

Capítulo V

Prismas retos solicitados por forças que interceptam perpendicularmente seu eixo ou por conjugados cujos planos sejam perpendiculares à sua seção reta.

Vigas

5.0 – O PROBLEMA A RESOLVER

No presente capítulo trataremos do caso em que um prisma reto tenha por carregamento forças perpendiculares a seu eixo e/ou conjugados cujos planos sejam perpendiculares à sua seção reta.

Suporemos, no caso de forças, que suas linhas de ação interceptam o eixo do prisma; quando isso não acontecer num caso real, é possível substituir o sistema dado por outro nas circunstâncias acima, acrescido dos conjugados de torção provenientes dos deslocamentos laterais das forças que, não interceptando o eixo do prisma, passem a ser tomadas nessas condições. Os efeitos dos conjugados de torção serão objeto de estudo do Capítulo VI, a seguir; eles terão de ser acrescidos aos estudados neste capítulo.

Embora todas as forças atuantes sobre o prisma sejam perpendiculares a seu eixo e o interceptem, poderão elas estar ou não contidas em um único plano. Quando não estiverem todas contidas em um só plano, será possível decompô-las em componentes situadas, agora todas, em dois planos pré-escolhidos – em geral ortogonais entre si. Estudados que sejam os efeitos de cada grupo de componentes contidas em um plano, não haverá mais que adicionar os seus efeitos da maneira que se fizer mister, em cada caso. Identicamente proceder-se-á no caso de conjugados-carga não situados em um mesmo plano.

Vê-se, assim, que o problema fundamental a resolver neste capítulo é o do estudo dos efeitos de um conjunto de forças e conjugados contidos em um mesmo plano que também contém o eixo do prisma ao qual as forças são perpendiculares.

O plano das cargas é o chamado **plano solicitante**, e sua interseção com o plano de qualquer seção reta do prisma é, nessa seção, o **eixo solicitante**.

Assim solicitado, o prisma estará sujeito a **forças cortantes** e a **momentos fletores** cujos diagramas serão, em nosso estudo, supostos conhecidos*.

Como perfeitamente esclarecidas suporemos, também, as relações abaixo, existentes entre os momentos fletores M , as forças cortantes Q e as intensidades de carga q .

Essas relações são:

$$\begin{array}{l}
 Q = \frac{dM}{dx} \quad (a) \\
 q = -\frac{dQ}{dx} \quad (b) \\
 q = -\frac{d^2M}{dx^2} \quad (c)
 \end{array}$$

500-I

Diz-se que em uma seção de um prisma ocorre uma **flexão simples** quando **momento fletor** e **força cortante** são as únicas solicitações nessa seção; se a força cortante for nula, havendo **unicamente momento fletor**, estaremos em face de uma **flexão pura**.

Ver-se-á, mais tarde, que uma **força normal** pode vir a se juntar aos casos acima mencionados, dando lugar ao que se denomina de **flexão composta** com ou sem força cortante; ela, entretanto, não é objeto deste capítulo.

* O seu traçado é objeto da Estática e, em alguns casos, da Hiperestática.

No que se vai seguir, trataremos, em primeiro lugar, dos efeitos do momento fletor supondo, como é usual em Resistência dos Materiais, que estes não sejam afetados pelos da força cortante.

As experiências mostram que esta suposição conduz a resultados perfeitamente aceitáveis, salvo para as seções muito vizinhas dos pontos de aplicação de cargas concentradas.

Posteriormente, serão estudados os efeitos da força cortante. Combinaremos, a seguir, os efeitos dessas solicitações estudadas isoladamente.

Os prismas sujeitos primordialmente à ação de momentos fletores e forças cortantes são, na maioria dos casos, denominados de **vigas**, e constituem partes fundamentais do arcabouço de quase todas as estruturas, máquinas e engenhos. Seu estudo sistemático é, pois, da mais alta importância.

5.1 – EFEITOS DO MOMENTO FLETOR

5.1.0 – Considerações preliminares

Inicialmente, será suposto que todas as cargas atuantes de um lado de uma seção reta da peça se reduzam a um único conjugado, contido em um plano perpendicular ao da seção reta em apreço, passando pelo seu centro de gravidade.

Este conjugado é o **conjugado fletente** cujo momento é o **momento fletor**, e é representado por um vetor \vec{M} , contido no plano da seção reta do prisma, tendo seu suporte perpendicular ao **eixo solicitante**.

A flexão pode ser:

- **Reta** quando o vetor \vec{M} tiver seu suporte em coincidência com um dos eixos principais de inércia da seção, estando, conseqüentemente, o eixo solicitante em coincidência com o outro, tudo relativamente ao centro de gravidade da seção;

- **Oblíqua** ou **desviada** nos demais casos.

Na Fig.510-1, sendo P o eixo solicitante e supondo que Y e Z sejam os eixos principais de inércia relativas ao centro de gravidade da seção, teremos um caso de flexão oblíqua.

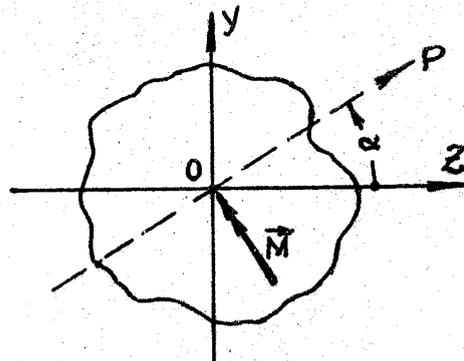


Figura 510-1

Suporemos em nosso estudo que os eixos Y e Z sejam tais que os momentos de inércia da seção correspondentes guardem a relação:

$$J_z \geq J_y$$

510-I

devendo-se notar que ambos são **momentos de inércia principais**, tudo como já ficou convencionalizado em 3.1.2*.

Quanto ao **sinal do momento fletor** será útil manter a **convenção usual** que estatui ser ele **positivo quando comprimir as fibras superiores da seção, distendendo as inferiores**; será **negativo** no caso contrário.

* Conseqüentemente, teremos: $J_z = J_I$ (máximo)
 $J_y = J_{II}$ (mínimo)

Para tornar bem geral essa convenção, consideraremos como **superiores** as fibras situadas do lado das **semidireções positivas** dos diferentes eixos baricêntricos; as fibras do lado das **semidireções negativas** serão, então, **inferiores** por convenção.

Assim, na Fig.510-1, o vetor \vec{M} representa um **conjugado fletente positivo**.

Estabeleceremos, finalmente, que nas figuras representativas das seções os vetores \vec{M} e \vec{Q} indicarão, respectivamente, o momento fletor e a força cortante calculados com auxílio das cargas atuantes do lado da seção **aquém do plano da figura**.

5.1.1 – Tensões e deformações locais

O momento fletor, tal como o temos definido, tem como efeito fazer com que a seção sobre a qual atua, tenda a girar relativamente à sua vizinha de sorte que, estando primitivamente paralelas, deixam de assim permanecer para se inclinarem uma sobre a outra.

Para que isso se dê, necessário se torna que algumas fibras sejam distendidas ao passo que outras comprimidas, isto é, ao longo da seção desenvolver-se-ão tensões normais trativas e compressivas cuja lei de distribuição vamos procurar. Essas tensões multiplicadas pelos elementos de superfície da seção reta dão lugar a forças elásticas elementares cujos momentos, no seu conjunto, igualam o momento fletor.

Na pesquisa da lei de distribuição dessas tensões usaremos o Método Geral.

Seja, então, M o momento fletor atuando na seção AB de uma peça (Fig.511-1a) sendo P o eixo solicitante*. M será suposto positivo, isto é, tendendo a alongar as fibras situadas do lado negativo do eixo solicitante.

Na primeira fase do método utilizaremos uma hipótese lógica sobre as deformações. No caso, a hipótese clássica deve-se a Bernoulli**, ou seja a **hipótese da deformação plana, segundo a qual, em sua tendência de rotação relativa, uma seção reta do prisma se mantém plana após essa deformação.**

Embora essa hipótese não seja rigorosa é, contudo, suficientemente exata para que os resultados experimentais não se afastem muito dos obtidos pelos cálculos nela baseados.

Assim sendo, admitamos que seja A'B' a nova posição da seção, após a rotação $d\phi$ relativamente à seção DE que lhe é vizinha e dela distante de dx (Fig.511-1b).

Considerando a seção DE como fixa, A'B' cortará sua posição inicial AB segundo um eixo n , cuja posição ainda não conhecemos, mas fá-lo-emos, em pouco. Imediatamente notaremos que todas as fibras elementares correspondentes aos elementos de superfície situados sobre esse eixo não sofrem qualquer variação de comprimento o que acarreta, em consequência, a inexistência de tensões normais axiais para esses pontos. Por isso é o eixo n denominado **eixo neutro** na seção.

Se designarmos, então, por r a distância de um ponto qualquer da seção a esse eixo neutro (esteja ele onde estiver), **contada positivamente para cima***** poderemos escrever

$$\Delta dx = - r d\phi$$

que dividida por dx nos dará a deformação linear específica para uma fibra elementar qualquer, ou

$$\epsilon = - r \frac{d\phi}{dx} \quad (1)****$$

Esta expressão que encerra a primeira fase do nosso Método Geral.

* As semidireções positivas dos diferentes eixos são as assinaladas com as setas e as letras.

** James Bernoulli (1654-1705)

*** Ver em seguida a Fig.511-1c onde aparece, em posição definitivamente e certa, o novo par de eixos n - r com suas semidireções positivas referidas às dos eixos Y - Z .

**** Mais precisamente deveríamos notar ϵ_x e σ_x . No momento, como não poderá haver dúvida de que essas grandezas se referem à direção do eixo do prisma, prescindimos do índice indicativo da direção.

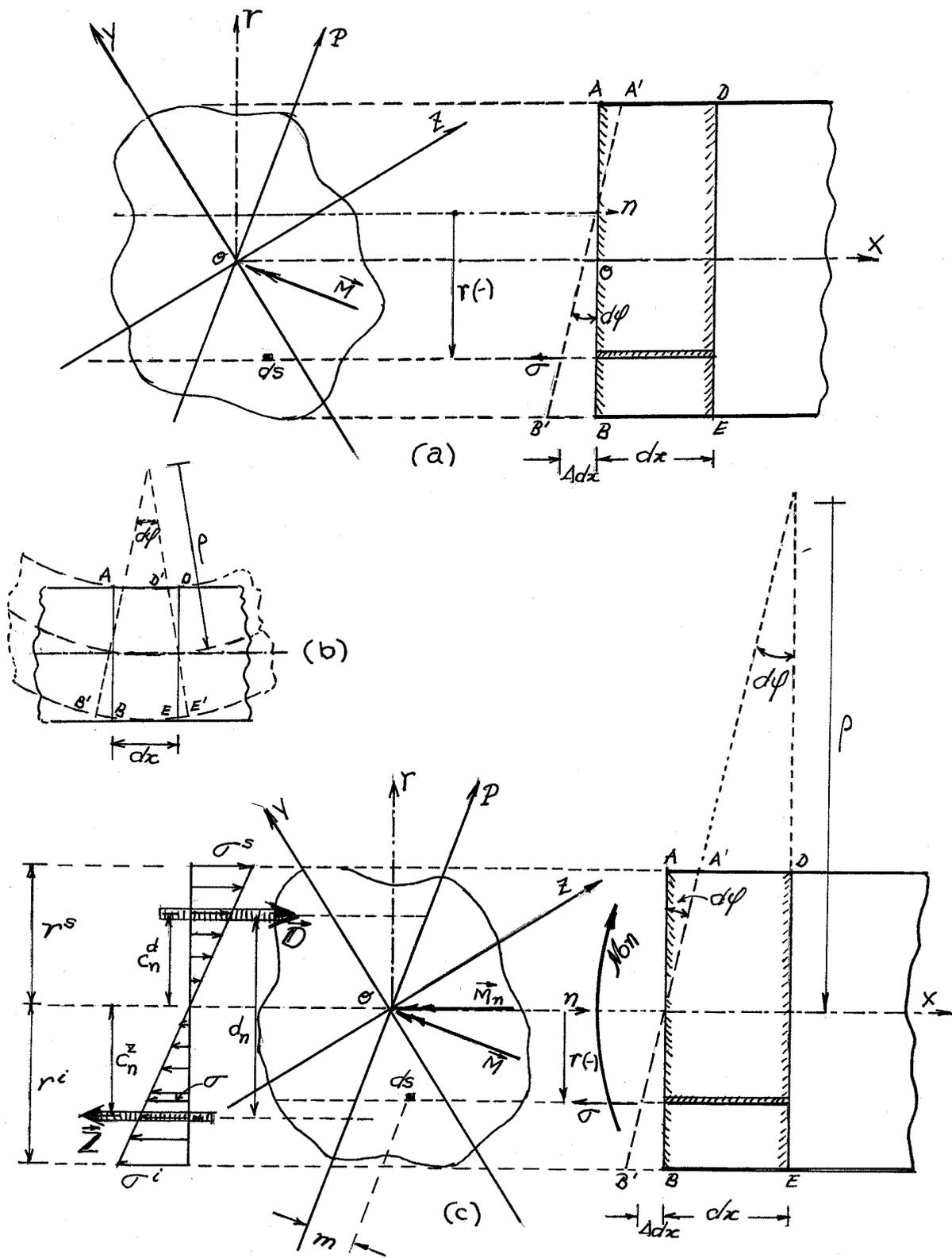


Fig.511-1

Na segunda fase do mesmo, supondo aplicável a lei de Hooke, virá

$$\sigma = - \left(E \frac{d\varphi}{dx} \right) r \quad (2)$$

Esta expressão nos mostra que, sendo constante o parênteses, as tensões normais variam linearmente com a ordenada r , isto é, **são proporcionais às distâncias dos pontos considerados ao eixo neutro**, o que constitui a chamada lei de Navier*. Ela será, pois, a mesma para pontos situados sobre qualquer paralela ao eixo neutro.

Passaremos, a seguir, ao terceiro estágio do Método Geral escrevendo as equações de equilíbrio que devem exprimir o fato de que as ações elementares exercidas sobre os diferentes elementos de superfície devem ser equivalentes a um conjugado de momento M situado em um plano passando pelo eixo OP.

Assim, uma primeira equação de forma $\sum X=0$ nos dará

$$\int_S \sigma ds = 0$$

Substituindo (2) e notando que o respectivo parênteses é constante e diferente de zero, chega-se a

$$\int_S r ds = 0 \quad (3)$$

indicando que o **eixo neutro é um eixo médio, isto é, passa pelo centro de gravidade da seção**. Devemos, portanto, alterar a nossa Figura 511-1a, passando a valer a Fig.511-1c.

Escrevamos agora uma equação exprimindo o fato de estar o momento fletor contido no plano passando pelo eixo OP.

$$\text{Virá:} \quad \int_S m \sigma dS = 0$$

Levando em conta (2) virá, ainda

$$\int_S m r dS = 0 \quad (4)$$

Esta expressão nos mostra que o **produto de inércia da área da seção em relação aos eixos n e P** , que passam pelo centro de gravidade, **é nulo**: eles são, pois, **conjugados relativamente à elipse central de inércia dessa mesma seção**.

A esta altura temos, portanto, bem determinada a **posição do eixo neutro n que só vai depender da forma da seção e da posição do eixo solicitante P** .

Mais adiante trataremos desse assunto com mais detalhes, principalmente para escolher uma semidireção positiva para esse eixo neutro.

Passaremos, agora, à última das equações da Estática, justamente a que vai ligar as tensões ao momento fletor.

* Como se depreende do desenvolvimento apresentado, a lei de Navier é uma conseqüência “à fortiori” da hipótese de Bernouilli aliada à lei de Hooke.

Notando que cada elemento de superfície dS , situado à distância r do eixo neutro \underline{n} , contribui com um conjugado elementar $r\sigma dS$ na totalização do conjugado fletente M projetado no plano perpendicular a \underline{n} virá:

$$M \text{ sen } \theta = \int_S -r\sigma dS^*$$

onde θ é a inclinação (menor que π) entre os eixos \mathbf{P} e \mathbf{n} .

Tendo em vista (2) virá:

$$M \text{ sen } \theta = E \frac{d\varphi}{dx} \int_S r^2 dS \tag{5}$$

E como $\int_S r^2 dS = J_n$ (6)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M \text{ sen } \theta}{EJ_n}$$

Notando que $M \text{ sen } \theta$ é o conjugado representado pelo vetor \vec{M}_n projeção do vetor \vec{M} sobre o eixo neutro e levando em conta as expressões (1) e (2), fica-se com o seguinte grupo que resolve o problema da flexão pura.

$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_n}{EJ_n} = \frac{1}{\rho} \tag{a}$	
$\epsilon = -\frac{M_n r}{EJ_n} = -\frac{r}{\rho} \tag{b}$	511-I
$\sigma = -\frac{M_n r}{J_n} = -E \frac{r}{\rho} \tag{c}$	
$M_n = M \text{ sen } \theta \tag{d}$	

Nas expressões anteriores, ρ é o raio da curvatura adquirida pelo eixo da peça no ponto em que se toma a seção em estudo. O plano dessa curvatura é perpendicular ao eixo neutro (Fig.511-1c).

