

# ***Resistência dos Materiais - Revisão***

## ***Introdução à Teoria da Elasticidade***

### ***Professor:***

Prof. Luiz Augusto C. Moniz de Aragão Filho, D.Sc. - Maj

### ***Bibliografia & Referências:***

- Beer, F. P., Johnston, E. R., "Resistência dos Materiais", McGraw-Hill, 1996.  
Frazão Guimarães, H. C., Ávila, J. A., "Resistência dos Materiais", IME, 2001.  
Timoshenko, S.P., Gere, J. E., "Mecânica dos Sólidos", LTC, 1994.  
Popov, E. P., "Mechanics of Materials", Prentice Hall, 1997.

### ***Índice:***

1. Introdução.....	2
1.1 Objetivo da Disciplina Resistência dos Materiais.....	2
1.2 Estaticidade e Estabilidade - Apoios e Vínculos.....	2
2. Tensões e Deformações.....	3
2.1 Tensão Normal.....	4
2.2 Tensão Cisalhante.....	10
2.3 Tensões para um Carregamento Qualquer.....	15
3. Esforços Simples.....	17
4. Propriedades de Áreas Planas.....	19
5. Tensões e Deformações da Viga.....	23
6. Deformação do Eixo da Viga: Elástica.....	28
7. Torção: Cisalhamento Puro.....	32
8. Tensões Planas (EPT - Estado Plano de Tensões).....	37

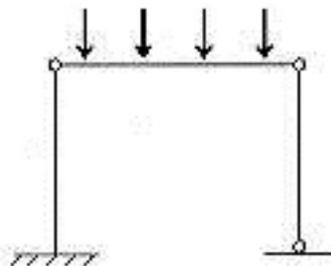
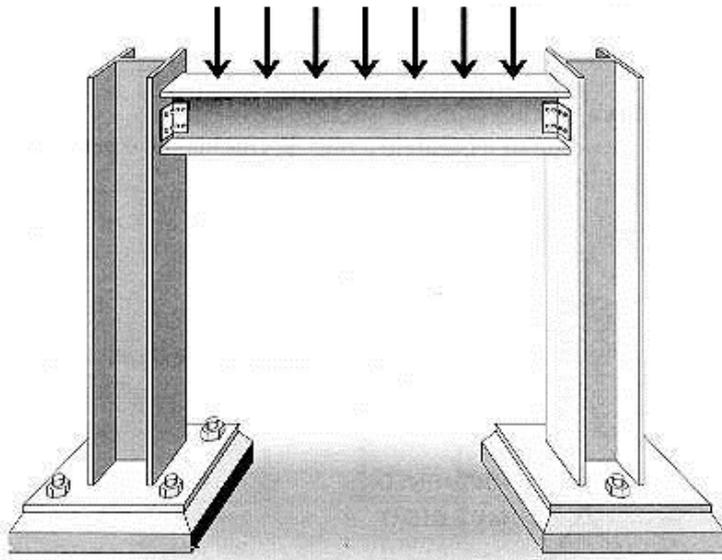
## 1. Introdução

### 1.1 Objetivo da Disciplina Resistência dos Materiais

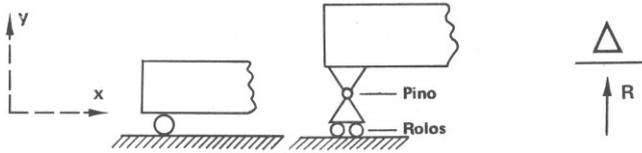
“O ESTUDO DOS FENÔMENOS LIGADOS ÀS SOLICITAÇÕES NO INTERIOR DOS CORPOS REAIS EM VIRTUDE DAS AÇÕES EXTERIORES”

A Resistência dos Materiais faz uso de hipóteses simplificadoras, procurando dar soluções à maioria dos problemas práticos mediante expressões que, sem o mesmo rigor das obtidas pela Teoria da Elasticidade, são de emprego mais fácil no uso diário.

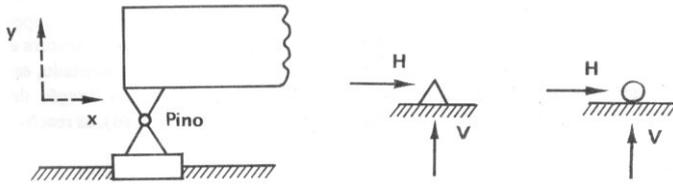
### 1.2 Estaticidade e Estabilidade - Apoios e Vínculos



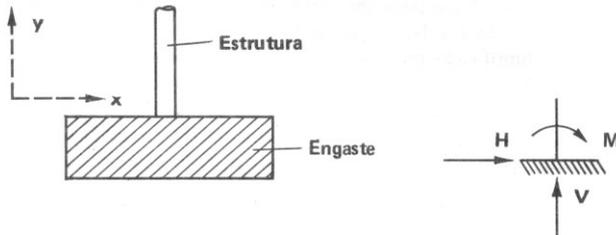
a) Apoio do 1º gênero ou *charriot*



b) Apoio do 2º gênero, articulação ou rótula



c) Apoio do 3º gênero ou engaste



Vínculo	Reação	Número de incógnitas
<p>Roletes      Balancim      Superfície lisa</p>	<p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
<p>Cabo curto      Haste curta</p>	<p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
<p>Cursor sobre haste lisa      Pino liso deslizante</p>	<p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
<p>Pino liso ou articulação      Superfície áspera</p>	<p>Força com direção desconhecida</p>	2
<p>Apoio fixo ou engastamento</p>	<p>Força e binário</p>	3

## 2. Tensões e Deformações

### 2.1 Tensão Normal

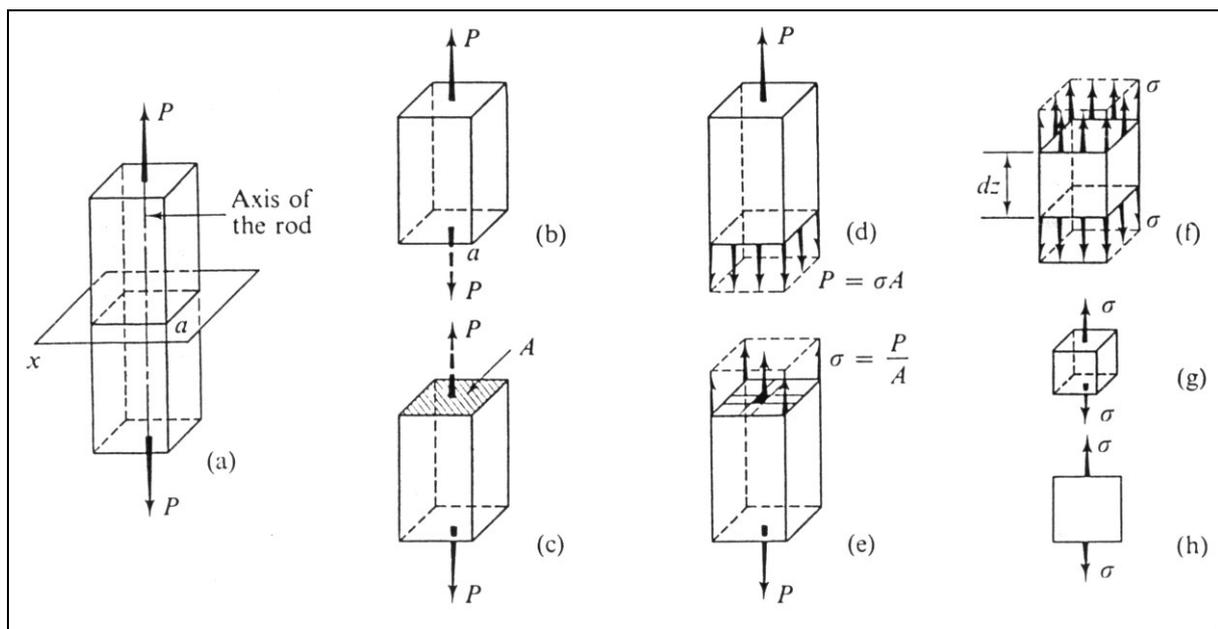
Seja uma haste prismática em equilíbrio solicitada axialmente.

Assumindo a haste sem peso, duas forças de mesma intensidade e sentidos contrários são necessárias em cada extremidade para manter o equilíbrio (fig. [a]). Se o corpo como um todo está em equilíbrio, qualquer segmento seu também está (fig. [b] e [c]).

A intensidade da força normal numa área infinitesimal da seção transversal é chamada de *tensão normal* (fig. [e]) sendo geralmente denotada pela letra grega  $\sigma$  (sigma).

Como cada um dos segmentos da haste dividido pelo plano imaginário (fig. [a]) deve estar em equilíbrio, pode-se afirmar que a tensão normal média na seção cortada é (fig. [d]):

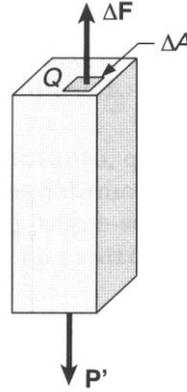
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{\text{Força}}{\text{Área}} \left[ \frac{N}{m^2} = Pa \right]$$



Um cubo infinitesimal (*paralelepípedo elementar*) pode ser extraído da haste (fig. [f]) sendo submetido somente a tensões normais. Este *estado de tensões* em um elemento é chamado de *estado uniaxial de tensões* (fig. [g]) e geralmente representado segundo a fig. (h).

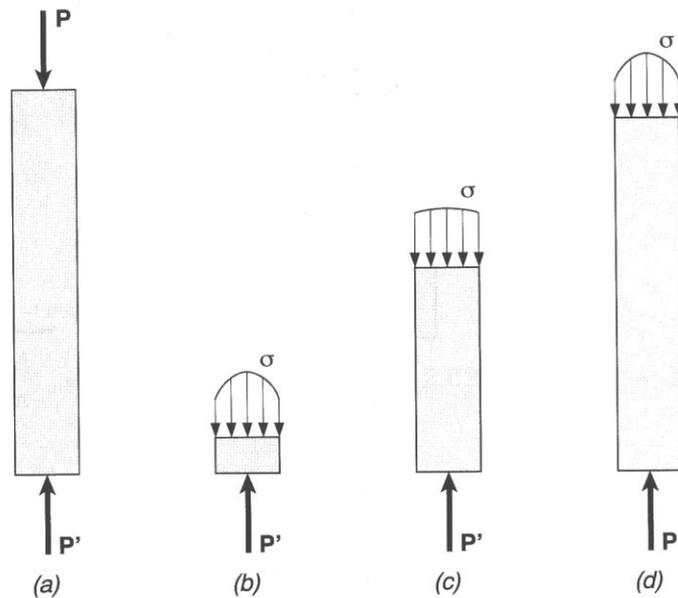
A tensão normal, no caso mais geral, depende da posição analisada, e sua expressão teórica é:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$



### *Princípio de Saint-Venant:*

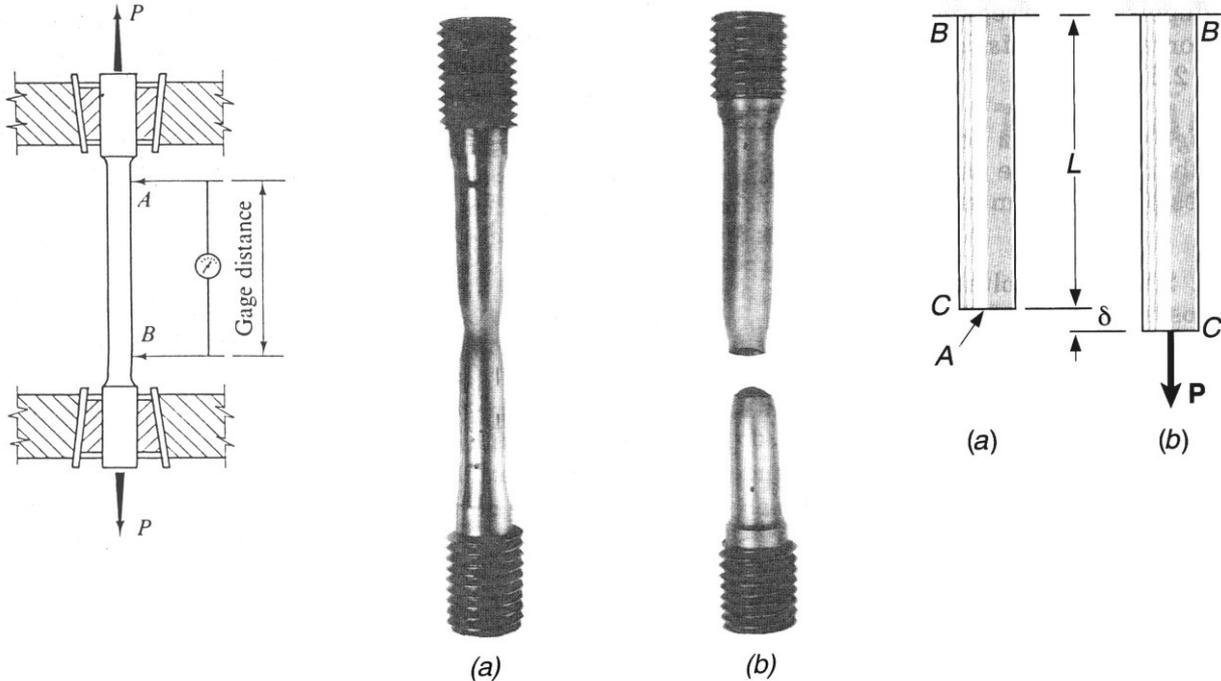
Efeitos localizados tendem a desaparecer à proporção que as forças em jogo se propagam para longe da região de sua aplicação (aproximadamente igual à espessura ou largura da peça).



Quando assumimos que as forças internas estão uniformemente distribuídas ao longo da seção, segue-se que a resultante das forças internas está aplicada no centróide da seção transversal, logo, uma distribuição uniforme de tensões só é possível se a linha de ação das forças aplicadas passar pelo centróide da seção considerada.

## Ensaio de Tração

As informações relativas às propriedades físicas dos materiais vem sempre da realização de ensaios normatizados em laboratório. No ensaio de tração, não apenas a tensão última de resistência é determinada, mas outras propriedades podem ser observadas.

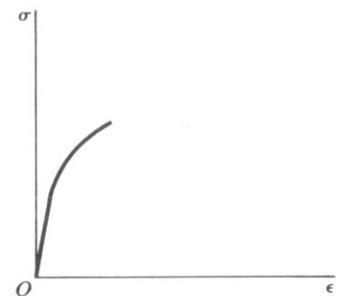
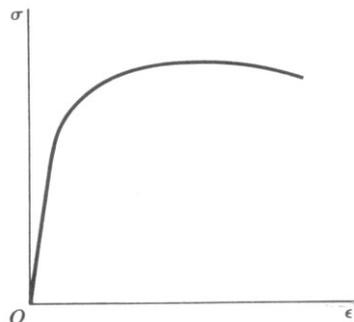


À relação entre o alongamento ocasionado pela tração e o comprimento inicial considerado, dá-se o nome de deformação:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad [m/m; \mu st; \text{o}/\text{oo}]$$

A força atuante e as deformações resultantes são medidas à proporção que a carga aumenta no ensaio de tração. Obtém-se as tensões dividindo-se as forças medidas nas prensas pela área da seção transversal da barra, e a deformação (alongamento específico) dividindo-se o alongamento pelo comprimento ao longo do qual ocorre a deformação. Deste modo é possível determinar um *diagrama tensão-deformação* completo para o material em estudo.

Materiais *Dúcteis*  
X  
Materiais *Frágeis*



## Diagrama Tensão-Deformação

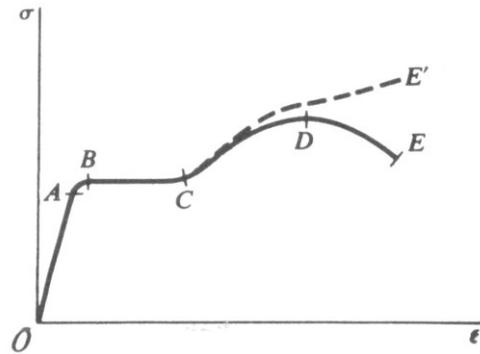
Ponto A – Limite de proporcionalidade  
Regime Elástico-Linear

Trecho BC – Patamar de Escoamento  
Regime Plástico

Ponto D – Tensão máxima (última, de ruptura)

Trecho CE – Diagrama Tensão-deformação nominal  
(estricção da seção de ruptura)

Trecho CE' – Diagrama Tensão-deformação real



## Tensão admissível

Tensão utilizada para fins de projeto (Normas determinísticas), geralmente inferior ao limite de proporcionalidade. Calculada a partir da Tensão de escoamento minorada por um coeficiente de segurança. Conceito substituído por resistência de cálculo ( $f_{cd}$ ,  $f_{yd}$ ), minorada a partir das resistências características.

## Lei de Hooke

Quando o material se comporta elasticamente e apresenta também uma relação linear entre tensão e deformação, diz-se que é linearmente elástico. A relação entre a tensão e deformação pode ser então expressa pela equação:

$$\sigma = E\varepsilon$$

onde E é uma constante de proporcionalidade conhecida como *módulo de elasticidade* (longitudinal) do material, ou *módulo de Young*, sendo o coeficiente angular da parte linear do diagrama tensão-deformação. Combinando as equação já apresentadas, temos a seguinte expressão para o alongamento da barra:

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

O alongamento da barra é diretamente proporcional à carga e ao comprimento, e inversamente proporcional ao módulo de elasticidade e à área da seção transversal.

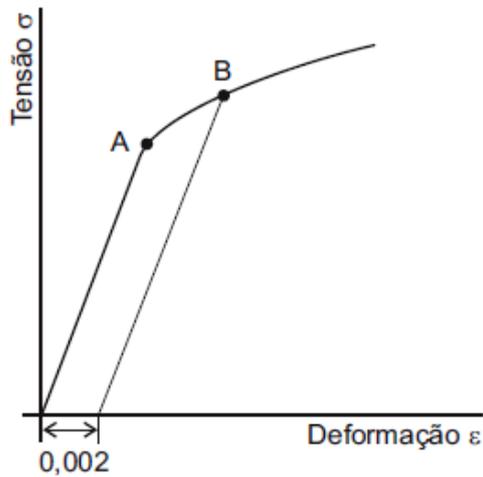
*Rigidez* é definida como a *força* necessária para produzir uma deformação unitária. Logo, a rigidez da barra solicitada axialmente é  $EA/L$ . *Flexibilidade* é o deslocamento decorrente da aplicação de uma carga unitária:  $L/EA$ .

