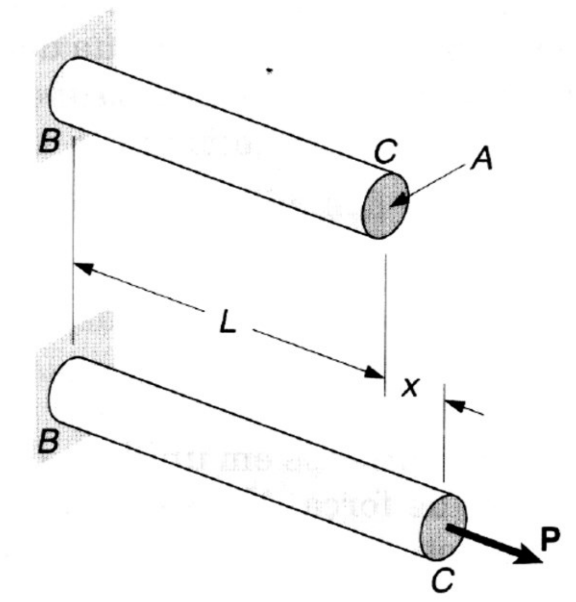
SEÇÃO DE ENSINO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO
MAJ MONIZ DE ARAGÃO

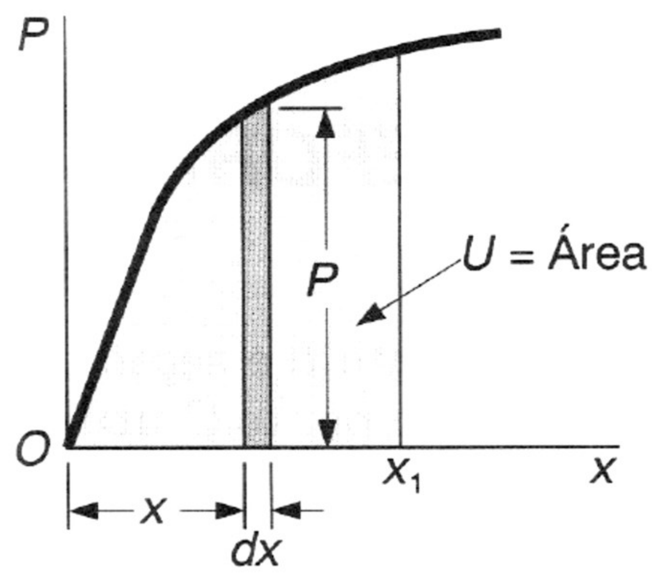
Resistência dos Materiais II

- **Trabalho de deformação.**
- **Trabalho específico de deformação em um ponto.**
- **Trabalho de distorção.**

Trabalho de Deformação

Trabalho elementar: $dU = P \cdot dx$





Trabalho ou Energia de Deformação:

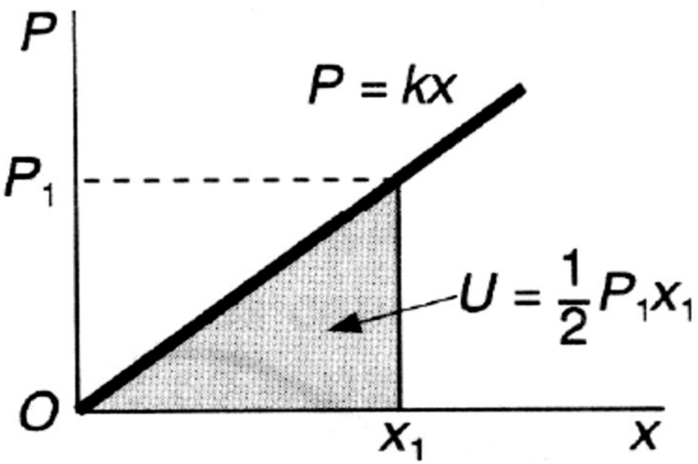
$$U = \int_0^{x_1} P \cdot dx$$

$$N \cdot m = J = joule$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 975