A expressão 511-Ic confirma o que já se viu anteriormente quanto à lei de distribuição das tensões σ ao longo da seção, e que é linear. É o que se vê da Fig.511-1c. Estudo mais detalhado dessa distribuição será feito a seguir.

Por ora nos detenhamos no fato de que, ao longo da seção, haverá sempre tensões trativas e compressivas; as forças elásticas correspondentes admitirão, portanto, uma resultante trativa \vec{Z} e outra compressiva \vec{D} , iguais em valor absoluto, formando um conjugado igual ao conjugado fletente.

Poderemos escrever

$$Z = \int_o^{\bar{r}^z} \sigma dS \quad \text{e} \quad D = \int_o^{\bar{r}^d} \sigma dS \tag{7}$$

* Notar que no caso de um momento fletor positivo os elementos de superfície dS onde reina uma tensão σ positiva (trativa) são os em que r é negativo, e vice-versa.

onde \bar{r}^z e \bar{r}^d são as distâncias do eixo neutro aos pontos mais afastados, respectivamente dos lados tracionado e comprimido.

Tendo em vista 511-Ic virá:

$$Z = -\frac{M_n}{J_n} \int_0^{\bar{r}^z} r dS \quad \text{e} \quad D = -\frac{M_n}{J_n} \int_0^{\bar{r}^d} r dS \quad (8)$$

Nestas duas expressões as integrais exprimem os momentos estáticos das áreas tracionada e comprimida relativamente ao eixo neutro. Além disso, quando M_n é positivo o momento estático da área tracionada é negativo, e o da área comprimida positivo.

Então, denominando M_n ao **valor absoluto do momento estático de qualquer das duas partes da seção separadas pelo eixo neutro** em relação a esse mesmo eixo neutro virá:

$$\boxed{Z = -D = \frac{M_n}{J_n} |M_n|} \quad 511-II$$

As distâncias dos pontos de aplicação dessas forças ao eixo neutro serão dadas por

$$c_n^z = \frac{\left| \int_0^{\bar{r}^z} r \sigma dS \right|}{Z} \quad c_n^d = \frac{\left| \int_0^{\bar{r}^d} r \sigma dS \right|}{|D|}$$

onde as integrais e D devem ser tomadas em valores absolutos como indicado nas expressões.

Então, desenvolvendo virá:

$$\boxed{\begin{aligned} c_n^z &= \frac{J_n^z}{M_n} \\ c_n^d &= \frac{J_n^d}{M_n} \end{aligned}} \quad 511-III$$

Nestas expressões J_n^z e J_n^d são os momentos de inércia das áreas tracionada e comprimida em relação ao eixo neutro.

Entre os pontos de aplicação das forças Z e D , resultantes das ações e reações interiores, haverá, pois, um **braço de alavanca do conjugado das forças interiores**, d_n , cujo valor será

$$\boxed{d_n = c_n^z + c_n^d = \frac{J_n}{M_n}} \quad 511-IV$$

Ele será medido perpendicularmente ao eixo neutro On , como se vê na Fig.511-1c.

De tudo que se acaba de ver conclui-se que tanto a distribuição das tensões como a deformação do prisma elementar $ABDE^*$ na direção do eixo da peça estão dependendo da posição do eixo neutro On que deve, por isso, ser conhecida desde logo em direção, já que se sabe ser um eixo baricêntrico.

* É, conseqüentemente, a deformação geral da peça, cujo estudo será objeto de 5.1.2.

5.1.1.1 – Fixação do eixo neutro – convenções

Vimos mediante a relação (4) que o eixo neutro na flexão simples é **um eixo médio cuja direção é a conjugada, relativamente à elipse central de inércia da seção, da direção do eixo solicitante.**

Sendo assim, uma vez conhecido o eixo solicitante OP, inequivocamente ficará fixada a direção do eixo neutro On.

Para sistematizar o nosso estudo convencionaremos desde logo designar por

α : ângulo definindo a direção do eixo solicitante;

β : ângulo definindo a direção do eixo neutro.

Esses ângulos serão contados **positivamente no sentido trigonométrico (ou negativamente no sentido contrário)** e sempre a partir da semidireção positiva OZ (eixo para o qual o momento central de inércia da seção é máxima); eles definirão, também, por convenção as semidireções positivas dos eixos OP e On*.

A condição de conjugação de eixos permite escrever:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y}} \quad 511-V$$

Convencionaremos, ainda, considerar como positivas as semidireções OP e On que satisfaçam às seguintes desigualdades:

- para OP $0 \leq \alpha < \pi$ (positivo)

511-VI

- para On $-\frac{\pi}{2} \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ (positivo ou negativo)

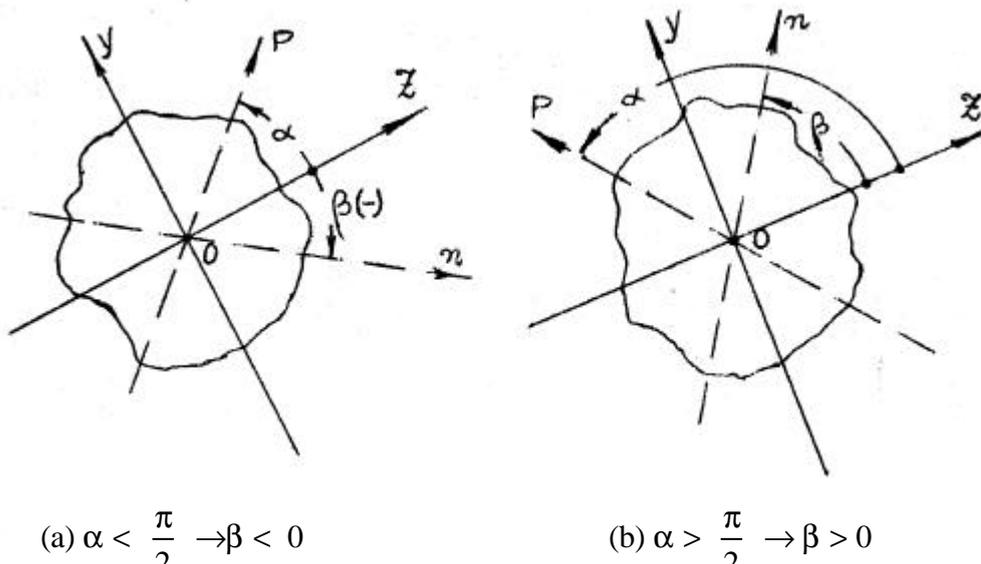


Fig.511-2

* Para materializar com simplicidade essas convenções, usamos, em nosso curso, colocar uma seta e a letra apenas do lado da semidireção tomada como positiva.

Nessas condições poderemos ter os casos constantes da Fig.511-2 (a e b), nas quais observamos que as semidireções positivas de P e n estão sempre em quadrantes contíguos.

Para conhecer a posição do eixo neutro proceder-se-á, seja analiticamente empregando a relação 511-V, seja graficamente utilizando qualquer dos métodos gráficos estudados em Mecânica Técnica. Em particular, são bem recomendáveis os círculos de Möhr e de Weyrauch para momentos e produtos de inércia.

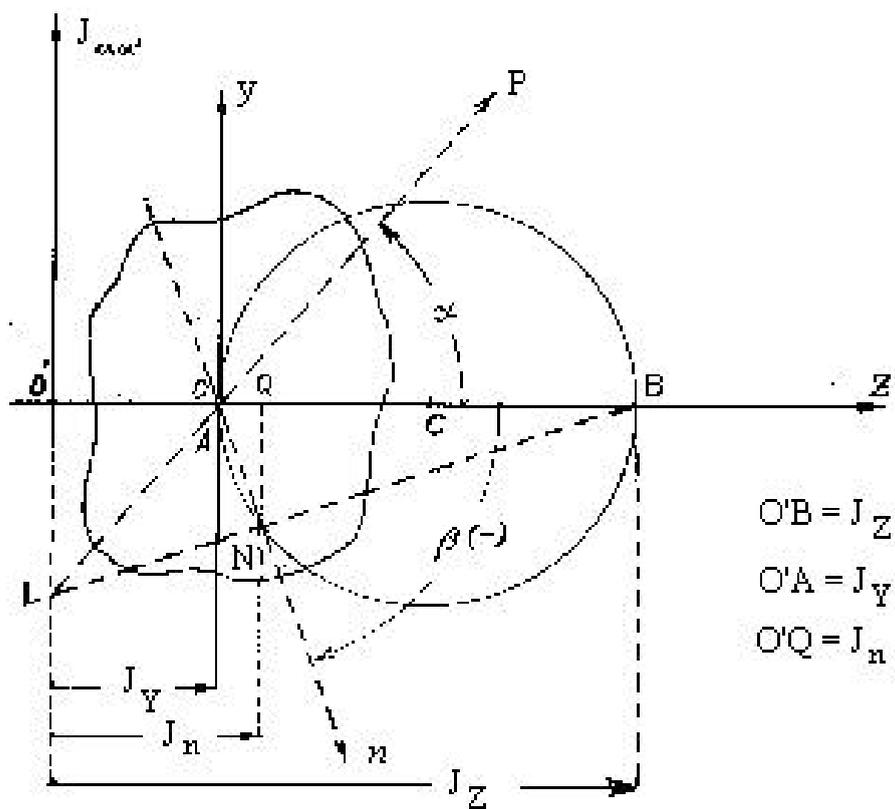
A Fig.511-3 nos mostra o emprego do círculo de Möhr. Observe-se que, ao obter a posição do eixo neutro por qualquer desses dois círculos, poder-se-á, imediatamente, ter o valor do momento de inércia J_n da seção em relação a esse eixo, e que será necessário ao emprego das fórmulas 511-1.

No caso em que não se deseje obter esse valor por via gráfica, poderá ser obtido analiticamente pela expressão

$$J_n = J_z \cos^2\beta + J_y \sin^2\beta$$

511-VII

Fixada que esteja a posição do eixo neutro, e conhecido o valor J_n como acabamos de ver, resta-nos saber medir r, com seus sinais, para poder utilizar todas as fórmulas 511-I.



Círculo de Möhr
Fig.511-3

Para isso orientaremos a semidireção positiva do eixo Ox , perpendicular a Oy , de modo que ela fique avançada de $\frac{\pi}{2}$ sobre a semidireção positiva Oy , como se vê nas Figuras.511-4 e 511-5.

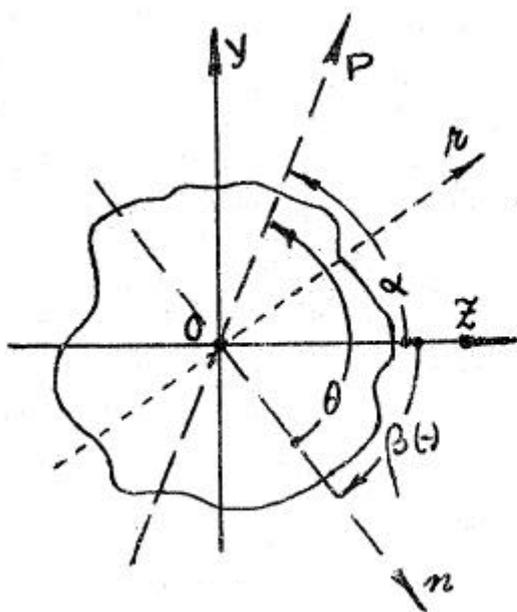


Fig.511-4

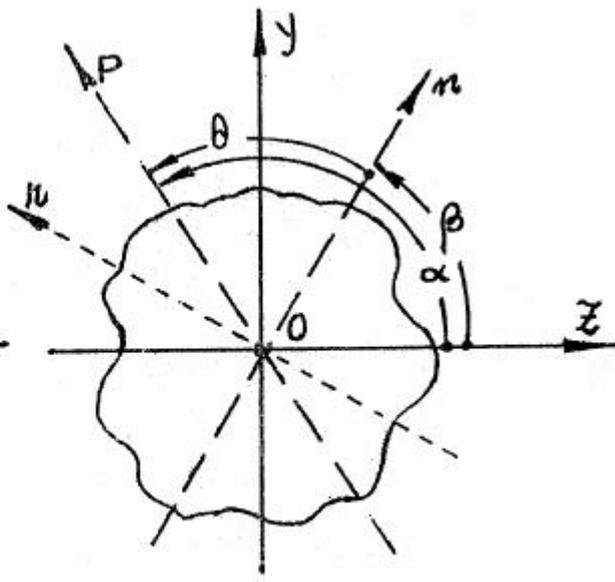


Fig.511-5

Observemos que o ângulo que entre si fazem as semidireções positivas dos eixos neutro e solicitante, contada a partir do eixo neutro, é

$$\theta = \alpha - \beta$$

511-VIII

onde β traz o sinal próprio.

Entraremos, agora, em mais detalhes sobre o emprego das expressões 511-I, considerando, separadamente, os casos de flexão reta e de flexão desviada.

5.1.1.2 – Flexão reta

O eixo solicitante é um dos eixos centrais principais de inércia da seção; o eixo neutro será, conseqüentemente, o outro eixo principal, e, assim, perpendicular àquele.

Este é o caso mais comum da flexão.

Se o eixo solicitante for o eixo OZ teremos, Fig.511-6.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{\pi}{2} (*) \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

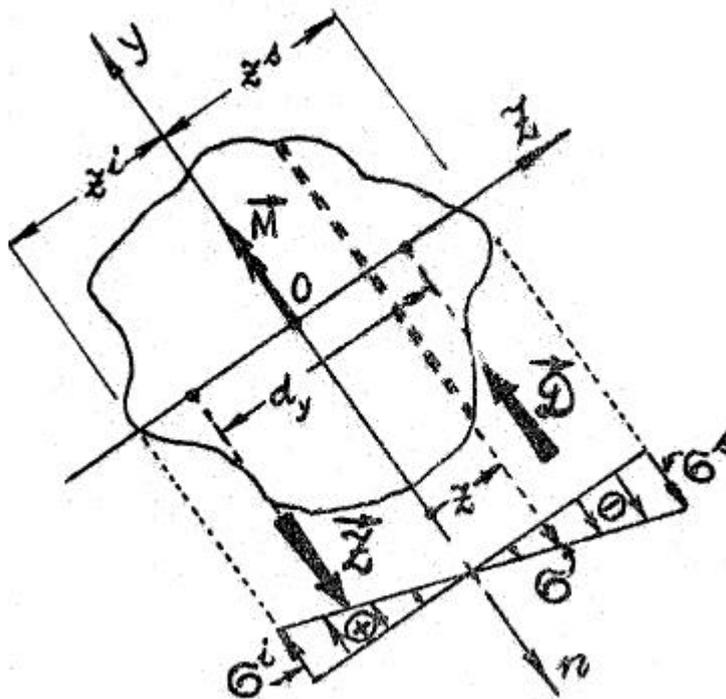


Fig.511-6

As expressões 511-I, 511-II e 511-IV se tornam

$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_y}$	(a)
$\epsilon = -\frac{z}{\rho} = -\frac{Mz}{EJ_y}$	(b)
$\sigma = -E \frac{z}{\rho} = -\frac{Mz}{J_y}$	(c)
$Z = -D = \frac{M_y}{J_y} M $	(d)
$d_y = \frac{J_y}{M_y}$	(e)
$M_y = M$	(f)

511-IX

A rotação relativa entre duas seções vizinhas conduz a peça a se encurvar no plano que contém o próprio eixo solicitante OZ.

* A semidireção positiva do eixo Ox é contrária à semidireção positiva do eixo Oy .

Se o eixo solicitante for OY, então, Fig.511-7:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \beta = 0 (^{\circ}) \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

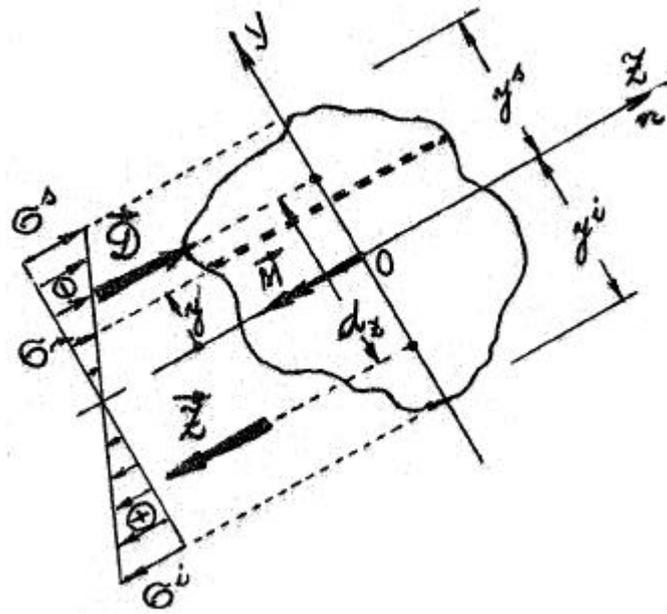


Fig.511-7

As expressões 511-I, 511-II e 511-IV se tornam então:

$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}$	(a)
$\epsilon = -\frac{y}{\rho} = -\frac{My}{EJ_z}$	(b)
$\sigma = -E\frac{y}{\rho} = -\frac{My}{J_z}$	(c)
$Z = -D = \frac{M_z}{J_z} M $	(d)
$d_z = \frac{J_z}{M_z}$	(e)
$M_z = M$	(f)

511-X

A rotação relativa entre duas seções vizinhas conduz a peça a se encurvar no plano que contém o eixo solicitante OY.