Para a maioria dos materiais o módulo de elasticidade sob compressão é igual ao sob tração. Para o caso mais geral do diagrama, a proporcionalidade entre a tensão e a deformação é estabelecida pelo *módulo de elasticidade tangente*, e é função da deformação do material.

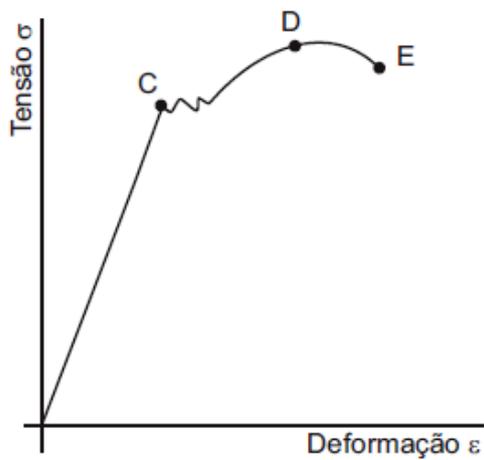
**Exercício:****9**

A figura abaixo mostra as curvas do diagrama tensão-deformação referentes aos ensaios de tração realizados com dois corpos de prova.

Corpo de prova 1



Corpo de prova 2



Esses resultados experimentais estabelecem que os pontos B e E das curvas representam, respectivamente, para os corpos de prova 1 e 2 o

- (A) ponto de ruptura e o limite de escoamento.
- (B) limite elástico linear e o ponto de ruptura.
- (C) limite elástico linear e o limite de escoamento.
- (D) limite de escoamento e o limite elástico linear.
- (E) limite de escoamento e o ponto de ruptura.

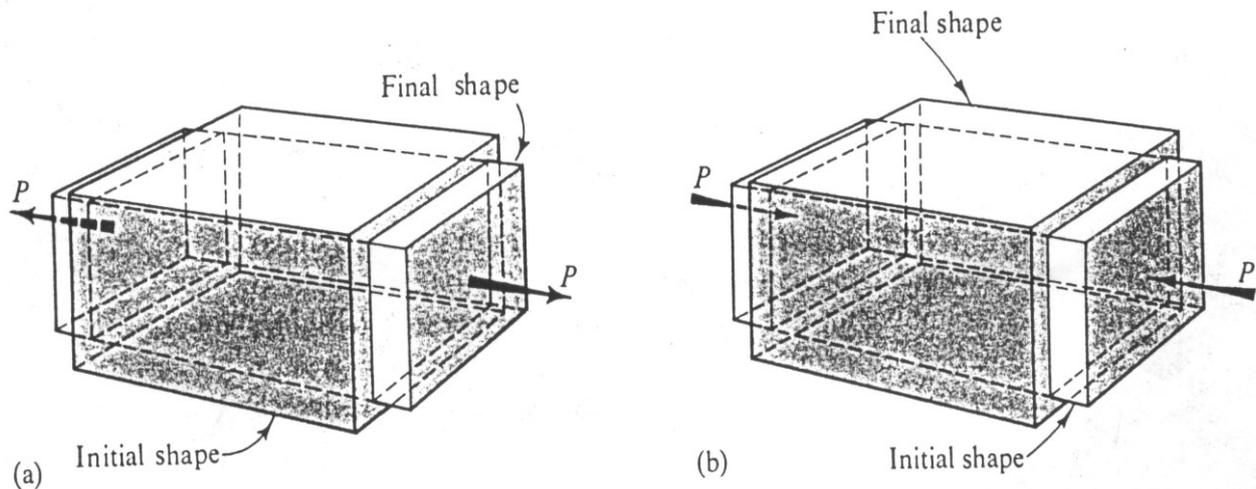
## ***Princípio da Superposição***

No regime elástico-linear, os efeitos de um certo número de ações são iguais à soma dos que ocorreriam se cada uma das ações atuasse isoladamente e consideradas em qualquer ordem.

## ***Coefficiente de Poisson***

Quando uma barra é tracionada, o alongamento axial é acompanhado por uma contração lateral, isto é, a largura da barra torna-se menor enquanto seu comprimento cresce. A relação entre as deformações transversal e longitudinal é constante dentro do regime elástico, sendo conhecida como coeficiente de Poisson:

$$\nu = \left| \frac{\text{deformação lateral}}{\text{deformação axial}} \right|$$



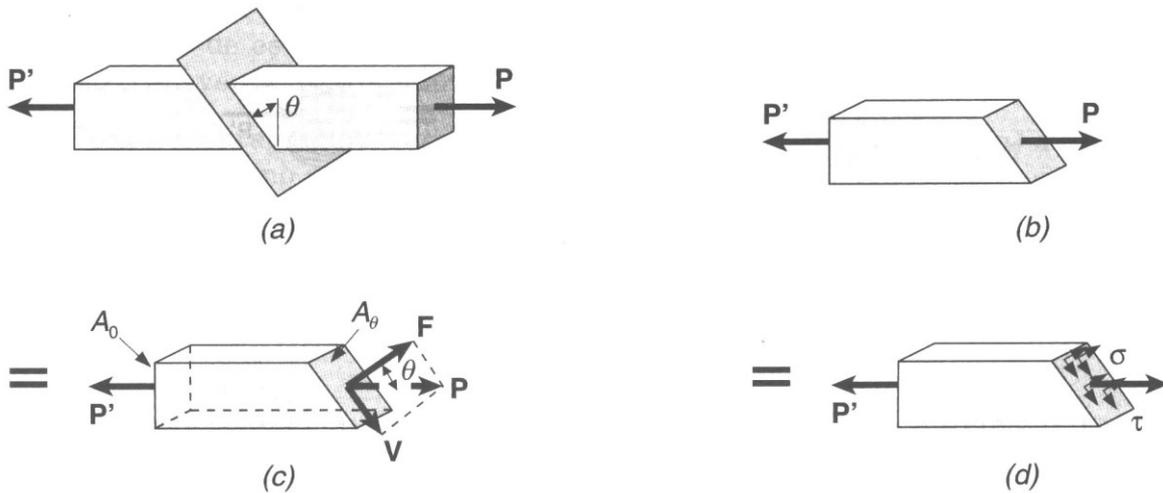
## 2.2 Tensão Cisalhante

Seja a barra prismática agora seccionada segundo um plano que forma um ângulo  $\theta$  com a seção transversal. A parte esquerda está em equilíbrio sob a ação da carga externa  $P'$  e a resultante das forças internas  $R$ . A força  $R$  pode ser decomposta em duas componentes,  $N$  e  $V$ , que são normal e tangente, respectivamente, ao plano inclinado:

$$N = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta$$

A componente  $V$  é denominada de *esforço Cortante*, produzindo *tensões de cisalhamento*, distribuídas sobre toda a área da seção oblíqua. O *valor médio* desta tensão pode ser obtido dividindo-se a força cortante total  $V$ , pela área sobre a qual ela atua:

$$\tau = \frac{V}{A_\theta}$$



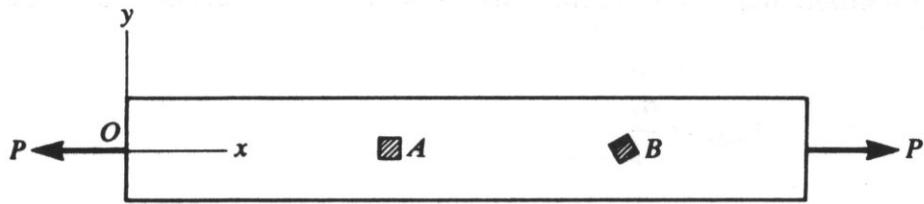
Como a área  $A_\theta$  da seção inclinada é  $A/\cos \theta$ , as tensões correspondentes a  $N$  e  $V$  são respectivamente:

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A_\theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta$$

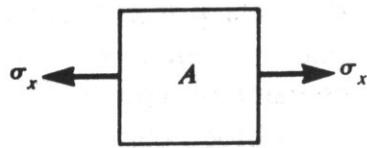
$$\tau_\theta = \frac{V}{A_\theta} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

onde  $\sigma_x = P/A$  é a tensão na seção transversal, normal ao eixo da barra (direção  $x$ ). As equações acima mostram como  $\sigma_\theta$  e  $\tau_\theta$  variam em função do ângulo  $\theta$ . Quando  $\theta = 0$  o plano de seccionamento coincide com a seção transversal da peça, acarretando  $\sigma_\theta = \sigma_x$  e  $\tau_\theta = 0$ , ou seja, a tensão normal atinge seu valor máximo e a tensão cisalhante se anula. Se o ângulo  $\theta$  aumentar, a tensão  $\sigma_\theta$  diminuirá até que em  $\theta = \pi/2$ , anula-se, indicando que não há tensões normais entre fibras longitudinais da barra. Já a tensão de cisalhamento atinge seu valor máximo em  $\theta = \pi/4$ :

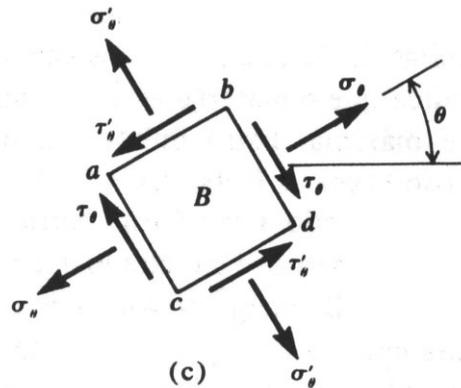
$$\tau_{\max} = \sigma_x / 2$$



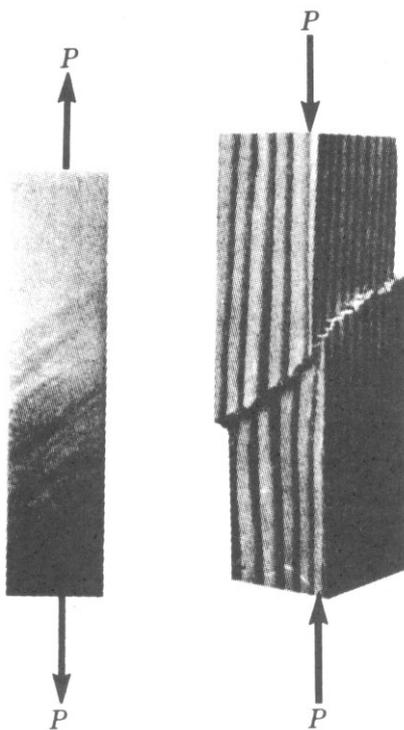
(a)



(b)



(c)



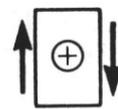
(a)

(b)

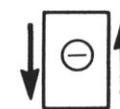


(a)

(b)



(c)



(d)

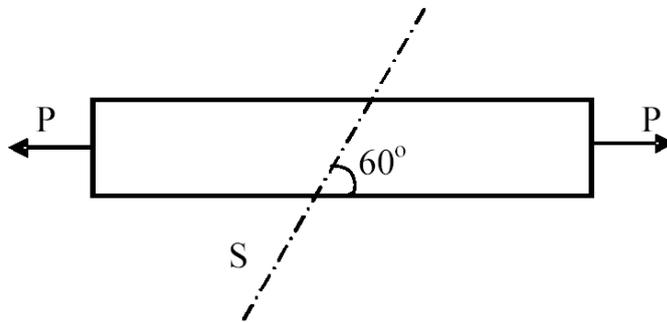
A normal do lado  $ab$  do elemento é orientada pelo ângulo  $\theta + \pi/2$ :

$$\begin{cases} \sigma'_\theta = \sigma_x \cos^2(\theta + \pi/2) = \sigma_x \sin^2 \theta \\ \tau'_\theta = \sigma_x \sin(\theta + \pi/2) \cos(\theta + \pi/2) = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x \\ \tau'_\theta = -\tau_\theta \end{cases}$$

Para uma barra tracionada, a soma das tensões normais em dois planos perpendiculares é constante e igual a  $\sigma_x$ , e as tensões de cisalhamento, em planos ortogonais, são iguais em valor absoluto, porém têm sinais opostos.

**Exercício:**

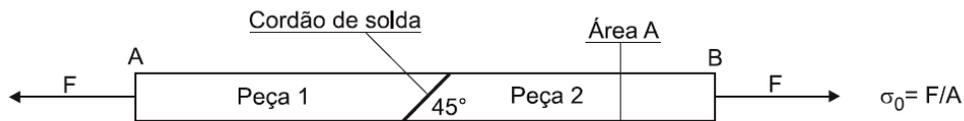
63 – A barra prismática da figura está submetida a uma força axial de tração.



Considerando que a área da seção transversal desta barra é igual a  $A$ , a tensão normal  $\sigma$  na seção  $S$  inclinada de  $60^\circ$  vale:

- (A)  $\sigma = P/2A$ ;
- (B)  $\sigma = 2P/2A$ ;
- (C)  $\sigma = 3P/4A$ ;
- (D)  $\sigma = 4P/3A$ ;
- (E)  $\sigma = 5P/3A$ .

38

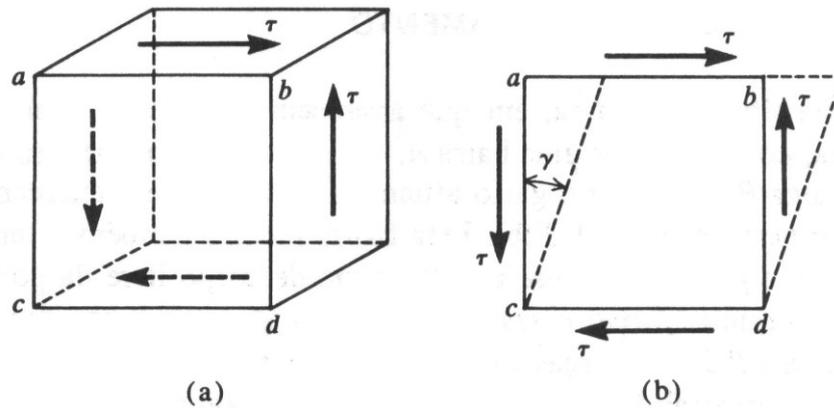


Uma barra  $AB$  de área de seção transversal  $A$  é solicitada por uma força axial  $F$ , conforme ilustrado acima. Essa força gera uma tensão nominal atuante na seção transversal da barra expressa por  $\sigma_0 = F/A$ . A barra é fabricada pela união por solda de duas peças, 1 e 2. Considerando a orientação de  $45^\circ$  do cordão de solda, os valores das tensões atuantes nas direções perpendicular e tangencial ao cordão de solda são, respectivamente, iguais a

- (A)  $\sigma_0/2$  e  $\sigma_0$
- (B)  $\sigma_0$  e  $\sigma_0/2$
- (C)  $\sigma_0$  e  $\sigma_0$
- (D)  $2\sigma_0$  e  $2\sigma_0$
- (E)  $\sigma_0/2$  e  $\sigma_0/2$

## Deformação de Cisalhamento

As tensões de cisalhamento causam distorção no paralelepípedo elementar, transformando sua seção num paralelogramo, conforme figura abaixo



O ângulo formado mede a distorção do elemento, como consequência do cisalhamento, e é denominado *deformação de cisalhamento*, e mede o deslocamento relativo das arestas opostas do paralelepípedo.

