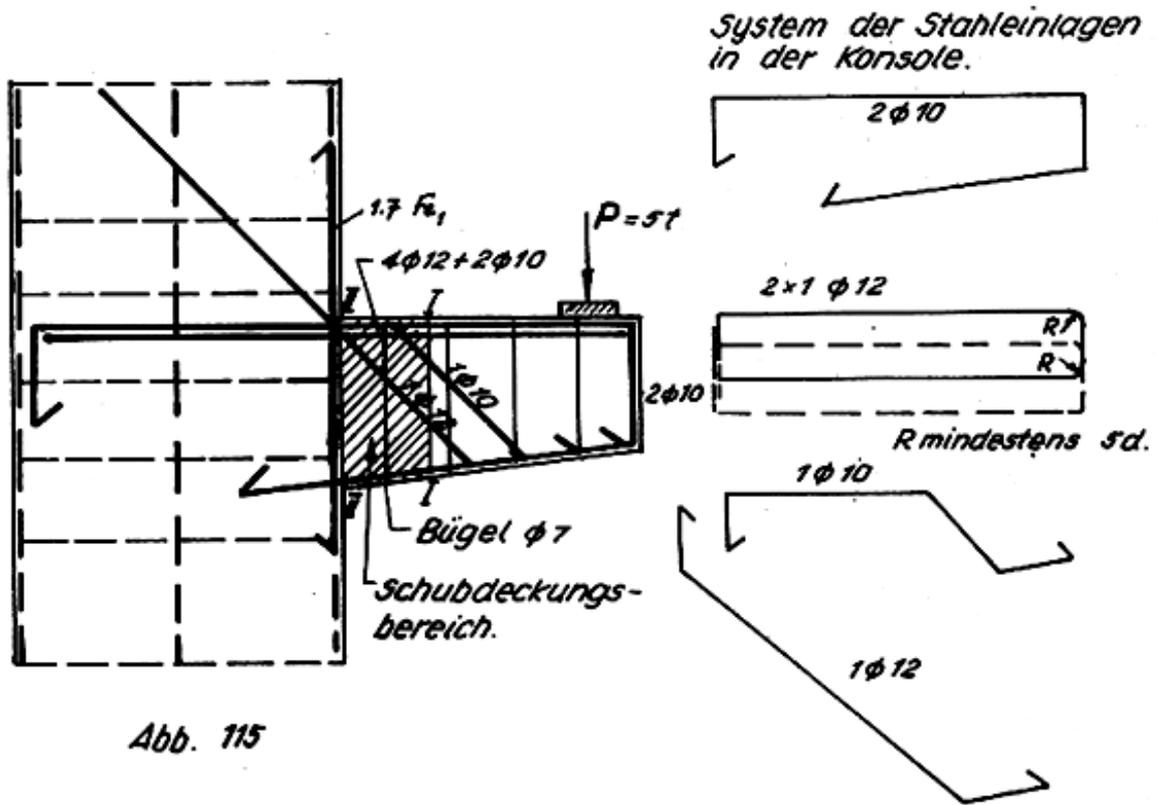
$$\alpha = 20,9^\circ; \quad ke' = 1,64$$

$$Z = 1,64 \cdot 5,00 = 8,20 \text{ t}$$

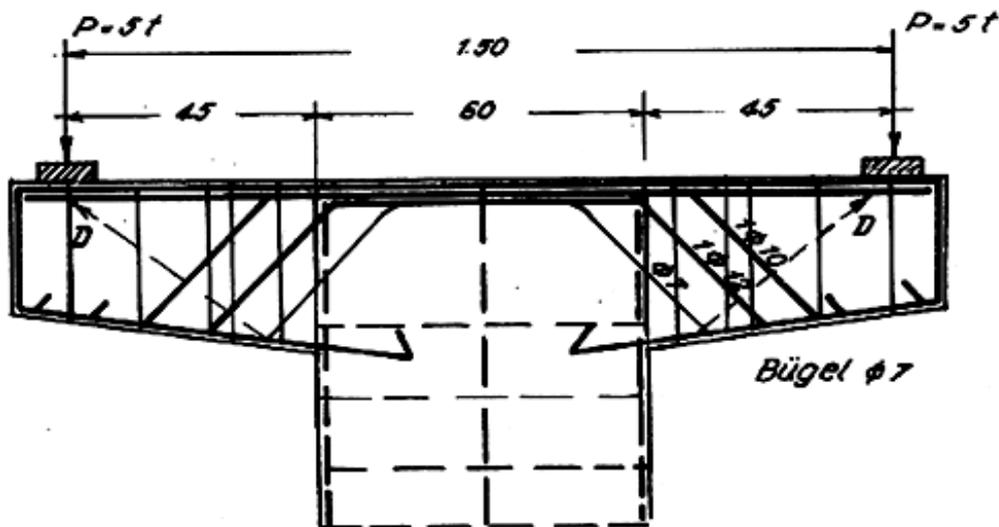
$$Fe_{I-I} = \frac{8,20}{1,4} = 5,88 \text{ cm}^2 > 5,70 \text{ cm}^2$$

gewählt 4 I  $\phi$  12 + 2 I  $\phi$  10 mit  $Fe = 6,09 \text{ cm}^2$

Diese Eisen müssen konstant bis zur Lasteintragsstelle entlang des oberen Randes verlegt werden.



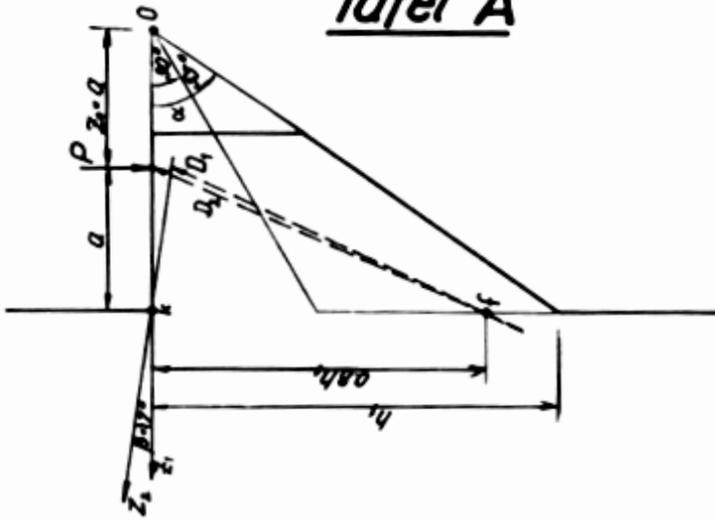
5. Doppelkonsole mit gleichbleibenden Lasten  $P = 5 t$   
 Abmessungen und Materialgüten wie vor  
 Bewehrungsführung



*Doppelkonsole für symmetrische Lasten.  $\alpha = 1.5 h_1$ ;  $\alpha < 30^\circ$*   
 Abb. 116

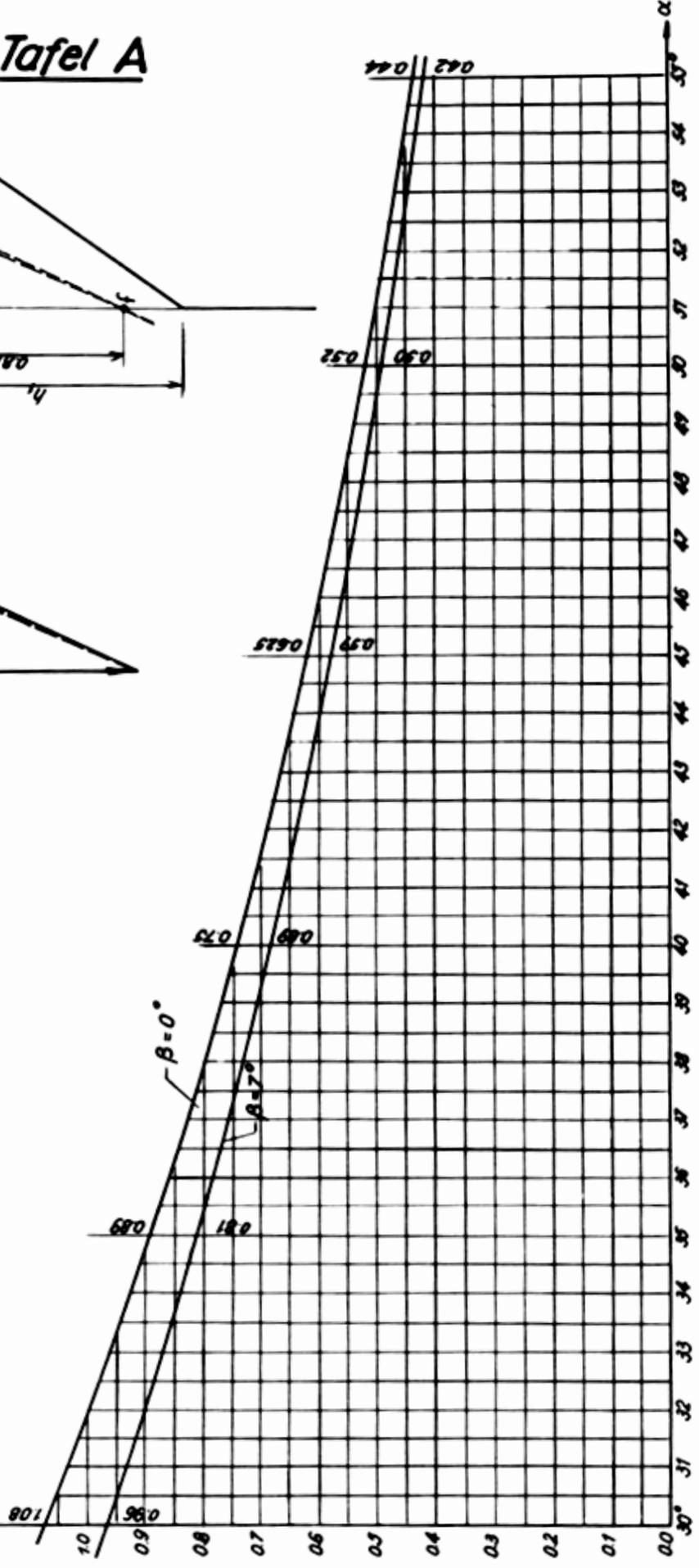
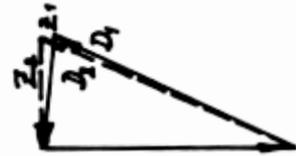
**Tafel A**

$Z_1$  u.  $Z_2$  schneiden angenähert k.



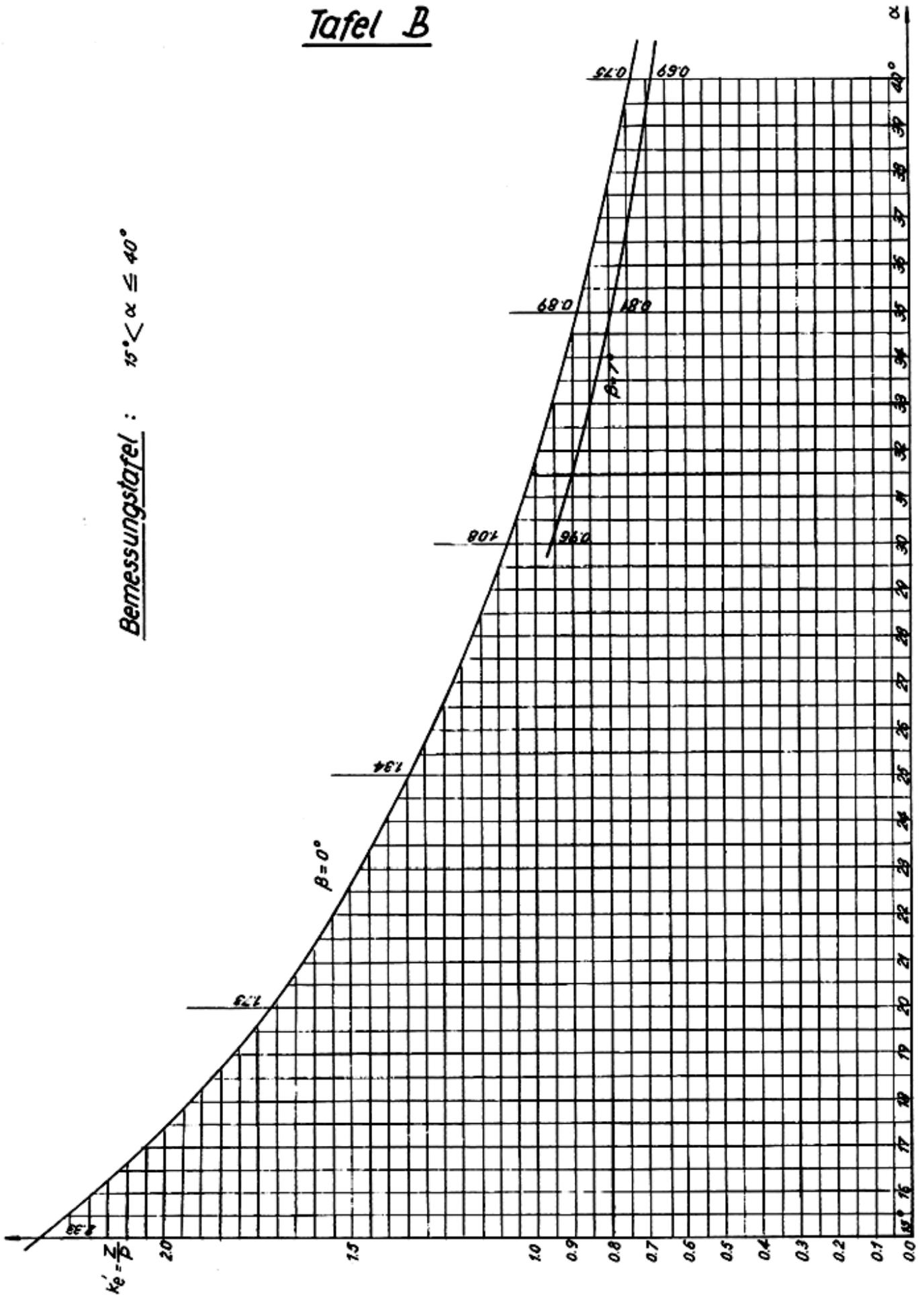
**Bemessungstafel** zur Bestimmung von  $z \cdot k_e \cdot P \sim \frac{P \cdot a}{0,8 h_1}$   
 für Konsolen mit  $\alpha \leq 33^\circ$   
 $P =$  Gesamtbelastung der Konsole.  
 $k_e = \frac{z}{\sigma_{zul}}$