Como acabamos de ver, na flexão reta a peça ao se encurvar mantém o seu eixo no plano solicitante.

O vetor \vec{M} representativo do momento fletor tem como suporte o eixo neutro.

As ordenadas com as quais variam as tensões σ e as deformações específicas ϵ são as correspondentes ao eixo solicitante.

* A semidireção positiva do eixo On é a mesma do eixo OZ.

Tratando do diagrama de distribuição das tensões normais ao longo da seção, vemos que o mesmo pode ser conhecido se o forem as tensões extremas, isto é, aquelas correspondentes aos pontos mais afastados do eixo neutro, as quais, por sinal, sendo as maiores, decorrentes do momento fletor, são as que limitarão a possibilidade de emprego da seção para um dado material.

Designando-as genericamente por $\bar{\sigma}$, e supondo que o eixo solicitante seja OY virá

$$\bar{\sigma} = - \frac{M\bar{y}}{J_z}$$

onde \bar{y} , também genericamente, são as maiores ordenadas, positiva e negativa, na direção OY.

Se agora quisermos distinguir a tensão no bordo superior, σ^s , da tensão no bordo inferior, σ^i , basta desdobrarmos \bar{y} em y^s e y^i . Notando que y^i é eminentemente negativa e y^s positiva, para usarmos seus valores absolutos ficaremos, (Fig.511-7), com

$$\sigma^{s,i} = \mp \frac{My^{s,i}}{J_z} \quad 511\text{-XI}$$

Finalmente, fazendo

$$\begin{aligned} \frac{J_z}{y^s} &= W_z^s \\ \frac{J_z}{y^i} &= W_z^i \end{aligned} \quad 511\text{-XII}$$

fica-se com

$$\sigma^{s,i} = \mp \frac{M}{W_z^{s,i}} \quad 511\text{-XIII}$$

onde W_z^s e W_z^i , que conforme 511-XII só dependem da forma e dimensões da seção, são os chamados **módulos de resistência à flexão**, superior e inferior respectivamente*. Suas dimensões são as de uma grandeza linear elevada ao cubo ou $[L^3]$ devendo, portanto, serem expressas em cm^3 , dm^3 , etc.

Note-se que nos casos gerais os dois módulos, superior e inferior, podem não ser iguais em valor; quando, porém, o eixo neutro for um eixo de simetria da seção, essa igualdade verificar-se-á.

Neste último caso tendo-se

$$W_z^s = W_z^i = W_z$$

poderemos escrever 511-XIII como

$$\sigma^{s,i} = \mp \frac{M}{W_z} \quad 511\text{-XIII bis}$$

* Também são denominados de **módulos de seção**. Às vezes, de maneira muito imprópria são também chamados de momentos resistentes, o que, positivamente, não podem ser.

As tensões σ^s e σ^i , de sinais contrários, sendo, em valores absolutos, as maiores ocorrentes numa seção sujeita a flexão simples, definirão o maior momento fletor que pode vir a atuar na seção, decorrente das ações exteriores.

Com efeito, chamando de $\sigma_{T_{adm}}$ (positivo) à tensão admissível à tração no material, de $\sigma_{C_{adm}}$ (negativo) à tensão admissível à compressão, teremos para momentos fletores positivos:

$$M' = -W_z^s \sigma_{C_{adm}} \quad (a)$$

$$M'' = W_z^i \sigma_{T_{adm}} \quad (b)$$

O menor dos dois valores será o admissível, ou momento resistente positivo, que designaremos por $M_{adm}^{(+)}$.

Para momentos fletores negativos teremos

$$M' = -W_z^s \sigma_{T_{adm}} \quad (c)$$

$$M'' = W_z^i \sigma_{C_{adm}} \quad (d)$$

Da mesma forma, o menor valor absoluto entre os calculados acima será o momento resistente negativo que designaremos por $M_{adm}^{(-)}$.

Observe-se que, em um caso inteiramente geral, os **momentos resistentes**, positivo e negativo, em uma seção não serão iguais em valor absoluto, decorrendo essa diferença não só da desigual resistência do material à tração e à compressão, como, também, das características geométricas da própria seção manifestadas através os módulos de resistência à flexão, superior e inferior.

Nos casos de materiais igualmente resistentes à tração e à compressão compreende-se facilmente que os momentos resistentes, positivo e negativo, terão valores absolutos iguais, e serão limitados pela tensão normal ocorrente na fibra mais afastada do eixo neutro da seção.

Por outro lado, nos casos em que a seção reta da peça seja tal que o eixo neutro na flexão se constitua em eixo de simetria, os momentos resistentes, positivo e negativo, serão também iguais em valor absoluto, e corresponderão à menor das tensões normais admissíveis, tomadas em valor absoluto.

Neste caso, como

$$W_z^s = W_z^i = W_z$$

e designando por $|\sigma_{adm}|$ ao valor da tensão admissível de menor valor absoluto virá

$$M_{adm}^{(+)(-)} = \pm |\sigma_{adm}| W_z$$

511-XIV

De tudo o que se acaba de ver, considerando que sob a ação de um momento fletor as maiores tensões normais de tração e de compressão referentes aos diversos elementos de superfície da seção reta de uma peça são proporcionais às distâncias do eixo neutro às fibras mais afastadas dele, conclui-se que, quando se tratar com um material desigualmente resistente à tração e à compressão, se houver liberdade de escolher forma para a seção, ou se, para

uma certa forma, houver liberdade de orientá-la, **dever-se-á dar a disposição que conduza os pontos mais afastados do eixo médio a serem solicitados pela tensão à qual o material apresente maior resistência.**

Em nossa exposição anterior supusemos tratar-se de uma flexão reta em que o eixo solicitante estivesse em coincidência com o eixo OY; se, entretanto, estiver em coincidência com OZ, nas fórmulas 511-X, 511-XII, 511-XIII, 511-XIII bis e 511-XIV bastará permutar Z com Y.

De um modo geral as fórmulas 511-IX serão aplicáveis.

5.1.1.3 – Flexão oblíqua ou desviada

É, como já vimos, o caso em que o eixo solicitante não coincide com nenhum dos dois eixos centrais principais de inércia, constituindo-se, dessa forma, no caso mais geral da flexão para o qual, aliás, foi feito todo o nosso estudo inicial.

Assim, todas as considerações contidas em 5.1.1.1, bem como as fórmulas 511-I, 511-II, 511-III e 511-IV lhe são aplicáveis.

Poderemos, entretanto, fazer o estudo da flexão oblíqua decompondo-a em duas flexões retas superpostas, cada uma delas tendo como eixos solicitantes OZ e OY, respectivamente.

Quando se tratar somente de estudar as tensões σ ou as deformações ϵ em pontos da seção previamente determinados, este procedimento pode abreviar os cálculos como se verá, uma vez que prescinde do conhecimento da posição do eixo neutro cuja determinação toma sempre algum tempo.

Suponhamos, pois, (Fig.511-8) o vetor \vec{M} representativo do momento fletor correspondente ao eixo solicitante OP, decomposto nas direções dos eixos principais.

Fica-se com os vetores \vec{M}_z e \vec{M}_y representativos de duas flexões retas.

Os momentos fletores correspondentes serão:

$$M_z = M \sin \alpha$$

$$M_y = M \cos \alpha$$

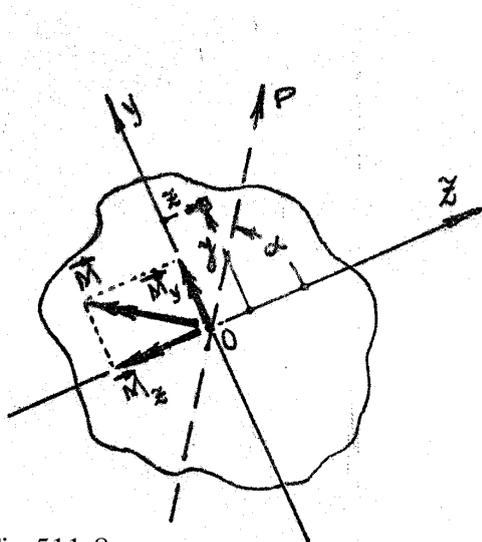


Fig.511-8

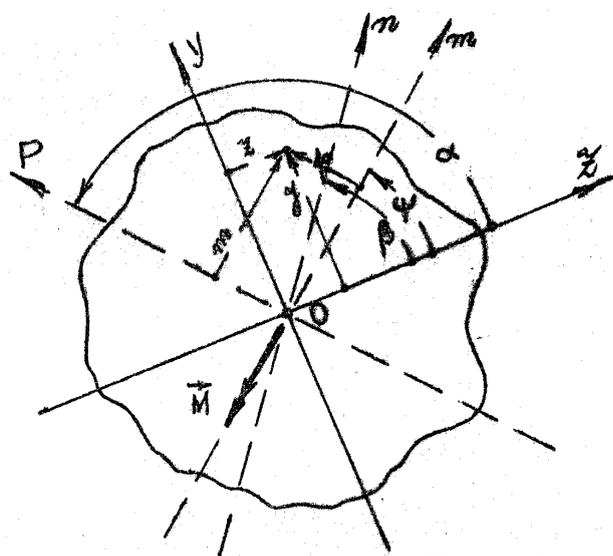


Fig.511-9

Então, em um ponto da seção cujas coordenadas relativamente os eixos ZOY sejam y e z teremos, por superposição dos efeitos:

$$\sigma = - \frac{My}{J_z} \text{sen } \alpha - \frac{Mz}{J_y} \text{cos } \alpha$$

ou ainda:

$$\sigma = - \frac{M}{J_z} \left[y \text{sen } \alpha + \left(\frac{J_z}{J_y} \right) z \text{cos } \alpha \right] \tag{511-XV}$$

expressão de fácil emprego quando todos os seus elementos forem conhecidos.

Para a deformação linear específica na direção do eixo da peça teremos:

$$\epsilon = - \frac{M}{E J_z} \left[y \text{sen } \alpha + \left(\frac{J_z}{J_y} \right) z \text{cos } \alpha \right] \tag{511-XVI}$$

O grupo 511-I bem como 511-II, 511-III, 511-IV, 511-XV e 511-XVI resolvem o problema de flexão desviada.

Pode-se, ainda, obter os valores de σ e de ϵ para um ponto qualquer da seção sem recorrer ao grupo 511-I ou à decomposição em duas flexões retas como nas expressões 511-XV e 511-XVI, obtendo-se esses valores diretamente em função do próprio momento fletor atuante, M , e dos elementos geométricos da seção referidos ao próprio eixo solicitante OP e seu perpendicular Om .

Para obter essas expressões partiremos de

$$\sigma = - M \left(\frac{y \text{sen } \alpha}{J_z} + \frac{z \text{cos } \alpha}{J_y} \right)$$

já achada anteriormente, e onde M pode ser notado como M_m .

Denominando ψ ao ângulo que o eixo Om , perpendicular a OP , faz com o eixo Z virá (Fig.511-9):

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2} + \psi \\ \text{sen } \alpha &= \text{cos } \psi \\ \text{cos } \alpha &= - \text{sen } \psi \end{aligned} \right\} \tag{a}$$

Também

$$\left. \begin{aligned} y &= m \text{sen } \psi + p \text{cos } \psi \\ z &= m \text{cos } \psi - p \text{sen } \psi \end{aligned} \right\} \tag{b}$$

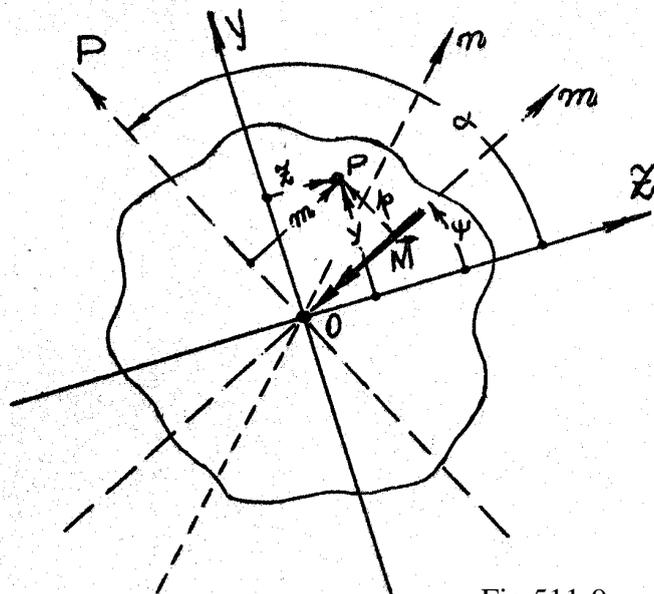


Fig.511-9

Levando (a) e (b) na expressão de σ , anterior virá:

$$\sigma = - \frac{M_m}{J_z J_y} \left[(J_y - J_z) m \sin \psi \cos \psi + J_z p \sin^2 \psi + J_y p \cos^2 \psi \right]$$

Notando que

$$\left. \begin{aligned} J_m &= J_z \cos^2 \psi + J_y \sin^2 \psi \\ J_p &= J_z \sin^2 \psi + J_y \cos^2 \psi \\ J_{mp} &= (J_z - J_y) \sin \psi \cos \psi \\ J_{mp}^2 &= J_m J_p - J_z J_y \quad (*) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

virá:

$$\sigma = - \frac{M_m}{J_m J_p - J_{mp}^2} (p J_p - m J_{mp})$$

511-XVII

que é a expressão procurada.

Então, para a deformação específica virá:

$$\epsilon = \frac{M_m}{E(J_m J_p - J_{mp}^2)} (p J_p - m J_{mp}) \quad 511-XVIII$$

Estas últimas expressões são especialmente úteis quando se tem uma peça de seção em perfil sob a ação de um momento fletor contido num plano paralelo à um dos elementos re- tangulares constitutivos da seção.

Vê-se, facilmente, que se os eixos p ou m , forem principais, como J_{mp} será nulo, re- cai-se nas expressões já achadas para a flexão reta.

* A última expressão do grupo (a) não é muito usual, razão por que vamos deduzi-la.

Tomemos

$$J_{mp} = (J_z - J_y) \sin \psi \cos \psi \quad \text{e elevemos ao quadrado.}$$

Virá:

$$J_{mp}^2 = (J_z^2 + J_y^2) \sin^2 \psi \cos^2 \psi - 2J_z J_y \sin^2 \psi \cos^2 \psi \dots\dots (d)$$

Também:

$$\begin{aligned} J_m &= J_z \cos^2 \psi + J_y \sin^2 \psi \\ J_p &= J_z \sin^2 \psi + J_y \cos^2 \psi \end{aligned} \quad \text{conduzindo, depois de efetuadas as operações, a}$$

$$J_m J_p = (J_z^2 + J_y^2) \sin^2 \psi \cos^2 \psi + J_z J_y (\sin^4 \psi + \cos^4 \psi)$$

Levando em conta (d) virá, depois de simplificado:

$$J_m J_p = J_{mp}^2 + J_z J_y (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi)^2 = J_{mp}^2 + J_z J_y$$

que conduz à expressão desejada

$$J_{mp}^2 = J_m J_p - J_z J_y$$

No que diz respeito às tensões normais vemos que as maiores na seção podem ser obtidas de 511-Ic, tendo-se

$$\bar{\sigma} = - \frac{M_n \bar{r}}{J_n}$$

onde \bar{r} designa as maiores ordenadas, positiva e negativa, na direção O_r perpendicular ao eixo neutro.

Fazendo, então, o desdobramento de \bar{r} em r^s , para o bordo superior, e r^i , para o inferior, e notando que r^i é eminentemente negativa virá:

$$\sigma^{s,i} = \mp \frac{M_n r^{s,i}}{J_n} \quad 511\text{-XIX}$$

onde r^s e r^i são valores absolutos (Fig.511-1).

Fazendo ainda:

$$\begin{aligned} \frac{J_n}{r^s} &= W_n^s \\ \frac{J_n}{r^i} &= W_n^i \end{aligned} \quad 511\text{-XX}$$

fica-se com

$$\sigma^{s,i} = \mp \frac{M_n}{W_n^{s,i}} \quad 511\text{-XXI}$$

onde $W_n^{s,i}$ são os **módulos de resistência à flexão** superior e inferior, **relativos ao eixo O_n** .

Partindo desta última expressão podemos, analogamente do que se faz no caso da flexão reta, determinar os **momentos fletores resistentes** da seção, **para um eixo solicitante OP**.

Para momentos positivos projetados perpendicularmente ao eixo neutro virá:

$$M_n' = - W_n^s \sigma_{C_{adm}} \quad (a)$$

$$M_n'' = W_n^i \sigma_{T_{adm}} \quad (b)$$

O menor dos valores (a) e (b) será o admissível ou **momento resistente positivo** $M_{n_{adm}}^{(+)}$.

Para o momento negativo, também projetado perpendicularmente do eixo neutro, teremos:

$$M_n' = - W_n^s \sigma_{T_{adm}} \quad (c)$$

$$M_n'' = W_n^i \sigma_{C_{adm}} \quad (d)$$

O menor em valor absoluto entre (c) e (d) será o **momento resistente negativo** $M_{n_{adm}}^{(-)}$.