## Lei de Hooke para o Cisalhamento

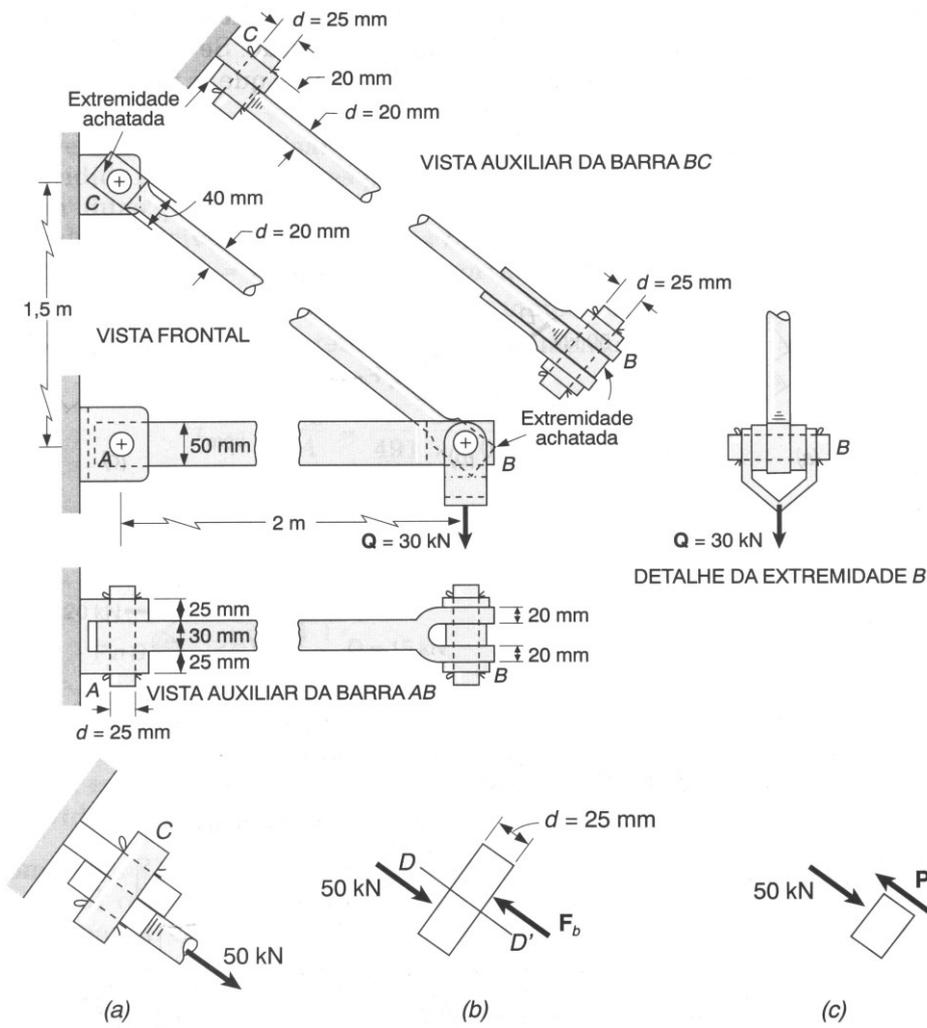
A proporcionalidade entre a tensão de cisalhamento e a respectiva distorção é estabelecida pelo *módulo de elasticidade transversal G*:

$$\tau = G\gamma$$

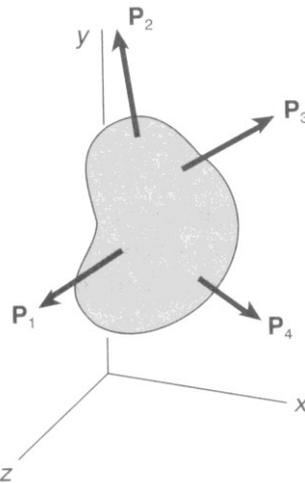
O valor de **G** pode ser obtido experimentalmente ou através da relação que possui com o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson (em materiais isotrópicos):

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

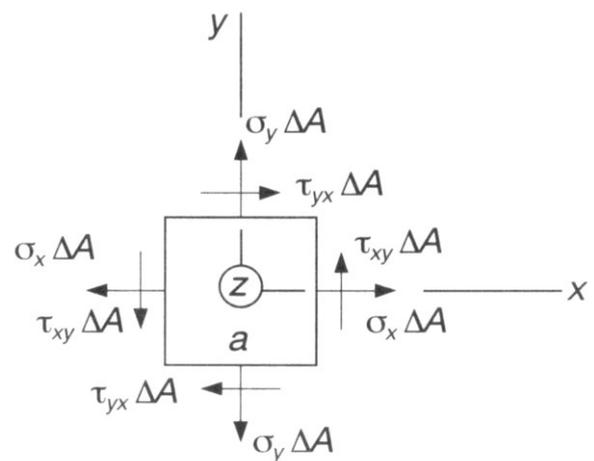
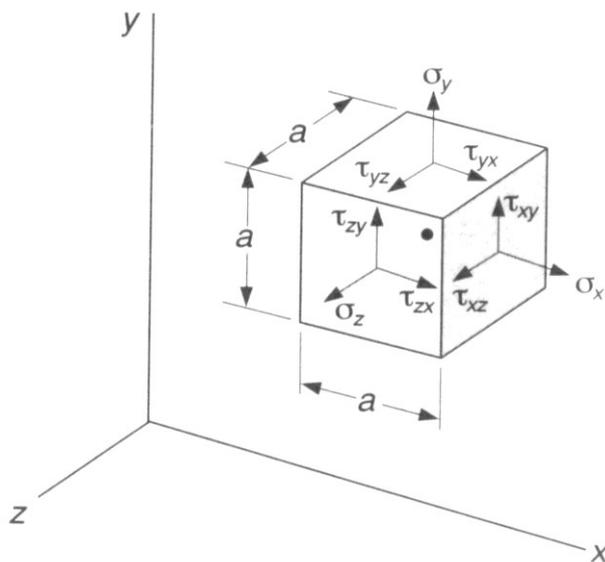
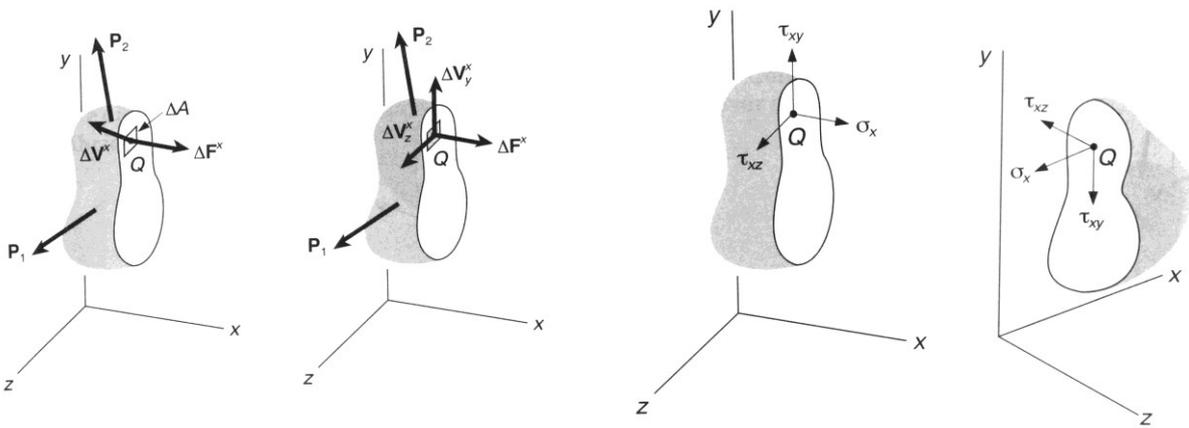
**Cisalhamento simples e cisalhamento duplo**



### 2.3 Tensões para um Carregamento Qualquer



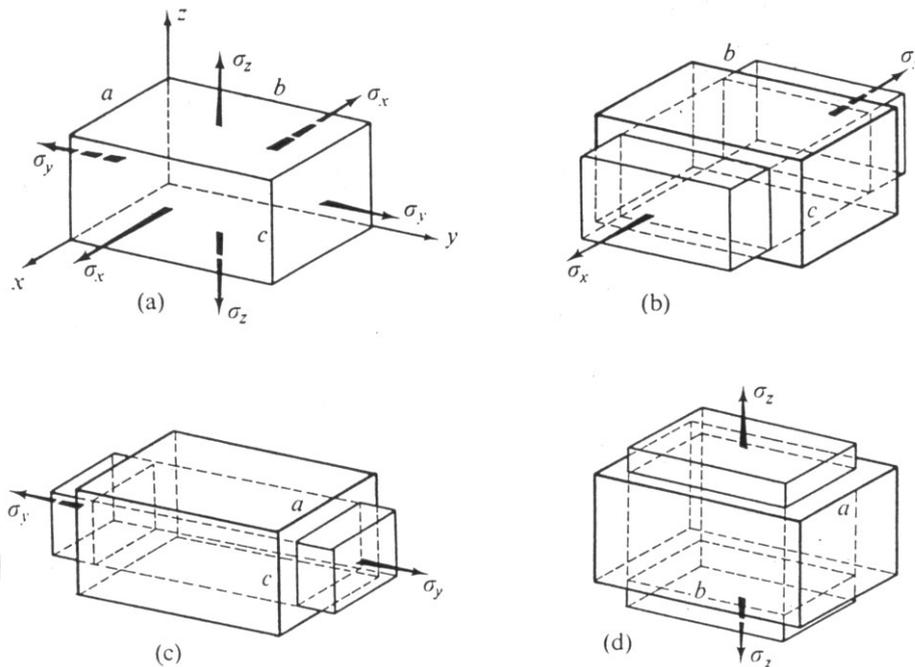
$\tau_{xy}$ : Tensão cisalhante que atua na face perpendicular ao plano  $x$  segundo a direção  $y$



$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{cases}$$

## Generalização da Lei de Hooke

Aplicando o princípio da superposição nas ações sobre um paralelepípedo elementar:



Elemento submetido à tensões triaxiais:

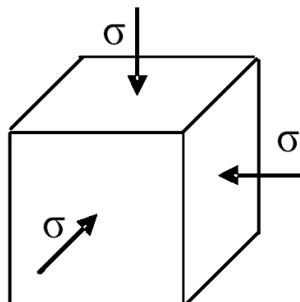
$$\begin{cases} \varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

### Exercício:

61 – O cubo de aço da figura tem 50mm de lado e está submetido a uma pressão uniforme  $\sigma = 200$  MPa agindo em todas as suas faces. O módulo de elasticidade do aço é igual a 200 GPa e o coeficiente de Poisson vale 0,25.

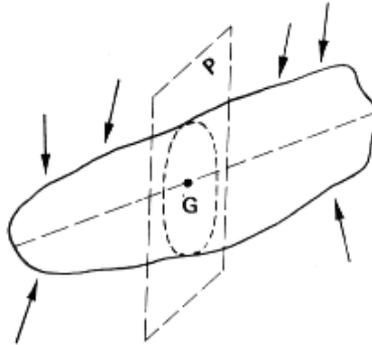
A deformação específica nas faces do cubo vale:

- (A)  $5 \times 10^{-4}$
- (B)  $10 \times 10^{-4}$
- (C)  $15 \times 10^{-4}$
- (D)  $20 \times 10^{-4}$
- (E)  $25 \times 10^{-4}$

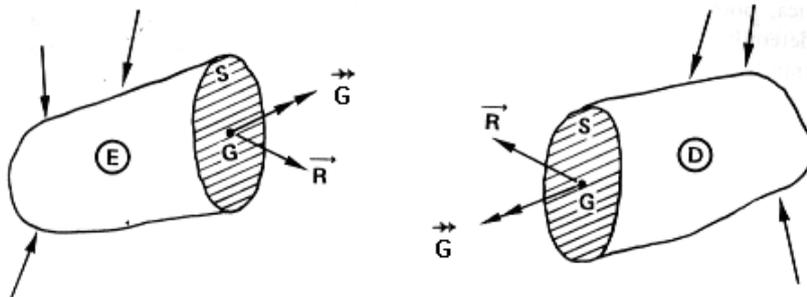


### 3. Esforços Simples

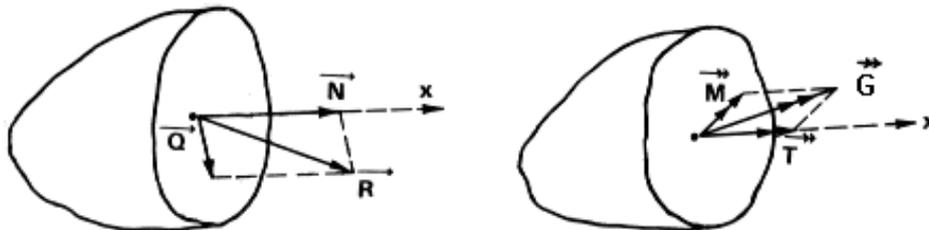
Seja um sistema de forças externas atuando num corpo genérico em equilíbrio:



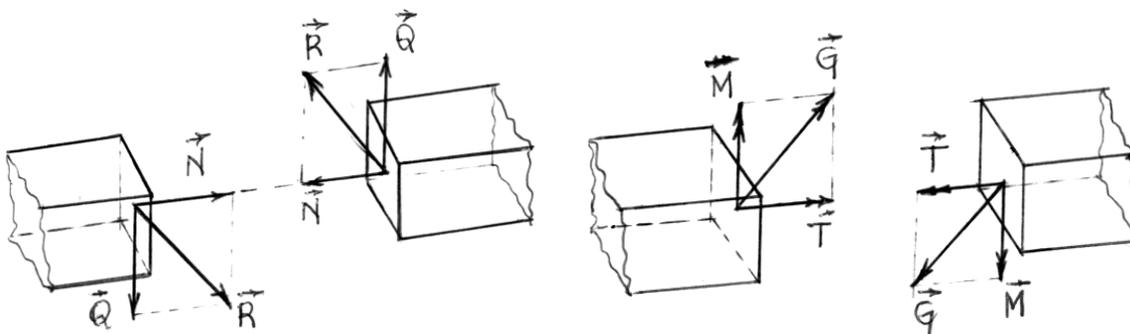
Analisando-se o corpo de forma seccionada, e sabendo-se que o equilíbrio estático de cada uma das metades é mantido, verifica-se a existência de um sistema resultante de forças equilibrantes realizado pela outra metade do corpo, ao longo da seção P, denominados de **esforços internos**:



Decompondo-se os vetores resultantes  $R$  e  $G$  em componentes normais e tangenciais ao plano da seção, obtém-se as Forças  $N$  e  $Q$ , e os momentos  $M$  e  $T$ , conhecidos como Esforços Simples:

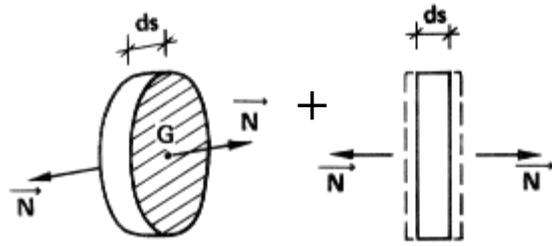


Numa viga de seção retangular, teríamos:

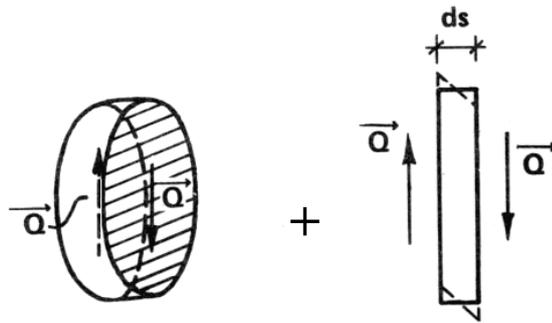


**Esforço Normal (ou axial) N:**

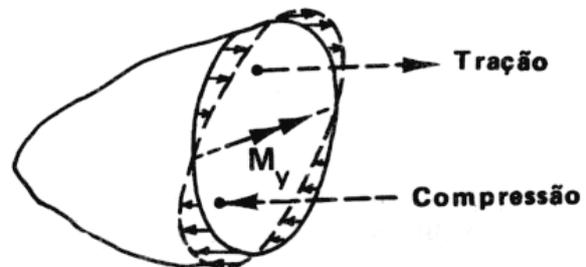
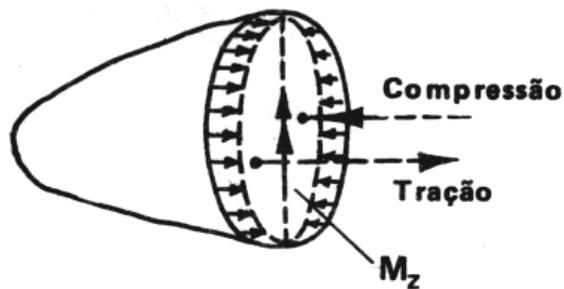
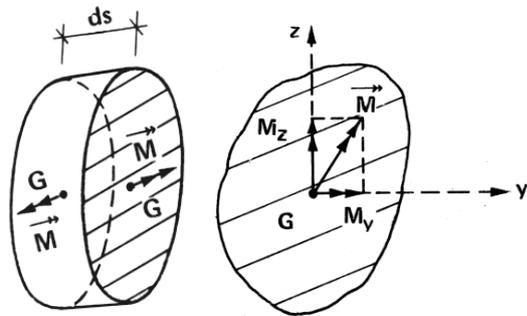
Soma algébrica das projeções sobre a normal à seção das forças exteriores situadas de um mesmo lado da seção; é positivo quando de tração (tendendo a distender a seção) ou negativo quando de compressão (comprimindo a seção):

**Esforço cortante Q :**

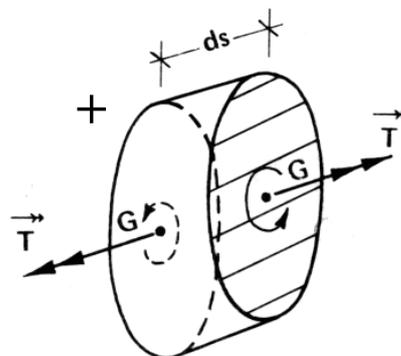
Soma vetorial das projeções sobre o plano da seção das forças exteriores situadas de um mesmo lado da seção (tende a cortar a seção, promover o seu deslizamento); é positivo quando as projeções se orientam nos sentidos dos eixos ou negativo, caso contrário.

**Momento fletor M :**

Soma vetorial das projeções sobre o plano da seção dos momentos das forças, situadas de um mesmo lado da seção, em relação ao seu centro de gravidade (tende a fazer a seção girar sobre um eixo localizado no seu próprio plano, comprimindo uma parte e distendendo a outra); é dito positivo quando orientado no sentido arbitrado para o eixo, ou negativo, caso contrário.

**Momento torsor T :**

Soma algébrica dos momentos, em relação a um eixo perpendicular ao plano da seção e passando pelo seu centro de gravidade, das forças exteriores situadas de um mesmo lado da seção (tende a torcer a seção, fazendo-a girar em torno de um eixo que lhe é perpendicular); positivo quando "sai" da seção ou negativo, caso contrário.

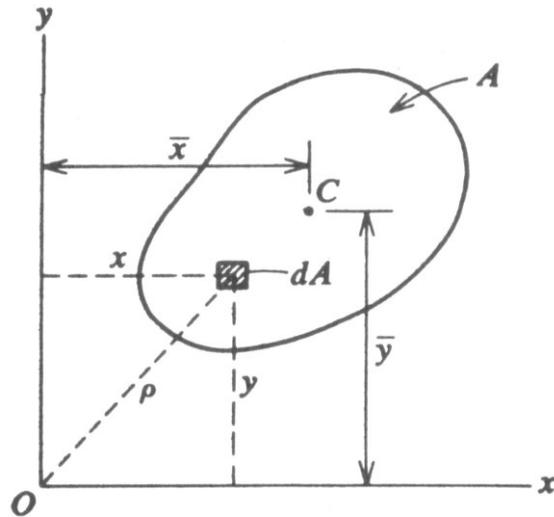


## 4. Propriedades de Áreas Planas

### Momento Estático de Área

Seja uma área  $A$  segundo um sistema de coordenadas  $xy$ , onde se vê um elemento de área  $dA$ , de coordenadas  $x$  e  $y$ :

$$A = \int dA$$



O centro geométrico  $C$  (centróide) da área tem suas coordenadas dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}; \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

Os numeradores das equações acima são chamados de Momentos Estáticos da área,  $Q_y$  e  $Q_x$ , relativos aos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente:

$$Q_y = \int x dA; \quad Q_x = \int y dA$$

- Área com um eixo de simetria: o centróide pertence a este eixo;
- Área com dois eixos de simetria: o centróide localiza-se na interseção dos eixos.