$k_e = \frac{z}{P}$



# Tafel B

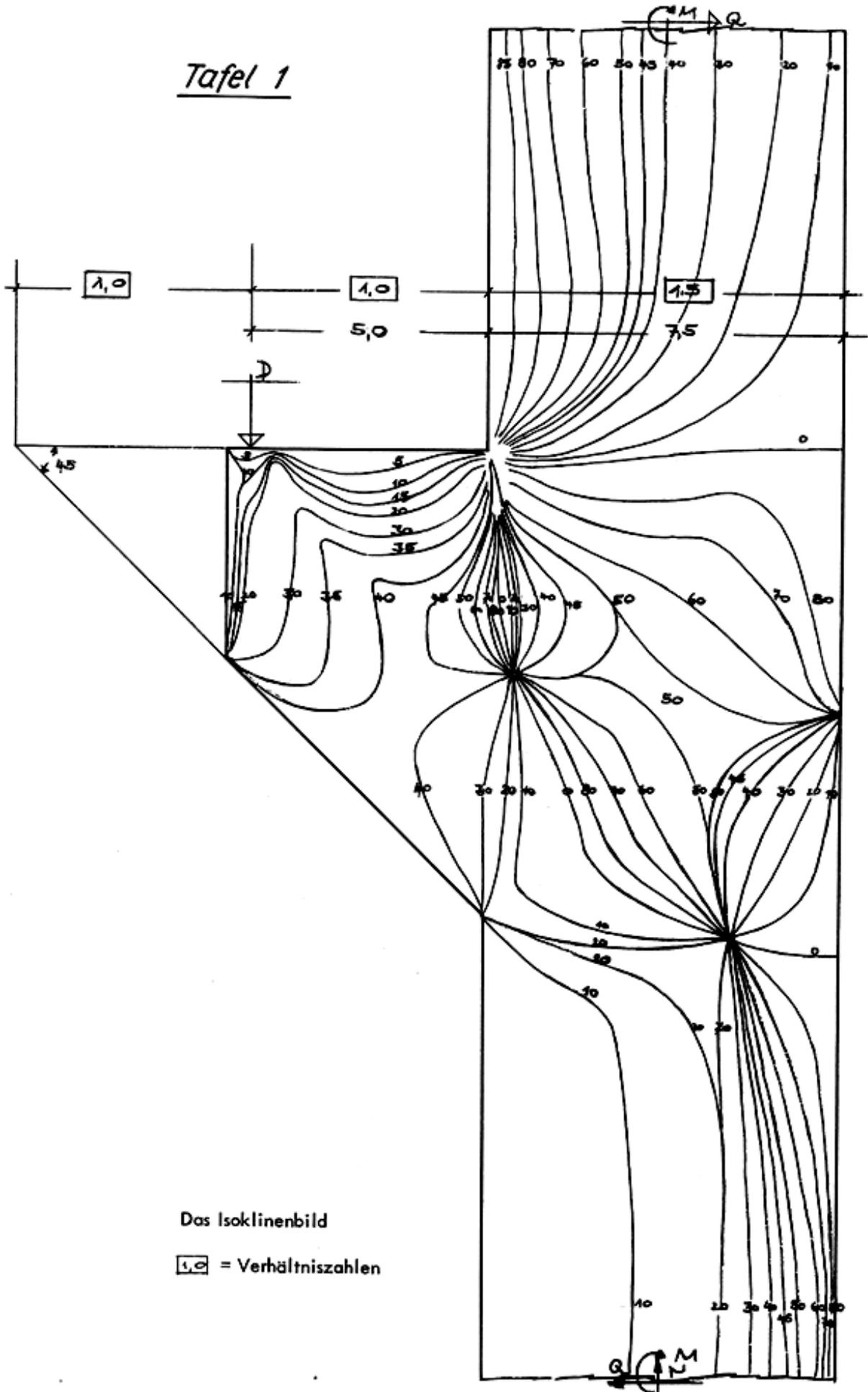
Bemessungstafel :  $15^\circ < \alpha \leq 40^\circ$