Para se ter os **momentos fletores resistentes correspondentes ao eixo solicitante OP** bastará considerar a expressão 511-Id e então

$$\begin{aligned} M_{adm}^{(+)} &= \frac{M_{n_{adm}}^{(+)}}{\text{sen } \theta} \\ M_{adm}^{(-)} &= \frac{M_{n_{adm}}^{(-)}}{\text{sen } \theta} \end{aligned}$$

511-XXII

A determinação dos momentos resistentes que acabamos de fazer, também pode ser levada a cabo partindo das expressões 511-XV e 511-XVII, desde que possamos conhecer, independentemente da posição exata do eixo neutro, os pontos da seção mais solicitados à tração e à compressão, o que ocorre em grande número de casos da prática.

Nesses casos as coordenadas desses pontos são conhecidas, e, então, igualando σ aos valores admissíveis da maneira que se tornar conveniente, poderemos, das expressões em apreço, tirar os valores de M que serão os **momentos admissíveis**, ou **momentos resistentes**.

No que concerne às deformações convém frisar desde logo que **a rotação recíproca de suas seções vizinhas se processa em torno do eixo neutro**, que não é perpendicular ao solicitante. **A peça se irá encurvar, adquirindo o seu eixo uma curvatura cujo plano contém o eixo Or**. Nessas condições a deformação da peça é tal que **ela se desvia do plano solicitante**, o que justifica o nome de **flexão desviada**. O estudo dessa deformação geral da peça fletida, tanto no caso geral da flexão desviada como no particular da flexão reta, será objeto do item seguinte.

5.1.2 – Deformação do eixo da peça. A elástica

5.1.2.1 – Equação diferencial da elástica

Vimos anteriormente que, por efeito do momento fletor, quer a flexão seja reta ou desviada, cada seção reta do prisma gira, relativamente à sua vizinha e num plano perpendicular ao eixo neutro, de um ângulo $d\phi$ cuja expressão, no caso mais geral, é dada por 511-Ia.

Resulta disso que, **em qualquer caso, a peça tende a se encurvar no plano perpendicular ao eixo neutro**, e o eixo da peça, primitivamente reto, passa a ter uma forma curva que se denomina **linha de flexão, curva elástica**, ou, simplesmente **elástica**.

No presente parágrafo vamos procurar a equação dessa curva tendo em conta, apenas, a influência do momento fletor. Na realidade, como se verá adiante em 5.2.2, a força cortante influi também nessa deformação; sendo, entretanto, muito pequena essa influência nos casos gerais, costuma ser abandonada, de modo que os resultados obtidos neste parágrafo podem ser considerados como definitivos. Só em poucos casos, muito especiais, convirá corrigi-los tendo em vista a força cortante.

Designemos por η as ordenadas da elástica, contadas a partir do eixo primitivo da peça, XX, e tomadas **positivas para baixo** (Fig.512-1)*.

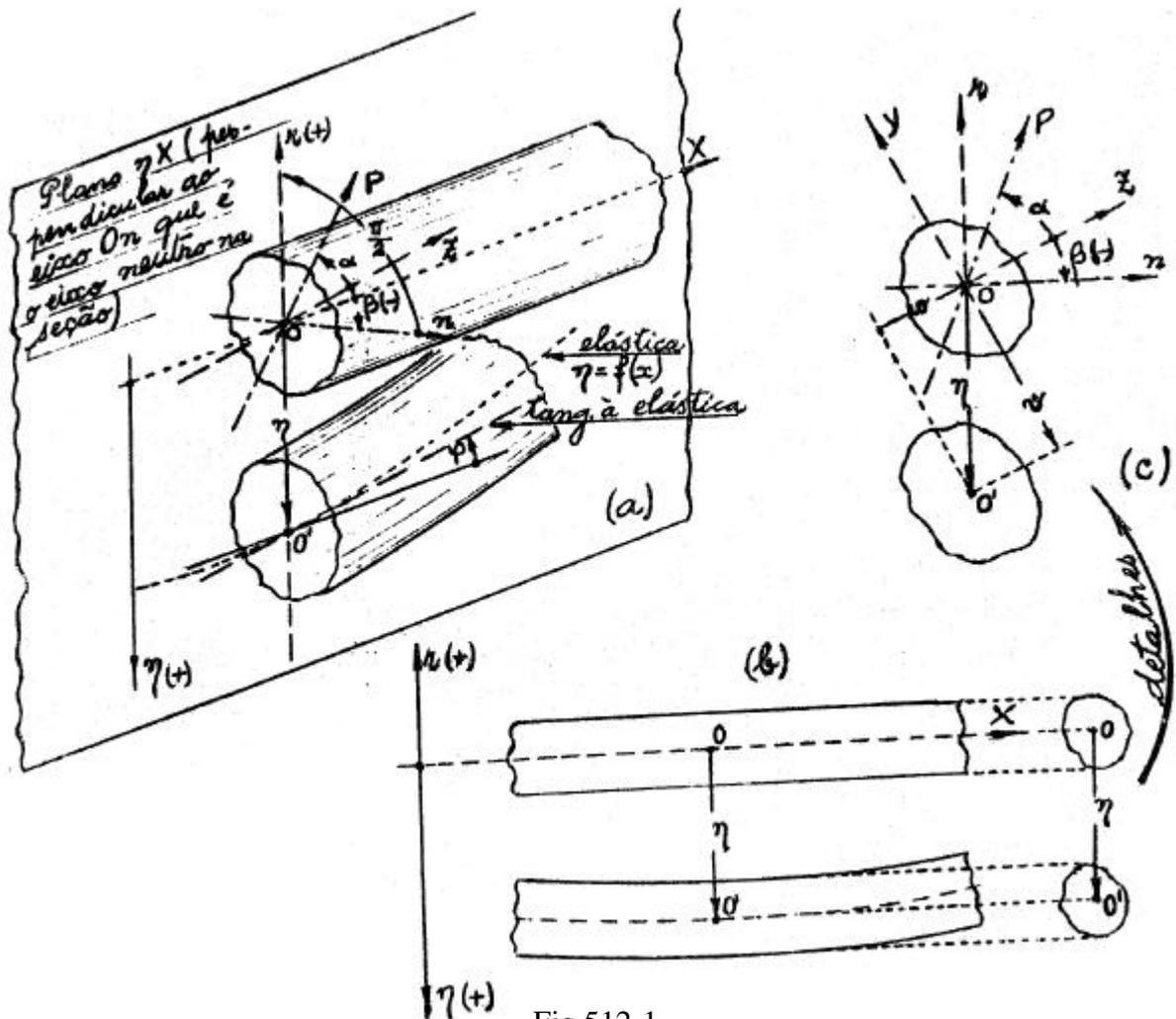


Fig.512-1

* Alguns autores contam η positivamente para cima.

Vê-se, então, que as ordenadas η (que definem os deslocamentos de pontos da elástica) serão contados positivamente em sentido contrário ao das ordenadas r (que definem, no plano da seção reta da peça, a posição de um ponto dessa seção) como se vê das Figuras 512-1(a,b,c).

Tomemos a expressão 511-Ia

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_n}{E J_n}$$

onde ρ é o raio da curvatura adquirida pelo eixo da peça na seção considerada, e que será expresso por

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2\eta}{dx^2}}$$

Notando que para as peças estruturais as deformações são muito pequenas de sorte que se pode desprezar $\left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2$ em presença da unidade, virá:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \pm \frac{M_n}{E J_n} \quad (a)$$

Nesta expressão resta-nos escolher o sinal conveniente, o que vai depender das condições adotadas.

Efetivamente, a Análise nos ensina que a segunda derivada de uma função, relativamente à variável livre, é positiva quando a curva apresentar sua concavidade voltada para as ordenadas positivas. No nosso caso deverá $d^2\eta/dx^2$ ser positivo quando a peça apresentar uma curvatura com a concavidade para baixo, o que corresponde à ação de um momento fletor negativo. Então o sinal conveniente em (a) é o sinal “menos”(-), com que a **equação diferencial da elástica** se torna, em definitivo:

$$\boxed{\frac{d^2\eta}{dx^2} = - \frac{M_n}{E J_n}} \quad 512-I$$

Esta equação integrada duas vezes, e determinadas as correspondentes constantes de integração, nos dará a **equação cartesiana da elástica da peça em estudo**. Basta, para isso, conhecer M_n e J_n em função de x e as características de apoio da peça, como se verá nos exercícios numéricos.

Não se processando as deformações η em nenhum dos planos principais, as suas componentes v e w segundo esses planos podem ser obtidas notando que (Fig.512-2):

$$\begin{aligned} v &= \eta \sin \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right) = \eta \cos \beta; & \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{d^2\eta}{dx^2} \cos \beta \\ w &= \eta \cos \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right) = -\eta \sin \beta; & \frac{dw}{dx^2} &= - \frac{d^2\eta}{dx^2} \sin \beta \end{aligned}$$

Então teríamos, para projeções da elástica nos planos principais:

$$\begin{cases} \frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M_n}{EJ_n} \cos \beta \\ \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_n}{EJ_n} \sen \beta \end{cases} \quad 512-II$$

Note-se que os sentidos positivos dos deslocamentos v e w são os das semidireções negativas OY e OZ, respectivamente.

No caso em que se trate de uma flexão reta uma das componentes acima desaparecerá, e a outra representará a própria elástica procurada.

Assim, se o eixo solicitante for OY, então OZ será o eixo neutro, teremos:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}; \quad \beta = 0; \quad \sen \beta = 0; \quad \cos \beta = 1,0$$

e a elástica terá como equação diferencial

$$\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M}{EJ_z} \quad 512-III$$

Se o eixo solicitante for OZ, OY será o eixo neutro,então:

$$\alpha = 0; \quad \beta = - \frac{\pi}{2}; \quad \sen \beta = - 1,0; \quad \cos \beta = 0$$

e a elástica terá para equação diferencial:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = - \frac{M}{EJ_y} \quad 512-IV$$

5.1.2.2 – Integração da equação diferencial. Exemplos

Como exemplificação trataremos apenas dos casos simples mais usuais. Outros que possam surgir poderão ser tratados nas mesmas condições. Suporemos o eixo solicitante em coincidência com o eixo OY na seção reta da peça, e a peça com rigidez constante à flexão o que corresponde, em geral, ao caso da seção reta constante.

1º Exemplo: Viga simplesmente apoiada com carga uniformemente repartida (Fig.512-2)

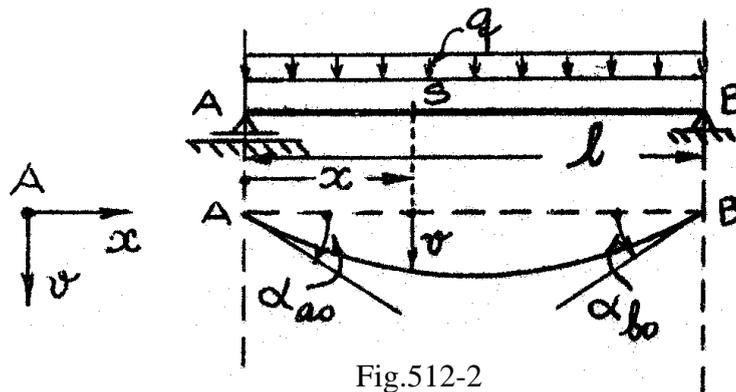


Fig.512-2

O momento fletor em uma seção S de abcissa x é

$$M = \frac{\mathbf{q}\ell x}{2} - \frac{\mathbf{q}x^2}{2}$$

A expressão 512-III dará então:

$$EJ_z \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\mathbf{q}\ell x}{2} + \frac{\mathbf{q}x^2}{2}$$

Esta expressão submetida a duas integrações sucessivas dá:

$$\left\{ \begin{array}{l} EJ_z \frac{dv}{dx} = -\frac{\mathbf{q}\ell x^2}{4} + \frac{\mathbf{q}x^3}{6} + C_1 \quad (a) \\ EJ_z v = -\frac{\mathbf{q}\ell x^3}{12} + \frac{\mathbf{q}x^4}{24} + C_1 x + C_2 \quad (b) \end{array} \right.$$

onde as constantes C_1 e C_2 deverão ser determinadas de modo a satisfazer as condições de contorno particulares do sistema estático em foco.

Assim, vemos que para $x = 0$ e para $x = \ell$ devemos ter $v = 0$, conduzem a

$$C_2 = 0 \quad \text{e} \quad C_1 = \frac{\mathbf{q}\ell^3}{24}$$

Estes valores levados a (a) e (b) conduzem, finalmente, a

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi = \frac{dv}{dx} = \frac{\mathbf{q}\ell^3}{24EJ_z} \left[1 - 6\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \right] \quad (c) \\ v = \frac{\mathbf{q}\ell^4}{24EJ_z} \left[\left(\frac{x}{\ell}\right) - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 \right] \quad (d) \end{array}} \quad 512-V$$

A expressão (c) nos dá a **lei de variação das inclinações das tangentes à elástica**, e a expressão (d) a **linha elástica**.

A primeira nos dá, quando $x = 0$ e $x = \ell$, as rotações das extremidades da viga sobre os apoios.

$$\boxed{\alpha_{ao} = -\alpha_{bo} = \frac{\mathbf{q}\ell^3}{24EJ_z}} \quad 512-VI$$

Estes ângulos devem ser contados positivamente no sentido que vai de x para v (no caso, o sentido do movimento dos ponteiros de um relógio). Para avaliar, pois, α_{bo} no sentido assinalado na fig.512-2 deve trocar o sinal achado anteriormente.

A expressão (d) nos dá o máximo de abaixamento da elástica para $x = \frac{\ell}{2}$ ou seja

$$\boxed{v_{\max} = \frac{5}{384} \frac{\mathbf{q}\ell^4}{EJ_z}} \quad 512-VII$$

* Como a elástica é uma curva extremamente chata os coeficientes angulares dv/dx podem ser tornados iguais aos próprios ângulos de inclinação das tangentes à elástica, medidos em radianos, os quais, doravante designaremos por φ .

2º Exemplo: Viga simplesmente apoiada com carga concentrada (Fig.512-3)

Para este caso devemos considerar duas expressões para o momento fletor, conforme consideremos a seção S, abcissa x, situada à esquerda ou à direita da carga P.

Teremos:

$$M]_o^a = \frac{b}{l} Px \quad \text{para S à esquerda de P; } (x \leq a)$$

$$M]_o^b = \frac{a}{l} Px' \quad \text{para S à direita de P; } (x' \leq b)$$

Consequentemente 512-III dará

$$EJ_z \frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{Pb}{l} x \quad \text{para } x \leq a$$

$$EJ_z \frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{Pa}{l} x' \quad \text{para } x' \leq b$$

Integrando uma e outra vez se tem

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \varphi &= - \frac{Pb}{2l} x^2 + C_1 & (a) \\ EJ_z v &= - \frac{Pb}{6l} x^3 + C_1 x + C_2 & (b) \end{aligned} \right\} \text{ para } x \leq a$$

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \varphi &= - \frac{Pa}{2l} x'^2 + C'_1 (*) & (c) \\ EJ_z v &= - \frac{Pa}{6l} x'^3 + C'_1 x' + C'_2 & (d) \end{aligned} \right\} \text{ para } x' \leq b$$

Para determinar as constantes de integração notemos que $v = 0$ quando $x = 0$ e $x' = 0$ de modo que se tem

$$C_2 = 0 \quad \text{e} \quad C'_2 = 0$$

Também os dois ramos da elástica devendo ser concordantes no ponto correspondente à aplicação de P poderemos escrever

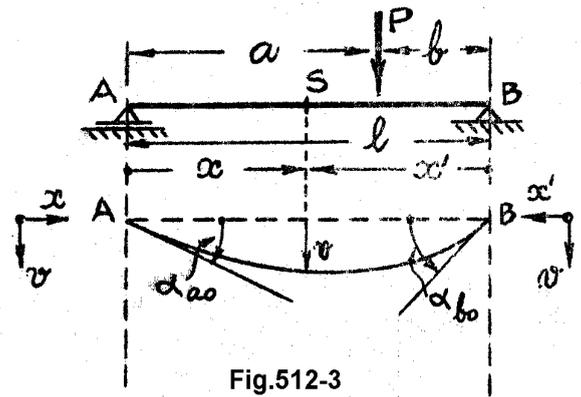


Fig.512-3

* Note-se que, quando a abcissa é tomada como x, o ângulo φ é contado positivamente no sentido do movimento dos ponteiros de relógio; quando se toma x' , entretanto, φ passa a ser contado positivamente no sentido trigonométrico.

$$\begin{cases} -\frac{Pb}{2\ell} a^2 + C_1 = \frac{Pa}{2\ell} b^2 - C'_1 \\ -\frac{Pb}{6\ell} a^3 + C_1 a = -\frac{Pa}{6\ell} b^3 + C'_1 b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações e procurando exprimir C_1 só em função de $\underline{\ell}$ e \underline{b} bem como C'_1 em função de $\underline{\ell}$ e \underline{a} chega-se a

$$C_1 = \frac{P\ell^2}{6} \left(\frac{b}{\ell}\right) \left[1 - \left(\frac{b}{\ell}\right)^2\right]$$

$$C'_1 = \frac{P\ell^2}{6} \left(\frac{a}{\ell}\right) \left[1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2\right]$$

Então (a) e (c) dão

$$\mathbf{j} = \frac{P\ell^2}{6EJ_z} \left\{ \left(\frac{b}{\ell}\right) \left[1 - \left(\frac{b}{\ell}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right] \right\} \quad \text{para } x \leq a$$

$$\mathbf{j} = \frac{P\ell^2}{6EJ_z} \left\{ \left(\frac{a}{\ell}\right) \left[1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 - 3\left(\frac{x'}{\ell}\right)^2\right] \right\} \quad \text{para } x' \leq b$$

512-VIII

Também (b) e (c) darão

$$v = \frac{P\ell^3}{6EJ_z} \left\{ \left(\frac{b}{\ell}\right) \left(\frac{x}{\ell}\right) \left[1 - \left(\frac{b}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right] \right\} \quad \text{para } x \leq a$$

$$v = \frac{P\ell^3}{6EJ_z} \left\{ \left(\frac{a}{\ell}\right) \left(\frac{x'}{\ell}\right) \left[1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x'}{\ell}\right)^2\right] \right\} \quad \text{para } x' \leq b$$

512-IX

As rotações sobre os apoios A e B serão obtidas das expressões 512-VIII, fazendo na primeira delas $x = 0$ e, na segunda, $x' = 0$.