Forma da superfície		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicírculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$

### Momento de Inércia de superfície plana

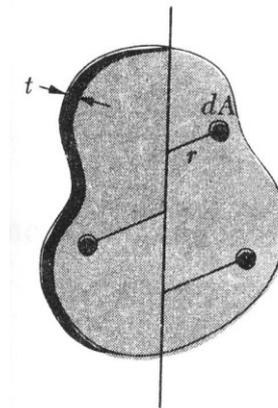
Seja uma massa pontual em repouso presa a uma haste que permite livremente o giro em torno de seu eixo. Sabe-se que o tempo necessário para que a massa atinja uma certa velocidade de rotação após a aplicação de um binário ao sistema é proporcional ao valor da massa ( $m$ ) e ao quadrado da distância da massa ao eixo da haste ( $r^2$ ). O produto  $mr^2$  fornece, portanto, uma medida da inércia do sistema, isto é, da resistência que o sistema oferece quando tentamos colocá-lo em movimento, sendo por esta razão denominado de momento de inércia da massa em relação ao eixo da haste. Referindo-se a um corpo, o momento de inércia de sua massa passa a ser a soma dos momentos de inércia infinitesimais, sendo igual à:

$$I = \int r^2 dm$$

Considerando agora o momento de inércia de uma placa fina de espessura uniforme  $t$ , feita de uma material homogêneo de massa específica  $\rho$ :

$$\int r^2 dm = t \rho \underbrace{\int r^2 dA}$$

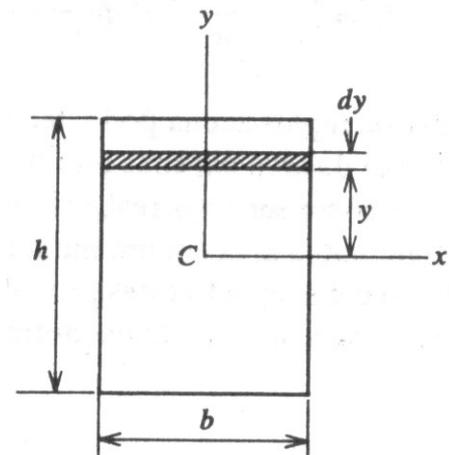
Momento de  
inércia de área



Por analogia ao momento de inércia de massa, os Momentos de Inércia de áreas planas ou Momentos Estáticos de 2ª ordem, são definidos em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, por:

$$I_x = \int y^2 dA; \quad I_y = \int x^2 dA$$

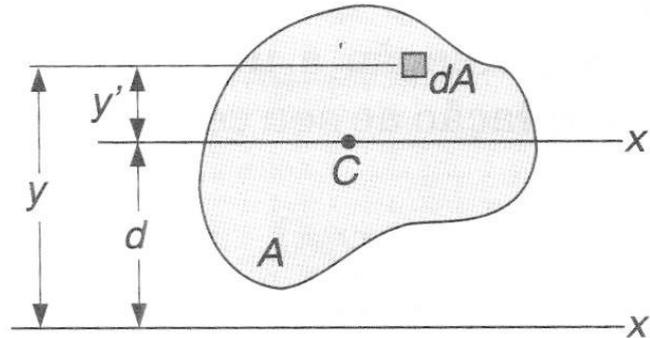
$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = b \frac{h^3}{24} - \left( -b \frac{h^3}{24} \right) = \frac{bh^3}{12}$$



Eixos Principais de Inércia são os eixos de uma área para os quais seus momentos de inércia assumem seus valores máximo e mínimo. Seções com dupla simetria possuem seus eixos principais coincidentes com os eixos de simetria.

### Teorema dos Eixos Paralelos

O momento de inércia de uma área em relação a um dado eixo  $X$  é igual ao momento de inércia em relação ao eixo baricêntrico  $X'$ , paralelo a  $X$ , mais o produto  $Ad^2$  da área pelo quadrado da distância entre os dois eixos.



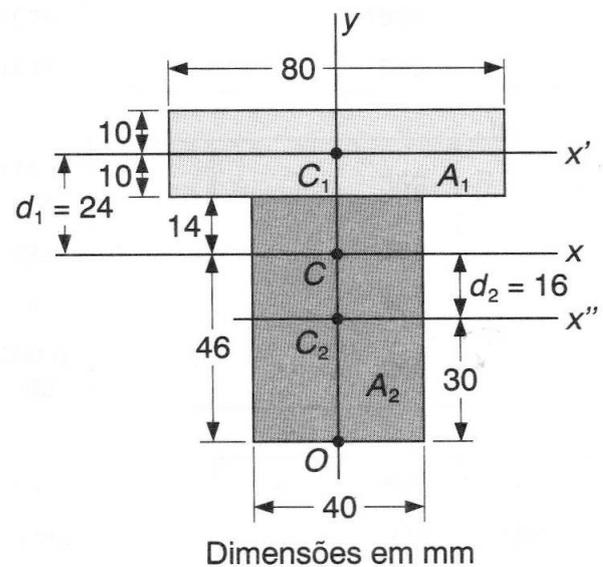
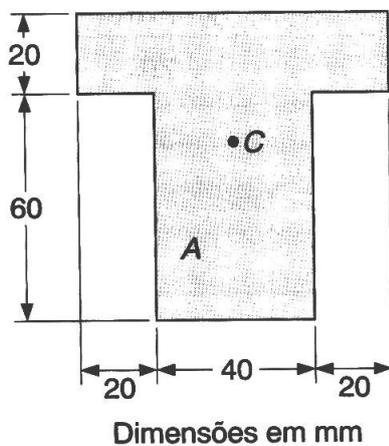
$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y' + d)^2 dA$$

$$I_x = \int_A y'^2 dA + 2d \int_A y' dA + d^2 \int_A dA$$

$$I_x = I_{x'} + Ad^2$$

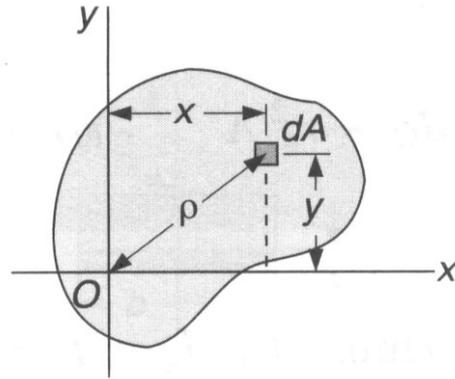
### Momento de Inércia de Figuras compostas

- cálculo do centro de gravidade da área composta;
- cálculo do momento de inércia das áreas regulares em relação ao eixo baricêntrico de cada figura;
- cálculo do momento de inércia do conjunto pelo teorema dos eixos paralelos.



O momento de inércia de uma área plana, em relação a um eixo perpendicular ao plano da área, é chamado Momento de Inércia Polar:

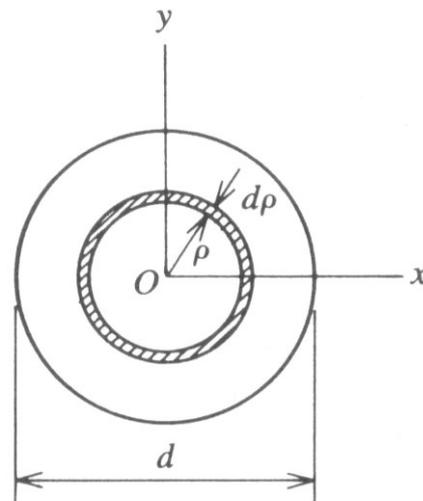
$$J_o = \int \rho^2 dA$$



$$J_o = \int \rho^2 dA = \int (y^2 + x^2) dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA$$

$$\boxed{J_o = I_x + I_y}$$

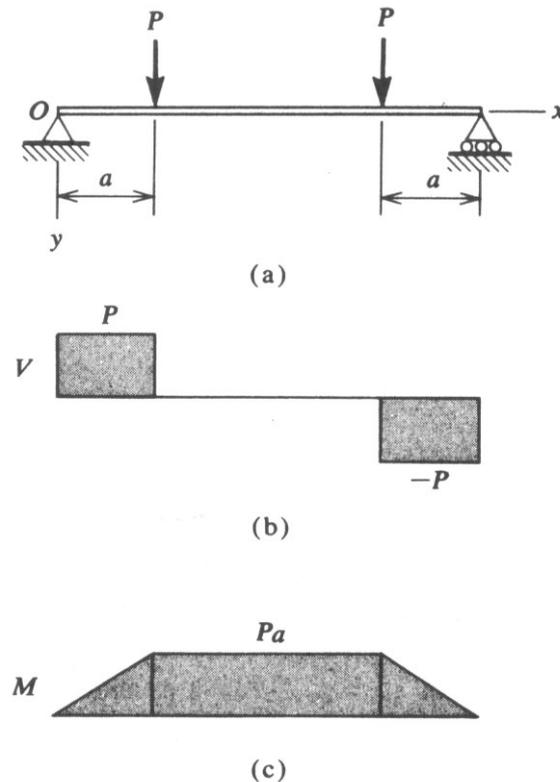
$$J_o = \int \rho^2 dA = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi\rho \cdot d\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}$$



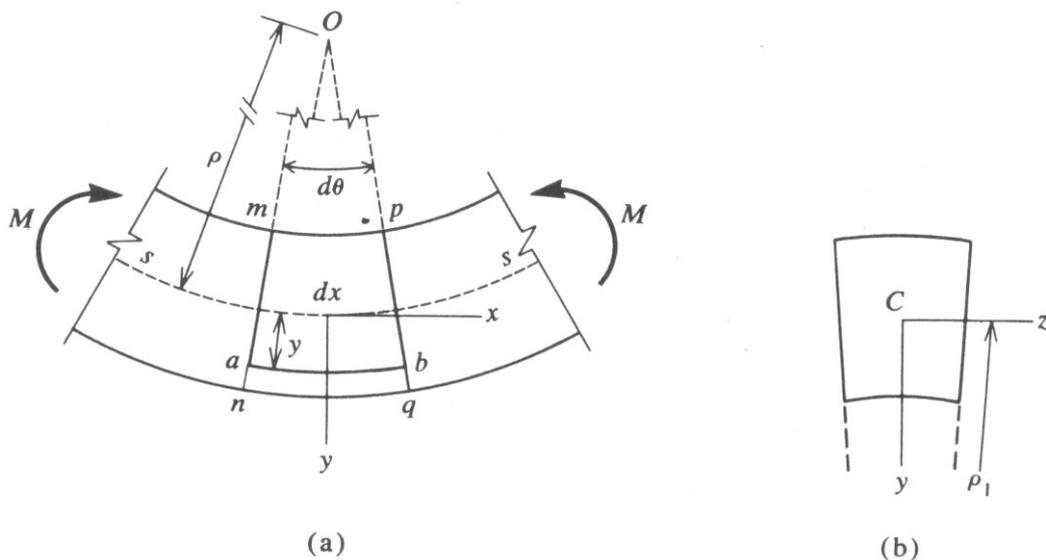
## 5. Tensões e Deformações da Viga

### Flexão Pura

Flexão pura corresponde a um estado de deformação devido a um carregamento onde o único esforço interno atuante na estrutura é o momento fletor:

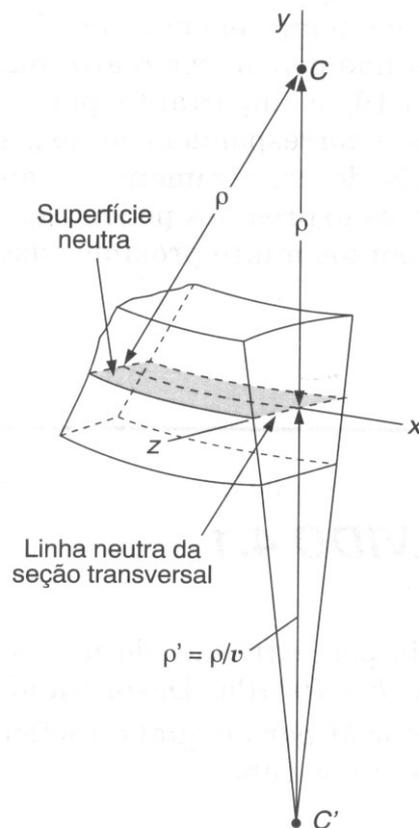


A ação dos momentos fletores faz com que o eixo da viga se curve como um arco circular, permanecendo as seções transversais planas e normais às fibras longitudinais da viga:



As fibras da parte superior da viga estão sob compressão, e as do lado inferior sob tração. Certamente então, em algum ponto entre os bordos superior e inferior da viga há uma superfície em que as fibras longitudinais não sofrem variação no comprimento.

Esta superfície é denominada de superfície neutra, e sua interseção com qualquer seção transversal dá a linha neutra da seção:



Os planos de duas seções transversais adjacentes encontram-se num ponto, o centro de curvatura da viga deformada, com raio de curvatura  $\rho$ , e formam entre si um ângulo  $d\theta$ .

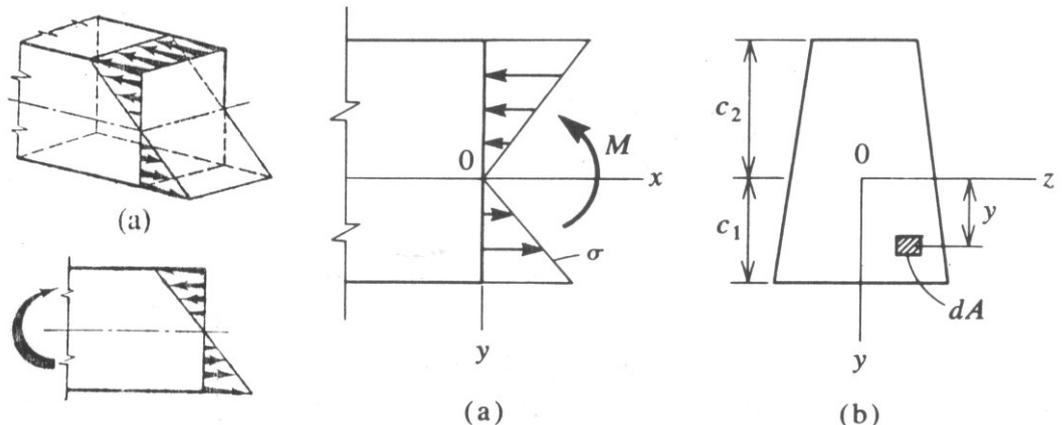
$$\kappa \equiv \text{curvatura} = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

As deformações longitudinais  $\varepsilon_x$  são, portanto, diretamente proporcionais à curvatura e à distância  $y$  da superfície neutra:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + y)d\theta - dx}{dx} = \frac{y}{\rho}$$

Quando o material da viga está no regime elástico-linear, as tensões variam linearmente com a distância  $y$  da linha neutra:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{y}{\rho}$$



Como não há esforço normal resultante na seção:

$$\int \sigma_x dA = \int E \frac{y}{\rho} dA = 0 \Rightarrow \int y dA = 0$$

Logo, a linha neutra passa pelo centro geométrico (centróide) da seção na flexão pura.

O somatório dos momentos das forças elementares  $\sigma_x dA$  em relação à linha neutra deve ser igual ao momento fletor  $M$ :

$$M = \int \sigma_x y dA = \int \left( \frac{E y}{\rho} \right) y dA = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA = \frac{EI}{\rho}$$

onde  $I = \int y^2 dA$  é o momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra e

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$
 é a curvatura da viga em flexão pura.

Logo, na flexão pura, podemos dizer que a curvatura é diretamente proporcional ao momento fletor e inversamente proporcional ao módulo de rigidez à flexão  $EI$ . As expressões das tensões normais na viga podem então ser colocadas na forma:

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \begin{cases} \sigma_{x\min} = -\frac{My^{\sup}}{I} = -\frac{M}{W_{\sup}} \\ \sigma_{x\max} = \frac{My^{\inf}}{I} = \frac{M}{W_{\inf}} \end{cases}$$

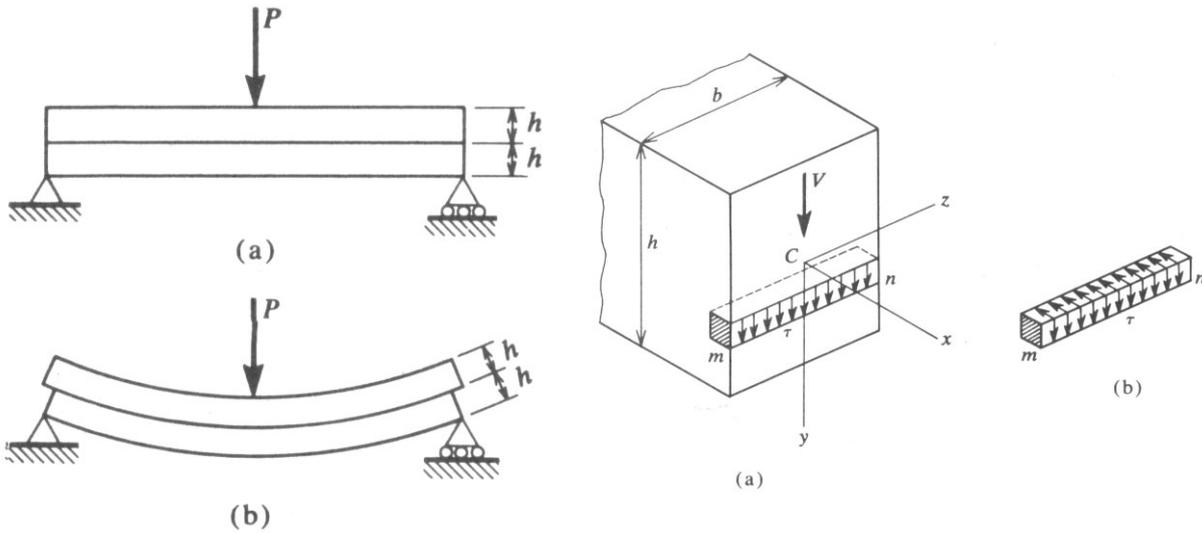
onde  $W_{\inf} = I/y^{\inf}$  e  $W_{\sup} = I/y^{\sup}$  são respectivamente os módulos de resistência à flexão inferior e superior da área da seção transversal. Quando a linha neutra for um eixo de simetria da seção:

$$W_{\sup} = W_{\inf} = W \Rightarrow \sigma_{x\max, \min} = \pm \frac{M}{W}$$

As tensões normais não sofrem alterações significativas pela presença de tensões cisalhantes e suas respectivas deformações, sendo por isso ainda válido o emprego da teoria da flexão pura (seções permanecendo planas) no cálculo de tensões normais para o caso de vigas com esforço cortante não nulo.