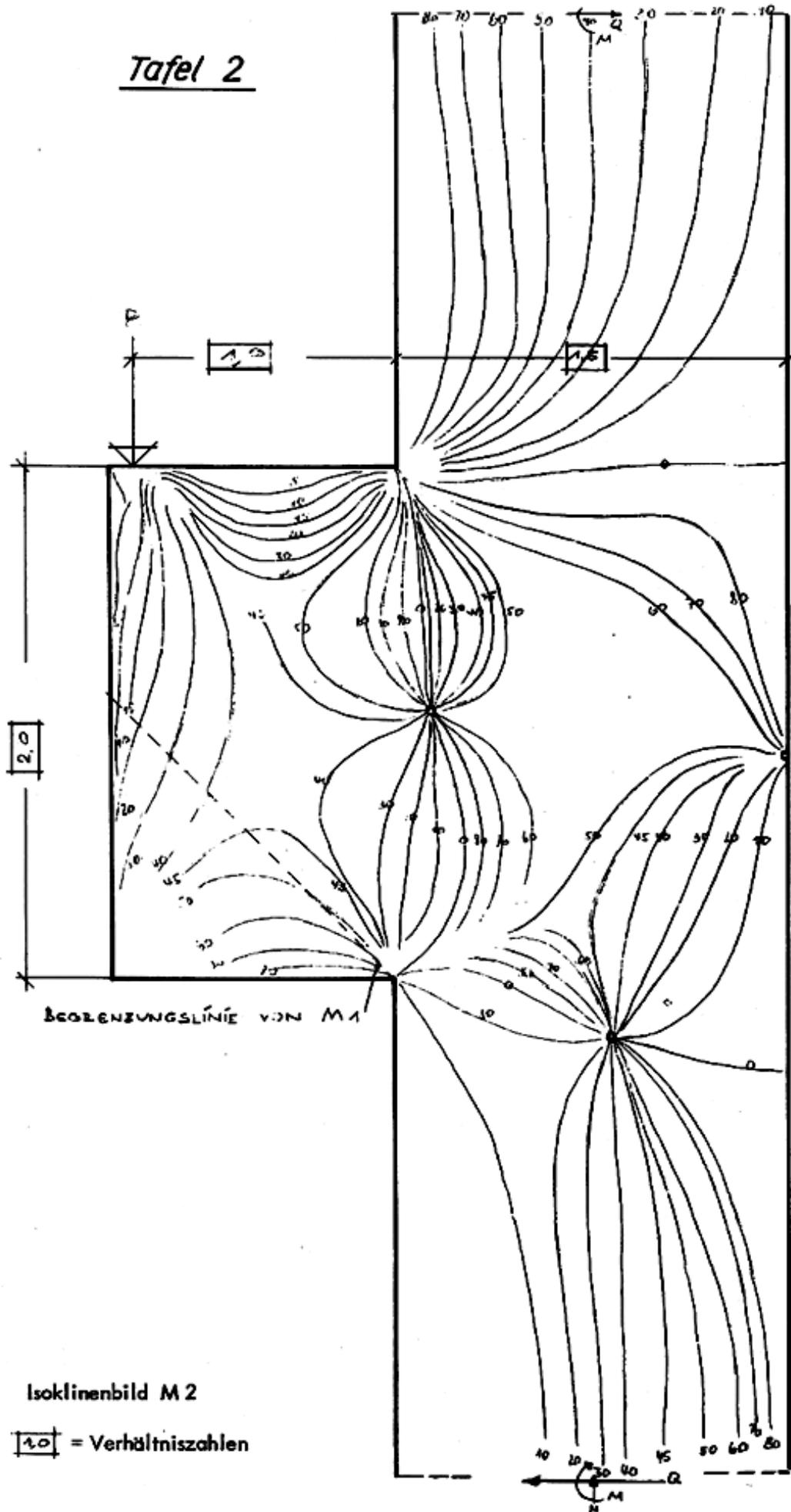
**ANHANG**

**ANEXO**

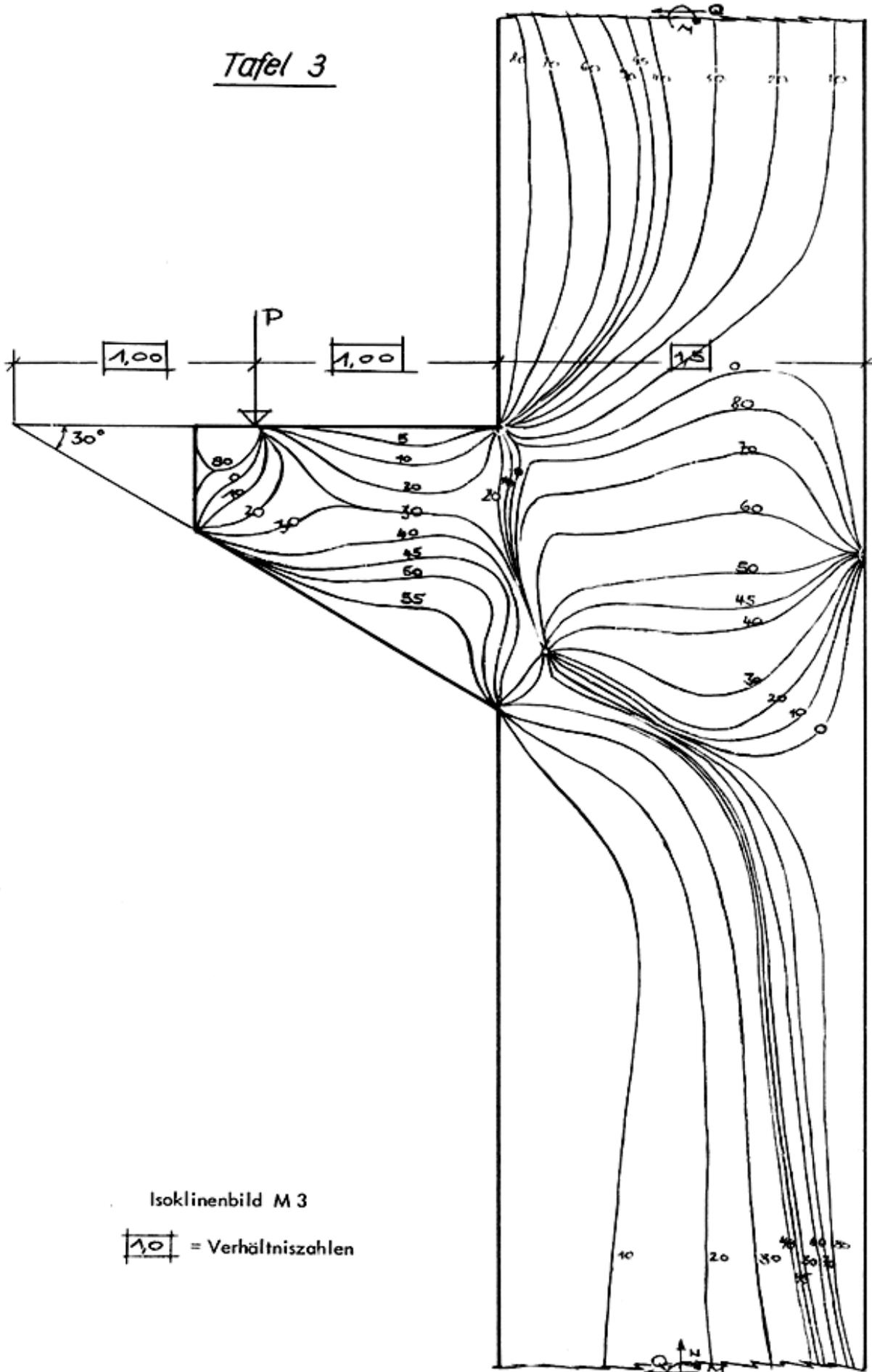
Tafel 1



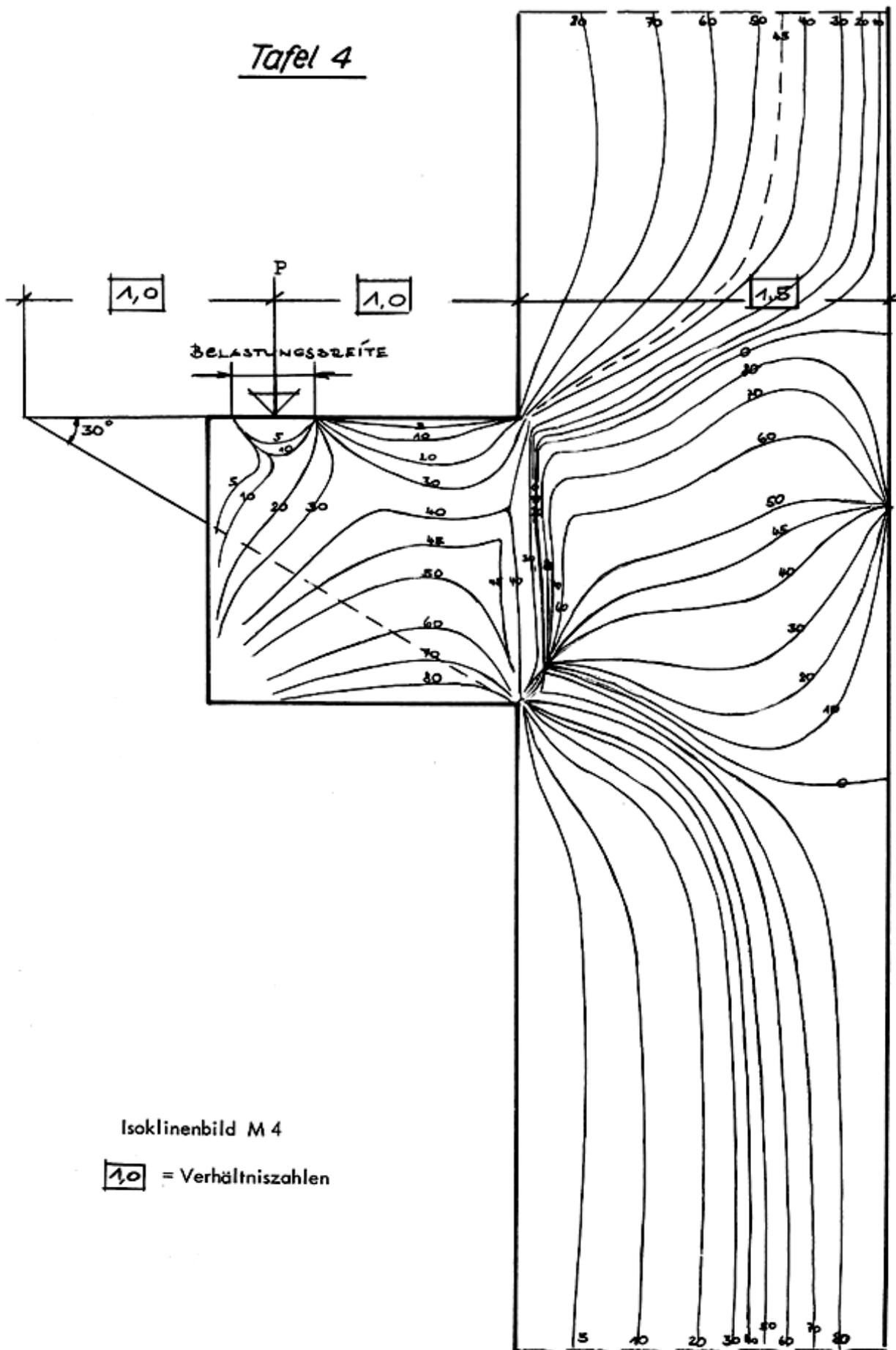
Tafel 2



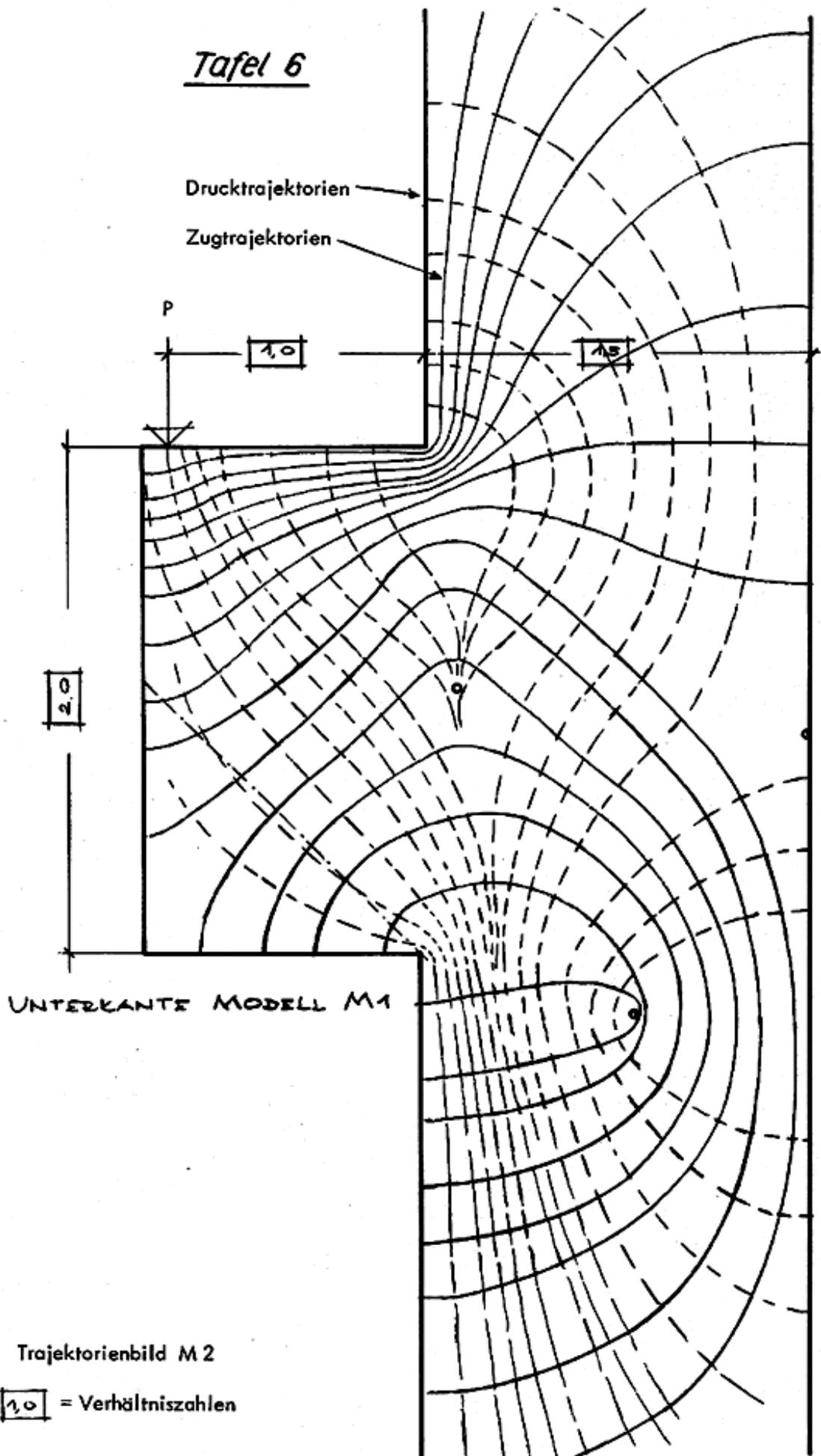
Tafel 3

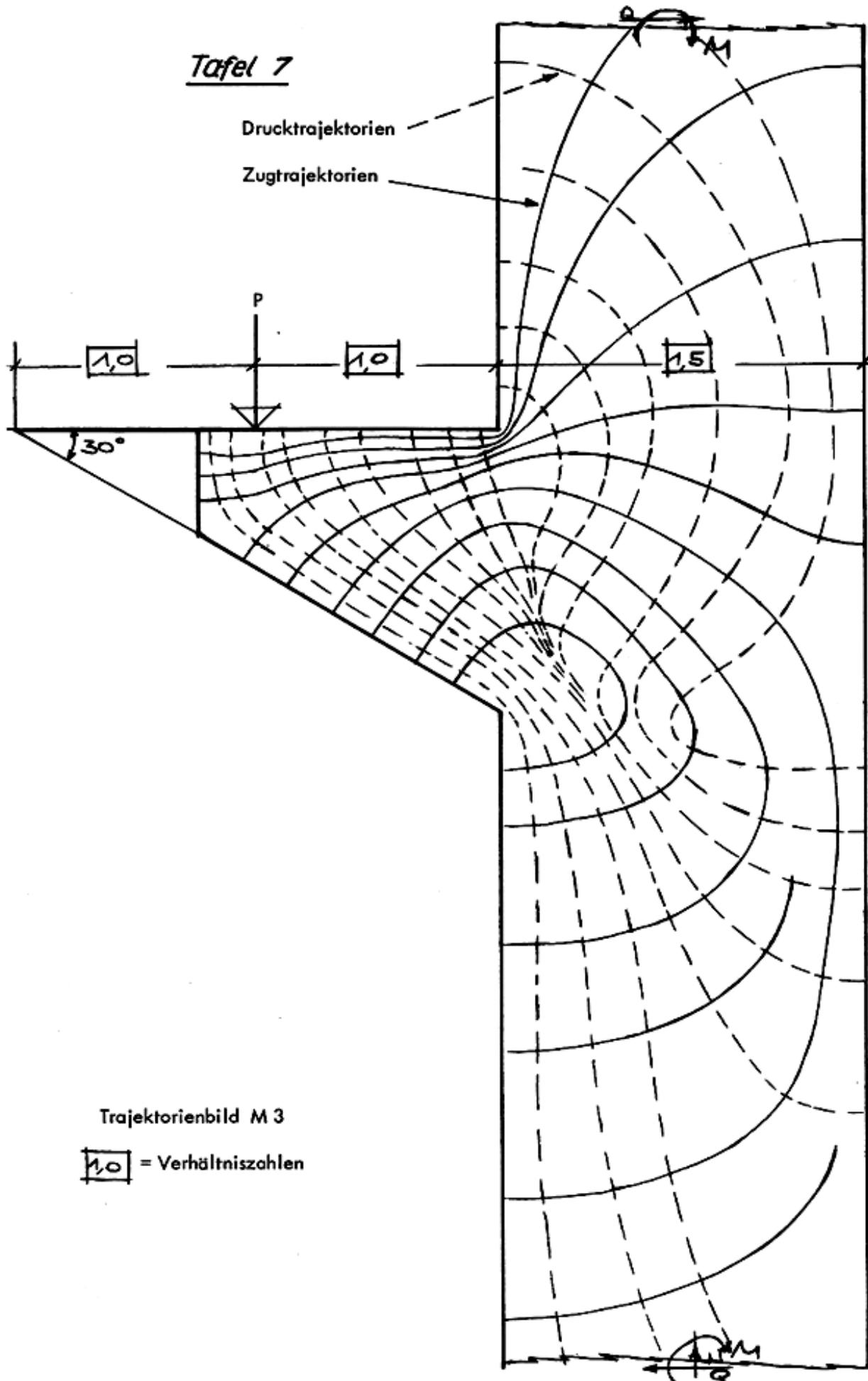


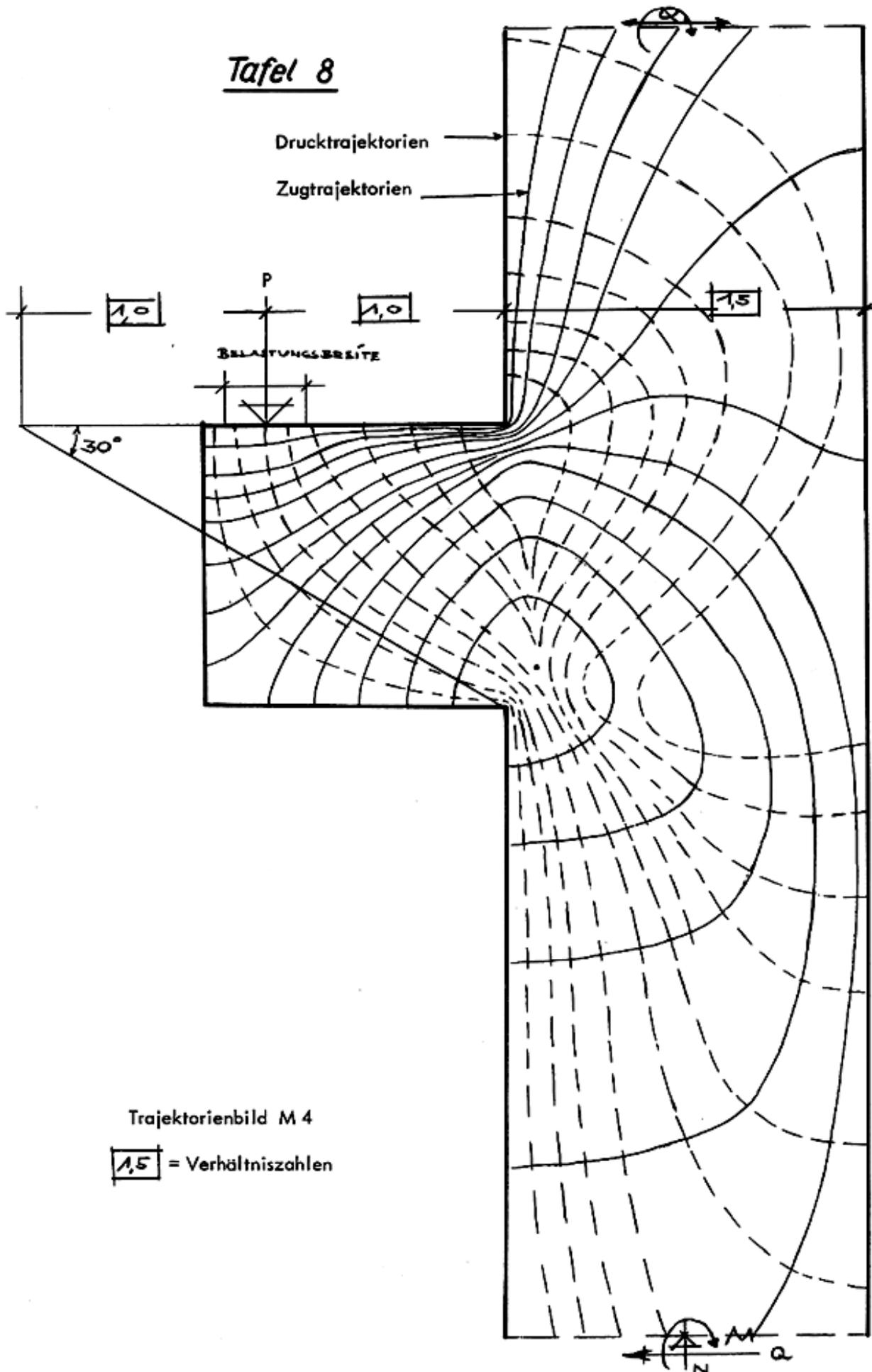
Tafel 4





Tafel 6

Tafel 7

Tafel 8

Trajektorienbild M 4

 $\boxed{1,5}$  = Verhältniszahlen