Então:

$$\alpha_{ao} = \frac{P\ell^2}{6EJ_z} \left(\frac{b}{\ell}\right) \left[1 - \left(\frac{b}{\ell}\right)^2\right]$$

$$\alpha_{bo} = \frac{P\ell^2}{6EJ_z} \left(\frac{a}{\ell}\right) \left[1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2\right]$$

512-X

O abaixamento máximo da viga ocorre no ponto em que $\varphi = 0$. Se $a > b$, isso ocorrerá no trecho de comprimento a ; se $b > a$, o contrário se dará.

Igualando, portanto, a zero o colchete da expressão 512-VIII teremos

$$\frac{x}{\ell} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{b}{\ell}\right)^2}{3}} \quad \text{quando } a > b \quad (e)$$

ou então

$$\frac{x'}{\ell} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2}{3}} \quad \text{quando } b > a \quad (f)$$

Levando esses valores à expressão 512-IX chega-se a

$$\begin{aligned} (v_{\max})_{a>b} &= \frac{P\ell^3}{9\sqrt{3}EJ_z} \left(\frac{b}{\ell}\right) \sqrt{\left[1 - \left(\frac{b}{\ell}\right)^2\right]^3} \\ (v_{\max})_{b>a} &= \frac{P\ell^3}{9\sqrt{3}EJ_z} \left(\frac{a}{\ell}\right) \sqrt{\left[1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2\right]^3} \end{aligned} \quad 512\text{-XI}$$

A expressão 512-IX nos permite calcular o valor do abaixamento no meio do vão, fazendo

$$\frac{x}{\ell} = \frac{x'}{\ell} = \frac{1}{2}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} v_{\ell/2} &= \frac{P\ell^3}{48EJ_z} \left(\frac{b}{\ell}\right) \left[3 - 4\left(\frac{b}{\ell}\right)^2\right] \quad \text{para } a > b \\ v_{\ell/2} &= \frac{P\ell^3}{48EJ_z} \left(\frac{a}{\ell}\right) \left[3 - 4\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\right] \quad \text{para } b > a \end{aligned} \quad 512\text{-XII}$$

Note-se que a abcissa do ponto de abaixamento máximo, dado por (e) ou (f), pouco dista do meio do vão, porquanto na posição mais afastada do centro ter-se-á

$$\frac{x}{\ell} = 0,577 \quad \text{quando } a > b$$

ou então

$$\frac{x'}{\ell} = 0,577 \quad \text{quando } b > a$$

Nesse caso, o abaixamento máximo, dado por 512-XI, pouco vai diferir do abaixamento do meio do vão, dado por 512-XII, e que é de cálculo mais simples, pelo que, em geral

pode ser tomado pelo menos como uma aproximação do abaixamento máximo. A maior diferença é da ordem de 2,5% apenas.

No caso da carga P estar aplicada ao meio do vão, fazendo $\frac{a}{l} = \frac{b}{l} = \frac{1}{2}$, as expressões 512-X e 512-XI dão

$$\alpha_{ao} = \alpha_{bo} = \frac{P\ell^2}{16EJ_z}$$

$$v_{max} = \frac{P\ell^3}{48EJ_z}$$

512-XIII

3º Exemplo: Viga em consolo com carga uniformemente repartida (Fig.512-4)

Neste caso, o momento fletor na seção de abcissa x é

$$M = -\frac{qx^2}{2}$$

e então, 512-III dá

$$EJ_z \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{qx^2}{2}$$

que integrada sucessivamente dá:

$$EJ_z \frac{dv}{dx} = \frac{qx^3}{6} + C_1 \quad (a)$$

$$EJ_z v = \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2 \quad (b)$$

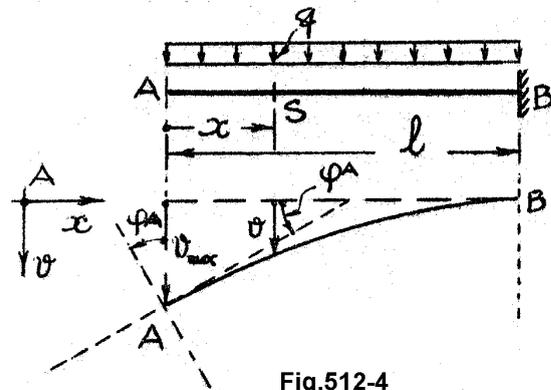


Fig.512-4

A determinação das constantes C_1 e C_2 far-se-á notando que, para $x = \ell$ deveremos ter $\frac{dv}{dx} = 0$ e $v = 0$, o que nos conduz a

$$C_1 = -\frac{q\ell^3}{6} \qquad C_2 = \frac{q\ell^4}{8}$$

Então (a) e (b) se tornam

$$\varphi = -\frac{q\ell^3}{6EJ_z} \left[1 - \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 \right]$$

$$v = \frac{q\ell^4}{24EJ_z} \left[3 - 4 \left(\frac{x}{\ell} \right) + \left(\frac{x}{\ell} \right)^4 \right]$$

512-XIV

Estas expressões nos mostram que a rotação da extremidade livre é de

$$\left| \varphi^A \right| = \frac{q\ell^3}{6EJ_z}$$

512-XV

Também o abaixamento máximo é

$$v_{\max} = \frac{q\ell^4}{8EJ_z}$$

512-XVI

4º Exemplo: Viga em consolo com carga concentrada na ponta (Fig.512-5)

Agora temos

$M = -Px$ e conseqüentemente

$$EJ_z \frac{d^2v}{dx^2} = Px$$

que, integrada sucessivamente dá

$$EJ_z \frac{dv}{dx} = \frac{Px^2}{2} + C_1 \quad (a)$$

$$EJ_z v = \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \quad (b)$$

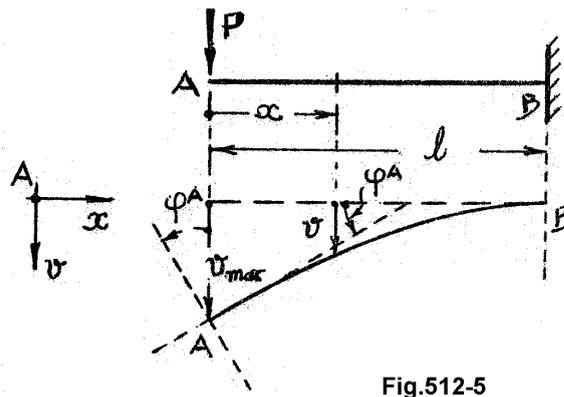


Fig.512-5

Notando que para $x = l$ devemos ter $\frac{dv}{dx} = 0$ e $v = 0$ virá:

$$C_1 = -\frac{Pl^2}{2} \quad C_2 = \frac{Pl^3}{3}$$

Então (a) e (b) darão

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{Pl^2}{2EJ_z} \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \\ v &= \frac{Pl^3}{6EJ_z} \left[2 - 3 \left(\frac{x}{l} \right) + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \end{aligned}$$

512-XVII

A rotação ϕ^A na extremidade A será, pois

$$|\phi^A| = \frac{Pl^2}{2EJ_z}$$

512-XVIII

O abaixamento máximo será

$$v_{\max} = \frac{P \ell^3}{3 E J_z}$$

512-XIX

5.1.2.3 – Construção gráfica da elástica

A expressão 512-I

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = - \frac{M_n}{E J_n}$$

comparada com a equação diferencial das curvas funiculares referentes a uma distribuição de cargas de taxa \mathbf{q}

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{H}} \quad (*)$$

nos mostra que a elástica de uma viga é a curva funicular que se obtém carregando-a com o diagrama dos momentos fletores M_n e tomando como distância polar a rigidez à flexão $E J_n$.

Este é, pois, um meio de se traçar a elástica, e que, como referência, chamaremos de método espontâneo.

Se a peça, entretanto, não for de seção constante será preciso fazer variar a distância polar $E J_n$ de acordo com a variação de J_n , o que, salvo casos muito restritos, não é prático.

Por essa razão apela-se para uma das variantes que exporemos a seguir.

Antes, porém, com o fito de simplificar a simbologia, vamos escrever a expressão 512-I simplesmente sob a forma

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = - \frac{M}{E J} \quad (a)$$

ficando subentendido que M é o momento fletor projetado no plano $X\eta$; perpendicular a esse plano é o eixo da seção em relação ao qual se toma J .

1ª variante:

Decorre de podermos escrever (a) sob a forma

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = - \frac{M / E J}{1} \quad (b)$$

A elástica será então a curva funicular que se obtém carregando a viga com o diagrama de momentos reduzidos, e tomando uma distância polar igual à unidade.

Por momento reduzido em uma seção se entende a relação M/EJ entre o momento fletor nessa seção e sua rigidez à flexão.

* y são as ordenadas da curva funicular; H é a distância polar utilizada no traçado da curva.

2ª variante:

Se considerarmos um momento de inércia de referência – J_0 – cujo valor ficará ao nosso arbítrio, poderemos escrever

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = - \frac{J_0}{J} \frac{M}{EJ_0}$$

Então, a elástica será a curva funicular correspondente a um carregamento $M J_0/J$ e com uma distância polar igual a rigidez de referência EJ_0 .

O diagrama $\frac{J_0}{J} M$, cujas ordenadas são ainda homogêneas a momentos fletores é denominado **diagrama de momento modificado**.

Em geral é costume se tomar para J_0 o momento de inércia da menor seção da peça com o que os valores de J_0/J são todos menores que a unidade.

Em qualquer caso, como vemos, recairemos em um problema de Mecânica Técnica, sem maiores dificuldades, qual seja o de traçar uma curva funicular correspondente a uma distribuição de cargas e com distância polar conhecida.

Uma primeira questão correlata, entretanto, deve ser solucionada. É que, para um dado sistema de forças é sempre possível, no caso geral, traçar ∞^3 funiculares distintos, isto é, há três graus de liberdade no traçado geral de um funicular.

No nosso caso, como a distância polar é fixada, fica eliminado desde logo um grau de liberdade, de modo que, ainda assim, será possível traçar ∞^2 funiculares.

Evidentemente só um deles (posteriormente substituído pela curva funicular) pode satisfazer às finalidades do traçado, porque a elástica de uma viga sujeita a determinado carregamento só pode ser uma.

Então será preciso impor mais duas restrições ao funicular procurado; essas restrições decorrem das condições de apoio da peça cuja elástica se busca.

Assim, se se trata de uma viga simplesmente apoiada, é claro que a elástica deve passar pelos apoios. O nosso funicular terá, então, distância polar conhecida, e terá seus lados extremos passando por dois pontos dados.

Em se tratando de uma viga em balanço, um dos lados extremos do funicular procurado deverá passar pelo centro do engastamento e ter a direção do eixo primitivo da peça (rotação nula do engastamento).

Um outro detalhe será agora ventilado. Trata-se da fixação do módulo a ser utilizado nas leituras das deformações obtidas graficamente.

Esta questão surge da necessidade, sempre imperiosa, de se ter, seja para ampliar a representação gráfica dos abaixamentos que são muito pequenos, seja para nos limitarmos às dimensões do papel em que se desenha, de proceder a uma redução no comprimento gráfico da distância polar.

Efetivamente, suponhamos que, no plano de situação, seja λ o módulo do desenho; representemos por μ o módulo adotado para representar os vetores no plano vetorial*.

* Denomina-se módulo de uma representação gráfica ao comprimento gráfico correspondente à unidade da grandeza representada.

Se, no plano vetorial, ao desenharmos a distância polar adotássemos o mesmo módulo μ (como seria espontâneo dada a homogeneidade da distância polar aos demais vetores desse plano), os abaixamentos, no plano de situação, deveriam ser lidos sob o módulo λ deste último plano.

Mas, desde que se é obrigado a adotar para representar a distância polar um novo módulo $\mu' \neq \mu$ (em geral $\mu' < \mu$) as ordenadas gráficas da curva funicular ficam ampliadas na relação $\frac{\mu}{\mu'}$.

Então o módulo adequado à leitura das ordenadas não será mais λ , e sim

$$\lambda' = \frac{\mu}{\mu'} \lambda$$

512-XX

Exemplo: Traçado gráfico da elástica de uma viga em balanço com 4 m de vão e submetida a um conjugado de 10 mkN na extremidade.
Supõe-se: $E = 2 \times 10^5$ MPa $J = 2 \times 10^3$ cm⁴

Adotando, Fig.512-6, os módulos seguintes:

- desenho da viga no plano de situação:

$$\lambda = 2 \text{ cm/m}$$

- desenho dos vetores \mathbf{S}_i no plano vetorial:

$$\mu = \frac{1}{5} \text{ (cm/m}^2 \text{ kN)}$$

- desenho da distância polar no plano vetorial:

$$\mu' = \frac{1}{10^3} \text{ (cm/m}^2 \text{ kN)}$$

os abaixamentos deverão ser lidos sob o módulo (512-XX):

$$\lambda' = \frac{110^3 \cdot 2}{5.1} = 4.10^2 \text{ (cm/cm)} = 4 \text{ (cm/cm)}$$

isto é, haverá uma ampliação de 4 vezes.

Para o traçado em apreço, o diagrama de momentos fletores, que é constante, foi dividido em quatro partes iguais dando, cada uma, uma área.

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_4 = 10 \text{ m}^2 \text{ kN.}$$

A rigidez a flexão é de

$$EJ = 2 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-5} = 4 \times 10^3 \text{ m}^2 \text{ kN.}$$

Esses valores permitiram traçar a Fig.512-6.

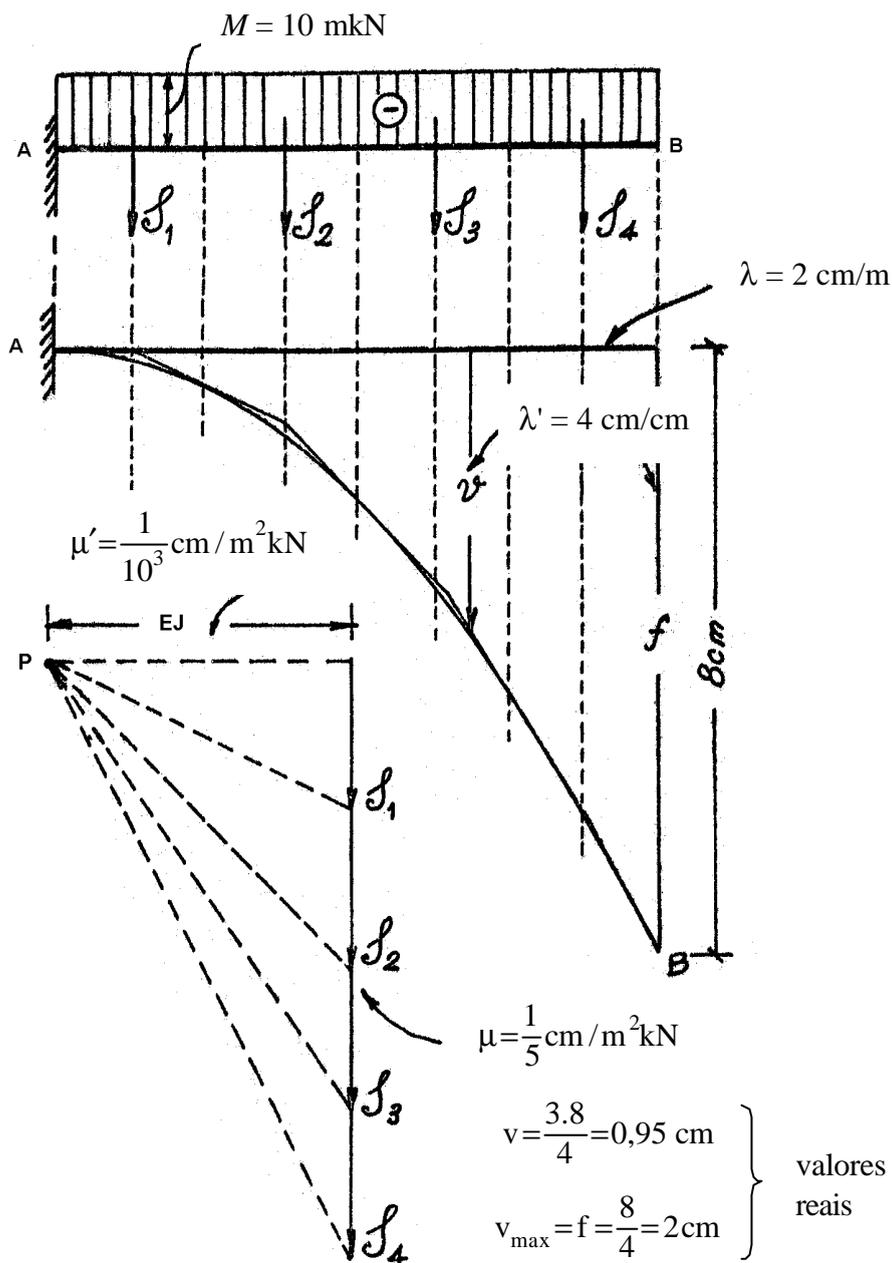


Fig.512-6

5.1.2.4 – Método de Möhr para estudo da elástica

Neste parágrafo vamos explicar um outro método capaz de nos permitir o cálculo dos diferentes elementos da elástica, o qual foi instituído por O.Möhr.

