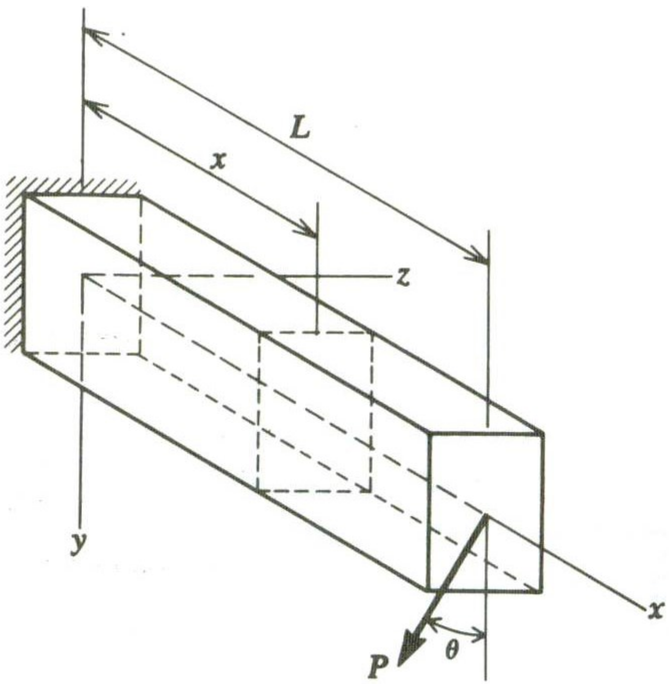
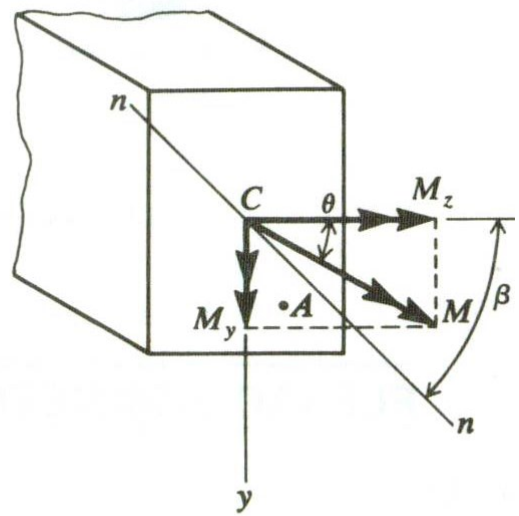
SEÇÃO DE ENSINO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO
MAJ MONIZ DE ARAGÃO

Resistência dos Materiais II

- **FLEXÃO OBLÍQUA**

Flexão Oblíqua
1º Caso: Vigas Simétricas





$$M_z = (P\cos\theta)\cdot(L-x)$$

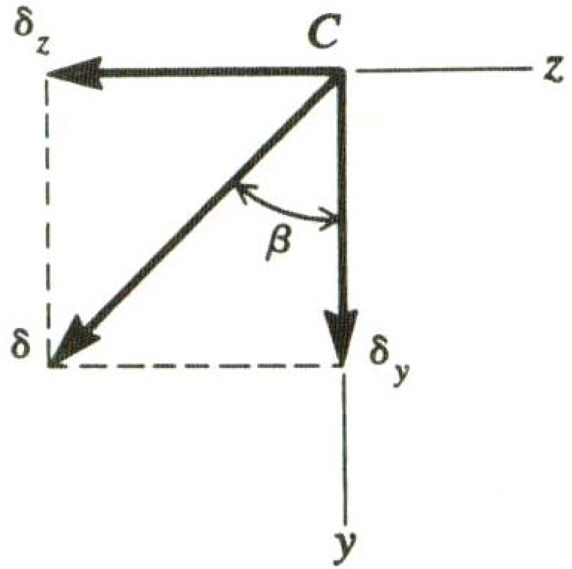
$$M_y = (P\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot(L-x)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

Eixo neutro: $\Rightarrow \sigma_x = 0 \quad \Rightarrow y = \underbrace{\left(\frac{I_z}{I_y}\mathrm{tg}\,\theta\right)}_{\mathrm{tg}\,\beta} \cdot z \quad \Rightarrow \boldsymbol{\beta = \theta} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 0° \\ \theta = 90° \\ I_y = I_z \end{cases}$

$\Rightarrow$ **Em geral:** $\boldsymbol{\beta \neq \theta}$

Flexão Oblíqua
1º Caso: Vigas Simétricas



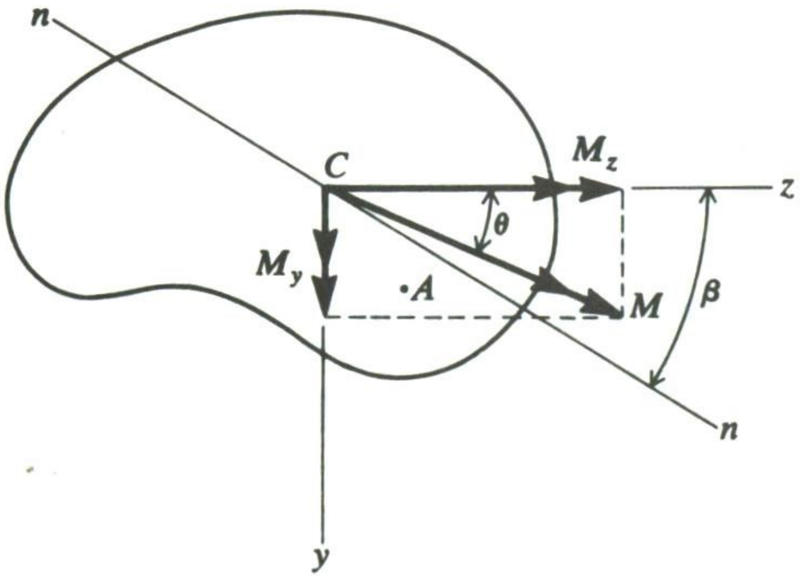
$$\delta_z = \frac{PL^3 \operatorname{sen}\theta}{3EI_y}$$

$$\delta_y = \frac{PL^3 \cos\theta}{3EI_z}$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2}$$

Direção da deflexão resultante: $\Rightarrow \dfrac{\delta_z}{\delta_y} = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg}\theta$

Flexão Oblíqua
2º Caso: Vigas com seções assimétricas



Solução:

1)Localização dos <u>eixos principais</u> centrais *y* e *z*

2)Decomposição de M em M_y e M_z

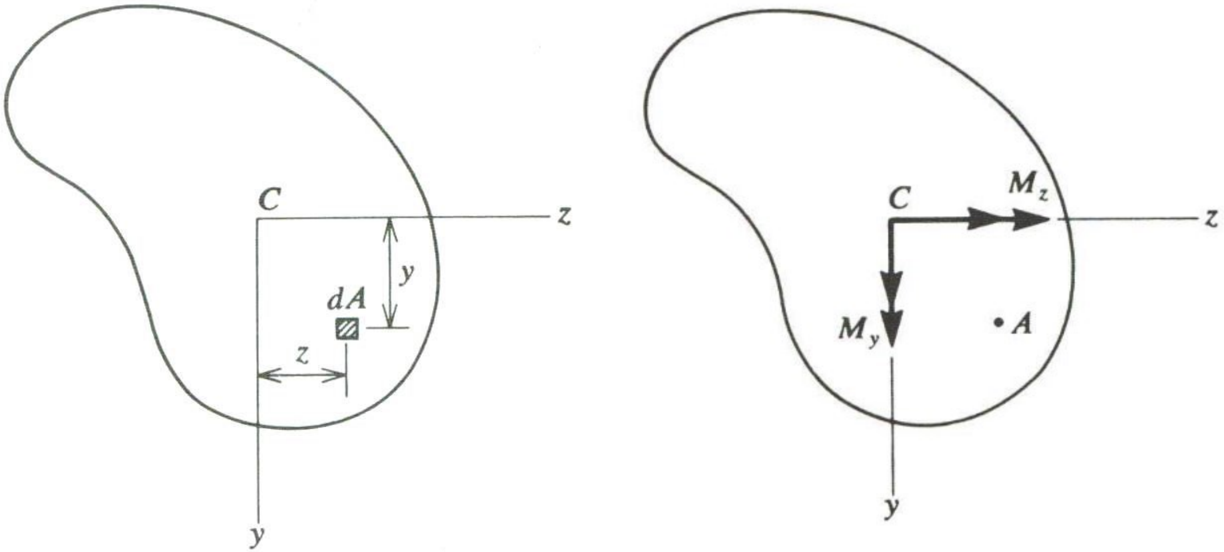
3)Determinação do eixo neutro: $\Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \dfrac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg}\theta$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