Trabalho de Deformação

Trabalho de deformação linear e elástica:



$$U = \int_0^{x_1} kx \cdot dx = \frac{1}{2} k \cdot x_1^2$$

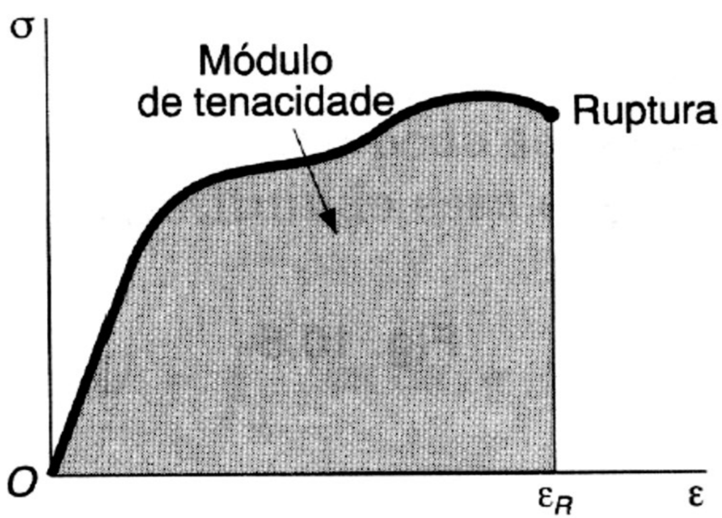
$$U = \frac{1}{2} P_1 \cdot x_1$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 975

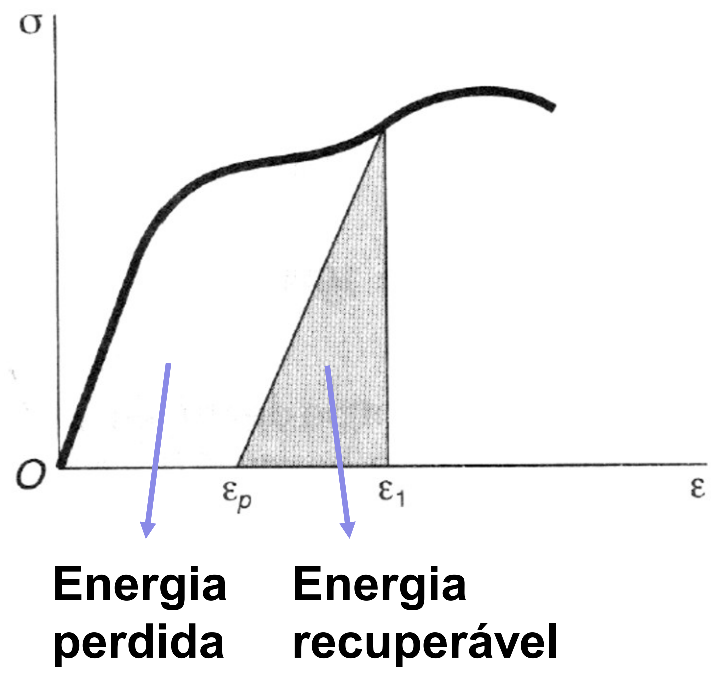
Trabalho de Deformação

Trabalho de deformação específica:

$$u = \frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A} \cdot \frac{dx}{L} = \int_0^{x_1} \sigma_x \cdot d\varepsilon_x$$