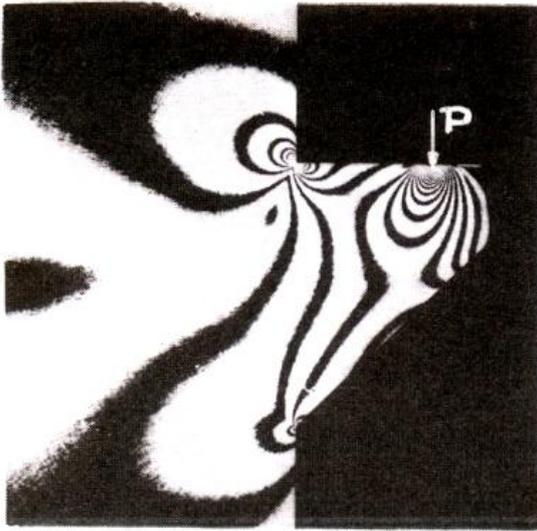


Bild 47 Halbscheibe mit Keil

Randspannungsverlauf :

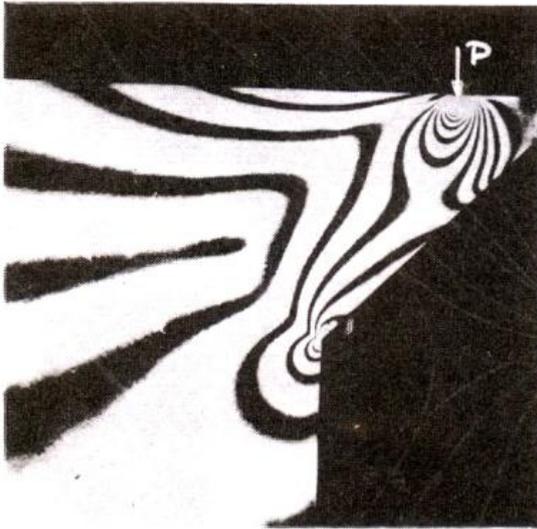
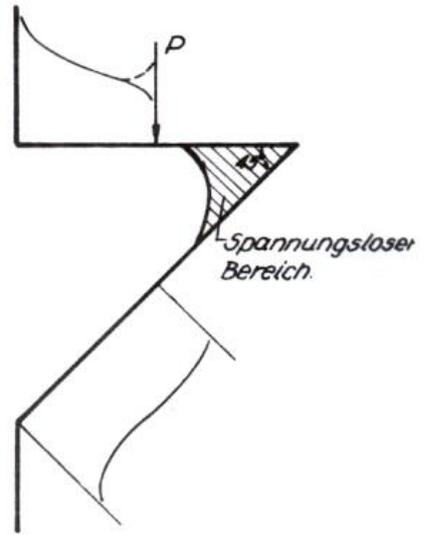


Bild 48 Viertelscheibe mit Keil

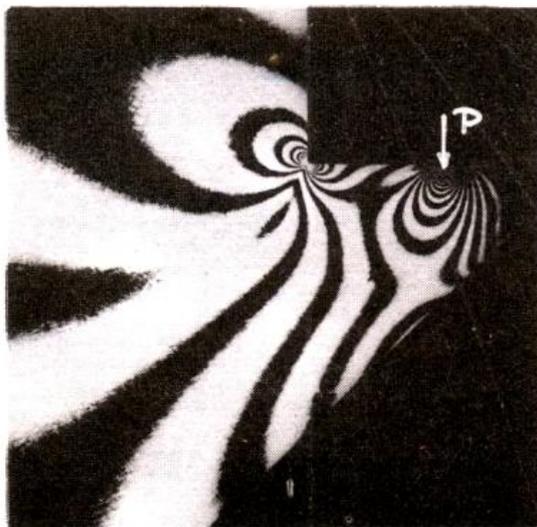
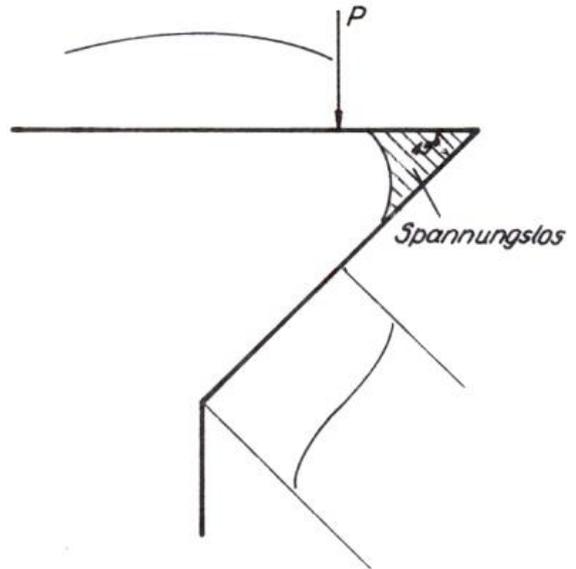
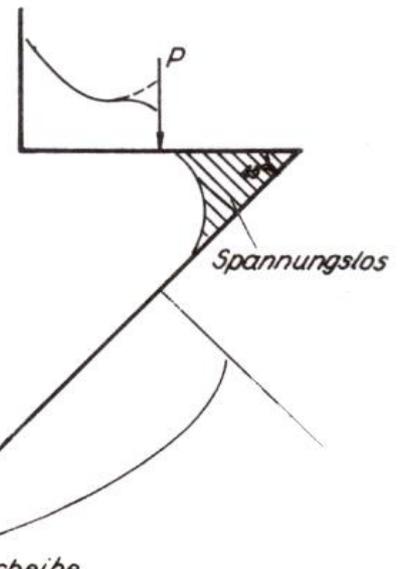
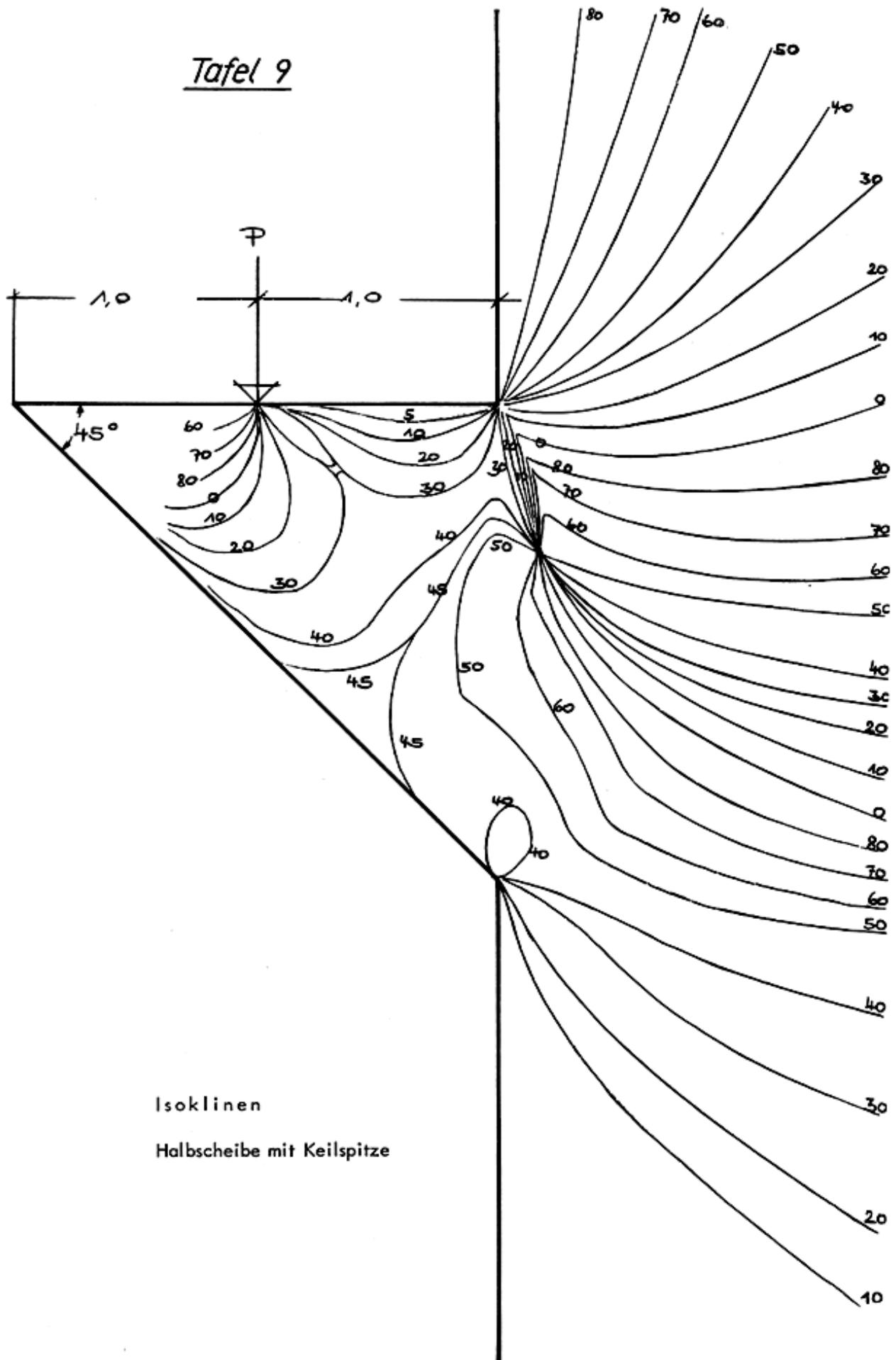