Flexão Oblíqua
2º Caso: Vigas com seções assimétricas

Solução Geral:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -\kappa_y E y - \kappa_z E z \\ \int \sigma_x dA = 0 \end{cases}$$



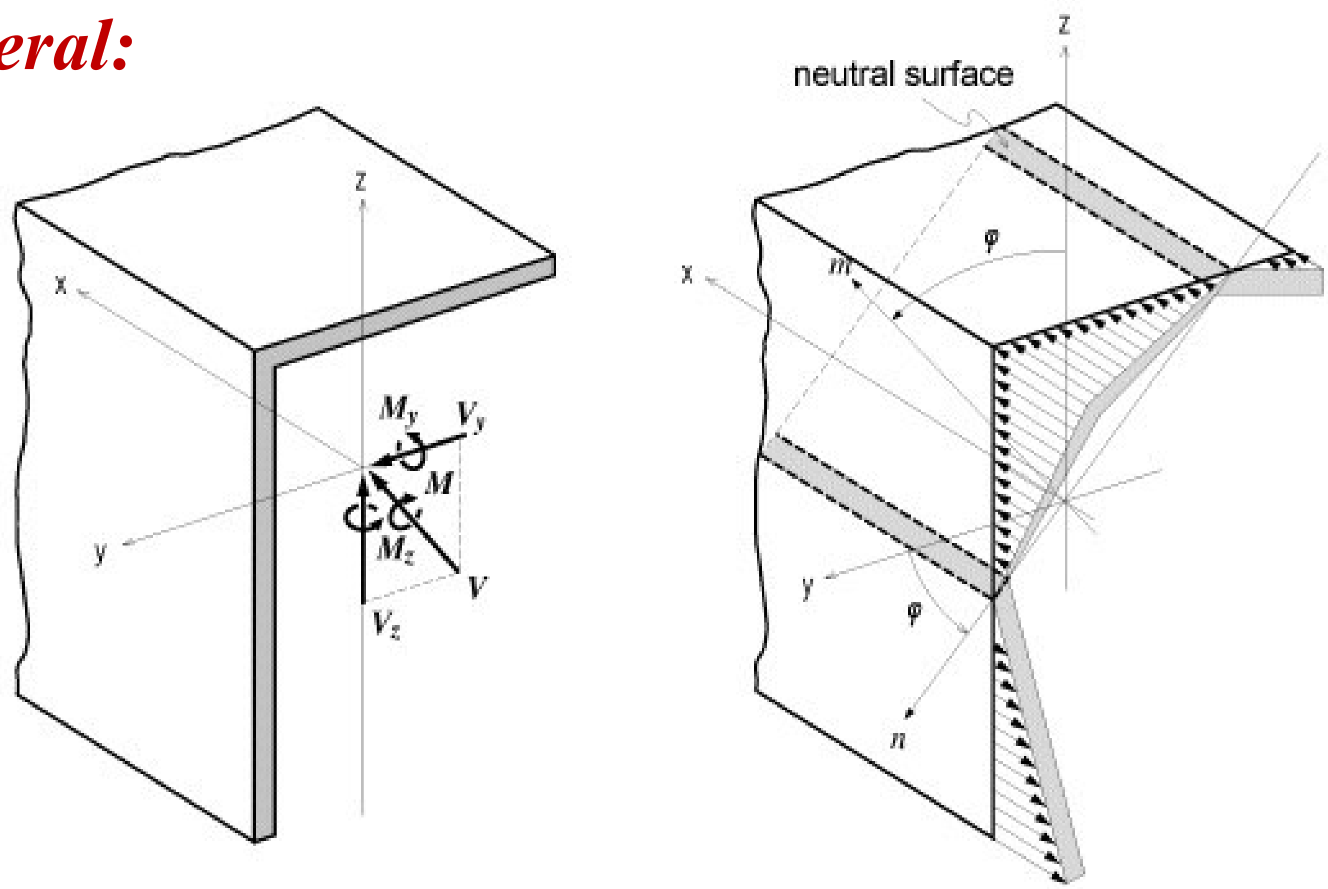
$$\Rightarrow \begin{cases} M_y = \int \sigma_x \cdot z \cdot dA \\ M_z = \int \sigma_x \cdot y \cdot dA \end{cases} \Rightarrow M_y = -\kappa_y E \int yz \cdot dA - \kappa_z E \int z^2 \cdot dA$$

$$\Rightarrow M_y = -\kappa_y E I_{yz} - \kappa_z E I_z$$

$$\Rightarrow M_z = \kappa_y E I_z + \kappa_z E I_{yz}$$

Flexão Oblíqua
2º Caso: Vigas com seções assimétricas

Solução Geral:



$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\left(M_y I_z + M_z I_{yz}\right)\cdot z - \left(M_z I_y + M_y I_{yz}\right)\cdot y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

Flexão Oblíqua
2º Caso: Vigas com seções assimétricas

Solução Geral: $$\sigma_x = \frac{\left(M_y I_z + M_z I_{yz}\right)\cdot z - \left(M_z I_y + M_y I_{yz}\right)\cdot y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

Flexão apenas em z: $$\begin{cases} M_y = 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_x = \frac{M_z\left(I_{yz}\cdot z - I_y \cdot y\right)}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

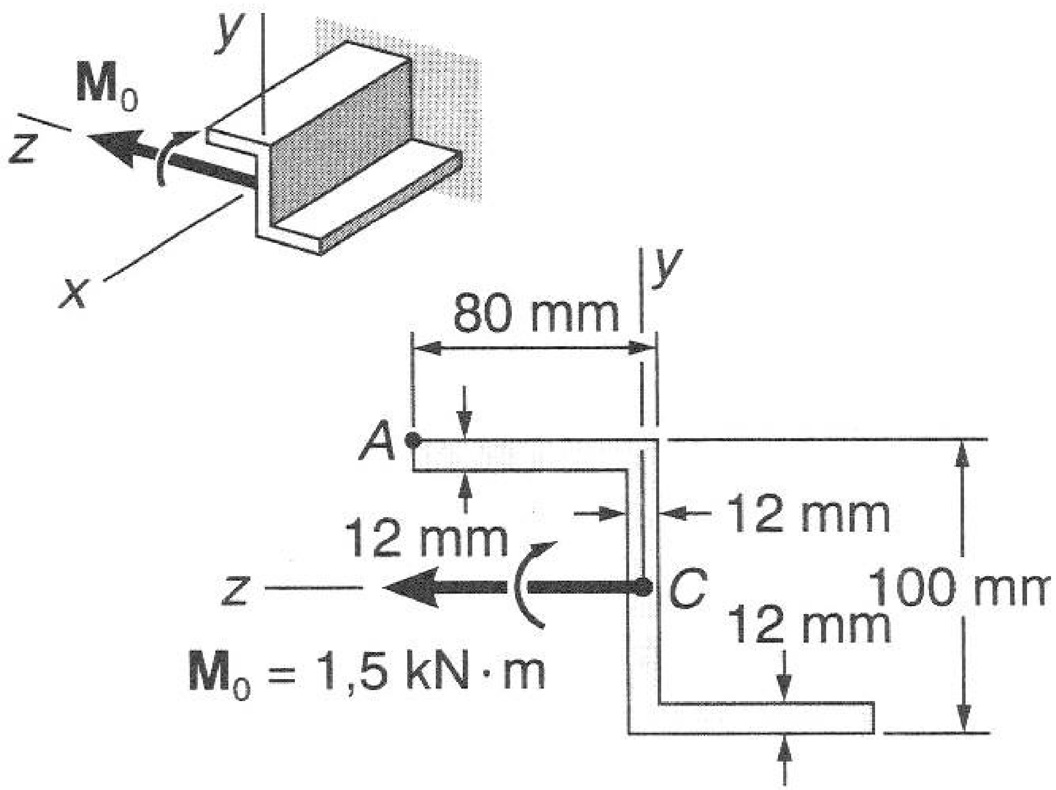
Flexão nos eixos principais: $$\Rightarrow I_{yz} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

Flexão Oblíqua
Exercício

Determine:

- a tensão atuante em A
- a linha neutra



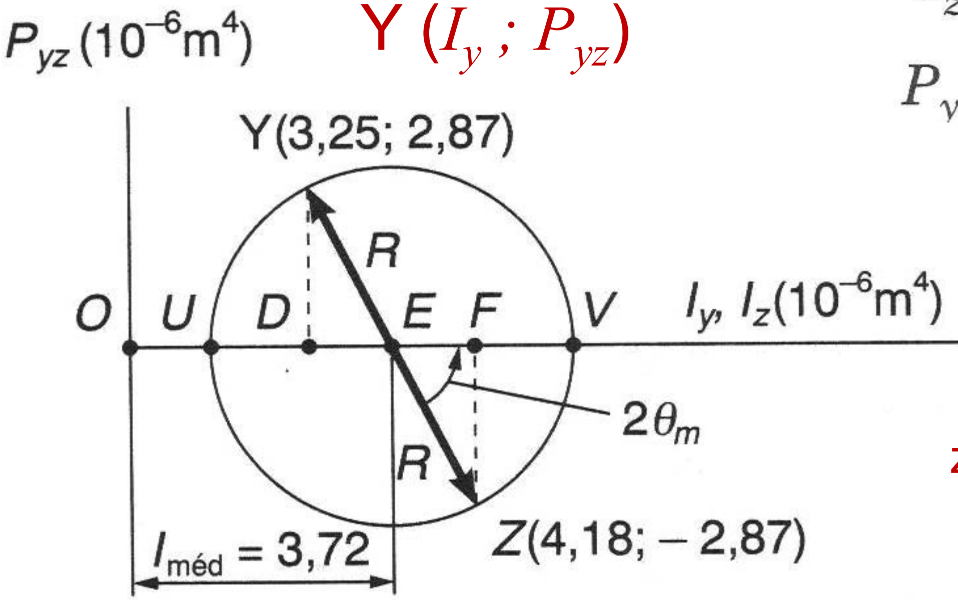
Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 432

Flexão Oblíqua
Exercício

- **Eixos principais**:

$$I_y = 3{,}25 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$I_z = 4{,}18 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$P_{yz} = 2{,}87 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

Y $(I_y\ ;\ P_{yz})$



Z $(I_z\ ;\ -P_{yz})$

z × y normal “saindo” do plano?

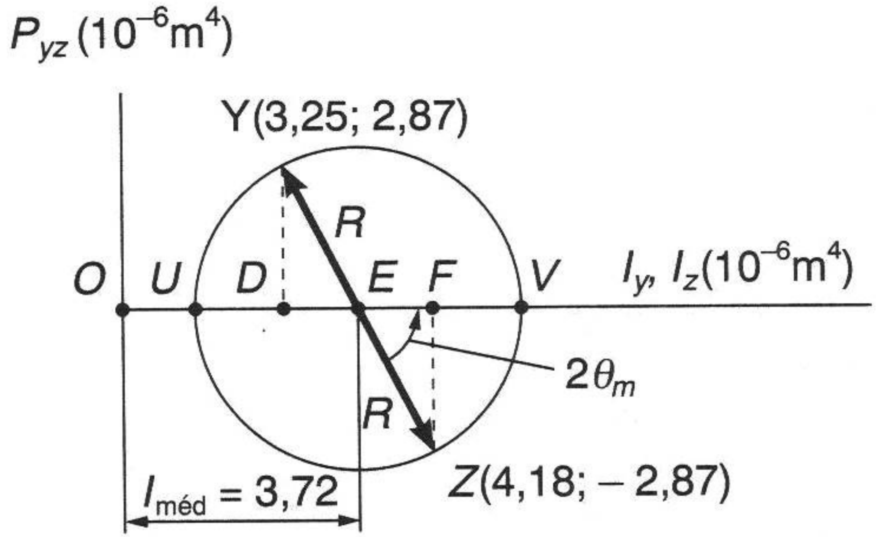
Sim ⇒ Z $(I_z\ ;\ +P_{yz})$

Não ⇒ Z $(I_z\ ;\ -\ P_{yz})$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 432

Flexão Oblíqua
Exercício

- **Eixos principais:**



$$\operatorname{tg} 2\theta_m = \frac{FZ}{EF} = \frac{2{,}87}{0{,}465} \qquad 2\theta_m = 80{,}8^\circ \qquad \theta_m = 40{,}4^\circ$$

$$R^2 = (EF)^2 + (FZ)^2 = (0{,}465)^2 + (2{,}87)^2 \qquad R = 2{,}91 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^4$$

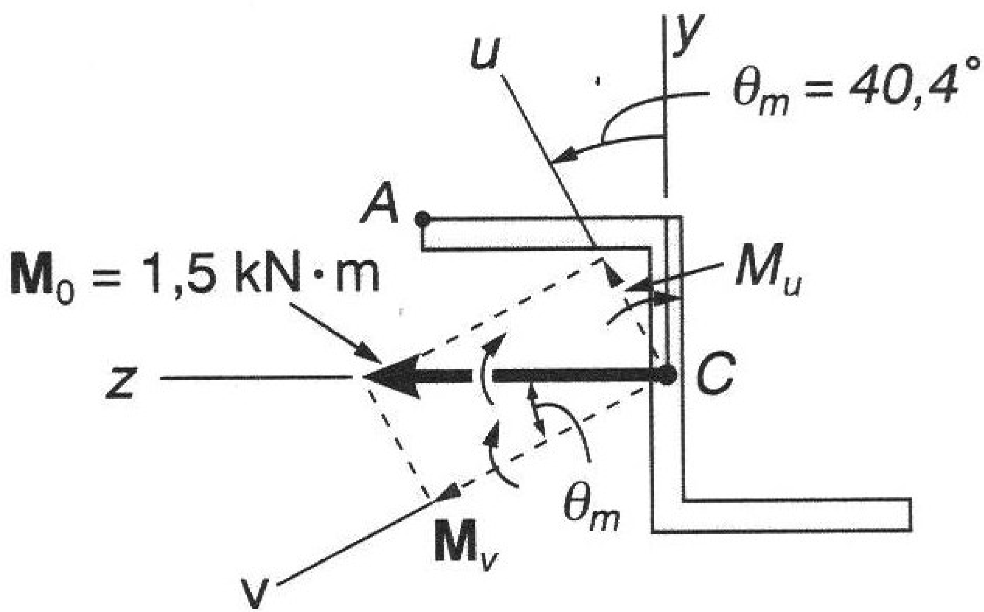
$$I_u = I_{mín} = OU = I_{méd} - R = 3{,}72 - 2{,}91 = 0{,}810 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^4$$

$$I_\upsilon = I_{máx} = OV = I_{méd} + R = 3{,}72 + 2{,}91 = 6{,}63 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^4$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 432

Flexão Oblíqua
Exercício

- **Carregamento**



$$M_u = M_0 \text{ sen } \theta_m = 1500 \text{ sen } 40{,}4° = 972 \text{ N} \cdot \text{m}$$

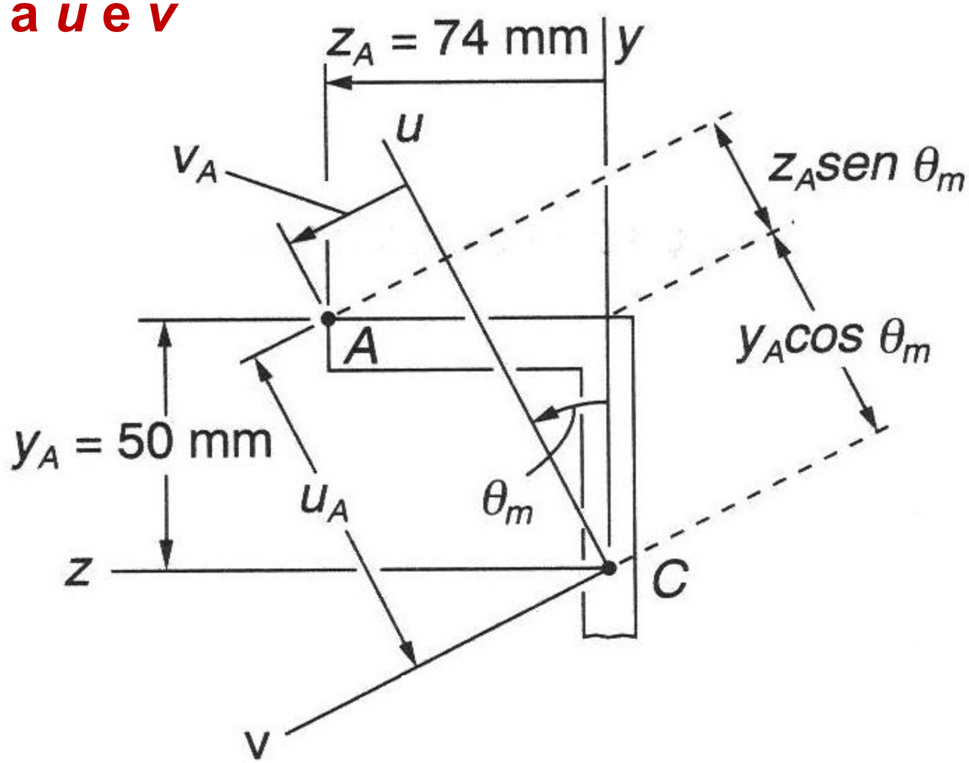
$$M_v = M_0 \cos \theta_m = 1500 \cos 40{,}4° = 1142 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 432