Energia por unidade de volume necessária para provocar a ruptura do material



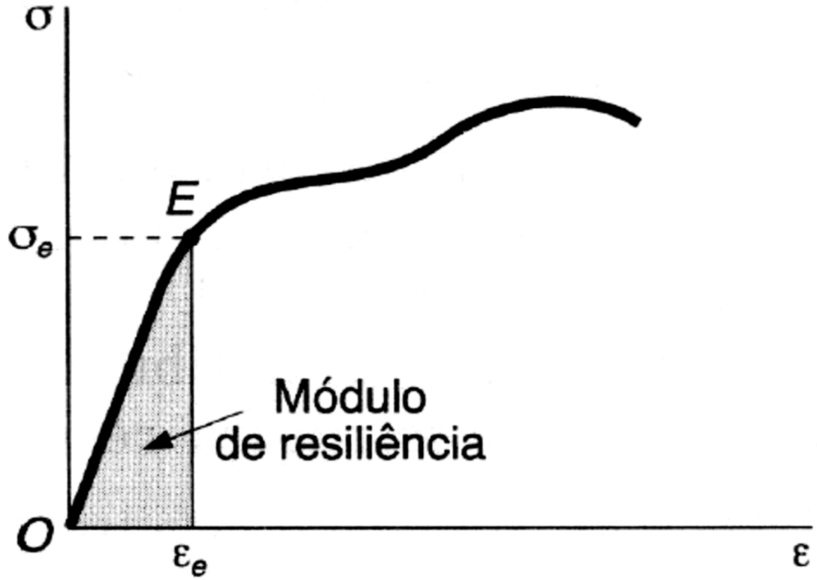
$$\Rightarrow \quad u = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV}$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 975

Trabalho de Deformação

Trabalho de deformação específica:

$$u = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x_1} E\varepsilon_x \cdot d\varepsilon_x = \frac{E\varepsilon_1^2}{2} \\ \displaystyle\int_0^{x_1} \sigma_x \cdot \frac{d\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_1^2}{2E} \end{cases}$$



Módulo de resiliência:

$$u_{res} = \frac{f_y^2}{2E}$$

onde $f_y \equiv$ tensão de escoamento

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 975

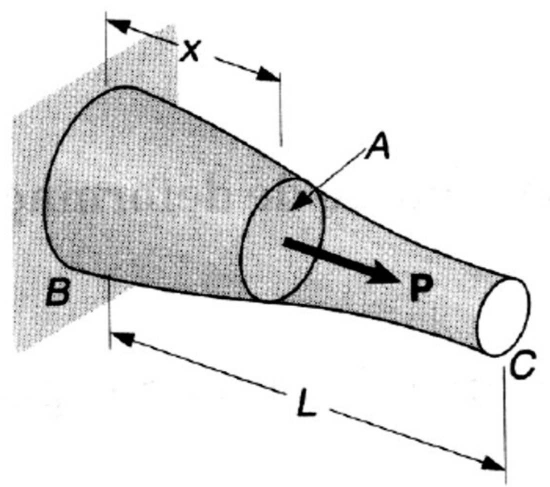
Trabalho de Deformação
Tensões Normais

Trabalho de deformação para carga axial:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\sigma_1^2}{2E} \\ U &= \int u \cdot dV \\ dV &= A \cdot dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad U = \int \frac{\sigma_1^2}{2E} \cdot dV = \int \frac{P^2}{2EA^2} \cdot dV$$

$$\Rightarrow U = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} \cdot dx$$

$$\Rightarrow U = \frac{P^2 L}{2EA}$$ (para A cte)

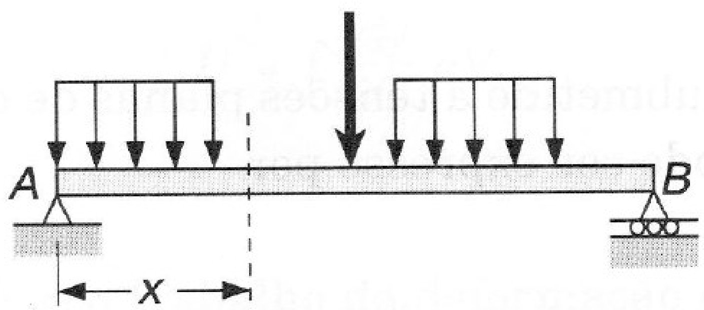


Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 975

Trabalho de Deformação
Tensões Normais

Trabalho de deformação na flexão:

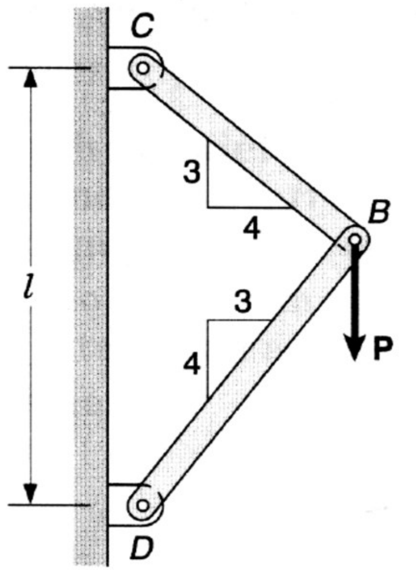
$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\sigma_x^2}{2E} \\ U &= \int u \cdot dV \\ dV &= dA \cdot dx \\ \sigma_x &= \frac{My}{I} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} \cdot dV = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} \cdot dV$$

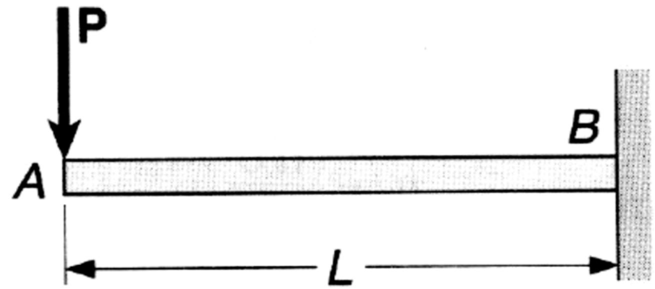


$$\Rightarrow \quad U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int y^2 dA \right) \cdot dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} \cdot dx$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 975

Trabalho de Deformação
Tensões Normais - Exemplos





$$U = \frac{F_{BC}^2\,(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2\,(BD)}{2AE}.$$

$$U = \int_0^L \frac{P^2x^2}{2EI}\,dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 975

Trabalho de Deformação
Tensões Cisalhantes

Trabalho específico de deformação para um material submetido a tensões cisalhantes:

$$u = \int_0^{x_1} \sigma_x \cdot d\varepsilon_x \Rightarrow \boxed{u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} \cdot d\gamma_{xy}}$$

Abaixo do limite de proporcionalidade:

$$u = \frac{1}{2} G \cdot \gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2} \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

Trabalho de deformação :

$$U = \int u \cdot dV \quad \Rightarrow U = \int \frac{\tau_x^2}{2G} \cdot dV$$

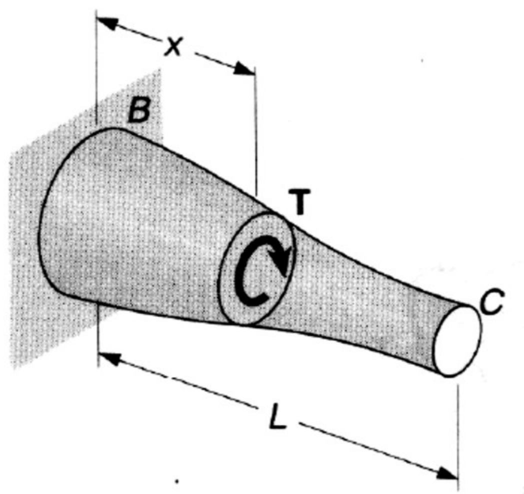
Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 986

Trabalho de Deformação
Tensões Cisalhantes

Trabalho de deformação na torção:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \\ U &= \int u \cdot dV \\ dV &= A \cdot dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad U = \int \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} \cdot dV = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \cdot \left(\int \rho^2 dA \right) dx$$

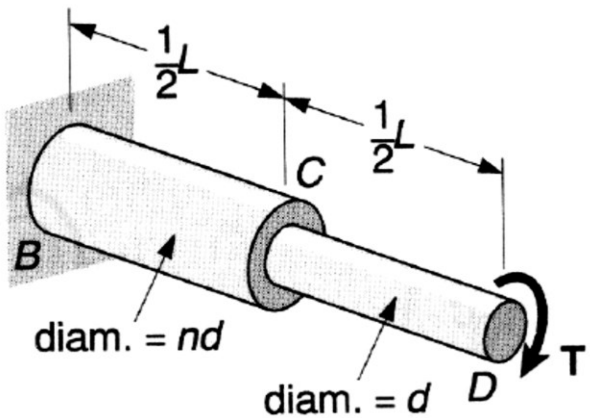
$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{J}$$