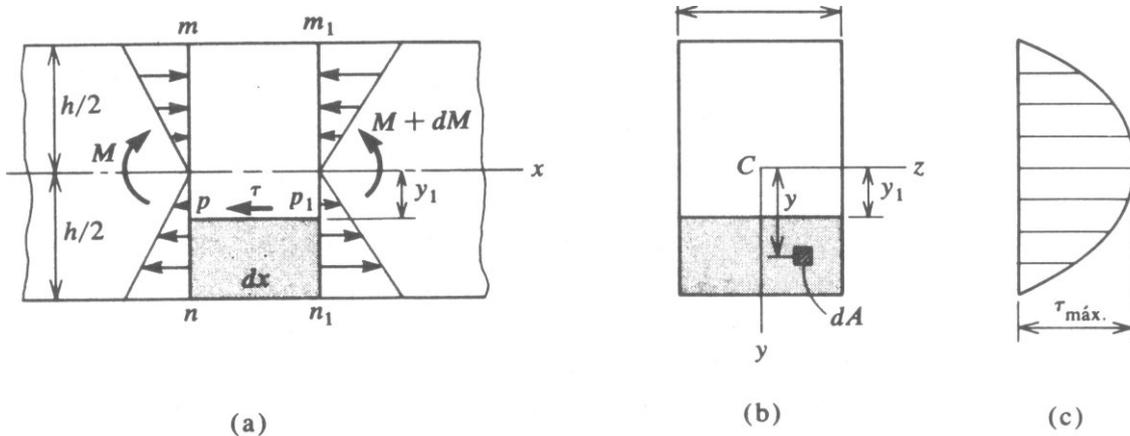
### Tensões de Cisalhamento em Vigas

No caso geral de flexão de uma viga, surgem nas seções transversais esforços internos de momento fletor e cortante:



Hipóteses sobre as tensões cisalhantes: a) são paralelas ao esforço cortante; b) distribuição uniforme na largura da viga.

Como já se sabe, as tensões de cisalhamento vertical \$\tau\$, em qualquer ponto da seção transversal, é numericamente igual à tensão de cisalhamento horizontal no mesmo ponto, podendo ser calculada pela condição de equilíbrio do elemento hachurado \$pnn\_1p\_1\$:



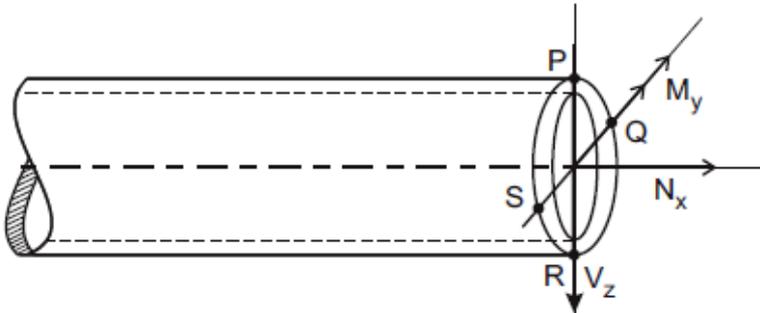
$$\sum F_x = 0 \quad (\rightarrow +): \quad N_{pn} + V_{pp_1} - N_{p_1n_1} = 0 \quad \Rightarrow V_{pp_1} = N_{pn} - N_{p_1n_1}$$

$$\Rightarrow \tau b dx = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{I} dA = \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} \int_{y_1}^{h/2} y dA$$

$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{Ib}} \quad \tau_{\max} = \frac{VQ_{\max}}{Ib} = \frac{V \left( \frac{h}{4} bh \right)}{\left( \frac{bh^3}{12} \right) b} = \frac{3V}{2A} = 1,5 \tau_{\text{m\acute{e}dia}} \quad (\text{se\c{c}\~{a}o retangular})$$

**Exercícios:****46**

Uma tubulação de seção circular está solicitada por um esforço cortante  $V_z$ , um esforço normal  $N_x$  e um momento fletor  $M_y$ , conforme ilustrado na figura abaixo.



Desprezando qualquer outra sollicitação atuante na seção mostrada, afirma-se que no ponto

- (A) P a tensão normal é máxima.
- (B) Q a tensão normal é nula.
- (C) Q a tensão cisalhante é nula.
- (D) R a tensão cisalhante é máxima.
- (E) S a tensão normal é nula.

**62**

O módulo de resistência à flexão da seção transversal de um perfil é uma característica geométrica diretamente relacionada à resistência do perfil em relação aos momentos fletores a ele aplicados. Assim, sendo  $\sigma_{ref}$  a tensão de referência (escoamento ou ruptura), FS o fator de segurança e W o módulo de resistência à flexão, o momento fletor máximo ( $M_{m\acute{a}x}$ ) aplicado a um perfil fica limitado por

$$(A) M_{m\acute{a}x} \leq \frac{\sigma_{ref}}{FS} W$$

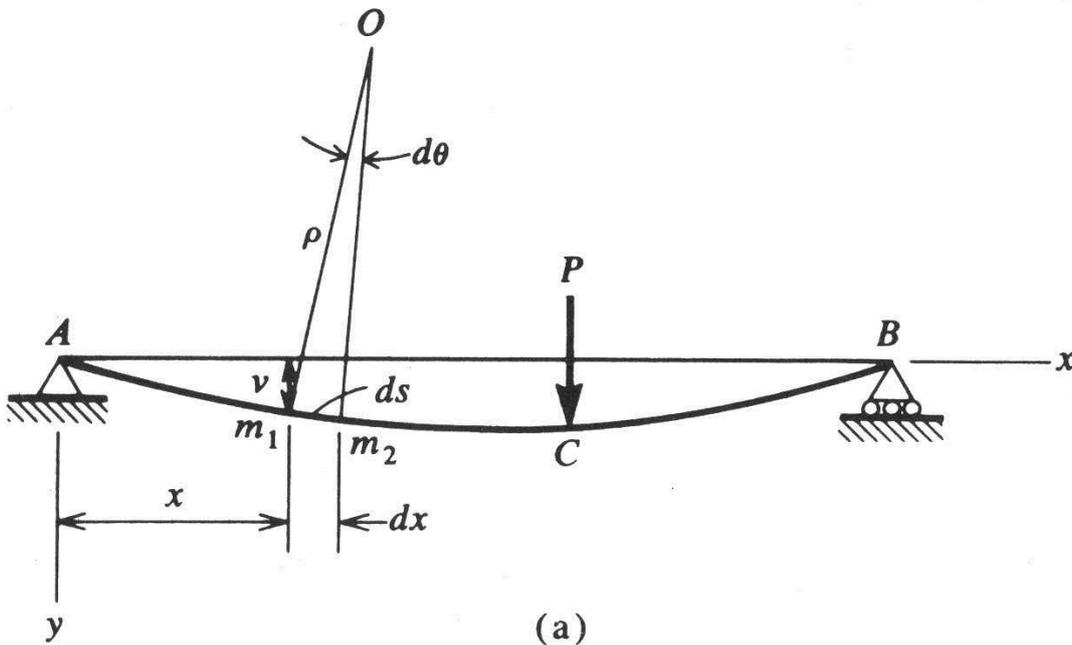
$$(B) M_{m\acute{a}x} \leq \frac{W}{FS}$$

$$(C) M_{m\acute{a}x} \leq \frac{\sigma_{ref}}{W}$$

$$(D) M_{m\acute{a}x} \leq \frac{\sigma_{ref} FS}{W}$$

$$(E) M_{m\acute{a}x} \leq \frac{\sigma_{ref}}{FS}$$

## 6. Deformação do Eixo da Viga: Elástica

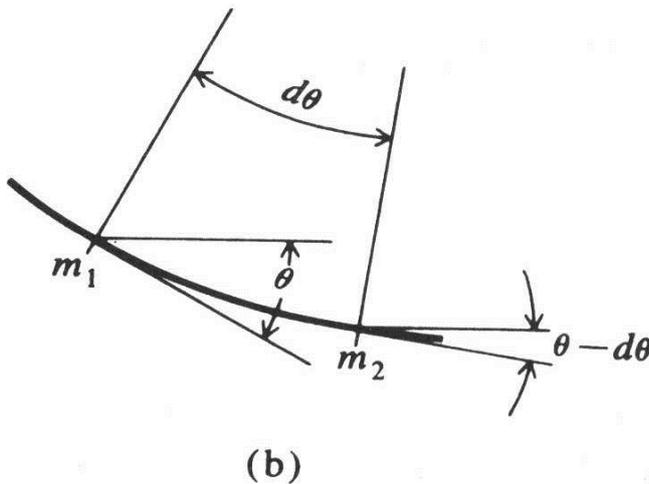


Da teoria da flexão pura:

$$\kappa = \frac{l}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI}$$

Hipótese de pequenos deslocamentos:

$$dx \approx ds \quad \text{e} \quad \theta \approx \text{tg} \theta = \frac{dv}{dx}$$



Logo:

$$\kappa = \frac{l}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

### Equação diferencial da linha elástica

Em conjunto com as equações fundamentais da estática, obtém-se o seguinte sistema de equações que pode ser utilizado a partir dos dados disponíveis de carregamento e condições de apoio, obtendo-se por integrações sucessivas a expressão analítica da deformada:

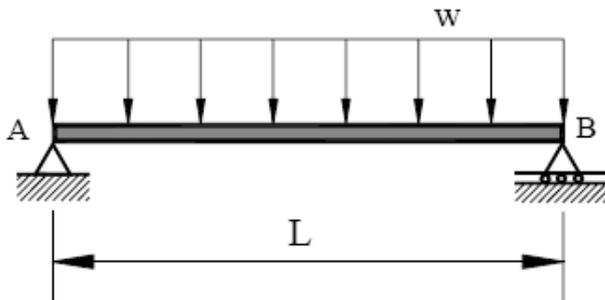
$$\begin{cases} v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \\ v''' = \frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI} \\ v'''' = \frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \end{cases}$$

<sup>1</sup> O sinal negativo é para compatibilizar o sinal da elástica com o do momento fletor ( $M > 0$ ,  $v > 0$ ).

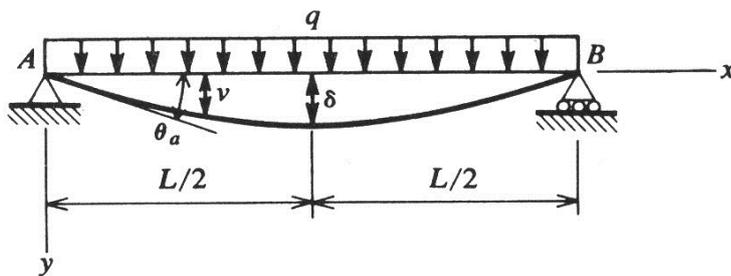
**Exemplo:**

**Questão 2** - A viga prismática simplesmente apoiada em A e B, mostrada abaixo, suporta um carga uniformemente distribuída  $w$  por unidade de comprimento. Determinar a equação da linha elástica e a flecha máxima da viga.

Máximo permitido : 30 linhas para resposta



*Viga bi-apoiada com carregamento uniforme:*



$$M(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{qL}{2}x^2$$

$$v'' = -\frac{M}{EI}$$

$$EI v'' = -\frac{qL}{2}x + \frac{qL}{2}x^2$$

$$\Rightarrow EI v' = -\frac{qL}{4}x^2 + \frac{qL}{6}x^3 + C_1$$

$$\Rightarrow EI v = -\frac{qL}{12}x^3 + \frac{qL}{24}x^4 + C_1x + C_2$$

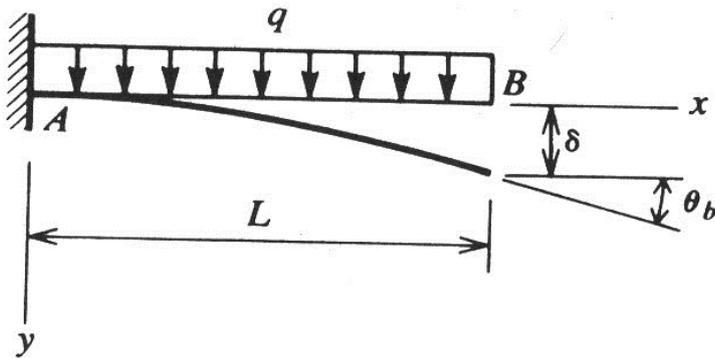
mas, para  $x=0$ ,  $v=0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$\text{para } x=L, v=0 \Rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

$$v(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + xL^3)$$

A equação acima permite achar a deflexão em qualquer ponto ao longo da viga. A flecha máxima encontra-se no meio do vão, e tem o valor de:

$$\delta = \frac{5qL^4}{384EI}$$

**Viga em balanço com carregamento uniforme:**

$$M(x) = \frac{q}{2}(L-x)^2$$

$$x = 0, v = 0$$

**Vigas Estaticamente Indeterminadas**

- Grau de indeterminação estática (hiperestaticidade) = n° reações – n° eq. equilíbrio
- Cada reação redundante (hiperestática) corresponde a uma nova condição de contorno
- É possível determinar os esforços internos a partir da equação da elástica:

$$v'''' = \frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$$

$$v'(x) = \frac{1}{EI} \left( q(x) \frac{x^3}{3!} + C_1 \frac{x^2}{2!} + C_2 x + C_3 \right)$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left( q(x) \frac{x^4}{4!} + C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 x + C_4 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v'' = \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \\ v''' = \frac{d^3 v}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI} \end{cases}$$

$$v(x=0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$v'(x=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

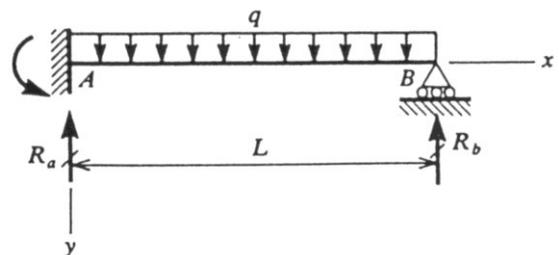
$$v(x=L) = 0 \Rightarrow \frac{qL^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} = 0$$

$$M(x=L) = 0$$

$$\Rightarrow v''(x=L) = 0 \Rightarrow \frac{qL^2}{2} + C_1 L + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{5qL}{8} \quad \Rightarrow C_2 = \frac{qL^2}{8}$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{5qL}{8}x - \frac{qL^2}{8} \quad \Rightarrow M(x=0) = -\frac{qL^2}{8}$$



**Exercícios**

**Considere as informações a seguir para responder às questões de n<sup>os</sup> 63 a 65**

Uma determinada viga, com vão  $L$ , está submetida a uma carga distribuída de valor  $q$  e apresenta a seguinte equação da linha elástica:

$$y = \frac{q}{48EJ} (2x^4 - 3Lx^3 + L^3x)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material da viga,  $J$  seu momento de inércia em relação ao eixo de flexão e  $x$  define o eixo longitudinal. A viga está impedida de se deslocar horizontalmente em todos os seus apoios.

**63**

O valor de  $x$  para o qual o esforço cortante é nulo vale

- (A)  $L/8$
- (B)  $L/4$
- (C)  $3L/8$
- (D)  $L/2$
- (E)  $5L/8$

**64**

O valor absoluto do momento fletor para  $x = L/2$  vale

- (A)  $qL^2/16$
- (B)  $qL^2/8$
- (C)  $3qL^2/16$
- (D)  $qL^2/4$
- (E)  $5qL^2/16$

**65**

O ponto correspondente a  $x = 0$

- (A) está livre para se deslocar.
- (B) é um apoio do 1<sup>o</sup> gênero
- (C) é um apoio do 2<sup>o</sup> gênero.
- (D) é um engaste.
- (E) é uma rótula.

## 7. Torção: Cisalhamento Puro

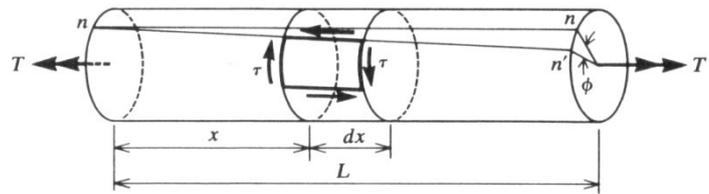
Considere uma barra de seção transversal circular sofrendo torção por meio de conjugados  $T$  atuando em suas extremidades (fig. a). Uma barra carregada desse modo está sob Torção Pura:

$$\gamma = \frac{bb'}{ab} = \frac{r d\phi}{dx} = \frac{r \phi}{L}$$

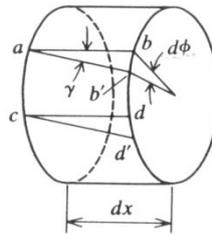
$$\theta = \frac{\phi}{L}$$

$$\tau = G\gamma = G r \theta$$

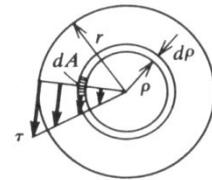
(torção pura)



(a)



(b)



(c)

Por equilíbrio de cada uma das partes seccionadas da barra sob torção pura, pode-se estabelecer a relação entre o torque  $T$  (momento torsor) aplicado e o ângulo de torção por unidade de comprimento  $\theta$  que ele ocasiona:

$$T = \int \tau \rho dA = \int (G\gamma) \rho dA = \int G(\theta\rho) \rho dA = G\theta \int \rho^2 dA = G\theta J \Rightarrow \boxed{T = G\theta J}$$

onde  $J = \int \rho^2 dA$  é momento de inércia polar da seção transversal circular.