Flexão Oblíqua
Exercício

- **Distância de A em relação a *u* e *v***

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}$$



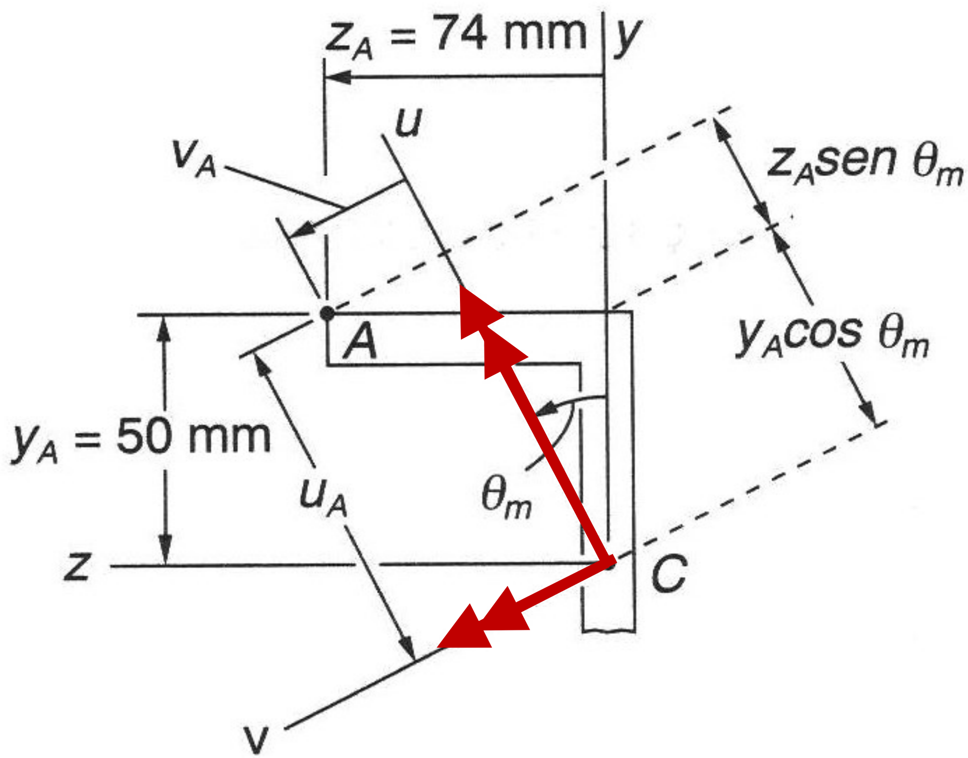
$$u_A = y_A \cos\theta_m + z_A \operatorname{sen}\theta_m = (50)\cos 40{,}4^\circ + (74)\operatorname{sen} 40{,}4^\circ = 86{,}0 \text{ mm}$$

$$v_A = -y_A \operatorname{sen}\theta_m + z_A \cos\theta_m = (50)\operatorname{sen} 40{,}4^\circ + (74)\cos 40{,}4^\circ = 23{,}9 \text{ mm}$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 432

Flexão Oblíqua
Exercício

- **Tensões em A**



$$\sigma_A = +\frac{M_u v_A}{I_u} - \frac{M_v u_A}{I_u} =$$

$$= +\frac{(972\ \mathrm{N \cdot m})(0{,}0239\ \mathrm{m})}{0{,}810 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^4}} - \frac{(1142\ \mathrm{N \cdot m})(0{,}0860\ \mathrm{m})}{6{,}63 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^4}}$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 432

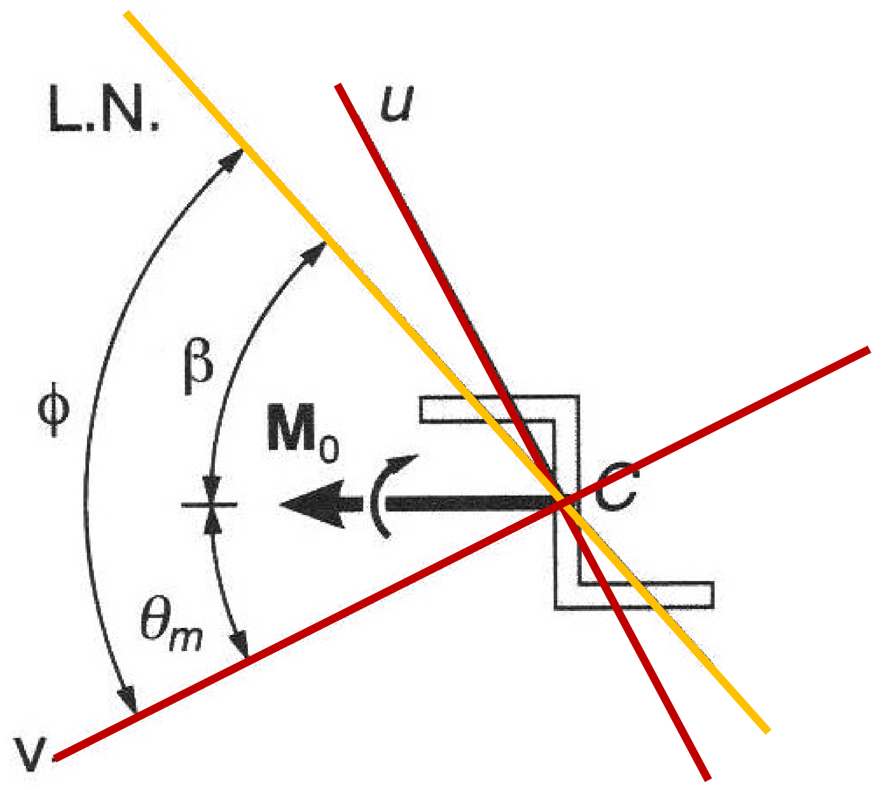
Flexão Oblíqua
Exercício

- **Linha neutra**

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\phi = \frac{I_v}{I_u} \cdot \mathrm{tg}\,\theta_m$$

$$\Rightarrow \phi = 81°$$

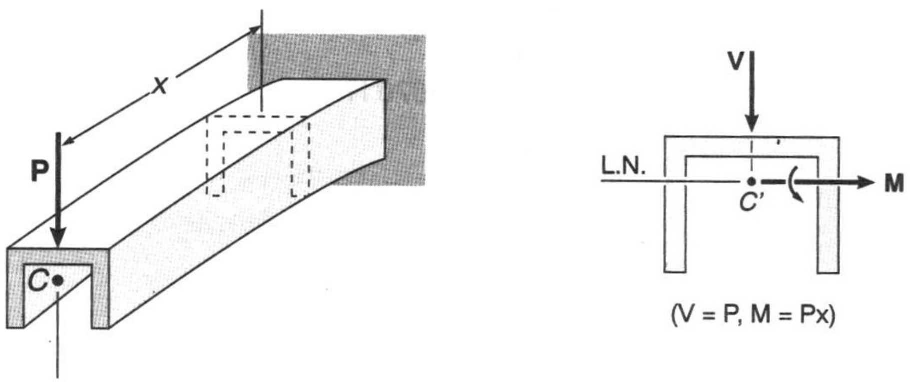
$$\Rightarrow \beta = \phi - \theta_m = 41{,}4°$$



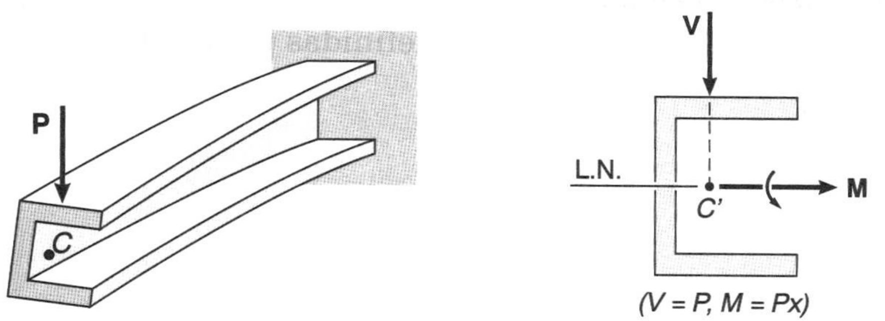
Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 432