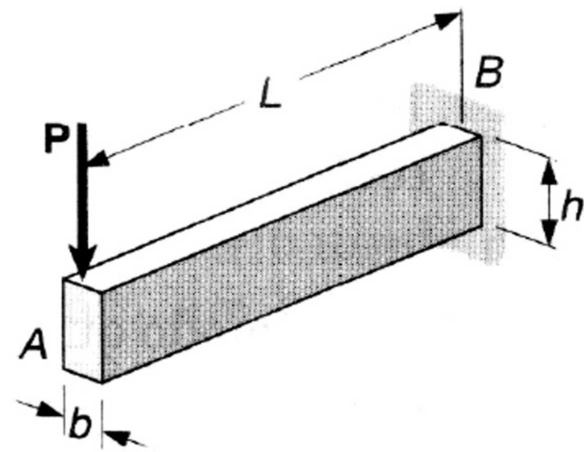


$$\Rightarrow U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$ (para A, T cte)

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 975

Trabalho de Deformação
Tensões Cisalhantes - Exemplos





$$U_n = \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2GJ} + \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2G(n^4J)}$$

$$U = U_\sigma + U_\tau =$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI} + \cancel{\frac{3P^2L}{5GA}}$$

desprezível

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 990

Trabalho de Deformação
Caso Geral de Tensões

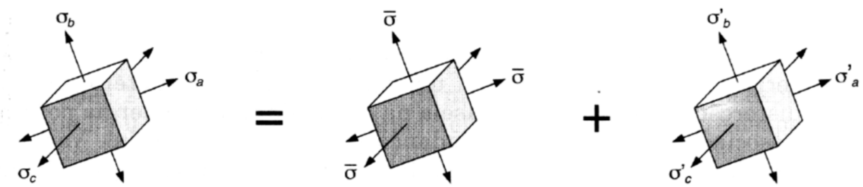
Expressão geral do trabalho de deformação:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$

Expressão geral do trabalho em função das tensões principais:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a)\right]$$

Trabalho específico: $u = u_v + u_d$



$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2$$

variação volumétrica "reta"

$$u_d = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2\right]$$

distorção: mudança de forma

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 990

Trabalho de Deformação
Teoremas de Castigliano

Primeiro Teorema de Castigliano:

$$\begin{cases} dU = \dfrac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i, \quad d\delta_{j \neq i} = 0 \\ dU = P_i \cdot d\delta_i, \quad P_{j \neq i} \text{ não realizam trabalho} \end{cases} \Rightarrow P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$$

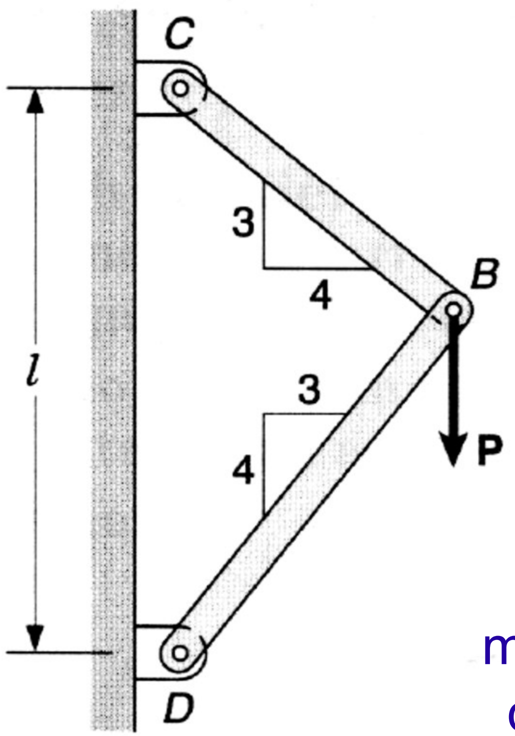
Segundo Teorema de Castigliano:

$$\Rightarrow \delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

$$\Rightarrow k_{ij} = \frac{\partial}{\partial \delta_j} \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial \delta_i} \right)}_{P_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_i \partial \delta_j}$$