Esse método computa, apenas, a influência do momento fletor. Na realidade, como já se disse em 5.1.2.1 e se mostrará em 5.2.2, a influência adicional da força cortante é muito pequena no caso de peças hastiformes, às quais, portanto, se aplicará, com mais propriedade, o que se verá a seguir.

Para sistematizar o método que, acrescido de algumas convenções dá lugar ao chamado **método da viga conjugada** vamos instituir dois teoremas e três corolários, observando que a elástica das peças estruturais é uma curva muito achatada de modo que as tangentes

trigonométricas dos desvios angulares das tangentes à elástica podem ser tomadas pelos próprios desvios angulares.

Nos desenvolvimentos que se seguirão, para simplificar a simbologia, fica subentendido que M será o momento fletor projetado no plano perpendicular ao eixo neutro, e J o momento de inércia da seção em relação a esse eixo neutro.

1º Teorema:

Em uma haste fletida, a rotação da tangente à elástica em um ponto B, relativamente à tangente em um outro ponto A, é igual ao valor da grandeza representada por toda a área do diagrama de momentos reduzidos compreendida entre A e B.

Efetivamente, sejam A e B dois pontos distintos da elástica, afastados entre si de ℓ , conforme Fig.512-7.

Duas seções vizinhas, C e D, dentro desse trecho, por efeito da flexão se inclinarão reciprocamente de

$$d\varphi = \frac{M}{EJ} dx \tag{511-Ia}$$

que é também a inclinação recíproca das tangentes à elástica nesses pontos, e que será equivalente à área elementar dS do diagrama de momentos reduzidos compreendido entre C e D.

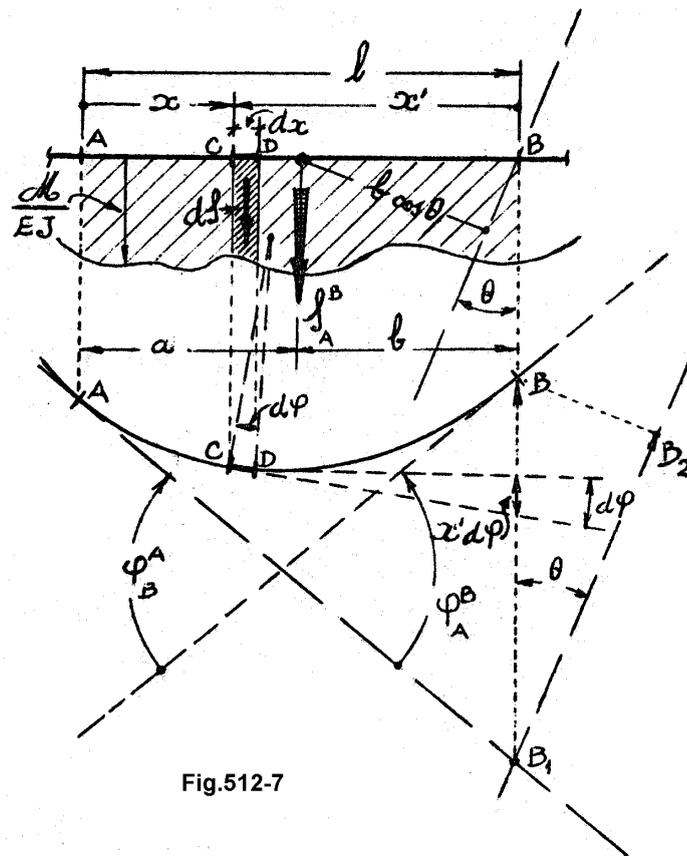


Fig.512-7

Considerando, então, todo o trecho ℓ ter-se-a:

$$\varphi_A^B = \int_A^B d\varphi = \int_A^B \frac{M}{EJ} dx = \int_A^B dS = S_A^B$$

como se queria demonstrar, e onde S_A^B passa pelo centro de gravidade da área do diagrama de momentos reduzidos entre A e B, e é representado voltado para o lado das fibras distendidas, ou seja, para o lado do próprio diagrama de momentos fletores.

Convenção

A rotação de uma tangente à elástica relativamente à outra tangente tomada como base é positiva quando a primeira, (aquela cuja rotação se procura) estando à esquerda da tangente base, girar no sentido do movimento dos ponteiros de relógio, ou quando, estando à direita, girar no sentido trigonométrico (Fig.512-8-b,a); será negativa nos casos contrários (Fig. 512-9-c,d).

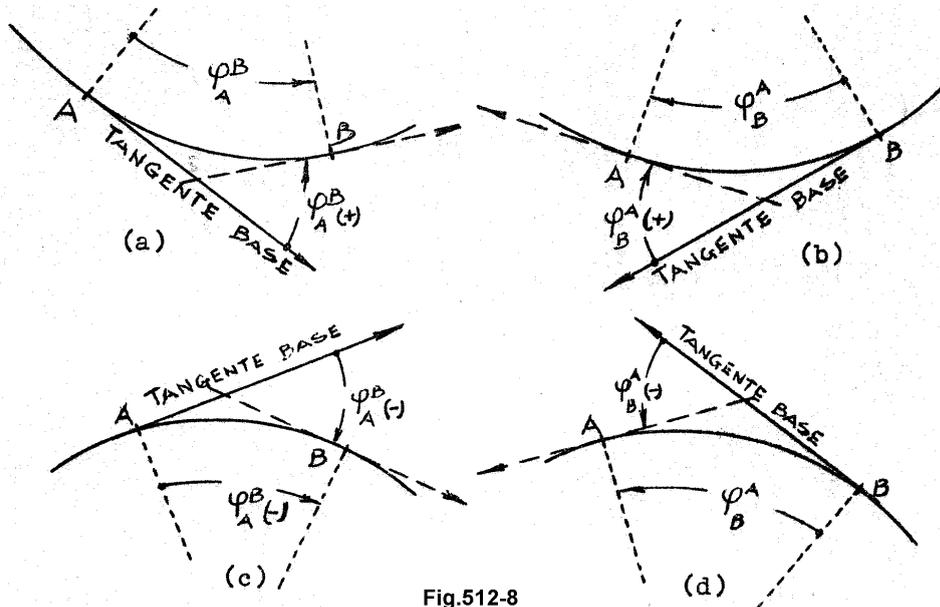


Fig.512-8

2º Teorema:

Em uma haste fletida, o deslocamento linear de um ponto B da elástica, a partir de sua posição primitiva sobre a tangente em um ponto A dessa mesma elástica, é igual ao valor do momento estático da grandeza representada pelo diagrama de momentos reduzidos compreendido entre os pontos A e B, relativamente a um eixo que, passando por B, tenha a direção em que se medir o deslocamento.

Para demonstrar esse teorema usaremos, ainda, a Fig.512-7, onde B_1B é o deslocamento linear em pauta.

Verifica-se que cada elemento CD, compreendido entre A e B, contribui na formação de B_1B com

$$x'd\phi = x' \frac{M}{EJ} dx$$

isto é, com o momento estático, em relação ao eixo contendo $\overline{B_1B}$, da área elementar do diagrama de momentos reduzidos correspondente ao elemento CD.

Então, considerando todo o trecho entre A e B virá:

$$\overline{B_1B} = \int_A^B x' \frac{M}{EJ} dx = \int_A^B x' dS = b S_A^B$$

512-XXII

onde b é a distância do centro de gravidade da área do diagrama de momentos reduzidos compreendida entre A e B até ponto B.

Note-se que, se tivéssemos desejado medir o deslocamento $\overline{B_1B}$ em uma direção Δ qualquer, isto é, se quiséssemos $\overline{B_1B_2}$, viria

$$\overline{B_1B_2} = \overline{B_1B} \cos \theta = b \cos \theta S_A^B$$

isto é, bastaria tomar o momento estático da área de momentos reduzidos compreendida entre A e B (representada pelo vetor S_A^B) relativamente a um eixo passando por B e com a direção Δ .

Convenções

1ª) O momento estático, relativamente a um eixo, de uma área de momentos reduzidos representada por um vetor S , será positivo se o vetor, estando à esquerda do eixo, produzir uma rotação no sentido do momento dos ponteiros de um relógio, ou se, estando à direita, do eixo, a rotação for no sentido trigonométrico. O momento estático será negativo nos casos contrários (Fig.512-9).

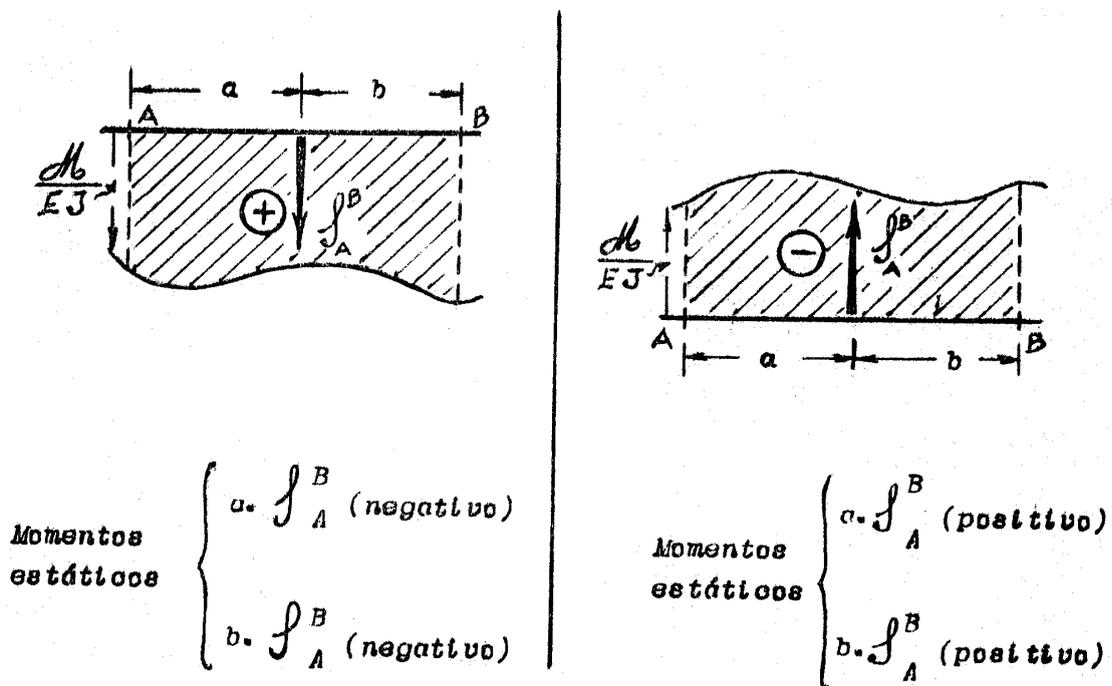


Fig.512-9

2ª) Os deslocamentos objetos do 2º teorema, são positivos quando contados da tangente para baixo, ou negativos no caso contrário, correspondendo, respectivamente, a momentos estáticos dos mesmos sinais.

Assim, o deslocamento $\overline{B_1B}$, como se acha indicado na Fig.512-7, é negativo.

1º Corolário:

Em uma haste fletida, ligando-se dois pontos, A e B, da elástica por uma corda, as rotações das tangentes à elástica nesses pontos, relativamente à corda, são iguais às reações de apoio quando se considerar o trecho AB como viga simplesmente apoiada e carregada com o diagrama de momentos reduzidos compreendido entre esses mesmos pontos A e B.

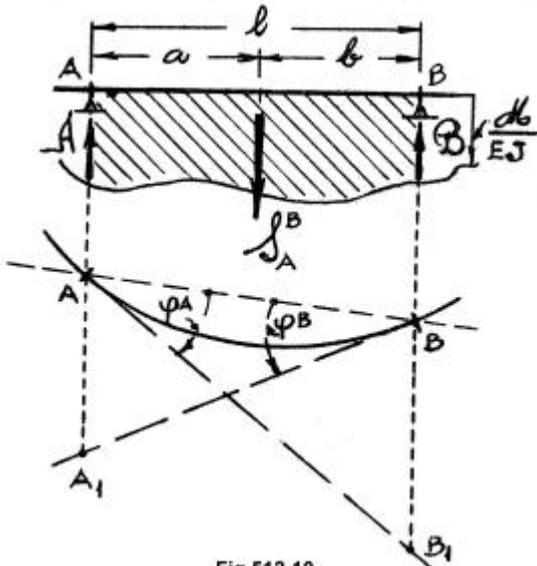


Fig.512-10

A Fig.512-10 nos mostra que

$$\varphi^A = \frac{\overline{BB_1}}{l}$$

$$\varphi^B = \frac{\overline{AA_1}}{l}$$

Então:

$$\varphi^A = \frac{b}{l} S_A^B = A$$

$$\varphi^B = \frac{a}{l} S_A^B = B$$

512-XXIII

φ^A e φ^B serão, convencionalmente, positivas quando tiverem os sentidos da Fig.512-10; serão negativas quando seus sentidos forem os contrários dessa figura.

2º Corolário:

Em uma haste fletida, ligando-se dois pontos, A e B, da elástica por uma corda, a rotação da tangente à elástica em um ponto C, intermediário, relativamente à corda, é igual à força cortante em C quando se considerar o trecho AB como uma viga simplesmente apoiada e carregada com o diagrama de momentos reduzidos compreendido entre os pontos A e B.

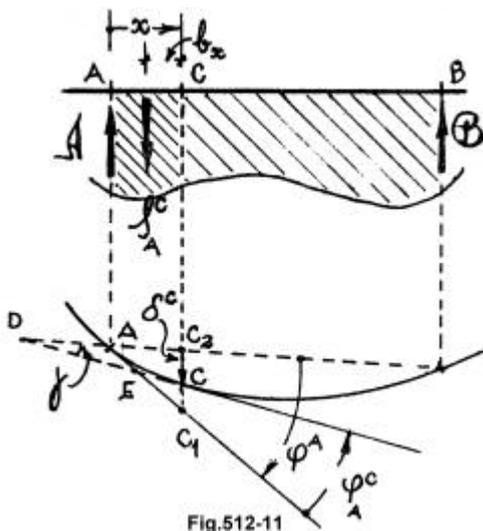


Fig.512-11

A Fig.512-11 nos mostra que o ângulo γ procurado é, considerado o triângulo DAE:

$$\gamma = \varphi^A - \varphi_A^C$$

Então, podemos escrever:

$$\gamma = A - \int_A^C \frac{M}{EJ} dx$$

$$\gamma = A - S_A^C$$

512-XXIV

A inclinação γ , relativamente à corda, quando positiva, significa uma rotação no sentido do movimento dos ponteiros de relógio, como na Fig.512-11.

3º Corolário:

Em uma haste fletida, ligando-se dois pontos, A e B, da elástica por uma corda, o deslocamento linear de um ponto C, intermediário, medido a partir da corda, é igual ao momento fletor em C quando se considerar o trecho AB como viga simplesmente apoiada e carregada com o diagrama de momentos reduzidos compreendido entre esses mesmos pontos A e B.

A Fig.512-11 nos mostra que

$$\delta^c = \overline{C_2 C} = \overline{C_2 C_1} - \overline{C C_1} = \overline{C_2 C_1} + \overline{C_1 C}$$

Ora

$$\begin{aligned} \overline{C_2 C_1} &= \varphi^A x = A x \\ \overline{C_1 C} &= -\mathbf{S}_A^C b_x \end{aligned}$$

Então:

$$\delta^c = A x - \mathbf{S}_A^C b_x$$

512-XXV

Quando δ^c for positivo, isso indica que o ponto C desceu relativamente à corda; terá subido quando δ^c for negativo.

Observações finais

Para uma perfeita aplicação do método de Möhr deve-se ter em mente algumas observações importantes que enunciaremos a seguir.

1ª observação: Os deslocamentos calculáveis com auxílio dos teoremas e corolários anteriormente expostos **são deslocamentos relativos**. Conseqüentemente, **deverão ser medidos a partir de um referencial** cuja posição final precisa ser conhecida, em cada caso, para que se possa ter, também, a posição final do elemento cujo deslocamento relativo se determina.

2ª observação: Nos casos dos dois teoremas o referencial é a tangente à elástica em um ponto – A ou B – a qual denominamos **tangente base** e relativamente à posição final da qual obtemos seja a posição também final de outra tangente à elástica (1º teorema), seja a posição final de um ponto da elástica (2º teorema).