Flexão Oblíqua com carregamento transversal

- **Seção com plano de simetria vertical:**



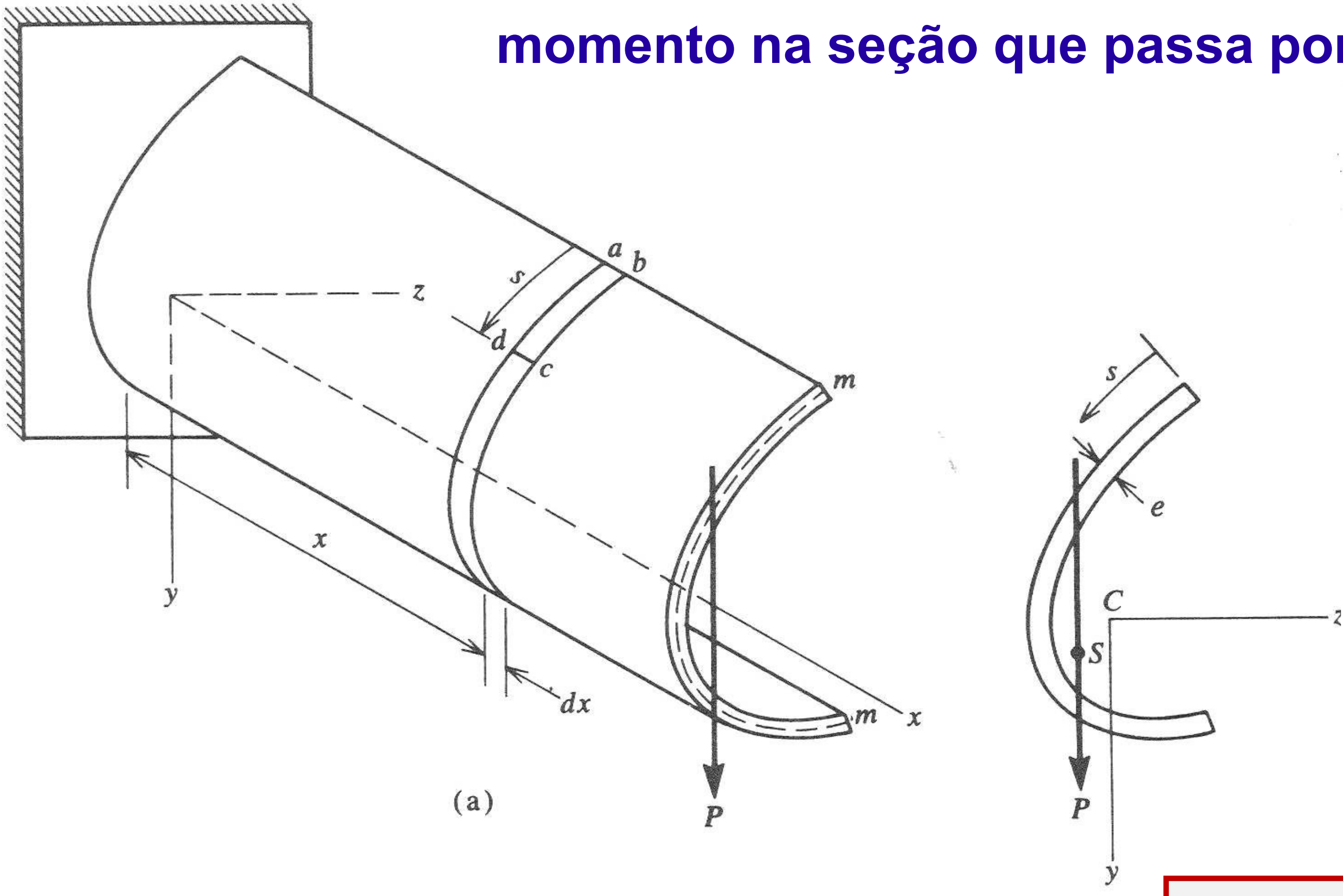
- **Seção SEM plano de simetria vertical:**



- **Uma carga vertical atuante numa seção assimétrica usualmente produz flexão combinada com TORÇÂO**

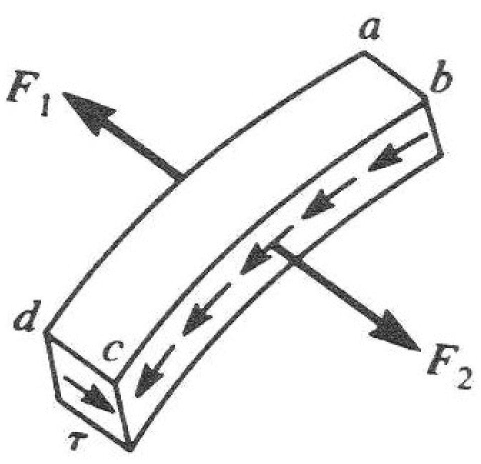
Flexão Oblíqua com carregamento transversal

- **Momento na seção que passa por** a **maior que o momento na seção que passa por** b**...**



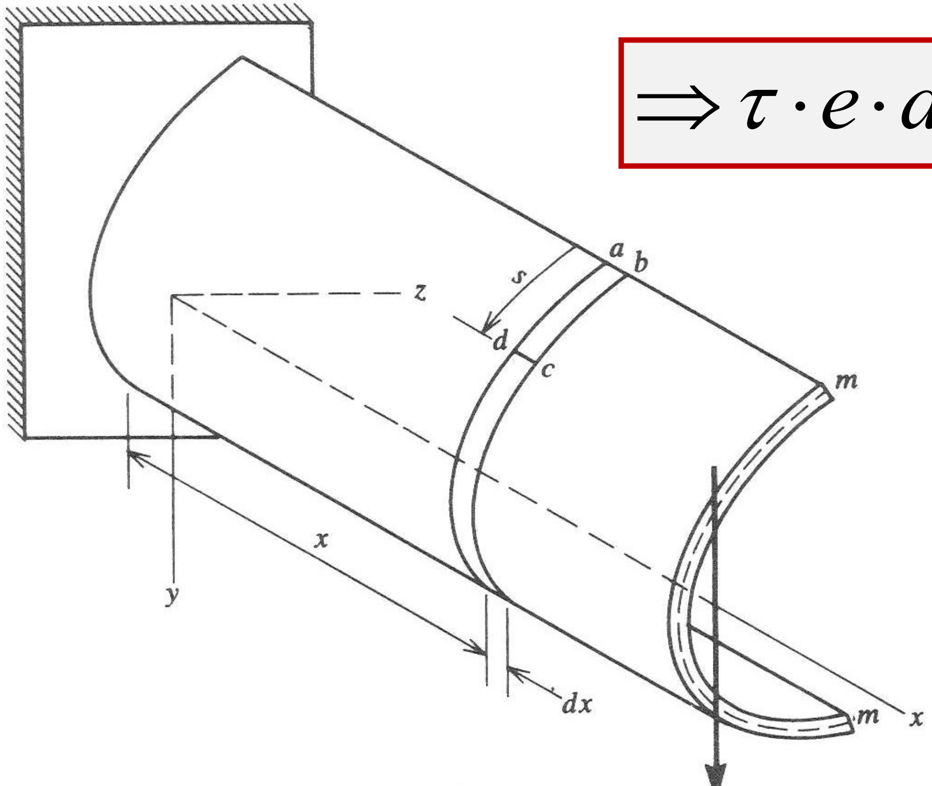
(a)

$$\Rightarrow F_1 > F_2$$



$$\boxed{\Rightarrow \tau \cdot e \cdot dx = F_1 - F_2}$$

Flexão oblíqua com carregamento transversal



(a)