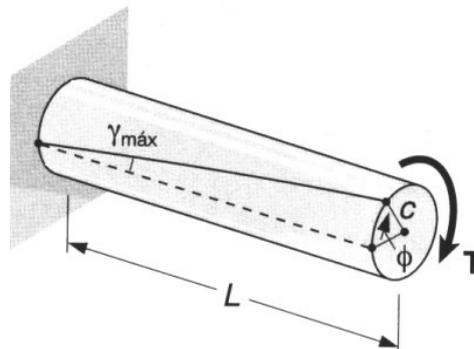
Para um círculo, o momento de inércia polar é:  $J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$

O ângulo de torção por unidade de comprimento  $\theta$  é, portanto, diretamente proporcional ao torque  $T$  e inversamente proporcional ao módulo de rigidez à torção  $GJ$ :

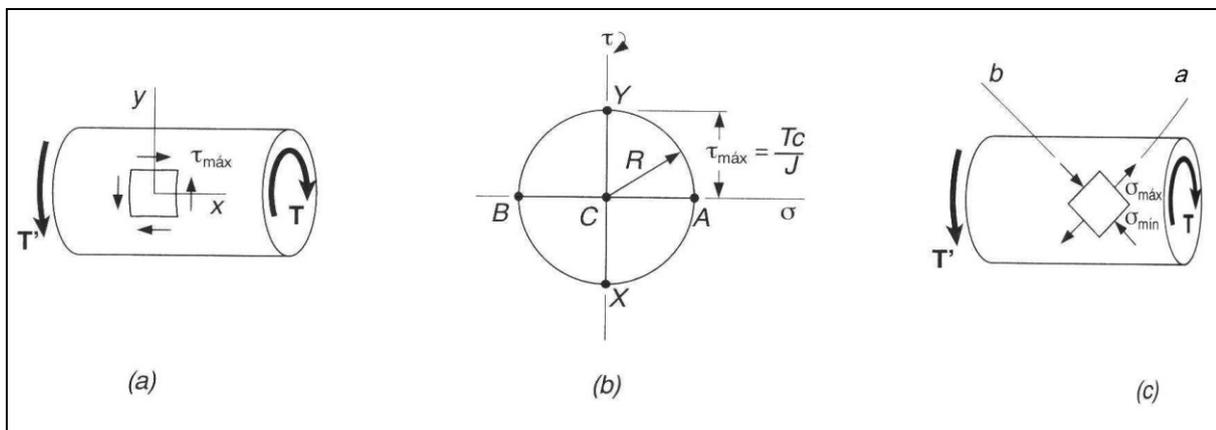
$$\theta = \frac{T}{GJ}$$

O ângulo total de torção  $\phi$  pode ser facilmente verificado experimentalmente, fazendo com que o ensaio de torção permita a determinação do módulo de elasticidade transversal de um material:

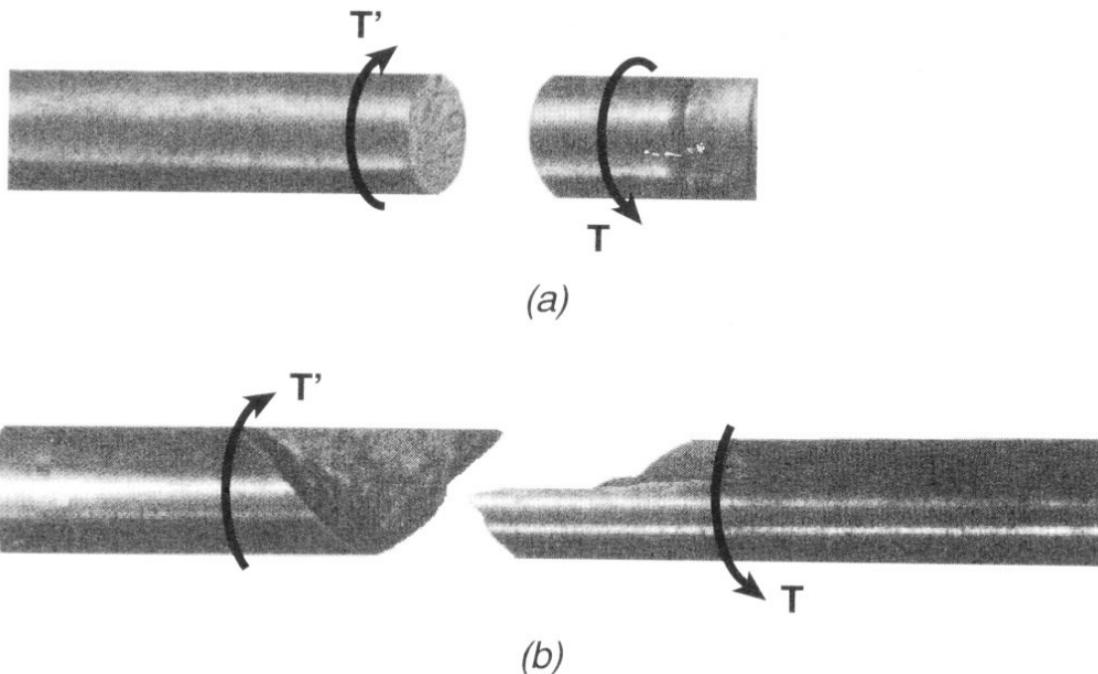
$$\phi = \theta L = \frac{TL}{GJ}$$



Durante a torção haverá rotação em torno do eixo longitudinal, de uma extremidade da barra em relação à outra. Os comprimentos dos lados do elemento  $dx$  (fig. b) não variam durante esta rotação, porém os ângulos dos vértices se distorcem: o elemento está em estado de cisalhamento puro. Ou seja, na barras circulares, as seções transversais se mantêm planas e conservam a sua forma:



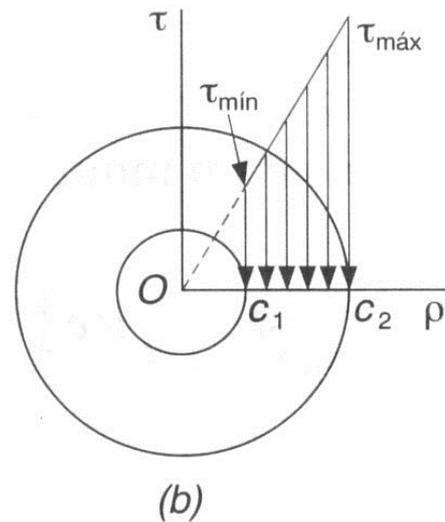
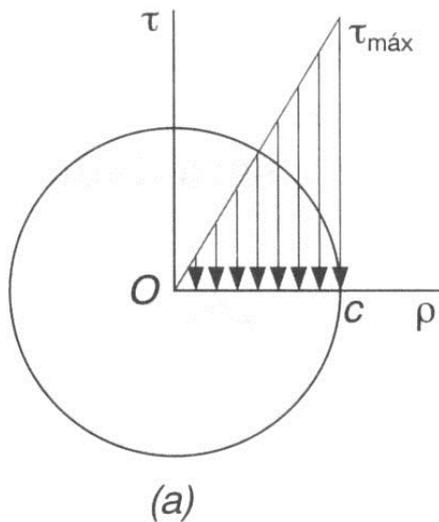
Se um material mais fraco à tração do que ao cisalhamento for torcido, a falha ocorrerá por tração ao longo de uma hélice com inclinação de  $45^\circ$  em relação ao eixo.



A tensão de cisalhamento em um ponto da seção transversal distante  $\rho$  do centro é:

$$\tau = \frac{T}{J} \rho \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{Tr}{J}$$

Portanto, numa barra de seção circular, a tensão de cisalhamento é máxima na superfície e nula no centro. Em consequência, por economia de material e diminuição do peso, é preferível a utilização de barras vazadas no combate às sollicitações de torção.



### Exercícios

30

Os ângulos de torção em eixos dependem do momento de torção atuante, da geometria do eixo e de uma propriedade física do material do eixo que é a(o):

- (A) massa específica.
- (B) Coeficiente de Poisson.
- (C) coeficiente de expansão térmica.
- (D) módulo de elasticidade.
- (E) módulo de elasticidade transversal.

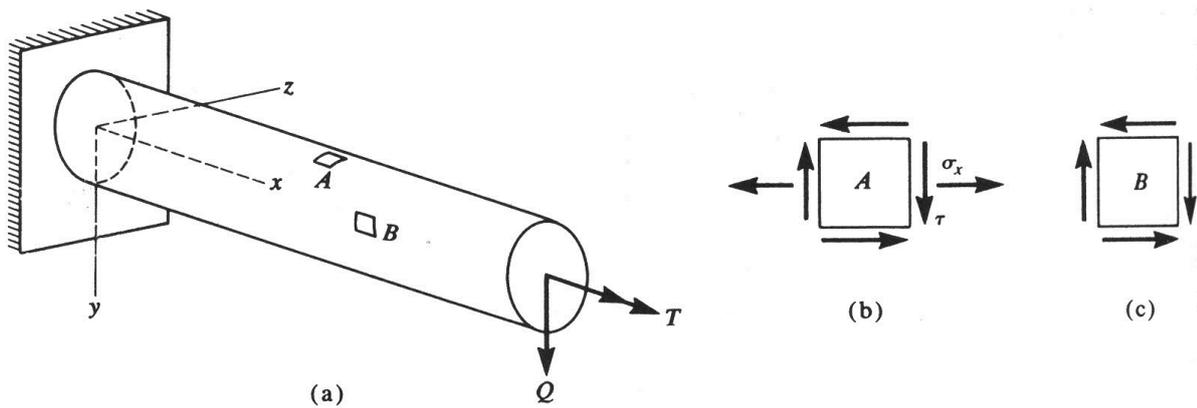
44

Um eixo de seção transversal circular maciça com 40 mm de diâmetro é submetido a um momento torçor de  $20\pi$  N.m.

Para essa situação, o valor da tensão de cisalhamento máxima, em MPa, é

- (A) 5
- (B) 10
- (C) 15
- (D) 20
- (E) 25

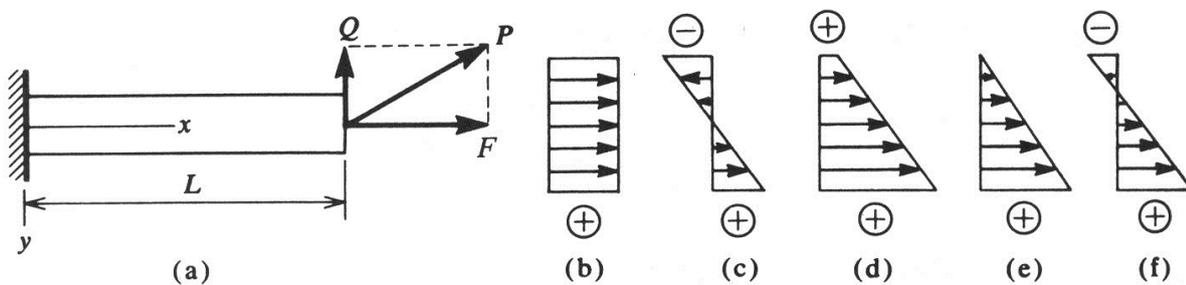
### Flexão e Torção combinadas



$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \quad \tau_{xy} = \frac{T}{J} \rho + \frac{VQ}{Ib}$$

- Verificar o estado de tensões nos locais onde alguma das tensões, particularmente, atinge seus máximos;
- Identificar, pelo círculo de Mohr, as tensões principais e a tensão máxima de cisalhamento.

### Flexão e Carga Axial combinadas

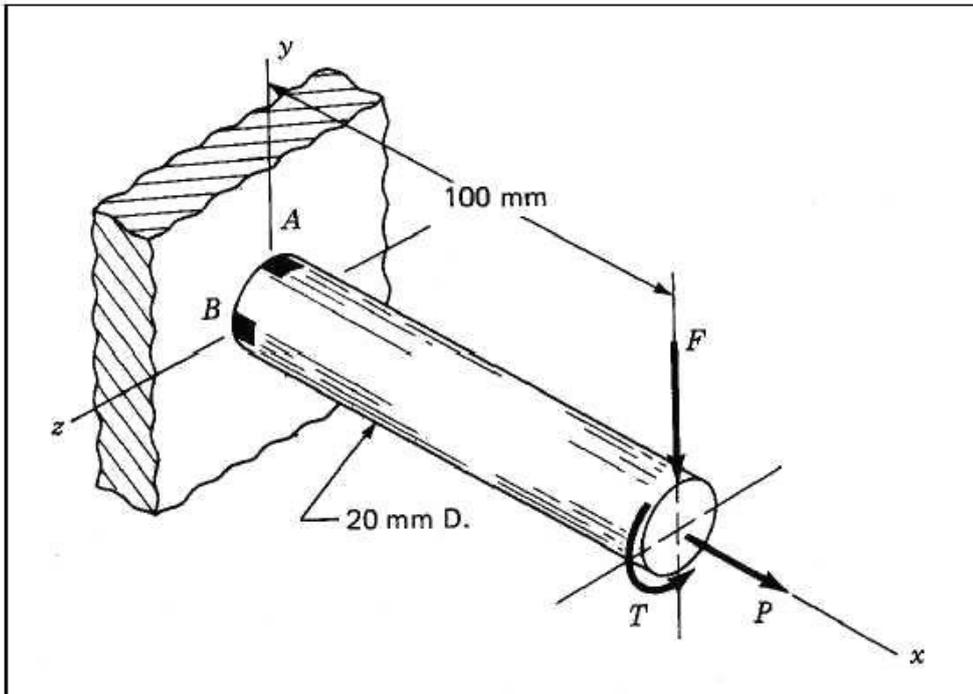


$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$$

- Princípio da superposição;
- A linha neutra não mais passará pelo centróide, podendo situar-se até mesmo fora da seção.

**Exercícios****QUESTÃO 28**

Para dimensionar o componente estrutural mostrado na figura abaixo, devem ser calculadas as tensões atuantes nos elementos  $A$  e  $B$  na seção de engaste. O elemento  $A$  está localizado no topo da barra e é paralelo ao plano  $xz$ . O elemento  $B$  está na lateral da barra e é paralelo ao plano  $xy$ . As forças atuantes são  $F = 0,55$  kN,  $P = 8$  kN e  $T = 30$  N·m.



J. E. Shigley, *Mechanical engineering design*. Métrica. p. 89.

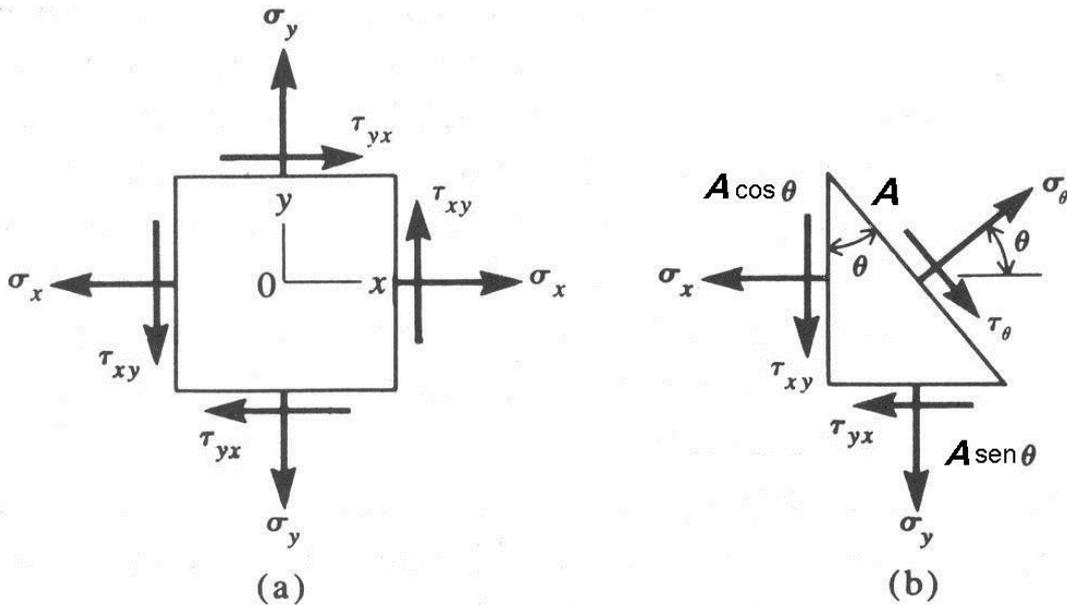
Com relação ao problema exposto, julgue os itens subseqüentes, desprezando a parte fracionária nos resultados numéricos obtidos.

- 1 A tensão normal atuante em  $A$ , na direção  $x$ , é  $\sigma_x = 95$  MPa.
- 2 A tensão normal atuante em  $B$ , na direção  $x$ , é  $\sigma_x = 125$  MPa.
- 3 A tensão devida ao carregamento de torção é  $\tau_{xy} = 19$  MPa.
- 4 A tensão cisalhante atuante em  $B$  é maior do que a tensão cisalhante atuante em  $A$ .
- 5 A tensão normal atuante em  $B$  é toda devida à carga  $F$ .