Vê-se, assim, que esses dois teoremas serão diretamente aplicáveis aos casos em que a posição final de uma tangente à elástica for conhecida. Entre outros, é o caso da viga engastada em uma extremidade e livre na outra, quando a tangente à elástica no engastamento tem posição conhecida pois que é imutável.

3ª observação: No tocante aos três corolários o referencial é uma reta imaginária ligando dois pontos diferentes da elástica, ou seja uma corda dessa mesma elástica. Nos primeiro e segundo corolários se determinam as rotações de tangentes à elástica relativamente a essa corda; com o terceiro corolário calcula-se o deslocamento de um ponto intermediário relativamente à mesma corda.

4ª observação: Em certos sistemas estáticos, tendo em vista o que se viu anteriormente, ter-se-á que combinar, conveniente e sucessivamente, teoremas e corolários.

5.1.2.4.1 - Processo de Möhr

A equação diferencial da elástica, representada pelas expressões 512-I assume a forma 512-III quando o eixo solicitante coincide com o eixo y:

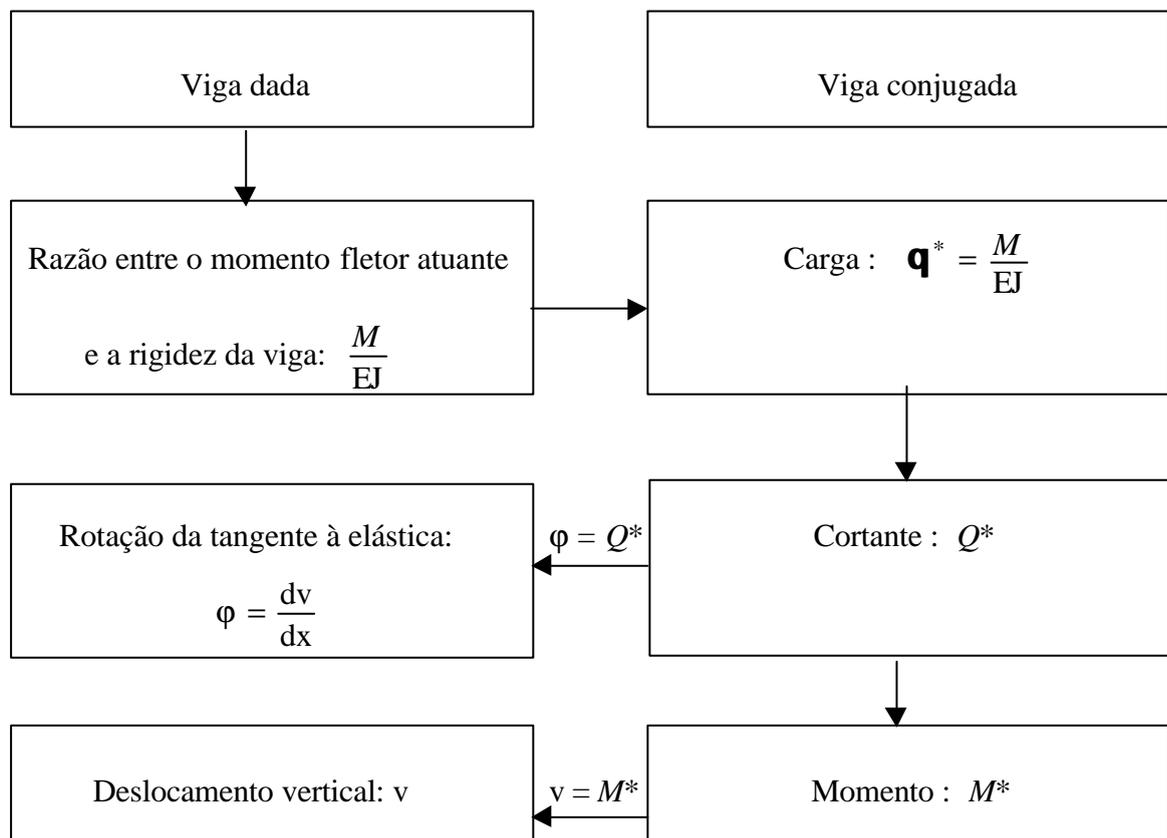
$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EJ_z} \tag{512-IIIa}$$

Esta equação guarda perfeita analogia com a equação diferencial da estática

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q$$

Möhr considerou v como o momento fletor numa viga que, adequada às condições de contorno do problema, será chamada **viga conjugada** submetida a uma carga distribuída igual a $\frac{M}{EJ}$ sendo M o momento fletor atuante na viga original; esta carga fictícia será chamada carregamento reduzido.

Deste modo o processo de Möhr apresenta as seguintes analogias(*):



Observa-se que a elástica da viga real será dada pelo diagrama de momento fletor na viga conjugada. Esta viga será estabelecida em respeito às condições de contorno do problema dado e resultará de uma simples transformação dos vínculos da estrutura dada, conforme o quadro a seguir:

* As reações de apoio, momentos fletores e carga da viga conjugada, serão grafadas com asterisco para distinguir da viga real.

Transformação de vínculos para obtenção da viga conjugada

Viga dada	Viga conjugada	Condições de contorno
		$v_A = 0$ $\varphi_A \neq 0$
		$v_A \neq 0$ $\varphi_A \neq 0$
		$v_A = 0$ $\varphi_A = 0$
		$v_B = 0$ $\varphi_B^e = \varphi_B^d$
		$v_B \neq 0$ $\varphi_B^e \neq \varphi_B^d$
		$v_B = 0$ $\varphi_B^e \neq \varphi_B^d$

Retornando aos exemplos do item 5.1.2.2:

1º Exemplo: Viga simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída

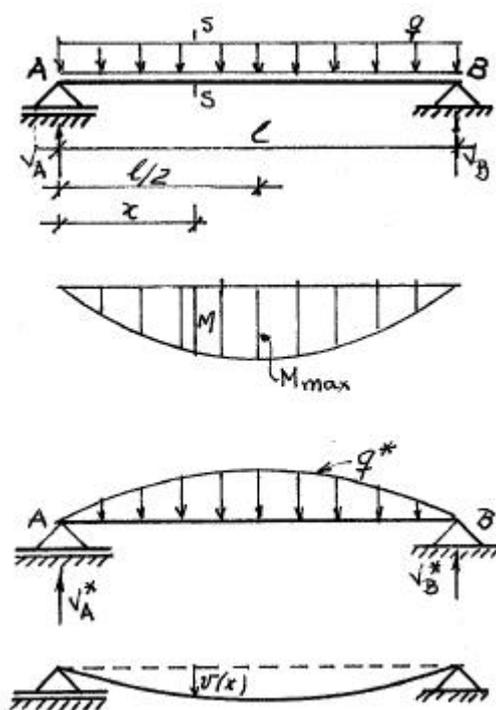


Fig.5.12-12

Viga Dada (VD)

$$V_A = V_B = \frac{q\ell}{2}$$

$$M(x) = \frac{q\ell}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}(\ell x - x^2)$$

$$M_{max} = M\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q\ell^2}{8}$$

Viga Conjugada (VC)

$$q^* = \frac{M}{EJ_z}$$

$$V_A^* = \frac{q\ell^2}{8EJ_z} \left[\frac{\ell}{2} - \frac{1}{3} \frac{\ell}{2} \right] = \frac{q\ell^3}{24EJ_z} = \frac{p\ell}{3}$$

onde p é a ordenada máxima: $p = \frac{q\ell^2}{8EJ_z}$

$$v(x) = M^*(x) = V_A^*s - s \int_0^s q' dx + \int_0^s q' x dx \quad (*)$$

$$q' = 4p \frac{x(\ell-x)}{\ell^2} :$$

* Ademar da Fonseca, Vol.2, página 91.

Substituindo e integrando, vem:

$$M^*(x) = \frac{p\ell}{3}s - \frac{2}{3} \frac{p\ell}{\ell^2}s^3 + \frac{ps^4}{3\ell^2}$$

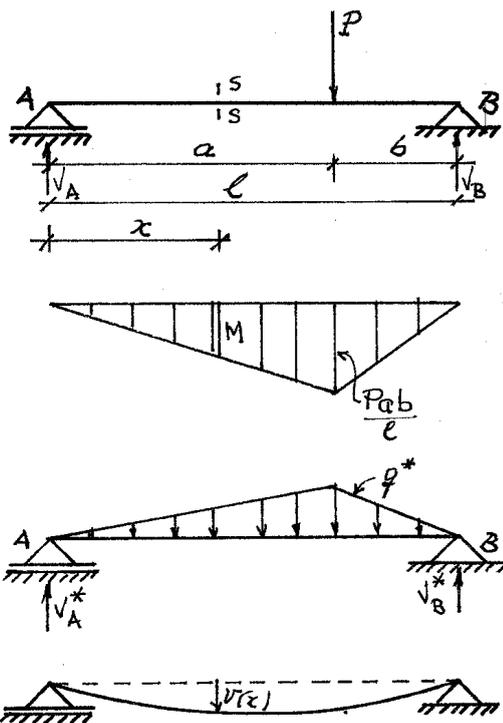
rearrumando os termos e fazendo $s=x$, vem:

$$M^*(x) = \frac{p\ell^2}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{p\ell^2}{3}2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{p\ell^2}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4$$

$$\begin{cases} v(x) = \frac{\mathbf{q}\ell^4}{24EJ_z} \left[\frac{x}{\ell} - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 \right] \text{ (d)} \\ \varphi(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{\mathbf{q}\ell}{24EJ_z} \left[1 - 6\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \right] \text{ (c)} \end{cases}$$

512-V

2º Exemplo: Viga simplesmente apoiada com carga concentrada



Viga Dada (VD)

$$V_A = \frac{Pb}{l} ; V_B = \frac{Pa}{l}$$

$$M(x) = V_A x = \frac{Pb}{l} x$$

$$M_{max} = \frac{Pab}{l}$$

Viga Conjugada (VC)

$$\mathbf{q}^* = \frac{M}{EJ_z}$$

$$V_A^* = \left[\frac{1}{2} \frac{Pab}{EJ_z l} b \frac{2}{3} b + \frac{1}{2} \frac{Pab}{EJ_z l} a \left(\frac{a}{3} + b \right) \right] \frac{1}{l}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{P}{EJ_z l^2} [2ab^3 + a^3b + 3a^2b^2]$$

Fig.512-13

Para $x < a$:

$$v(x) = M^*(x) = V_A^* x - \frac{M(x)}{EJ_z} \frac{x}{2} \frac{x}{3}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{Px}{EJ_z l^2} [2ab^3 + a^3b + 3a^2b^2] - \frac{Pbx^3}{6EJ_z l}$$

Como $a = \ell - b$, substituindo e simplificando vem:

$$v(x) = \frac{P\ell^3}{6EJ_z} \left\{ \left(\frac{b}{\ell} \right) \left(\frac{x}{\ell} \right) \left[1 - \left(\frac{b}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right] \right\}$$

$$\varphi(x) = Q^*(x) = V_A^* - \frac{M(x)}{EJ_z} \frac{x}{2}$$

$$\frac{P}{6EJ_z \ell^2} \left[2ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 \right] - \frac{Pbx^2}{2EJ_z \ell}$$

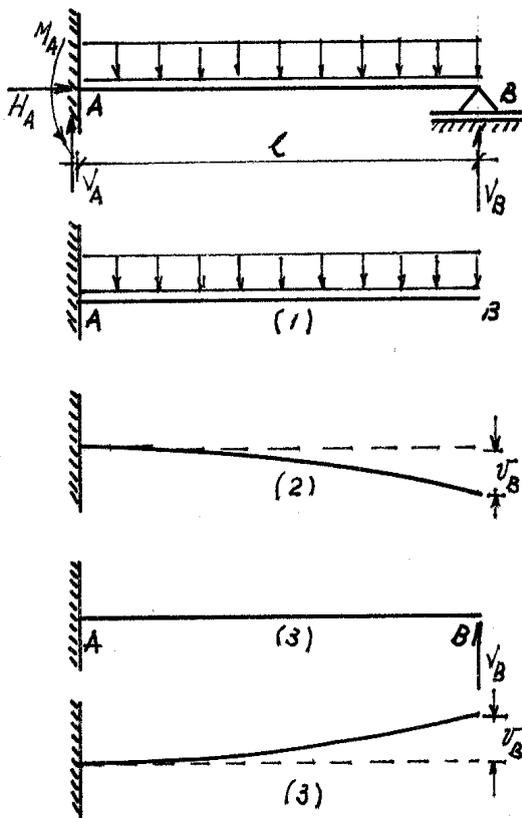
analogamente, chega-se a:

$$\varphi(x) = \frac{P\ell^2}{6EJ_z} \left\{ \left(\frac{b}{\ell} \right) \left[1 - \left(\frac{b}{\ell} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right] \right\}$$

Chegamos às mesmas expressões já obtidas com a integração.

Além de propiciar maior rapidez na obtenção da elástica, o método de Möhr ou método da viga conjugada é utilizado para resolução de estruturas hiperestáticas, ou para o levantamento de vigas estaticamente indeterminadas.

Considere-se a viga da figura abaixo:



$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A + V_B - q\ell = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow M_A + V_B \ell - \frac{q\ell^2}{2} = 0$$

observa-se que a viga é indeterminada.

Pelo método de Möhr:

- (1) transformar a viga isostática pela redução de um vínculo, B por exemplo;
- (2) obter o deslocamento em B;
- (3) obter o valor de V_B , aplicado na mesma viga isostática, capaz de gerar o mesmo deslocamento em B, em módulo.

$$\text{Assim } |V_B| = |v_B^*|$$

ter-se-á levantada a indeterminação.

Fig.512-14

5.1.2.5 – Importância do cálculo das deformações nas vigas

Além de se constituir em elemento fundamental para a solução dos problemas das vigas hiperestáticas, como se verá posteriormente, o cálculo das deformações dos eixos das vigas tem uma outra importância imediata qual seja a de permitir controlar a aceitabilidade ou não das mesmas.

Em construção mecânica é mais que óbvia a importância de manter a deformabilidade das peças dentro de certos limites.

Aí, como em construção civil, esse controle é feito através o valor dos abaixamentos máximos ou flechas, cujos valores devem ficar abaixo de certos limites fixados nos regulamentos, e decorrentes da experiência.

Já na construção civil, em grande número de casos, a razão dessa limitação de deformação se deve a motivos de estética; também, no caso de pisos, vigas muito deformáveis permitindo oscilações excessivas, pelo menos, molesta aqueles que sobre esses pisos se movem. Outra razão a considerar é que, vigas muito deformáveis sustentando paredes, podem dar lugar ao aparecimento de rachaduras nestas últimas o que é um inconveniente, pelo menos estético.

Em geral são as estruturas metálicas as que mais ficam sujeitas a ter sua aceitabilidade dependente das deformações por isso que, dada a alta resistência do material se tende a chegar a seções pequenas relativamente aos vãos.

A título de ilustração podemos indicar, para vigas de estruturas metálicas os seguintes valores máximos para as flechas:

- telhados e galpões $f \leq \frac{l}{400}$

- vigeamento de pisos $f \leq \frac{l}{500}$

- vigas mestras suportando colunas, paredes, etc. $f \leq \frac{l}{600}$.

Em pontes e em outros casos especiais fixam-se limites ainda menores. Valores particulares para cada caso são indicados em Engenharia Mecânica.

5.1.3 – Potencial elástico armazenado por efeito do momento fletor

O potencial elástico será obtido a partir de

$$\mathcal{E} = \int_V \mathcal{E}^* \, dV$$

Considerando que o momento fletor, em um ponto da peça, origina uma só tensão normal na direção de seu eixo e que, em valor absoluto, é

$$\sigma = \frac{M_n r}{J_n}$$

teremos:

$$\mathcal{E}^* = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{M_n^2 r^2}{2E J_n^2}$$

e então:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2E} \int_V \frac{M_n^2 r^2}{J_n^2} \, dV$$

Em se tratando da peça prismática podemos desdobrar a última integral escrevendo-a

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2E} \int_\ell dx \int_S \frac{M_n^2 r^2}{J_n^2} \, dS$$

que nos dá, finalmente

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2E} \int \frac{M_n^2}{J_n} \, dx}$$

513-I

A integração será levada a efeito uma vez conhecidas as expressões de M_n e J_n , em função de x .

A expressão anterior é válida para solicitações estáticas.

5.1.4 – Concentração de tensões no caso de modificações bruscas de seção

Identicamente ao que se viu em 4.1.2, no caso de peças solicitadas axialmente, as expressões encontradas até aqui para a distribuição das tensões ao longo das seções retas de peças submetidas a momento fletor valem, apenas, quando variações dessas seções, se presentes, ocorrem de maneira lenta e gradual.

Se, entretanto, essas variações de seção forem bruscas ou se sulcos ou entalhes na superfície bem como orifícios em determinados pontos estiverem presentes na peça, tensões locais elevadas surgem nas vizinhanças desses elementos perturbadores comumente denominados **concentradores de tensões**.

É relativamente difícil obter, analiticamente, expressões para os verdadeiros valores das tensões decorrentes dessas modificações locais, de sorte que o maior número de informações a respeito decorrem de métodos experimentais entre os quais sobressai o método fotoelástico.