$$\Rightarrow \tau \cdot e \cdot dx = F_1 - F_2$$

$$F_1 = \int_0^s \sigma_x \, dA = -\frac{M_{z1}}{I_z} \int_0^s y \, dA$$

$$F_2 = \int_0^s \sigma_x \, dA = -\frac{M_{z2}}{I_z} \int_0^s y \, dA$$

$$\tau = \frac{M_{z2} - M_{z1}}{dx} \frac{1}{I_z e} \int_0^s y \, dA$$

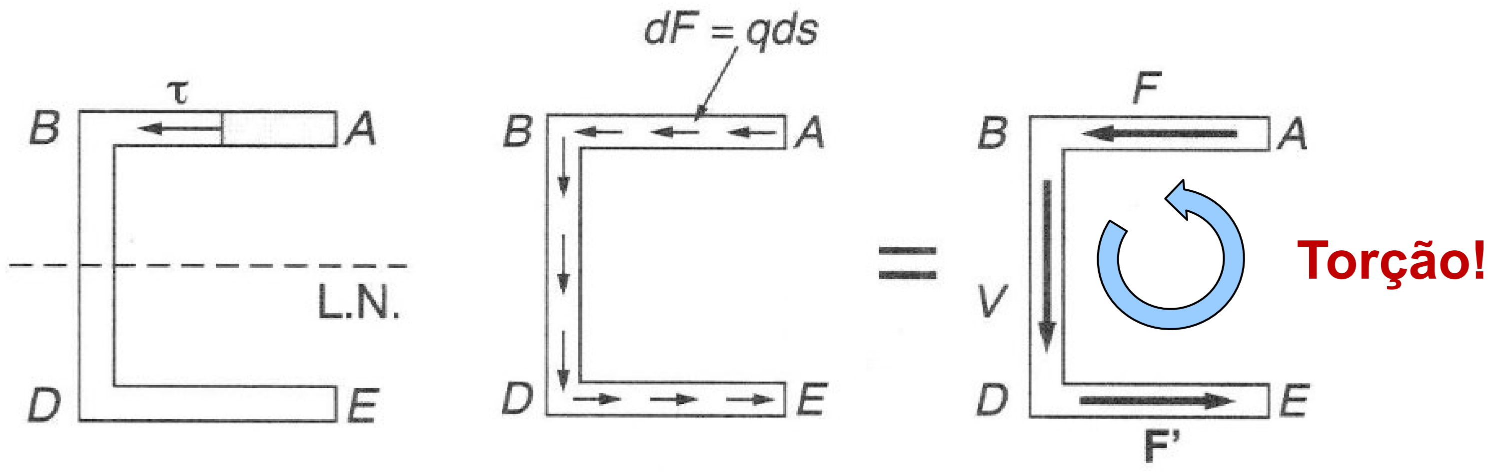
$$\Rightarrow \tau = -\frac{V_y}{I_z e} \int_0^s y \, dA$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{V_y Q_z}{I_z e}$$

Flexão oblíqua com carregamento transversal
Fluxo de cisalhamento

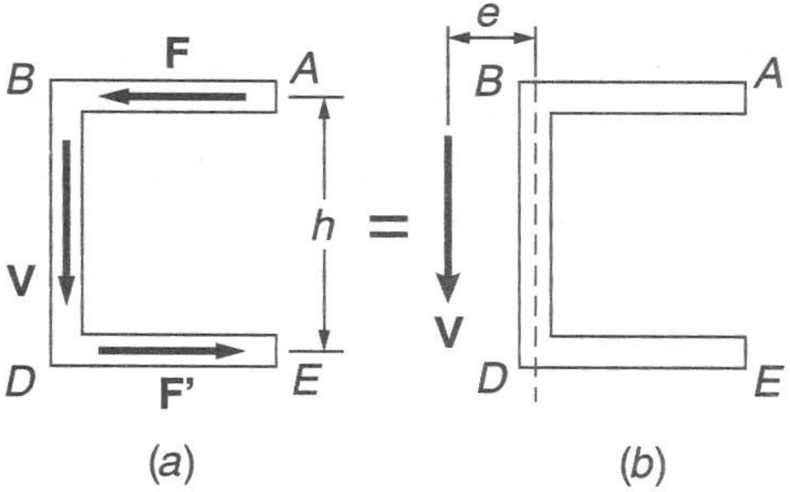
- as tensões de cisalhamento são orientadas ao longo da linha média da seção, paralelamente aos lados;
- as tensões de cisalhamento são admitidas como constantes na espessura da parede;
- a espessura da parede não precisa ser constante;
- fluxo de cisalhamento é definido como o produto da tensão de cisalhamento pela espessura no ponto de análise:

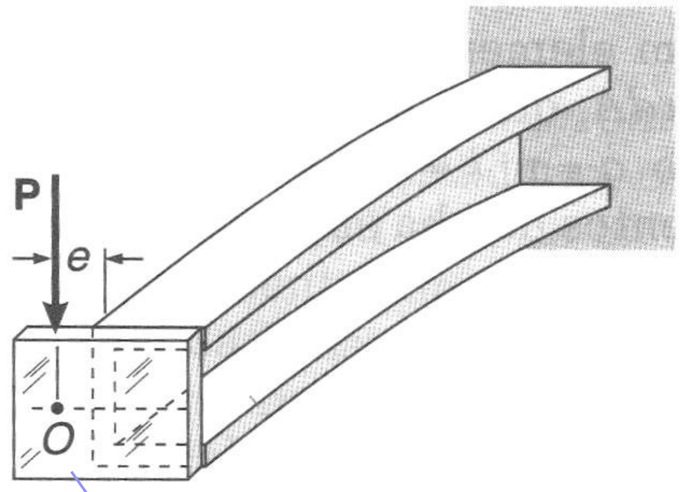
$$q = \tau \cdot e$$



Flexão oblíqua com carregamento transversal
Centro de torção

- É possível aplicar uma força transversal de alguma maneira que não provoque torção?

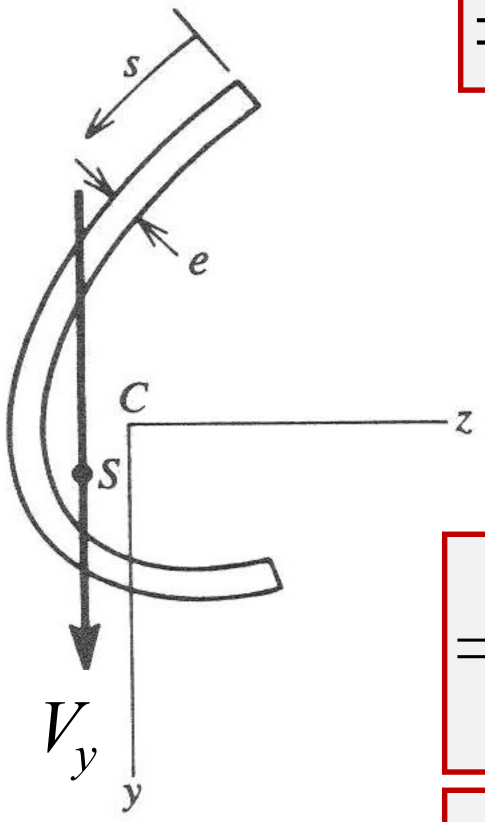




$$e = \frac{Fh}{V}$$

CENTRO DE TORÇÃO
ou de CISALHAMENTO

Flexão oblíqua com carregamento transversal
Expressão generalizada – eixos não-principais



$$\boxed{\Rightarrow \tau \cdot e \cdot dx = F_1 - F_2}$$

$$F_1 = \int_0^s \sigma_x \, dA$$

$$F_2 = \int_0^s \sigma_x \, dA$$

$$\sigma_x = \frac{\left(M_y I_z + M_z I_{yz}\right) \cdot z}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

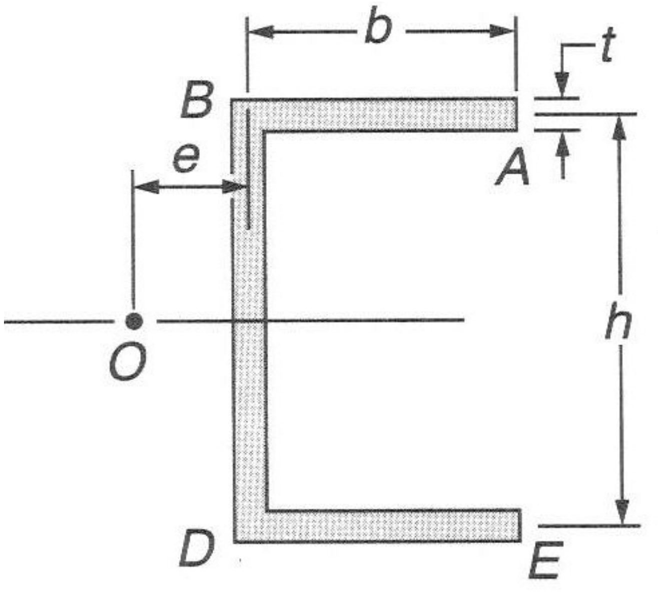
$$\boxed{\Rightarrow \tau = \frac{V_y}{e\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \left[I_{yz} \int_0^s z \cdot dA - I_y \int_0^s y \cdot dA \right]}$$

$$\boxed{\Rightarrow \tau = \frac{V_z}{e\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \left[I_{yz} \int_0^s y \cdot dA - I_y \int_0^s z \cdot dA \right]}$$

Flexão assimétrica com carregamento transversal
Exercício

Determine:
- o centro de cisalhamento da seção;
- a distribuição das tensões de cisalhamento para a força aplicada no centro de cisalhamento;
- a máxima tensão de cisalhamento para a força aplicada no centro geométrico da seção.