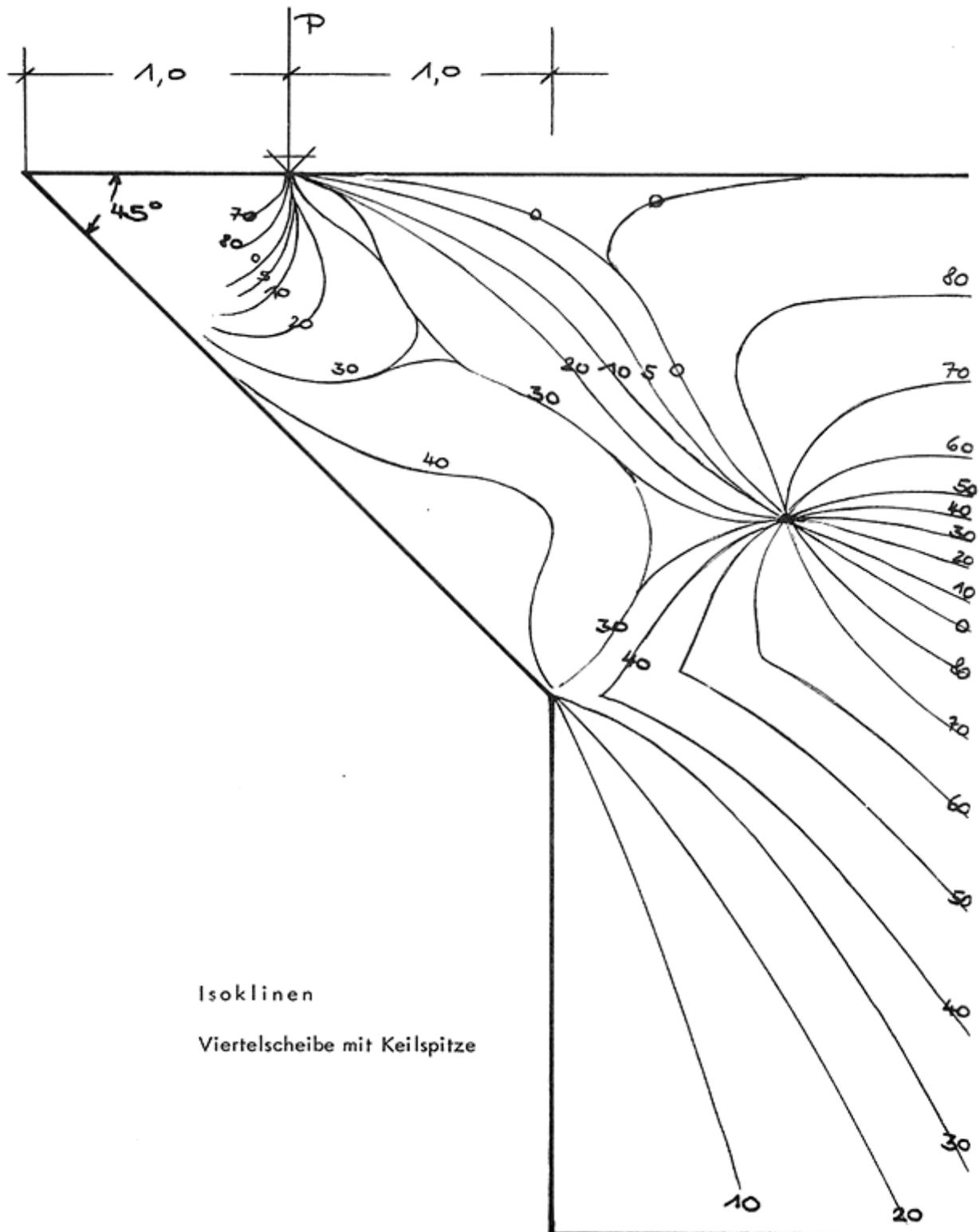
Bild 49 Komb. Halb- und Keilförmige Scheibe