Def. coef. de rigidez

Trabalho de Deformação
Teoremas de Castigliano



$$U = \frac{F_{BC}^2 (BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2 (BD)}{2AE}$$

onde $F_{BC} = 0{,}6P$

$F_{BD} = -0{,}8P$

$$\Rightarrow U = 0{,}364 \frac{P^2 L}{EA}$$

mas P é a única força que realiza trabalho

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} P \cdot y_B$$

$$\Rightarrow y_B = 0{,}728 \frac{PL}{EA}$$

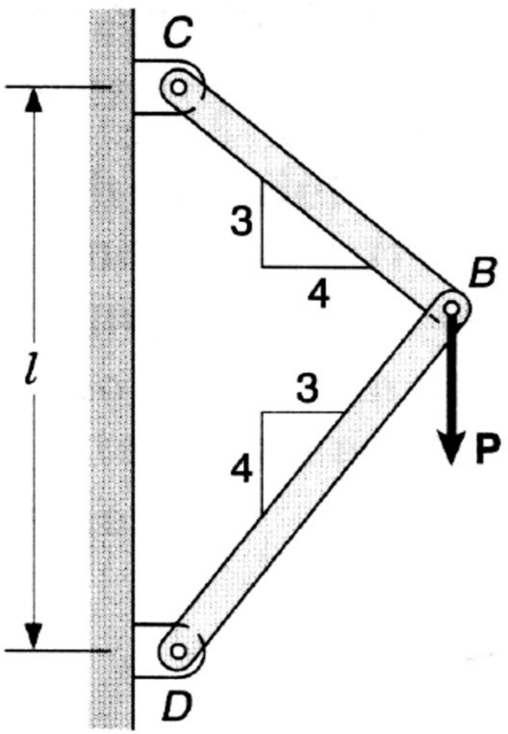
Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 1047

Trabalho de Deformação
Teoremas de Castigliano

2º Teo Castigliano:

$$\Rightarrow U = 0{,}364\frac{P^2L}{EA}$$

$$\boxed{\Rightarrow y_B = \frac{\partial U}{\partial P}}$$



$$= \frac{F_{BC}(BC)}{AE}\underbrace{\frac{\partial F_{BC}}{\partial P}}_{0{,}6} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE}\underbrace{\frac{\partial F_{BD}}{\partial P}}_{-0{,}8}$$

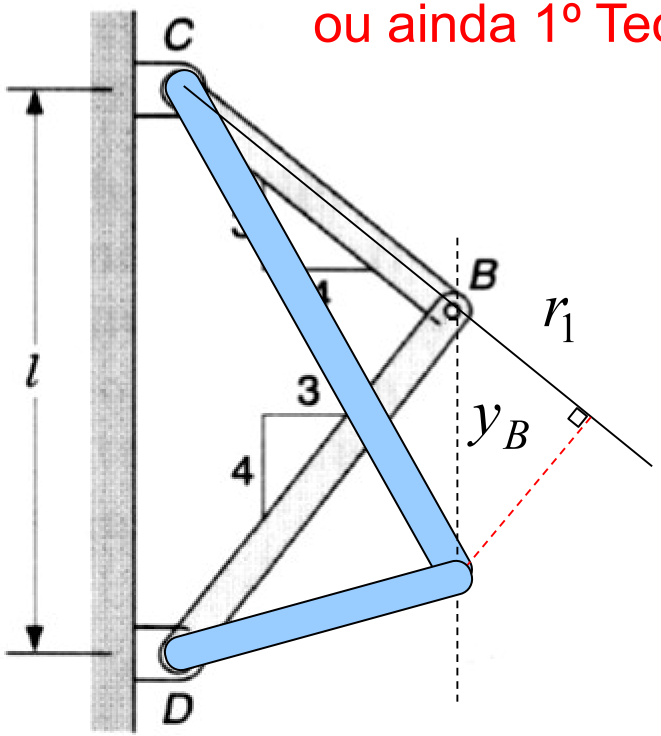
pois $F_{BC} = 0{,}6P$ e $F_{BD} = -0{,}8P$