$b = 100$ mm, $h = 150$ mm e $t = 3$ mm



Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 561

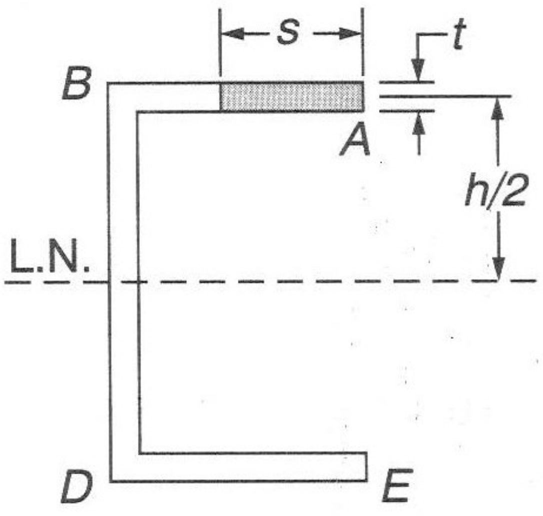
Flexão assimétrica com carregamento transversal
Exercício

- Fluxo de cisalhamento na aba AB:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vsth}{2I}$$

$$F = \int_0^b q\ ds = \int_0^b \frac{Vsth}{2I} ds = \frac{Vth}{2I} \int_0^b s\ ds$$

$$F = \frac{Vthb^2}{4I}$$



Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 557

Flexão assimétrica com carregamento transversal
Exercício

- Momento de inércia

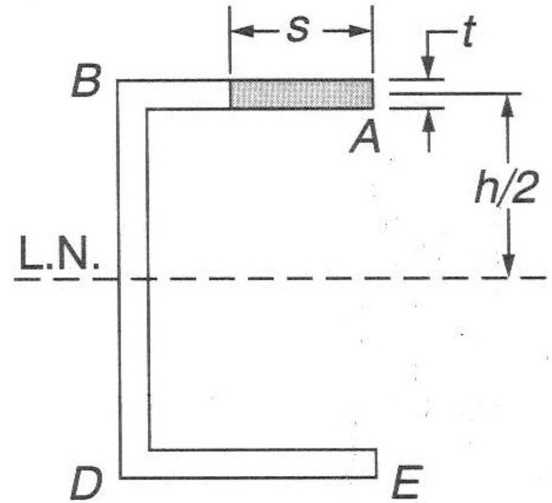
$$I = I_{alma} + 2I_{aba}$$

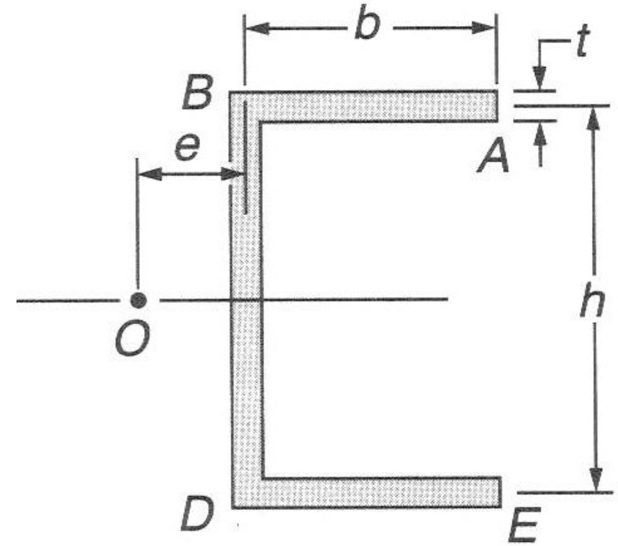
$$= \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\underbrace{\frac{1}{12}bt^3}_{\to 0} + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{12}th^2\left(6b + h\right)$$

- Cálculo da distância *e*:

$$\mathrm{e} = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^2}{4I}\cdot\frac{h}{V} = \frac{th^2b^2}{4I} = 40mm$$





Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 557

Flexão assimétrica com carregamento transversal
Exercício

- Tensão de cisalhamento na aba AB:

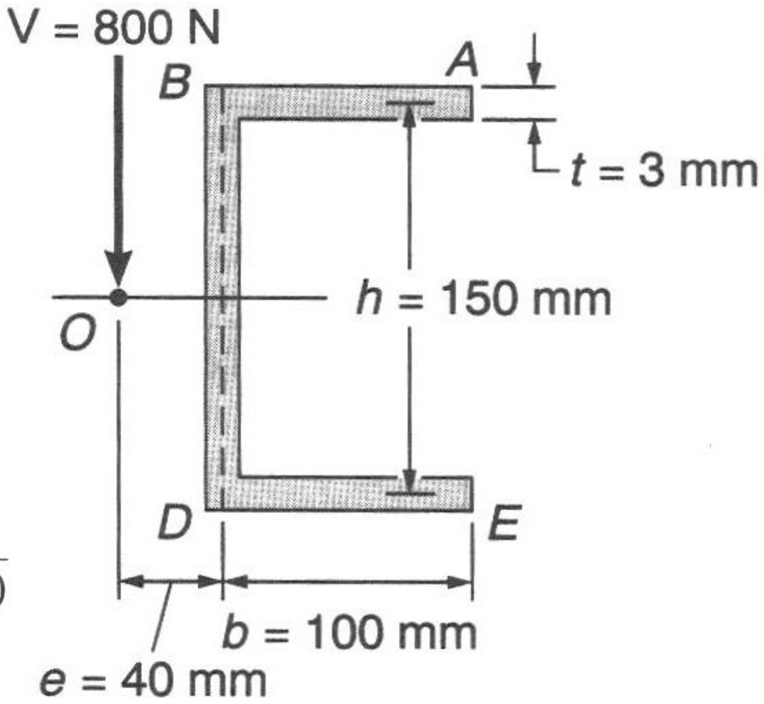
$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It} = \frac{Vh}{2I}s$$

  - distribuição linear

$$\tau_B = \frac{Vhb}{2\left(\frac{1}{12}th^2\right)(6b+h)} = \frac{6Vb}{th(6b+h)}$$

$$\tau_B = \frac{6(800\,\mathrm{N})(0{,}100\,\mathrm{m})}{(0{,}003\,\mathrm{m})(0{,}150\,\mathrm{m})(6\times 0{,}100\,\mathrm{m} + 0{,}150\,\mathrm{m})}$$

$$= 1{,}422\,\mathrm{MPa}$$



Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 557

Flexão assimétrica com carregamento transversal
Exercício

- Tensão de cisalhamento na aba AB:

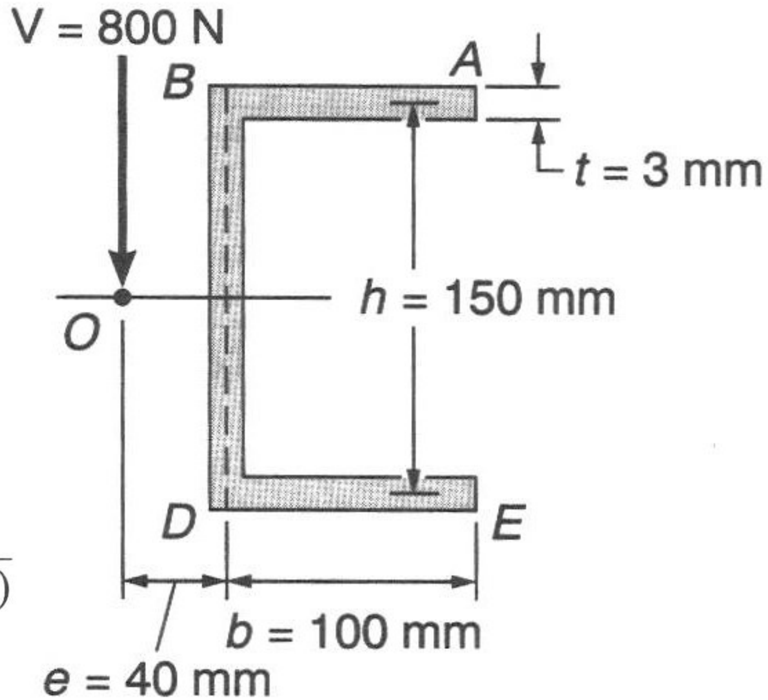
$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It} = \frac{Vh}{2I}s$$