Tafel 9

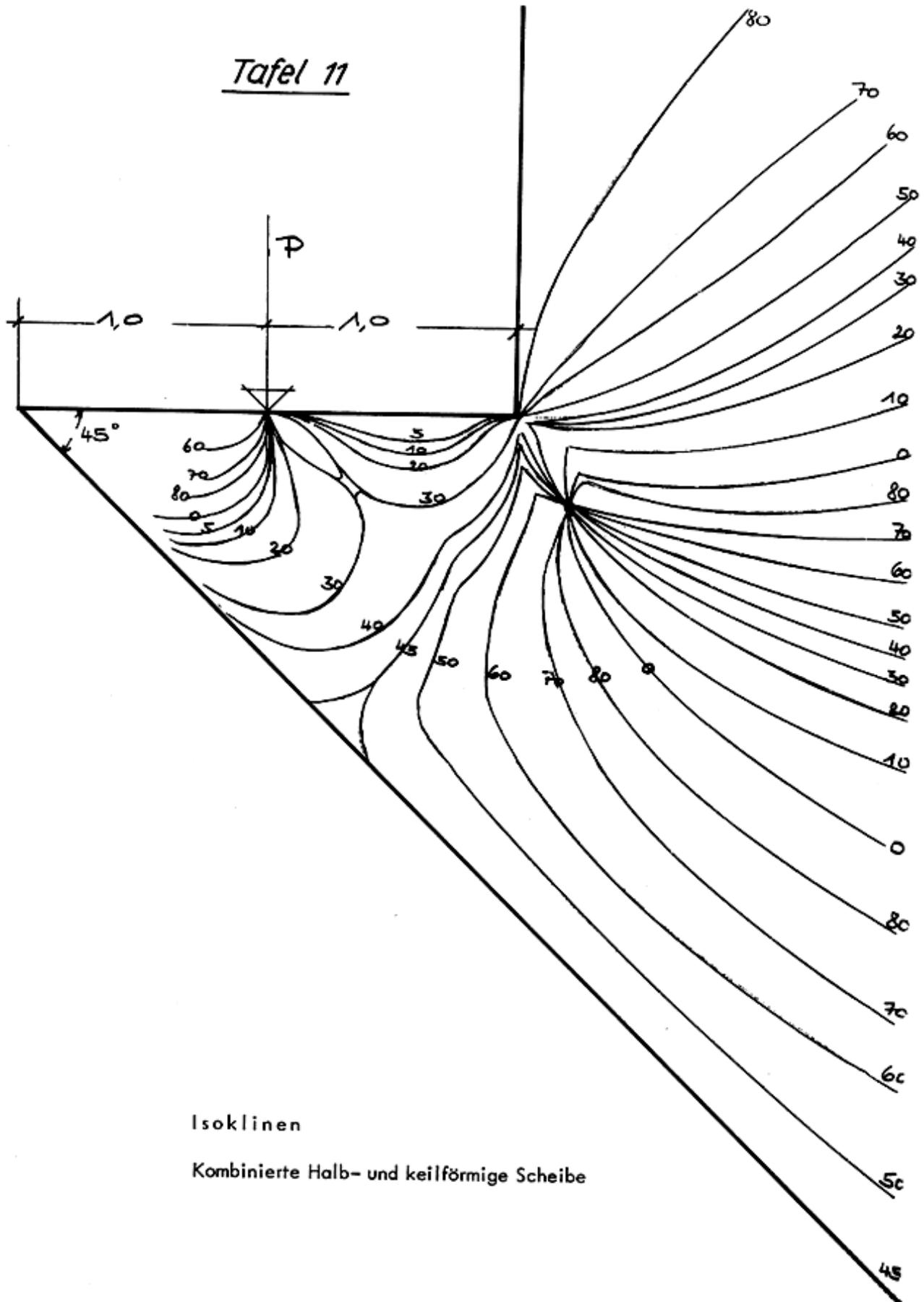
Isoklinen

Halbscheibe mit Keilspitze

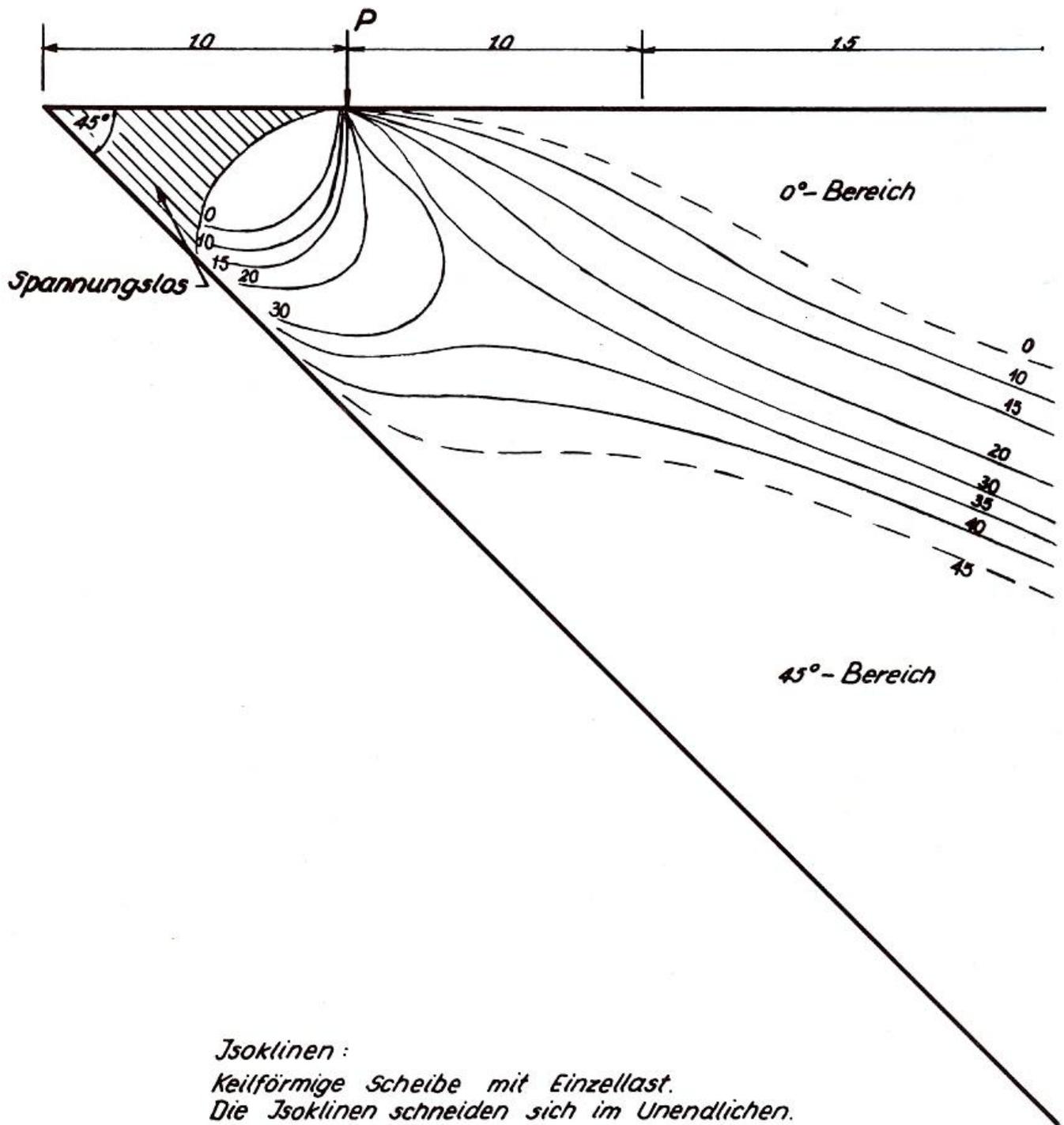
Tafel 10

Isoklinen

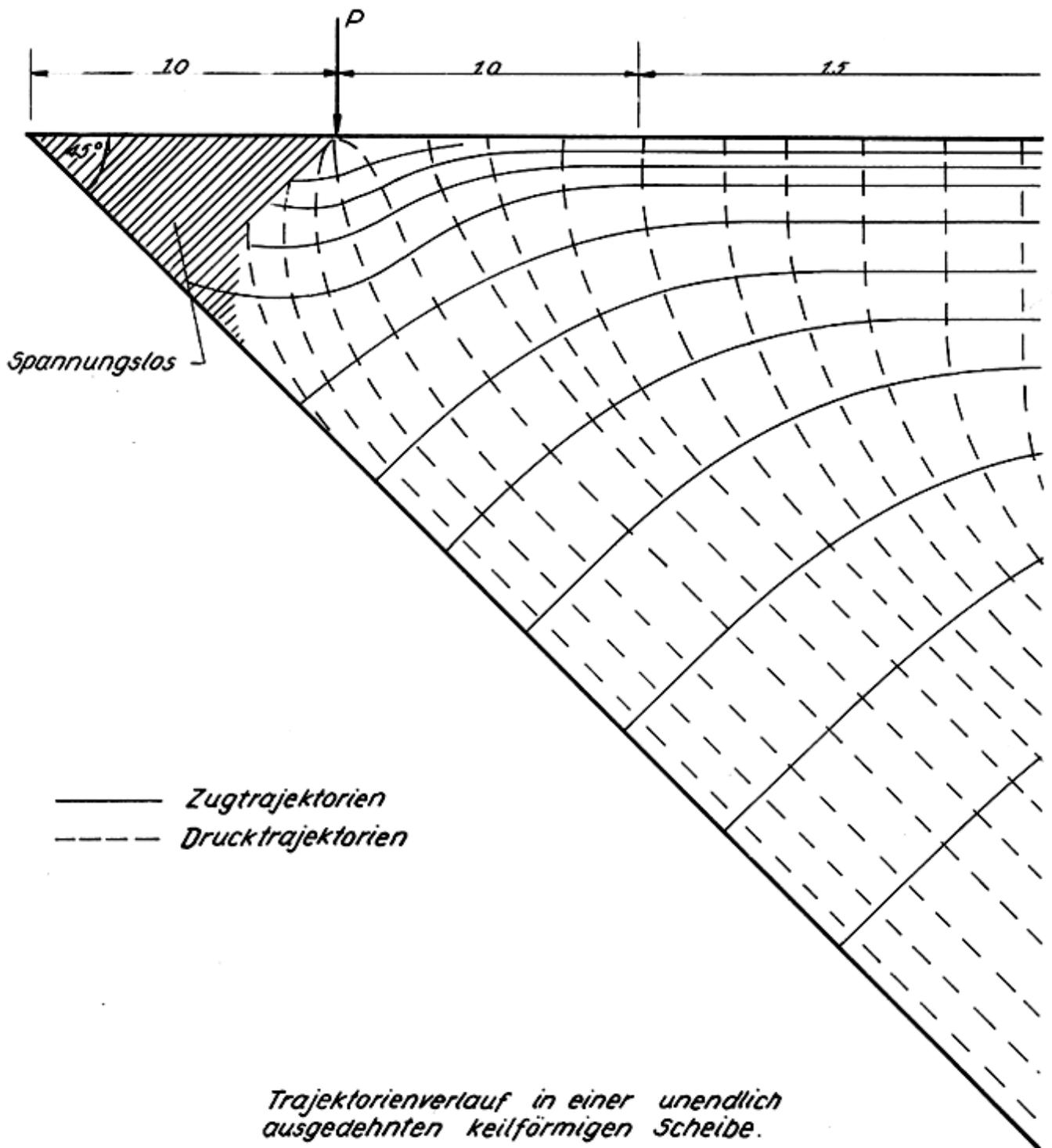
Viertelscheibe mit Keilspitze

Tafel 11

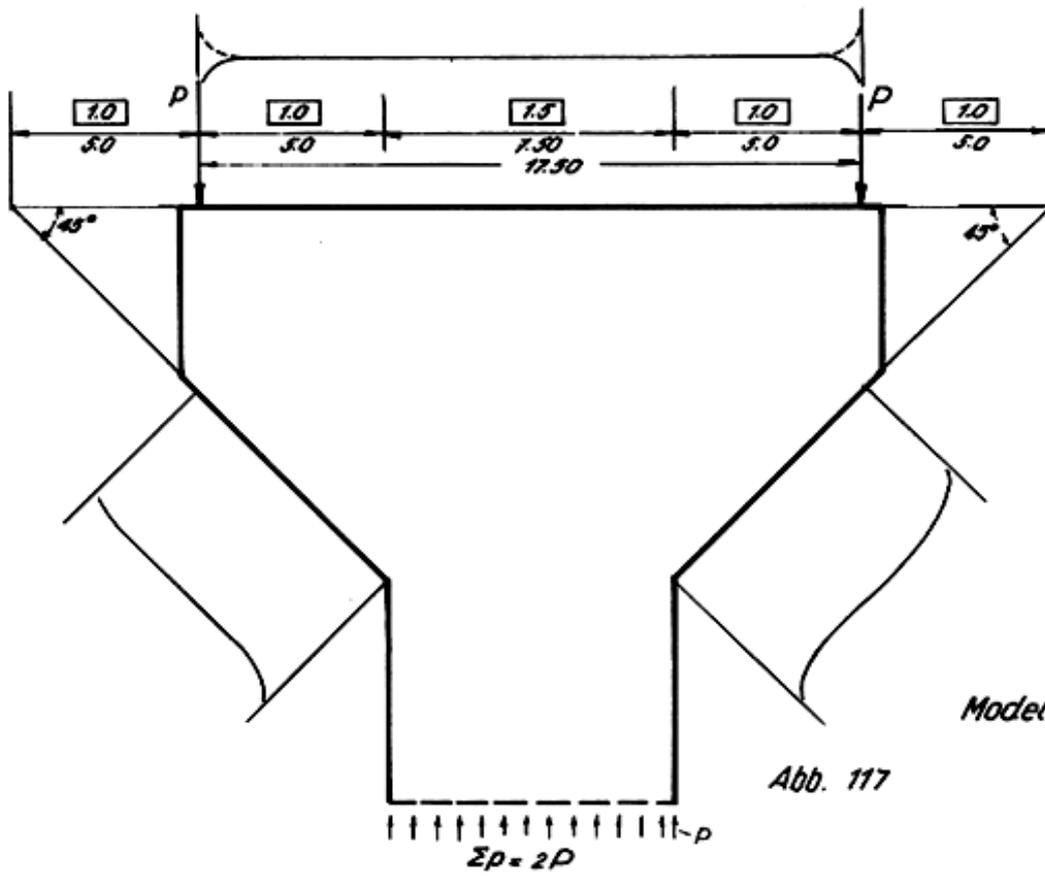
## Tafel 12



*Isoklinen:  
Keilförmige Scheibe mit Einzellast.  
Die Isoklinen schneiden sich im Unendlichen.*

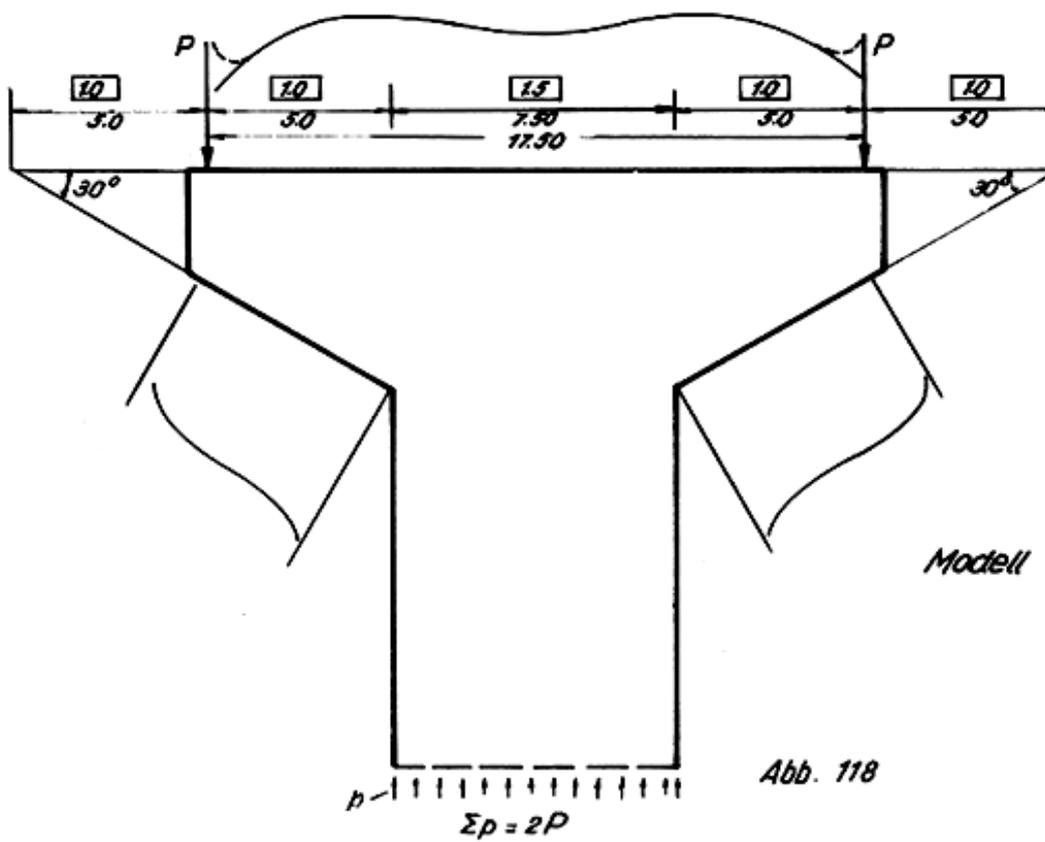
Tafel 13

Modellformen der Doppelkonsolen und  
Randspannungsverlauf.