### 8. Tensões Planas (EPT - Estado Plano de Tensões)

Um elemento com tensões planas pode ter tensões normais e de cisalhamento nas faces  $x$  e  $y$ , porém não pode ter tensão nenhuma na face  $z$ :

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$$



Por equilíbrio do elemento da figura (b):

$$\sum F_{\theta} = 0 \therefore$$

$$A\sigma_{\theta} = A\cos\theta \cdot \sigma_x \cos\theta + A\cos\theta \cdot \tau_{yx} \sin\theta + A\sin\theta \cdot \sigma_y \sin\theta + A\sin\theta \cdot \tau_{xy} \cos\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_{\theta} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$$\text{substituindo: } \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2}(\sin 2\theta)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{yx} \sin 2\theta$$

$$\sum F_{\theta+90^\circ} = 0 \therefore$$

$$\tau_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta - \tau_{yx} \cos 2\theta$$

### Tensões Principais

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}$$

### Tensões Máximas de Cisalhamento

$$\frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

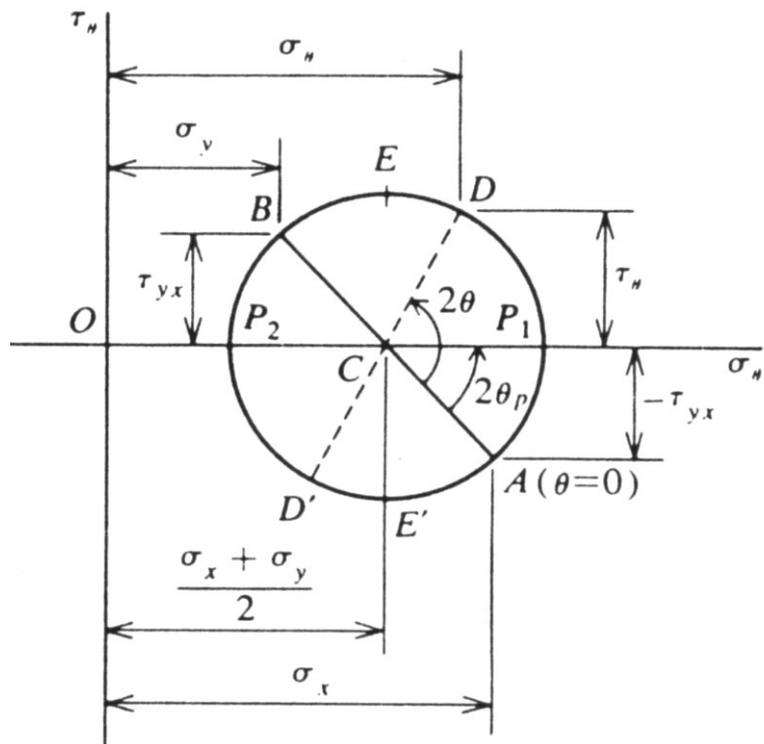
### Círculo de Mohr

Combinando-se as equações que exprimem os valores de  $\sigma_\theta$  e  $\tau_\theta$ :

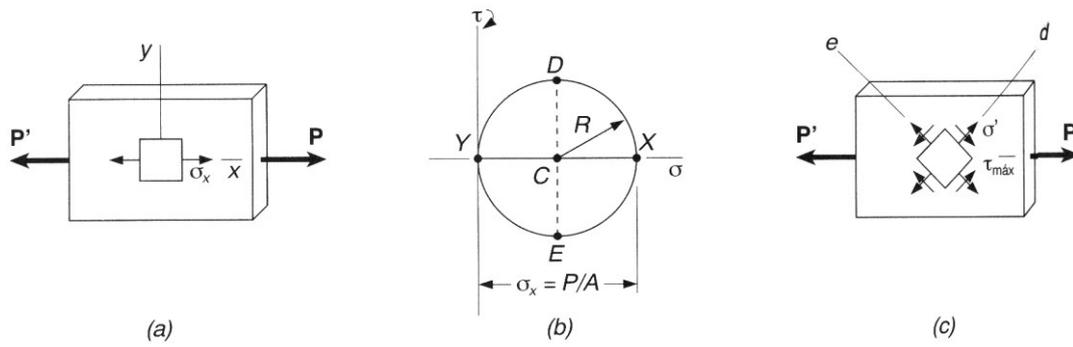
$$(\sigma_\theta - \sigma_{média})^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2$$

que representa a equação de um círculo segundo os eixos  $\sigma_\theta$  e  $\tau_\theta$ , com centro em  $\sigma_\theta = \sigma_{média}$  e  $\tau_\theta = 0$ , com raio igual a:

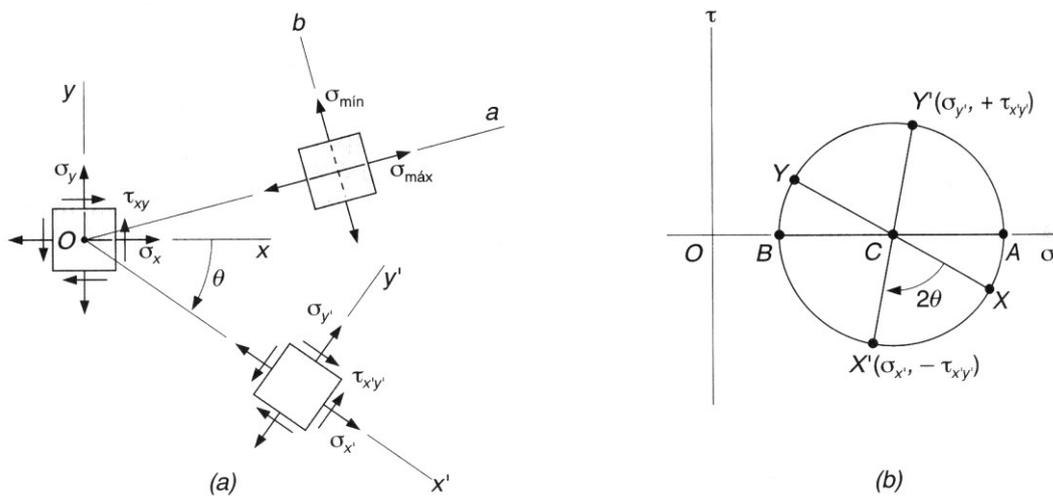
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}$$



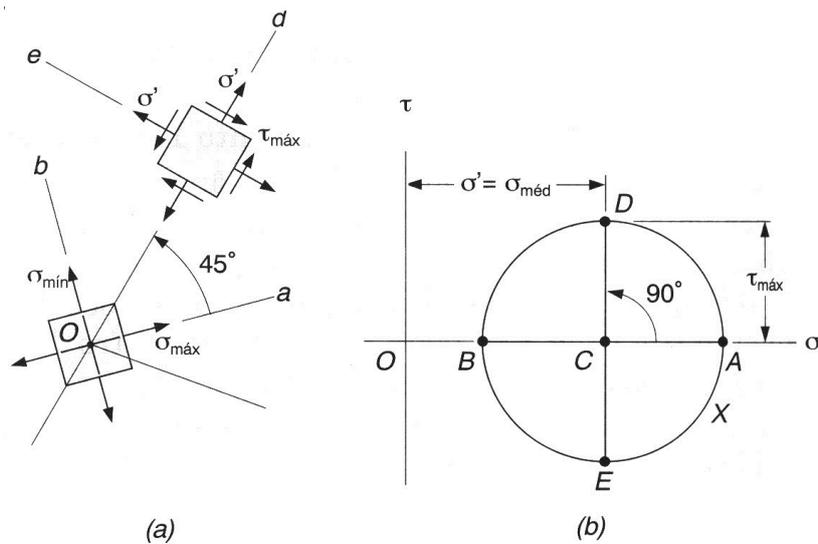
**Estado Uniaxial de Tensões**



**Tensões Principais**



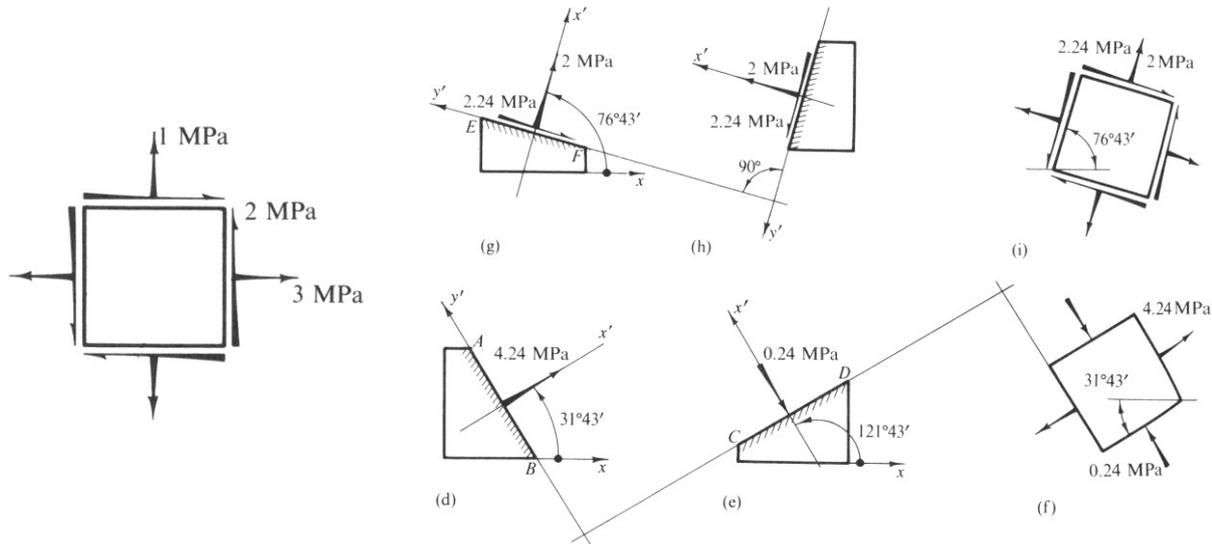
**Tensão de Cisalhamento Máxima**



$$\Rightarrow \sigma_{\theta} = \sigma_{\theta'} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (\text{nos planos de tensões máximas de cisalhamento})$$

**Invariante de tensões**

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\theta + \sigma_{\theta'} = \sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\acute{i}n}$$



**Exemplo de Construção do Círculo de Mohr:**

Deseja-se, a partir do desenho do círculo de Mohr, descrever os planos principais, as tensões principais e a tensão máxima de cisalhamento do elemento da fig.(a):

a) Desenho do círculo:

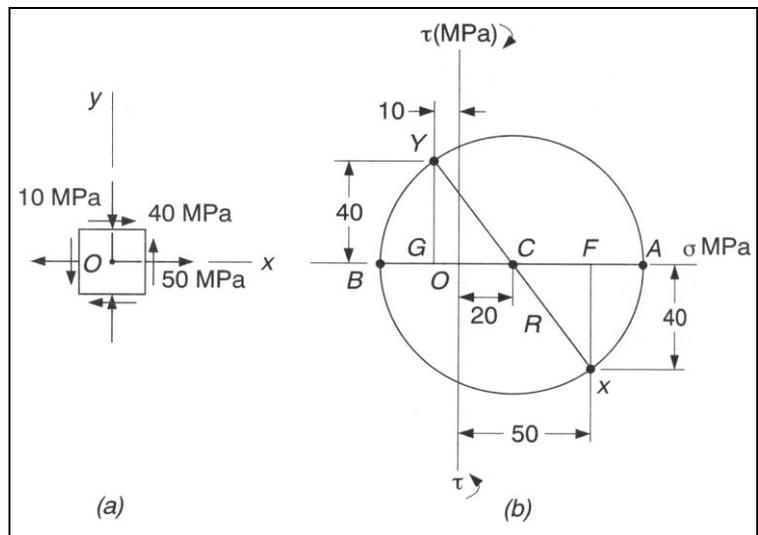
face x:  $\begin{cases} \sigma_x = 50MPa \\ \tau_{xy} = -40MPa \end{cases}$       face y:  $\begin{cases} \sigma_y = -10MPa \\ \tau_{yx} = 40MPa \end{cases}$

$$\sigma_{m\acute{e}dia} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20MPa$$

$$CF = 50 - 20 = 30MPa$$

$$FX = 40MPa$$

$$R = CX = \sqrt{CF^2 + FX^2} = 50MPa$$



b) Planos e tensões principais:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = OA = 70MPa$$

$$\sigma_{m\acute{i}n} = OB = -30MPa$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30} \Rightarrow 2\theta_p = 53,1^\circ \Rightarrow \theta_p = 26,6^\circ$$

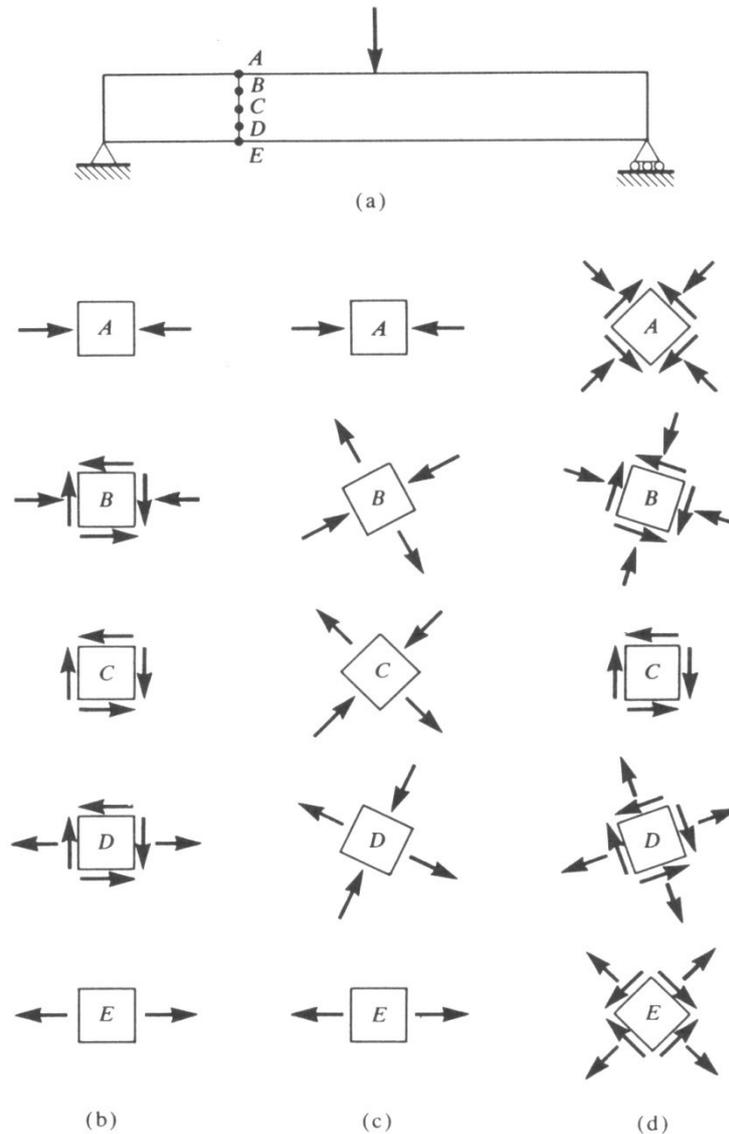
c) Tensão máxima de cisalhamento:

$$\tau_{m\acute{a}x} = R = 50MPa$$

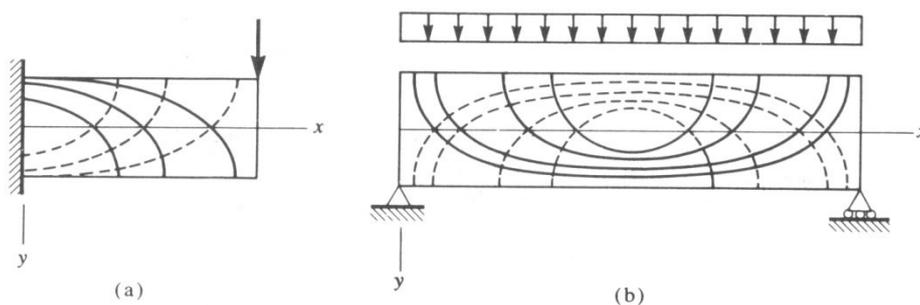
### Tensões Principais em Vigas:

Na fig. abaixo apresentam-se o estado de tensões em viga de seção transversal retangular:

- (b) Tensões normais de cisalhamento nos pontos A, B, C, D e E;
- (c) Tensões Principais;
- (d) Tensões máximas de cisalhamento.

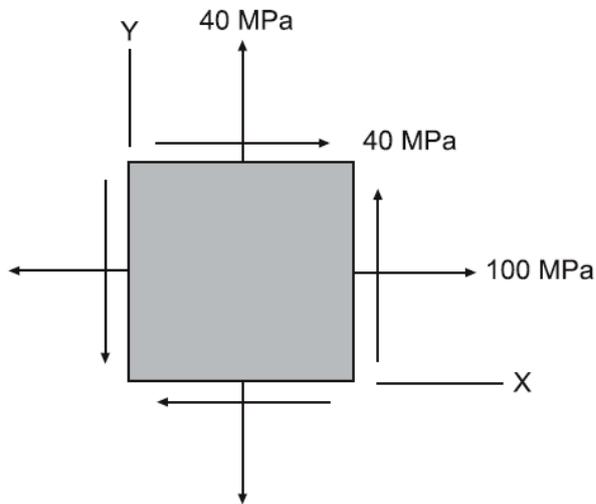


Na figura abaixo, as linhas cheias representam as trajetórias das tensões principais de tração, e as linhas pontilhadas para as tensões principais de compressão:



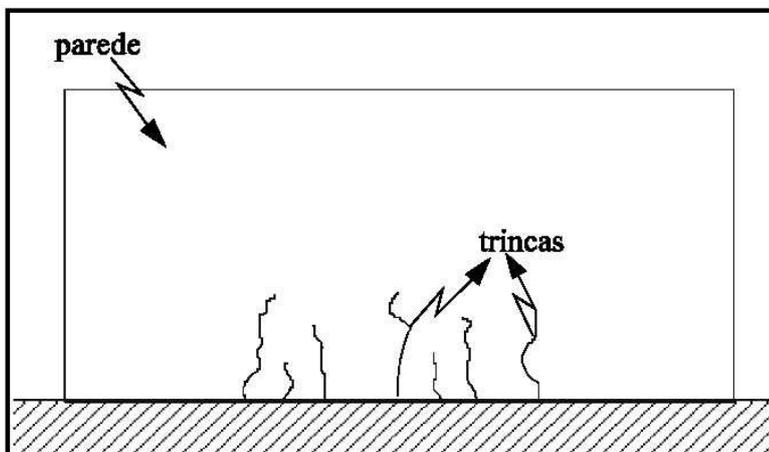
**Exercícios****41**

O estado plano de tensões em determinado ponto de um corpo é mostrado no elemento da figura abaixo.