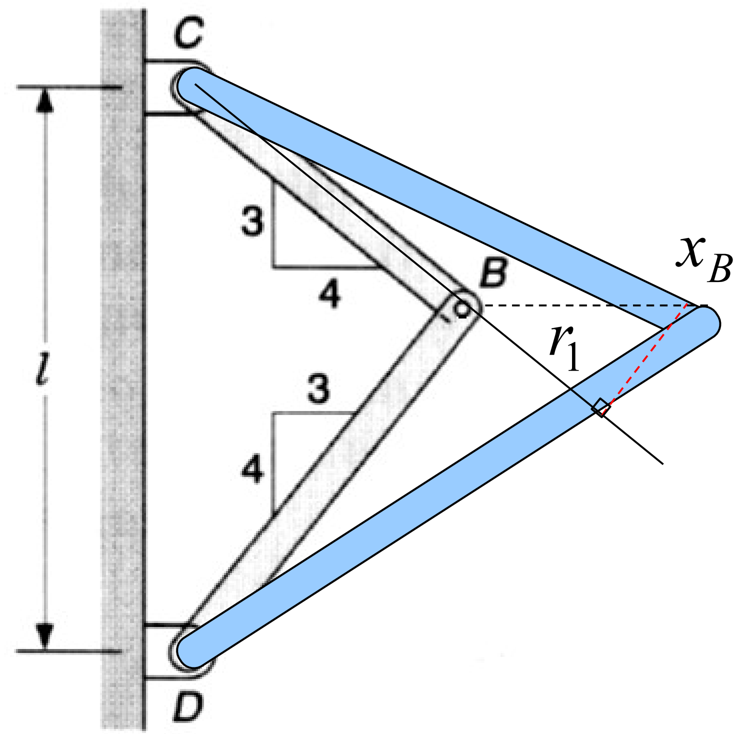
$$\Rightarrow y_B = 0{,}728\frac{PL}{EA}$$

Ref: Beer e Johnston, Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Pág. 1047

Trabalho de Deformação
Teoremas de Castigliano

ou ainda 1º Teo Castigliano:





$$r_1 = y_B \cos\left(B\hat{C}D\right) + x_B \cos\left(B\hat{D}C\right) = \frac{3}{5} y_B + \frac{4}{5} x_B \Rightarrow r_2 = -\frac{4}{5} y_B + \frac{3}{5} x_B$$

1º Teo Castigliano (cont.):

$$U = \frac{1}{2}k_1 \cdot r_1^2 + \frac{1}{2}k_2 \cdot r_2^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{EA}{2(BC)}r_1^2 + \frac{EA}{2(BD)}r_2^2 = \frac{EA}{1{,}2L}r_1^2 + \frac{EA}{1{,}6L}r_2^2$$

$$= \frac{EA}{L}\left[\frac{1}{1{,}2}\left(\frac{3}{5}y_B + \frac{4}{5}x_B\right)^2 + \frac{1}{1{,}6}\left(-\frac{4}{5}y_B + \frac{3}{5}x_B\right)^2\right]$$

$$= \frac{EA}{L}\left[0{,}700{y_B}^2 + 0{,}200 y_B x_B + 0{,}758{x_B}^2\right]$$

Trabalho de Deformação
Teoremas de Castigliano

1º Teo Castigliano (cont.):

$$\left\{\begin{array}{l}\boxed{\begin{array}{l}\Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial y_B} = P \\[2ex] \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial x_B} = 0\end{array}} \begin{array}{l} = \dfrac{EA}{L}\left[1{,}4\, y_B + 0{,}2\, x_B\right] \\[2ex] = \dfrac{EA}{L}\left[0{,}2\, y_B + 1{,}517\, x_B\right]\end{array}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \Rightarrow x_B = -\dfrac{0{,}200}{1{,}517}\, y_B\end{array}\right\} \Rightarrow y_B = 0{,}728\,\frac{PL}{EA}$$