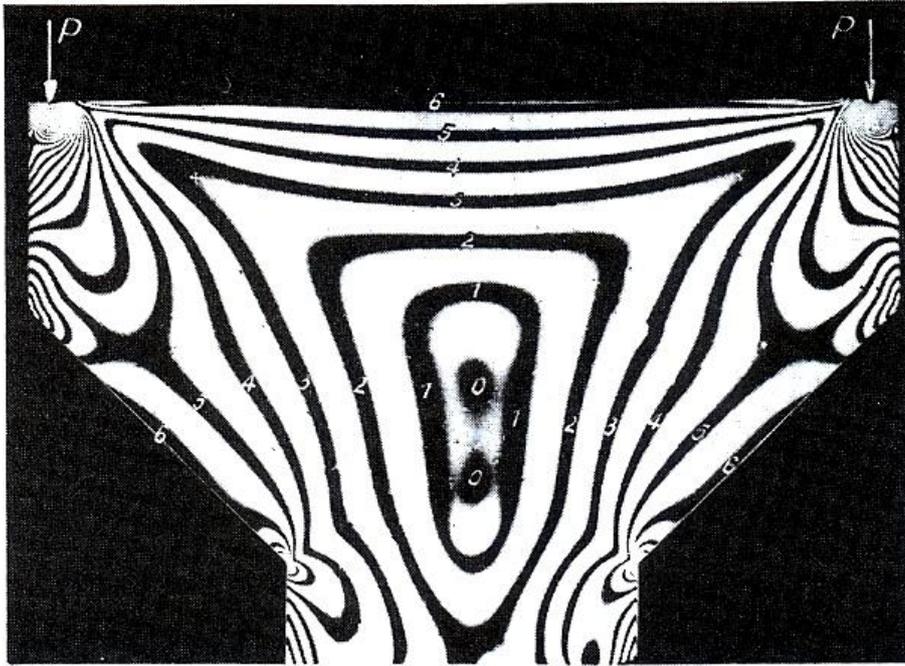
Modell  $M_1'$   $\alpha = 45^\circ$

Abb. 117



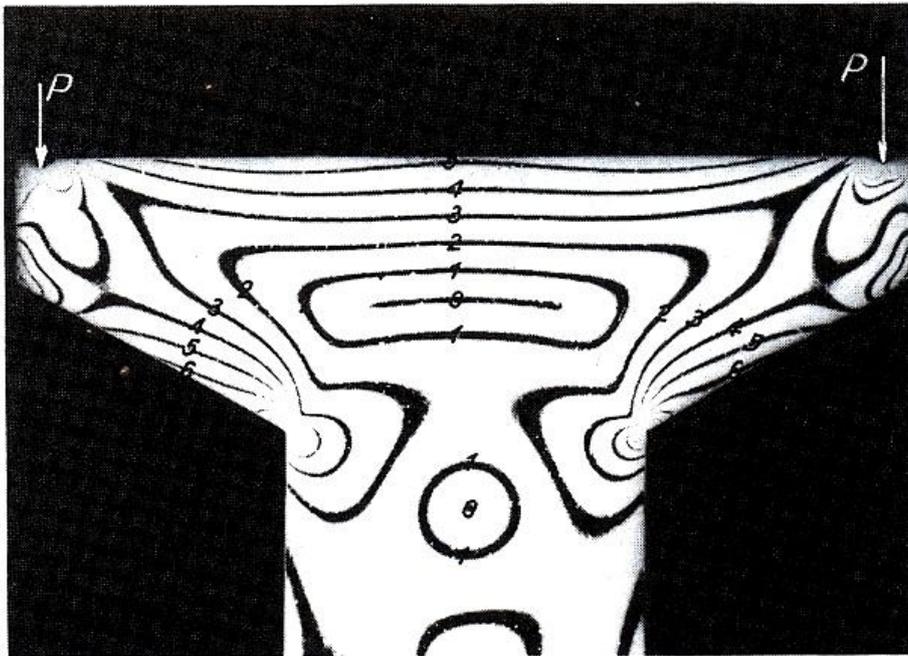
Modell  $M_3'$   $\alpha = 30^\circ$

Abb. 118



Isochromatenverlauf Doppelkonsole M 3

Bild 51

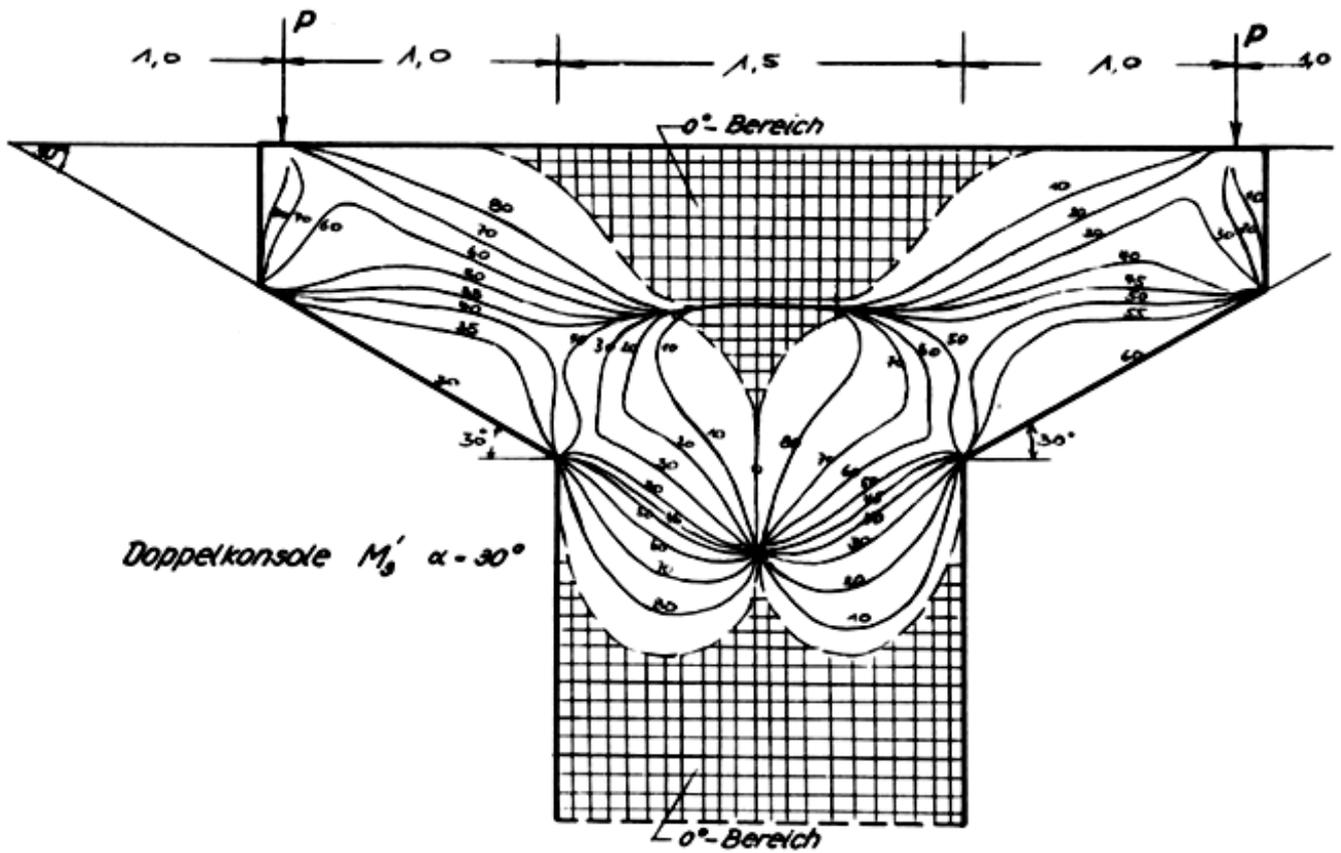
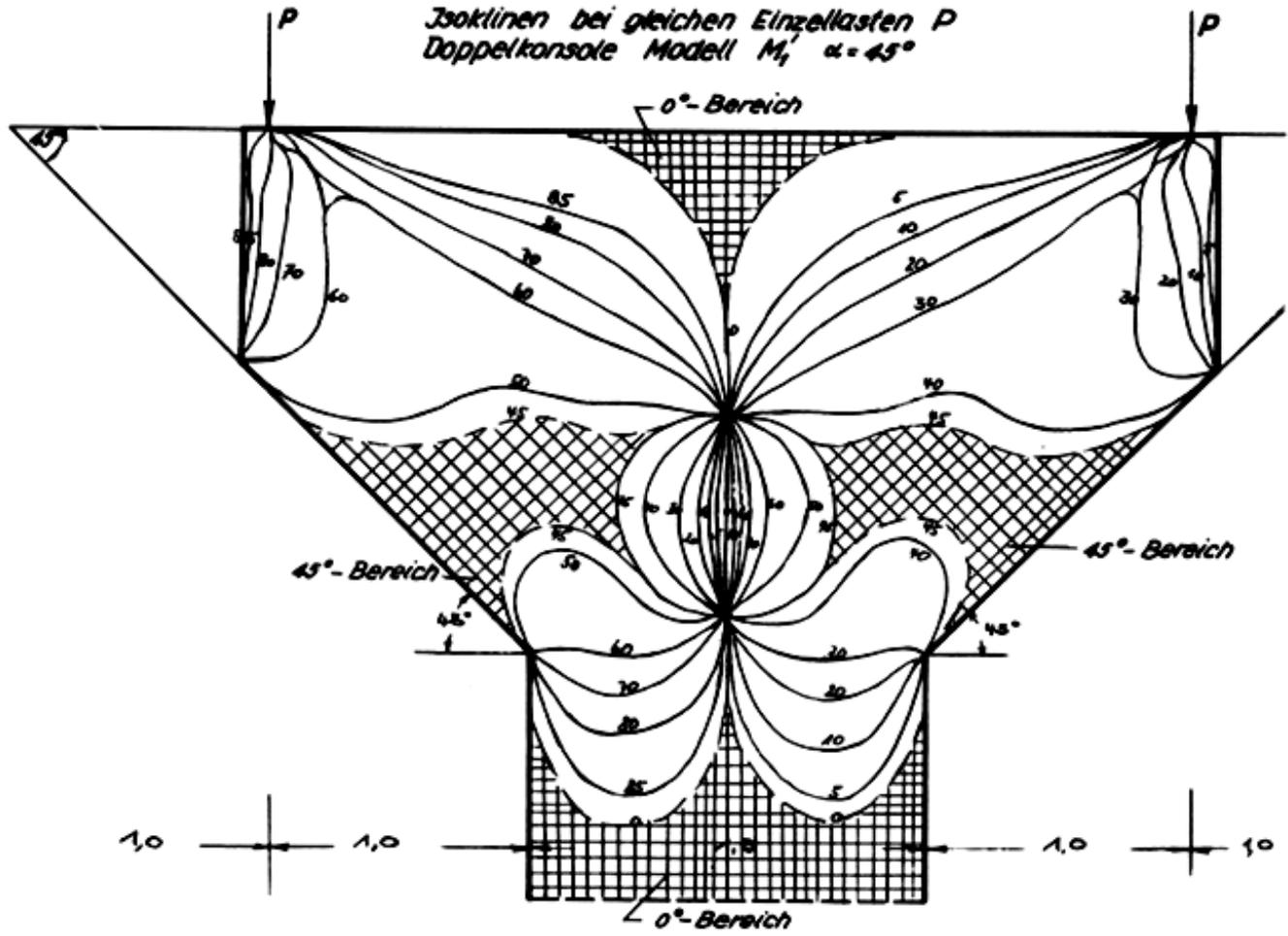


Isochromatenverlauf Doppelkonsole M 1

Bild 50

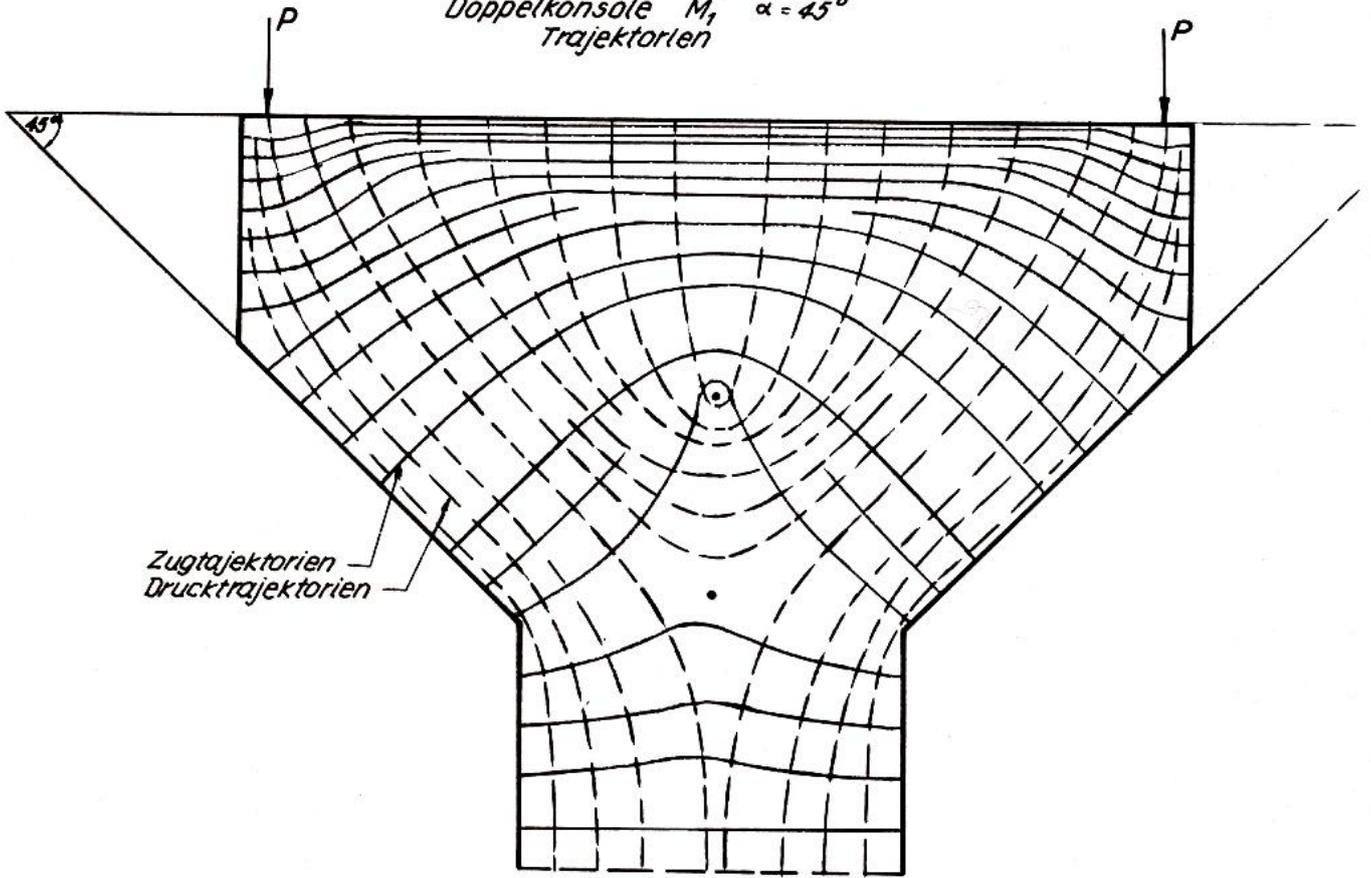
Tafel 15

Isoklinen bei gleichen Einzellasten  $P$   
 Doppelkonsole Modell  $M_1'$   $\alpha = 45^\circ$