  - distribuição linear

$$\tau_B = \frac{Vhb}{2\left(\frac{1}{12}th^2\right)(6b+h)} = \frac{6Vb}{th(6b+h)}$$

$$\tau_B = \frac{6(800\,\text{N})(0{,}100\,\text{m})}{(0{,}003\,\text{m})(0{,}150\,\text{m})(6\times 0{,}100\,\text{m}+0{,}150\,\text{m})}$$

$$= 1{,}422\,\text{MPa}$$

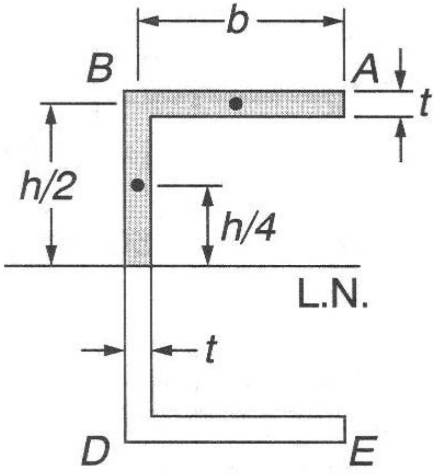


Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 557

Flexão assimétrica com carregamento transversal
Exercício

- Tensão de cisalhamento na alma:

$$Q = bt\left(\tfrac{1}{2}h\right) + \tfrac{1}{2}ht\left(\tfrac{1}{4}h\right) = \tfrac{1}{8}ht(4b + h)$$



  - parabólica

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{1}{8}ht\right)(4b + h)}{\frac{1}{12}th^2(6b + h)t} = \frac{3V(4b + h)}{2th(6b + h)}$$

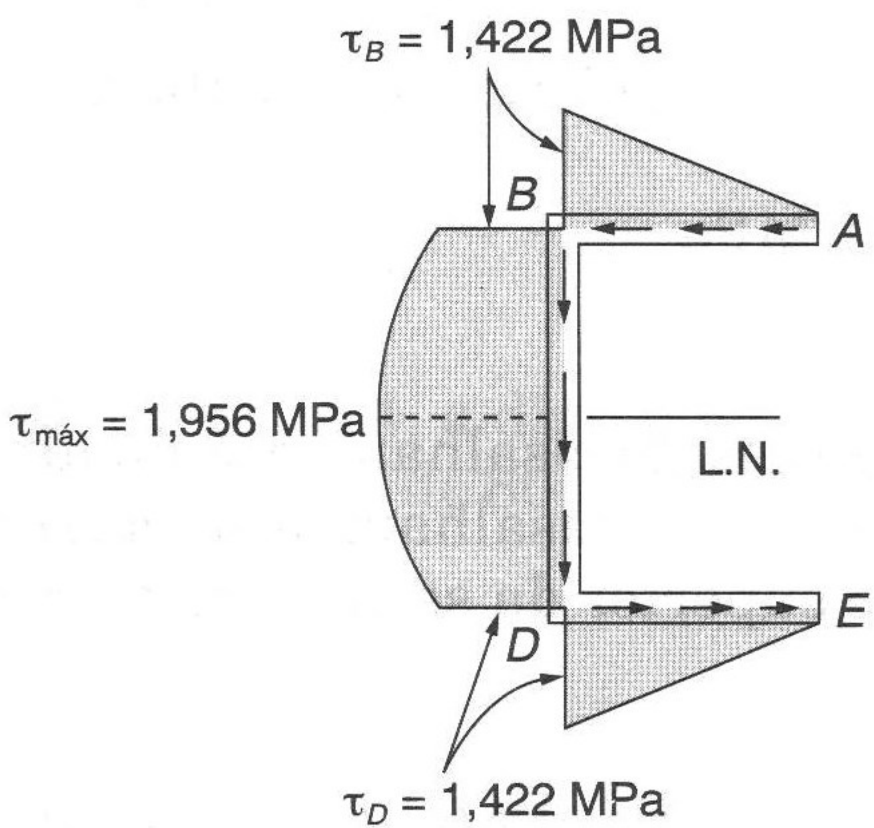
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3(800\,\text{N})(4 \times 0{,}100\,\text{m} + 0{,}150\,\text{m})}{2(0{,}003\,\text{m})(0{,}150\,\text{m})(6 \times 0{,}100\,\text{m} + 0{,}150\,\text{m})}$$

$$= 1{,}956\,\text{MPa}$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 557

Flexão assimétrica com carregamento transversal
Exercício

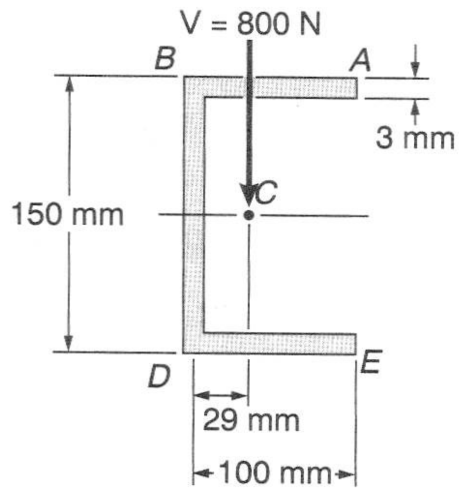
- Distribuição das tensões de cisalhamento na seção



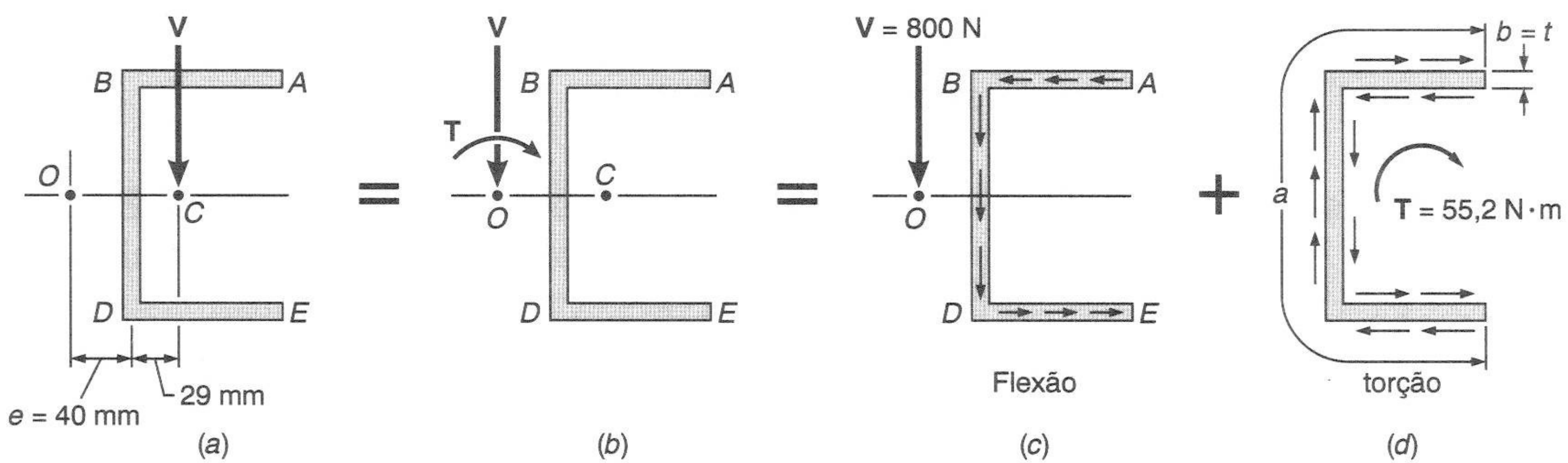
Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 557

Flexão assimétrica com carregamento transversal
Exercício

- a máxima tensão de cisalhamento para a força aplicada no centro geométrico da seção



$$T = V(OC) = (800\ \text{N})(40\ \text{mm} + 29\ \text{mm}) = 55{,}2\ \text{N} \cdot \text{m}$$



Teoria da membrana

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 557