Os valores, em MPa, das tensões principais  $\sigma_{p1}$  e  $\sigma_{p2}$  são, respectivamente, iguais a

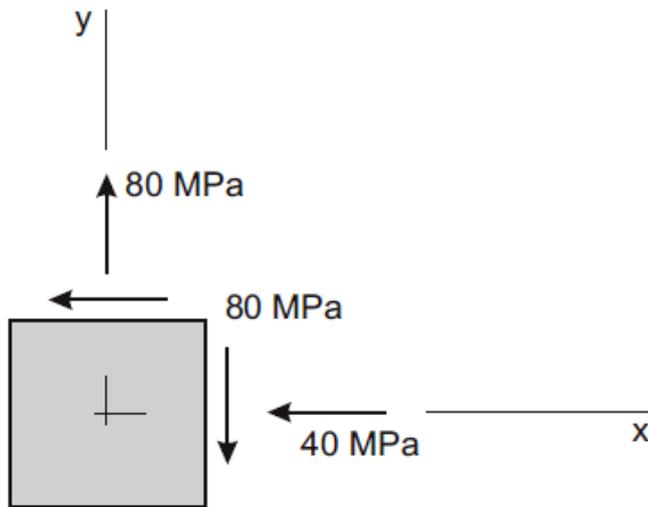
- (A) 70 e 20
- (B) 70 e 50
- (C) 120 e 20
- (D) 120 e 50
- (E) 120 e 70



Uma série de trincas surgiram em uma parede de alvenaria, conforme esquematizado na figura acima. O padrão de trincamento apresentado pode ser atribuído ao

- A** excesso de armadura de tração.
- B** excesso de armadura de cisalhamento.
- C** recalque uniforme da parede ao longo da sua base.
- D** fato de que o material sobre o qual a parede está apoiada cedeu nas extremidades da mesma.
- E** fato de que o material sobre o qual a parede está apoiada cedeu na região central da mesma.

Considere os dados abaixo para responder às questões de nos 17 e 18.



**17**

Para o estado plano de tensões fornecido, a maior tensão normal possível ( $\sigma_{\text{máx}}$ ), em MPa, vale

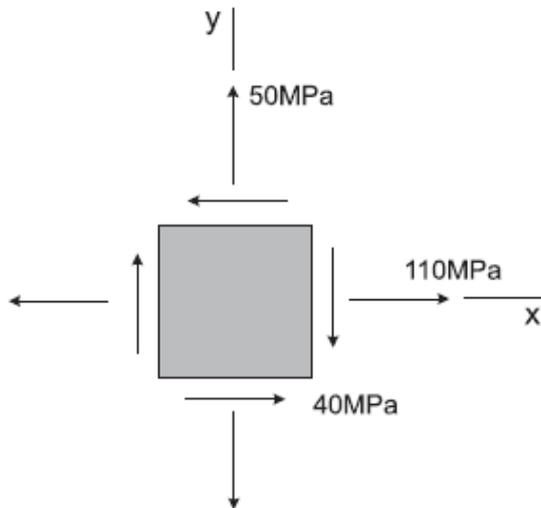
- (A) 40
- (B) 60
- (C) 80
- (D) 120
- (E) 140

**18**

De acordo com o estado plano de tensões fornecido, a menor tensão normal ( $\sigma_{\text{mín}}$ ), em MPa, vale

- (A) - 40
- (B) - 80
- (C) - 120
- (D) - 140
- (E) - 160

As questões de n<sup>os</sup> 45 e 46 referem-se ao estado plano de tensões indicado a seguir.



Dados:

Ângulo	Tangente
18,44°	1/3
33,69°	2/3
45°	1
53,14°	4/3
59,04°	5/3
63,43°	2

**45**

As tensões principais  $\sigma_{\min}$  e  $\sigma_{\max}$ , respectivamente, em MPa, valem:

- (A) 30 e 130
- (B) 40 e 50
- (C) 40 e 110
- (D) 50 e 110
- (E) 80 e 110

**46**

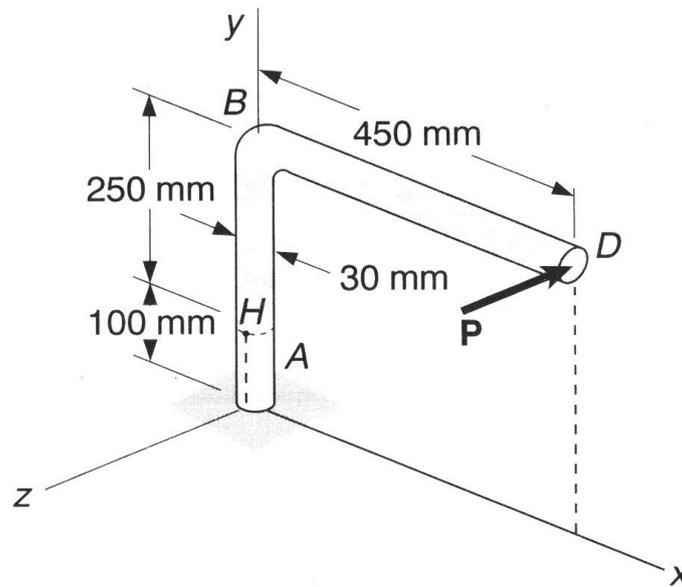
O plano principal é encontrado girando-se o elemento dado no sentido horário, em um ângulo, em graus, de:

- (A) 18,43
- (B) 22,50
- (C) 26,57
- (D) 30
- (E) 45

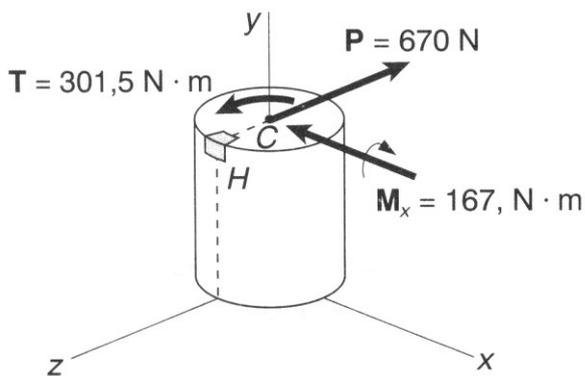
**Exemplo:**

Uma força horizontal  $P$  de 670N é aplicada à extremidade  $D$  da alavanca  $ABD$ . Determinar:

- as tensões normal e de cisalhamento em um cubo elementar situado no ponto  $H$ , com lados paralelos aos eixos  $x$  e  $y$ ;
- os planos principais e as tensões principais.

**Solução:**

Estabelecendo uma seção transversal que passa pelo ponto  $H$ , e reduzindo o conjunto de forças externas aplicadas à estrutura ao centro de massa da seção transversal, obtém-se:



$$P = 670 \text{ N}$$

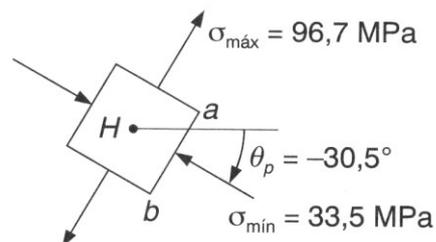
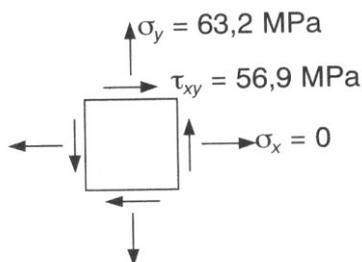
$$T = 670 \text{ N} \cdot 0,45 \text{ m} = 301,5 \text{ Nm}$$

$$M_x = 670 \text{ N} \cdot 0,25 \text{ m} = 167,5 \text{ Nm}$$

$$\sigma_x = 0$$

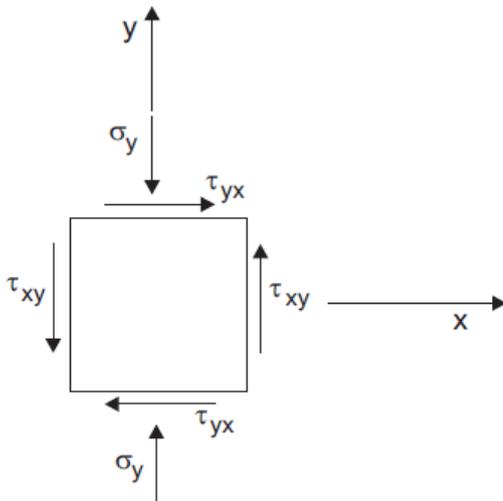
$$\sigma_y = \frac{M_x \cdot z}{I_x} = \frac{167,5 \cdot 0,015}{\frac{\pi}{2} (0,015)^4} = 63,2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T}{J_o} r = \frac{301,5 \cdot 0,015}{\frac{\pi}{2} (0,015)^4} = 56,9 \text{ MPa}$$



**Exercícios**

Os tubos de perfuração utilizados em poços de petróleo são estruturas prismáticas sujeitas, principalmente, à torção combinada com cargas axiais compressivas. Um estado plano de tensões referente a um ponto desse tipo de tubulação é mostrado na figura abaixo.

**68**

Com base na orientação das tensões normal e cisalhantes, as tensões principais atuantes nesse ponto são

- (A) ambas de compressão.
- (B) ambas de tração.
- (C) uma de tração e outra de compressão com módulos idênticos.
- (D) uma de tração e outra de compressão, sendo a de tração a de maior módulo.
- (E) uma de tração e outra de compressão, sendo a de compressão a de maior módulo.

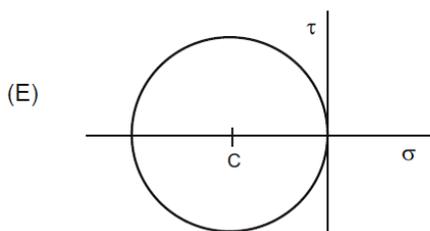
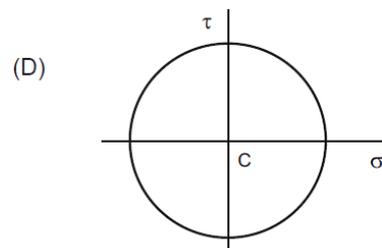
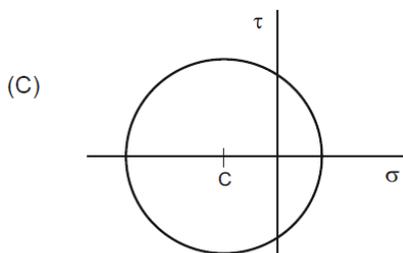
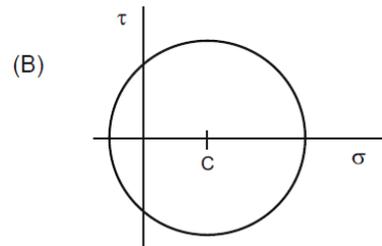
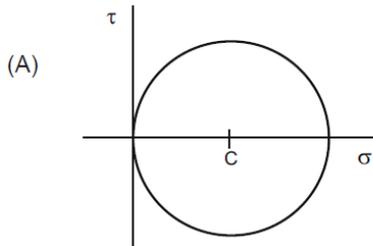
**69**

Considerando o material do tubo como elástico e linear, as correspondentes deformações que ocorrem nesse ponto são tais que

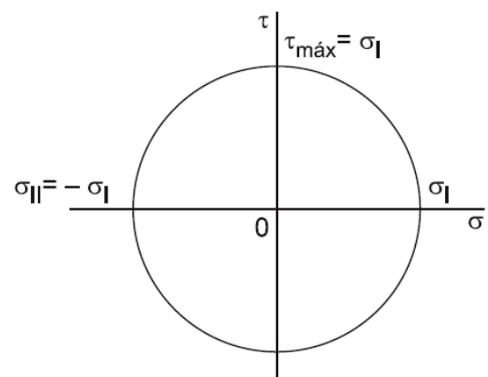
- (A)  $\varepsilon_x = 0$  ,  $\varepsilon_y \neq 0$  e  $\gamma_{xy} = 0$
- (B)  $\varepsilon_x \neq 0$  ,  $\varepsilon_y = 0$  e  $\gamma_{xy} \neq 0$
- (C)  $\varepsilon_x \neq 0$  ,  $\varepsilon_y \neq 0$  e  $\gamma_{xy} = 0$
- (D)  $\varepsilon_x = 0$  ,  $\varepsilon_y \neq 0$  e  $\gamma_{xy} \neq 0$
- (E)  $\varepsilon_x \neq 0$  ,  $\varepsilon_y \neq 0$  e  $\gamma_{xy} \neq 0$

**Exercícios****11**

O círculo de Mohr que representa o estado plano de tensões referente a um ponto da superfície de um eixo sujeito à torção combinada com carga axial de tração é

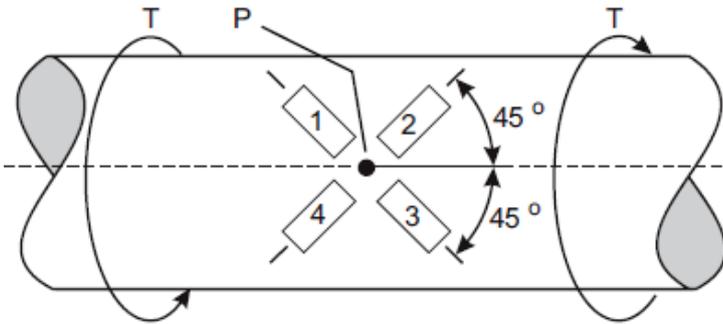
**40**

- O círculo de Mohr apresentado na figura ao lado representa o estado plano de tensões atuante em um ponto
- (A) da superfície superior de uma viga sob flexão pura.
- (B) da superfície de um eixo sujeito a torção combinada com carga axial.
- (C) da superfície de um eixo sob torção pura.
- (D) da linha neutra de uma viga sob flexão pura.
- (E) entre a linha neutra e a superfície superior de uma viga sob flexão pura.



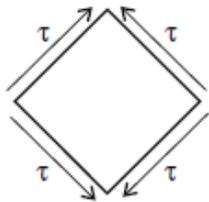
**Exercícios****48**

O projeto de um torquímetro extensiométrico utiliza, como elemento sensor, um eixo maciço de seção circular, em cuja superfície são instalados 4 extensômetros (*strain gages*) com a configuração mostrada na figura abaixo.

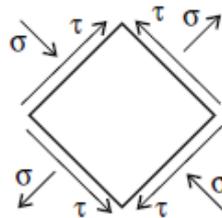


Quando o eixo é solicitado pelos torques indicados, as tensões normais e cisalhantes referidas ao ponto **P**, com seus sentidos correspondentes, ficam representadas por um estado plano de tensões, com a configuração

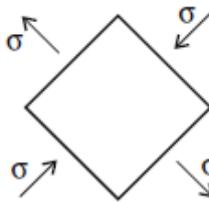
(A)



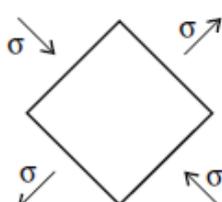
(B)



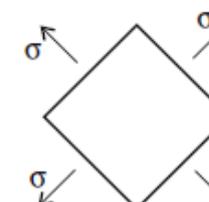
(C)



(D)

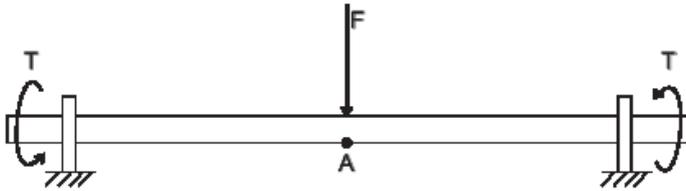


(E)

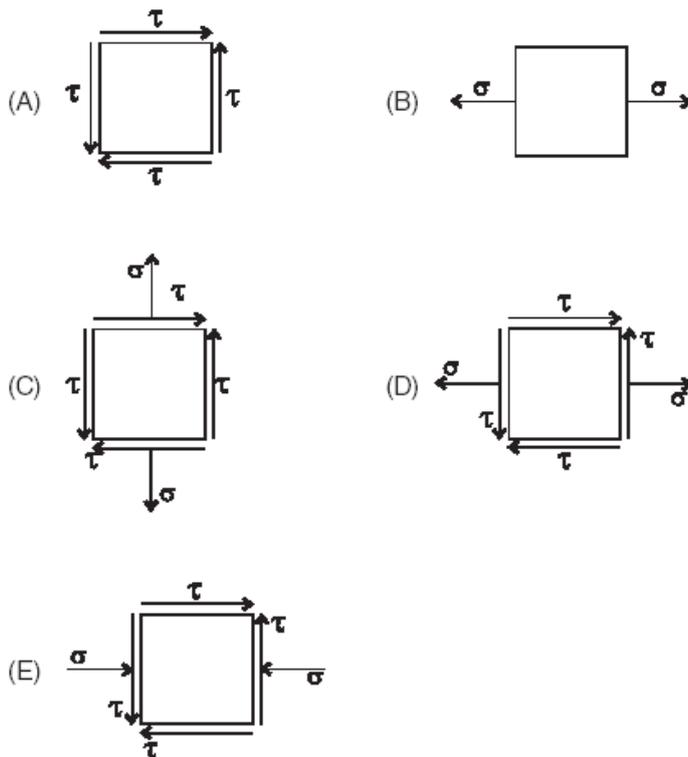


**Exercícios****28**

Observe a figura abaixo.



Considere o eixo de transmissão de potência da figura, em que os mancais resistem apenas a forças verticais. As tensões atuantes em um ponto A, na superfície inferior do eixo, são representadas pelo seguinte elemento:

**26**

Considerando o estado plano de tensões referente a um ponto da superfície de um eixo sob torção, é correto afirmar que as tensões principais possuem:

- (A) mesma intensidade e mesmo sinal.
- (B) mesma intensidade e sinais distintos.
- (C) mesma intensidade, nada se podendo afirmar sobre os sinais.
- (D) valores distintos e sinais distintos.
- (E) valores distintos e sinais idênticos.