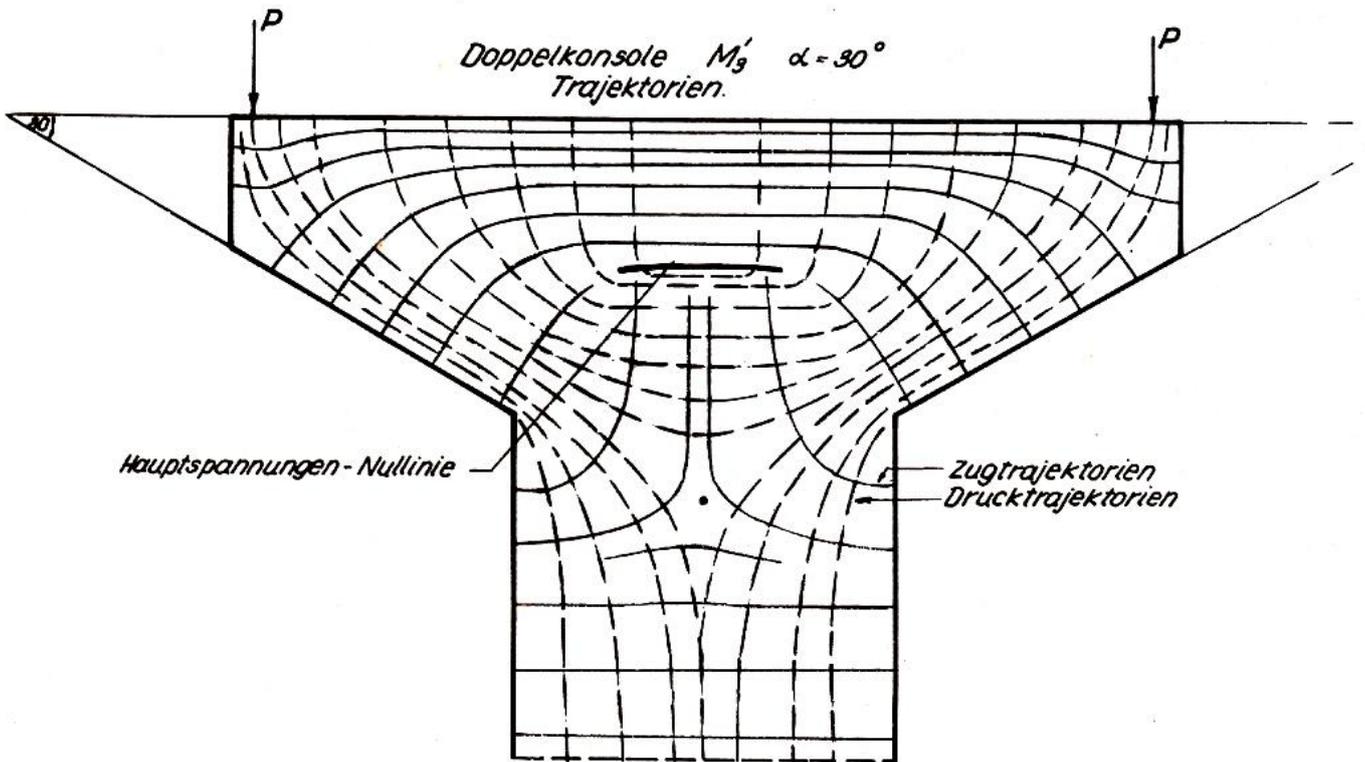


Tafel 16

Doppelkonsole  $M_1'$   $\alpha = 45^\circ$   
Trajektorien



Doppelkonsole  $M_3'$   $\alpha = 30^\circ$   
Trajektorien.



## L I T E R A T U R - V E R Z E I C H N I S

- ( 1 ) Akira Miura  
Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern
- ( 2 ) L. Föppl  
Drang und Zwang, 3. Band
- ( 3 ) Rausch  
Drillung (Torsion), Schub und Scheren
- ( 4 ) Wyss  
Krauffelder in festen elastischen Körpern
- ( 5 ) Mörsch  
Der Eisenbetonbau 1. Band, 1. Hälfte
- ( 6 ) Mohr  
Armierter Beton 1911, S. 248
- ( 7 ) Seybold  
Über die Scherfestigkeit spröder Baustoffe, Diss. 1933
- ( 8 ) Graf  
DAE - Heft 80
- ( 9 ) Föppl/Mönch  
Praktische Spannungsoptik
- ( 10 ) Teepe  
Beitrag zur spannungsoptischen Untersuchung von Schalen, Diss. 1959
- ( 11 ) Wegner  
Zeitschrift Metall 1959, Festschrift für Prof. Seemann
- ( 12 ) Rausch  
Zuschrift: "Berechnung auf Scheren im Stahlbetonbau"  
Beton und Stahlbetonbau, Bd. 42 (1943) Heft 11, 12.
- ( 13 ) Rausch  
Beanspruchung auf Abscheren im Eisenbetonbau, Bauingenieur 1931, Heft 32/33
- ( 14 ) Rausch  
Berechnung der Abbiegungen gegen Abscheren, Bauingenieur 1922
- ( 15 ) Rausch  
Untersuchung der Scherfestigkeit, Diss. 1919 in Budapest
- ( 16 ) Rausch  
Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Torsion) und Abscheren 1938

- (17) Löser  
Bemessungsverfahren
- (18) Leon  
Über die Scherfestigkeit des Betons  
Beton und Eisen 1935, Heft 8
- (19) Mörsch  
Schub- und Scherfestigkeit des Betons, Schweizer Bauzeitung 1904
- (20) Dischinger  
Kritische Betrachtungen zu den Deutschen Bestimmungen für Stahlbeton bezüglich  
der Berechnung der Haft-, Schub- und Scherspannungen  
Bauingenieur 1942, Heft 35/36
- (21) Deininger  
Der Versuch als Grundlage der Theorie des Stahlbetons bei Haft-, Schub- und  
Scherspannungen. Beton und Stahlbetonbau 1943
- (22) Adrien Paris  
Cours de Béton armé, 1936 Seite 94
- (23) Paduart  
Resistance du Béton armé à l'effort trouchant
- (24) Leon  
Scherfestigkeit des Betons. Beton und Eisen 1935
- (25) Institut für Beton und Stahlbeton, T.H. Karlsruhe  
Versuchsbericht 1960 (unveröffentlicht)

## I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

Vorwort	1
1. ALLGEMEINES	3
1.1 Problemstellung und Überblick	3
1.2 Veröffentlichungen über das behandelte Thema	3
1.3 Das Prinzip von De Saint - Venant	9
2. BISHERIGE BEMESSUNGSMETHODEN FÜR KONSOLEN	9
2.1 Bemessung auf Schub und Scheren im Stahlbetonbau	9
2.2 Scherspannungen im Stahlbetonbau	10
2.3 Die Abscherversuche des DAfE	13
3. DIE SPANNUNGSOPTISCHEN UNTERSUCHUNGEN DER EINZELNEN KONSOLFORMEN	13
3.1 Vorbemerkung	13
3.2 Modellformen, -abmessungen und Belastungsvorrichtung	15
3.3 Die spannungsoptischen Untersuchungsmethoden	17
3.4 Das Modell M 1	21
3.5 Das Modell M 2	23
3.6 Das Modell M 3	25
3.7 Das Modell M 4	26
3.8 Zusammenfassung der spannungsoptischen Ergebnisse	28
4. DIE DURCHFÜHRUNG DER VERSUCHE AN BETONKONSOLEN	29
4.1 Die Form der Versuchskörper	29
4.2 Bemessung und Bewehrung der Versuchskörper	30
4.21 M <sub>1</sub> / A	31
4.22 M <sub>1</sub> / B 1	32
4.23 M <sub>1</sub> / B 2	32
4.24 M <sub>2</sub> / A	35
4.25 M <sub>2</sub> / B 1	36
4.26 M <sub>2</sub> / B 2	36
4.27 M <sub>2</sub> / B 3	38
4.28 M <sub>3</sub> / A	39
4.29 M <sub>3</sub> / B	40
4.210 M <sub>3</sub> / C	40
4.211 M <sub>4</sub> / A	43
4.212 M <sub>4</sub> / B	44
4.3 Die Herstellung der Versuchskörper	44
4.4 Die Durchführung der Bruchversuche	45
4.41 Die Versuchseinrichtung	45
4.42 Der Belastungsvorgang	46
4.43 Messung der Hauptspannungsrichtung am Betonkörper	46

4.5	Die Ergebnisse der Bruchversuche	47
4.50	Vorbemerkung	47
4.51	$M_1 / A$	48
4.52	$M_1 / B 1$	49
4.53	$M_1 / B 2$	50
4.54	$M_2 / A$	54
4.55	$M_2 / B 1$	55
4.56	$M_2 / B 2$	56
4.57	$M_2 / B 3$	57
4.58	$M_3 / A$	60
4.59	$M_3 / C$	61
4.510	$M_3 / B$	62
4.511	$M_4 / A$	65
4.512	$M_4 / B$	66
4.513	Zusammenfassung	67
5.	ELASTIZITÄTSTHEORETISCHE UNTERSUCHUNG DES PROBLEMS	68
5.1	Die strenge Lösung	68
5.2	Näherungslösung mit Hilfe der Differenzenrechnung	69
5.3	Lösung durch Vereinfachung der geometrischen Form der Scheibe	69
5.4	Das Verfahren zur Bestimmung der Hauptspannungssumme	70
5.5	Untersuchung der Trajektorien in der Nähe der einspringenden Ecke	75
5.6	Untersuchung über die Form des Risses in der Nähe des Nullpunktes	78
6.	VORSCHLAG ZUR BERECHNUNG, BEMESSUNG UND BEWEHRUNGSFÜHRUNG DER KONSOLEN UND KURZEN KRAGARME	80
6.11	Konsolformen	80
6.12	Vorschlag zur Bestimmung des Begriffsbereiches Konsolen - kurze Kragarme	81
6.2	Bemessungs- und Bewehrungsvorschlag	82
6.21	Konsolen mit $a \leq h_1 ; \alpha > 30^\circ$	82
6.22	Konsolen mit $a = h_1$ und $a \leq 1,5 h_1 ; \alpha \leq 30^\circ$	84
7.	ZUSAMMENFASSUNG	85
8.	BERECHNUNGSBEISPIELE	86
8.1-5	Konsolen und Doppelkonsolen	86
	Tafel A	91
	Tafel B	92
9.	ANHANG	93
10.	LEBENS LAUF	116

## L E B E N S L A U F

Am 10.3.1927 in Bergisch Gladbach bei Köln geboren, besuchte ich dort bis Anfang 1941 die achtklassige Volksschule. Nach den Volksschuljahren trat ich eine Lehre in der Bauabteilung der Stadtverwaltung Bergisch Gladbach an, die ich Anfang 1944 beendete. Danach begann ich bei einem Zimmergeschäft in Bergisch Gladbach als Zimmerlehrling. Ende 1944 wurde ich zum Reichsarbeitsdienst und im Januar 1945 zum Militär eingezogen. In der Tschechoslowakei kam ich im Mai 1945 in russische Kriegsgefangenschaft, aus der ich Ende 1949 entlassen wurde. Nach der Gefangenschaft bereitete ich mich auf die Reifeprüfung vor. 1951 bestand ich extern die Mittlere Reife, die Gesellenprüfung im Zimmerhandwerk und die Aufnahme in die Unterprima des Abendgymnasiums der Stadt Köln. Im Frühjahr 1953 bestand ich die Reifeprüfung.

In diesen Jahren bis zum Abitur war ich von Anfang 1950 bis 1953 in einem Ingenieurbüro und bei einem Prüflingenieur in Bergisch Gladbach und Köln tätig.

Vom Sommersemester 1953 an studierte ich an der Technischen Hochschule in Karlsruhe Fachrichtung Bauingenieurwesen und bestand im Wintersemester 1957/58 das Hauptdiplom. Vom Februar 1958 bis Anfang 1960 arbeitete ich am Institut für Beton und Stahlbeton und bin seit Juli 1960 wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Beton und Stahlbeton der Technischen Hochschule Karlsruhe.