De um modo geral a modificação da distribuição das tensões decorre principalmente de certas relações puramente geométricas. De outro lado o interesse principal acerca dessas modificações se volta para as maiores tensões de modo que, para estas, poderemos escrever, no caso da flexão:

$$\bar{\sigma}' = k \bar{\sigma}$$

514-I

Nesta expressão $\bar{\sigma}$ é a maior tensão normal calculada pela fórmula $\bar{\sigma} = \mp \frac{M}{W}$ onde W se refere à seção reduzida; $\bar{\sigma}'$ é a tensão concentrada, ou atual, em face do concentrador de tensões; finalmente, k^* é o **fator de concentração de tensões** para a tensão máxima e própria das circunstâncias geométricas do caso.

Tudo se acha ilustrado na Fig.514-1.

Deve-se notar que se a forma da seção reta da peça é, ela própria, muito irregular, concentrações de tensões podem ocorrer, principalmente se houver a presença de ângulos reentrantes.

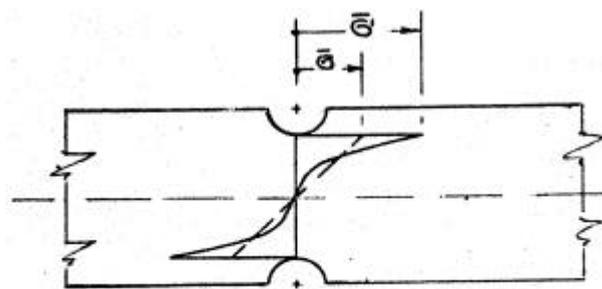


Fig.514-1

Um exemplo dessa ocorrência é o da seção I onde as tensões tendem a crescer no encontro da alma com as mesas do perfil. Para evitar esse inconveniente nos perfis laminados comerciais, em pontos semelhantes, assegura-se uma concordância bastante suave.

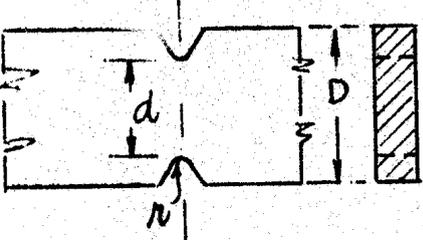
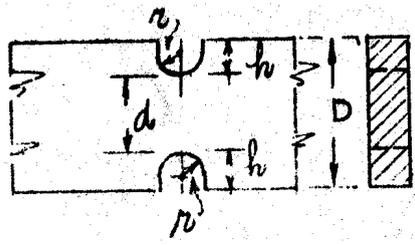
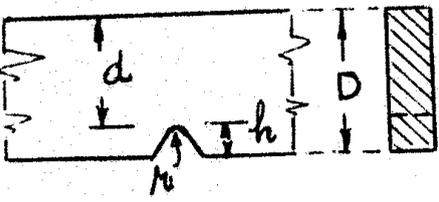
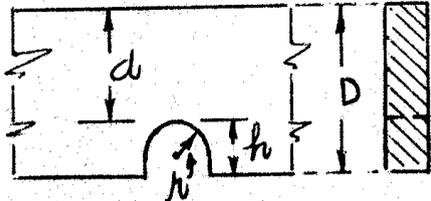
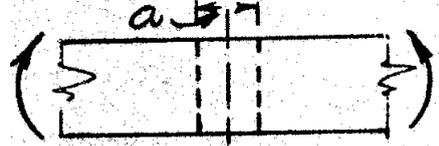
* Quando a solicitação não for estática, mas, repetida outras circunstâncias podem entrar em jogo modificando os valores de k.

Será útil assinalar, finalmente, que no caso de obras de construção civil onde poucas vezes incidem solicitações repetidas, desde que se usem materiais dúteis, pode-se deixar de considerar as concentrações de tensões porque pequenos escoamentos localizados propiciarão uma acomodação da distribuição das tensões tendendo para a situação nominal.

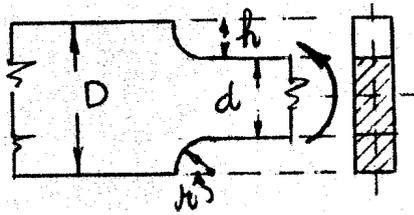
Em projeto de construção mecânica, todavia não se pode pensar da mesma maneira em face da possibilidade de ocorrer a fadiga do material, e, então, para atenuar as concentrações de tensões é conveniente evitar concordâncias muito apertadas em ângulos reentrantes ou a presença de outros concentradores de tensões de efeitos muito violentos.

A tabela 514-1 nos dá os valores do fator de concentração de tensões para as tensões máximas no caso da flexão pura e para alguns tipos de concentradores mais comuns.

Tabela 514-1
Fatores de concentração de tensões para peças submetidas a momento fletor
 (tensões elásticas) (Roark: Formulas for Stress and Strain)

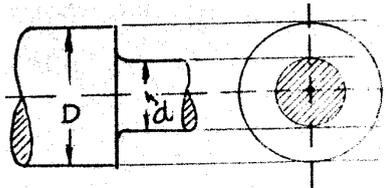
Tipo de irregularidade da seção ou concentrador de tensões	Fator de concentração de tensões (k)																																																	
<p>1. Dois entalhes em peça de seção retangular</p> 	<table border="1" data-bbox="874 443 1396 560"> <tr> <td>$\frac{r}{d}$</td> <td>0,025</td> <td>0,05</td> <td>0,10</td> <td>0,15</td> <td>0,20</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>3,6</td> <td>2,9</td> <td>2,2</td> <td>1,9</td> <td>1,7</td> </tr> </table> <table border="1" data-bbox="874 577 1321 694"> <tr> <td>$\frac{r}{d}$</td> <td>0,25</td> <td>0,30</td> <td>0,40</td> <td>0,50</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>1,6</td> <td>1,5</td> <td>1,4</td> <td>1,3</td> </tr> </table>	$\frac{r}{d}$	0,025	0,05	0,10	0,15	0,20	k	3,6	2,9	2,2	1,9	1,7	$\frac{r}{d}$	0,25	0,30	0,40	0,50	k	1,6	1,5	1,4	1,3																											
$\frac{r}{d}$	0,025	0,05	0,10	0,15	0,20																																													
k	3,6	2,9	2,2	1,9	1,7																																													
$\frac{r}{d}$	0,25	0,30	0,40	0,50																																														
k	1,6	1,5	1,4	1,3																																														
<p>2. Dois entalhes em U em peça de seção retangular</p> 	<table border="1" data-bbox="861 806 1412 1064"> <tr> <td>$\frac{r/d}{h/r}$</td> <td>0,05</td> <td>0,10</td> <td>0,20</td> <td>0,30</td> <td>0,50</td> <td>0,75</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>1,90</td> <td>1,75</td> <td>1,54</td> <td>1,40</td> <td>1,27</td> <td>1,17</td> </tr> <tr> <td>1,0</td> <td>2,20</td> <td>1,86</td> <td>1,59</td> <td>1,45</td> <td>1,30</td> <td>1,18</td> </tr> <tr> <td>1,5</td> <td></td> <td>1,91</td> <td>1,60</td> <td>1,45</td> <td>1,30</td> <td>1,18</td> </tr> <tr> <td>2,0</td> <td></td> <td>1,94</td> <td>1,60</td> <td>1,46</td> <td>1,30</td> <td>1,18</td> </tr> <tr> <td>3,0</td> <td></td> <td>2,00</td> <td>1,61</td> <td>1,47</td> <td>1,30</td> <td>1,18</td> </tr> <tr> <td>4,0</td> <td></td> <td>2,05</td> <td>1,62</td> <td>1,47</td> <td>1,30</td> <td>1,18</td> </tr> </table>	$\frac{r/d}{h/r}$	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,75	0,5	1,90	1,75	1,54	1,40	1,27	1,17	1,0	2,20	1,86	1,59	1,45	1,30	1,18	1,5		1,91	1,60	1,45	1,30	1,18	2,0		1,94	1,60	1,46	1,30	1,18	3,0		2,00	1,61	1,47	1,30	1,18	4,0		2,05	1,62	1,47	1,30	1,18
$\frac{r/d}{h/r}$	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,75																																												
0,5	1,90	1,75	1,54	1,40	1,27	1,17																																												
1,0	2,20	1,86	1,59	1,45	1,30	1,18																																												
1,5		1,91	1,60	1,45	1,30	1,18																																												
2,0		1,94	1,60	1,46	1,30	1,18																																												
3,0		2,00	1,61	1,47	1,30	1,18																																												
4,0		2,05	1,62	1,47	1,30	1,18																																												
<p>3. Um entalhe em V em peça de seção retangular</p> 	<p>Para valores de h pequenos em relação a d:</p> $k = 1 + 2\sqrt{\frac{h}{r}}$																																																	
<p>4. Um entalhe em U em peça de seção retangular</p> 	<p>Para $\frac{r}{D} = 0,125$ tem-se</p> <table border="1" data-bbox="861 1590 1412 1657"> <tr> <td>h/r</td> <td>0,667</td> <td>1,33</td> <td>2,00</td> <td>2,67</td> <td>3,33</td> <td>4,00</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>1,96</td> <td>2,04</td> <td>1,96</td> <td>1,92</td> <td>1,84</td> <td>1,76</td> </tr> </table> <table border="1" data-bbox="861 1680 1324 1747"> <tr> <td>h/r</td> <td>4,67</td> <td>5,33</td> <td>6,00</td> <td>6,67</td> <td>7,34</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>1,65</td> <td>1,56</td> <td>1,46</td> <td>1,35</td> <td>1,06</td> </tr> </table>	h/r	0,667	1,33	2,00	2,67	3,33	4,00	k	1,96	2,04	1,96	1,92	1,84	1,76	h/r	4,67	5,33	6,00	6,67	7,34	k	1,65	1,56	1,46	1,35	1,06																							
h/r	0,667	1,33	2,00	2,67	3,33	4,00																																												
k	1,96	2,04	1,96	1,92	1,84	1,76																																												
h/r	4,67	5,33	6,00	6,67	7,34																																													
k	1,65	1,56	1,46	1,35	1,06																																													
<p>5. Furo circular em barra de seção retangular</p> 	<p>Aproximadamente como no caso 4 da tabela 412-1</p>																																																	

6. Mudança de altura em peça de seção retangular de largura constante



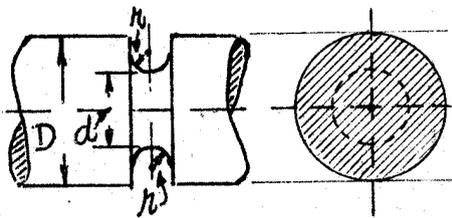
r/d	0,05	0,10	0,20	0,27	0,50	1,00
h/r	0,5	1,0	1,5	2,0	3,5	
	1,61	1,49	1,39	1,34	1,22	1,07
	1,91	1,70	1,48	1,38	1,22	1,08
	2,00	1,73	1,50	1,39	1,23	1,08
		1,74	1,52	1,39	1,23	1,09
		1,76	1,54	1,40	1,23	1,10

7. Mudança de diâmetro em peça de seção circular



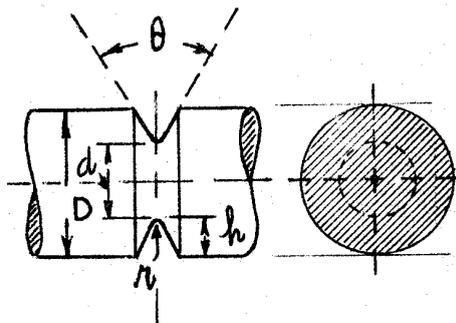
Aproximadamente como no caso 6

8. Sulco em V em torno de uma seção circular



Aproximadamente como no caso 2

9. Sulco em V em torno de uma seção circular



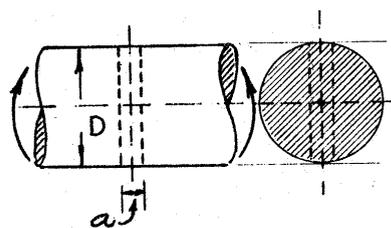
r/d	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
k	2,55	2,00	1,74	1,60	1,43	1,31	1,25

Quando $\frac{h}{d}$ for pequeno:

$$k = \frac{1 + 2 \frac{h}{r}}{1 + \frac{h}{r}} n$$

e	h/r	0,5	1,0	3,0	5,0	9,0
	0°	1,85	2,01	2,66	3,23	4,54
	60°	1,84	2,00	2,54	3,06	3,90
	90°	1,81	1,95	2,40	2,64	3,12
	120°	1,66	1,75	1,95	2,06	2,13

10. Furo diametral em peça de seção circular



Aproximadamente como no caso 5

5.2 – EFEITOS DA FORÇA CORTANTE

5.2.0 – Generalidades. Distinção entre corte e cisalhamento

Já se viu anteriormente que a força cortante em uma seção de uma peça prismática nada mais é que a componente, no plano da própria seção, da resultante de todas as forças que atuam sobre a peça de um lado dessa mesma seção.

O efeito dessa força é fazer com que a seção vizinha da considerada tenda a escorregar sobre ela; cada elemento da seção recebe então uma ação tangencial e reage em sentido contrário impedindo esse deslocamento. Essas ações e reações tangenciais que se manifestam sob a forma de tensões tangenciais ao longo da seção do prisma devem ser o objeto de nossos estudos.

Antes, porém, de estudarmos essa distribuição observemos que, conforme a experiência tem mostrado, o comportamento de uma peça sob a ação da força cortante depende de sua deformabilidade por flexão.

Assim é que peças extremamente curtas e de seção relativamente grande se comportam de modo diferente de peças que apresentem francamente uma curva elástica.

No primeiro caso a influência dos momentos fletores é desprezível frente à das forças cortantes que, em geral, são consideradas na prática como sollicitação única. É o caso que denominaremos **de corte**.

No segundo caso, os momentos fletores podem ter efeitos apreciáveis fazendo que o comportamento da peça sob a ação das forças cortantes seja diferente. A este caso denominaremos de **cisalhamento** nos rebites, chavetas, cavilhas, ensambladuras de madeira etc; para exemplificar consideram-se como de **corte** os efeitos da força cortante; de **cisalhamento** são os efeitos nas peças com características de vigas.

5.2.1 – Tensões e deformações locais

5.2.1.1 – Solicitação por corte

Não vamos fazer um estudo detalhado deste caso, mesmo porque, ele constitui campo de controvérsias.

Diremos, apenas, que ele é ainda hoje tratado mediante a hipótese de que as tensões tangenciais decorram de uma distribuição uniforme da solicitação ao longo da seção, o que, não sendo rigoroso, é bem próximo da realidade.

Assim sendo, poderemos escrever

$$\tau = \frac{Q}{S} \quad 521-I$$

A **distorção** em um ponto qualquer da seção será

$$\gamma = \frac{Q}{GS} \quad 521-II$$

Desprezado, como se vê, o efeito – pequeno que seja – do momento fletor que sempre acompanha a força cortante, em cada ponto da seção cortada se manifesta, praticamente, um estado de cisalhamento puro.

5.2.1.2 – Exemplos de solicitação por corte

Como já se disse, há certos elementos estruturais que trabalham essencialmente ao corte: rebites, soldas, cavilhas, ensambladuras de peças de madeiras, conectores, chavetas etc.

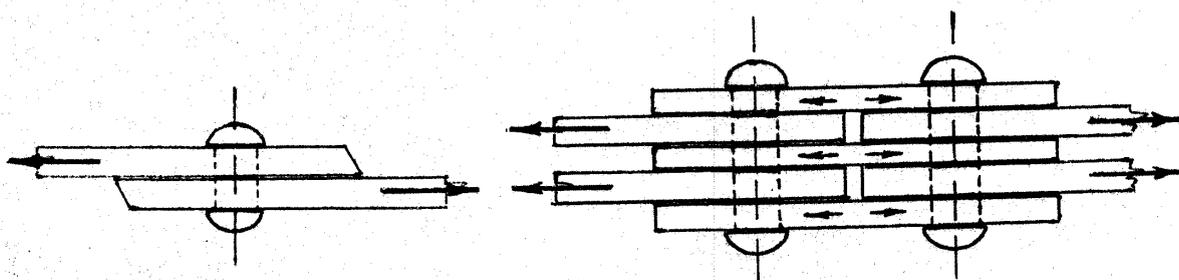
Vamos abordar, a título de exemplificação, as ligações envolvendo rebites, soldas e cavilhas, as demais sendo facilmente resolvíveis tendo em vista as semelhanças que apresentam com estas.

Ligações com rebites

Sem entrar em mais detalhes que fôgem aos nossos objetivos diremos que os rebites são elementos de ligação destinados a unir – e conseqüentemente a transmitir forças – peças metálicas de pequena espessura. Dessa forma, a relação entre seu comprimento e seu diâmetro não é grande, de modo que pequenos efeitos de flexão podem ser desprezados em face dos demais que se constituirão na base de seu cálculo como se verá a seguir.

Assim é que a **capacidade de carga de um rebite**, ou seja, o valor da força R que ele será capaz de transmitir Ñm uma ligação **depende** :

- a) de sua **resistência ao corte** que tende a se manifestar em uma ou várias seções, conforme a ligação a efetuar. Na Fig.521-1a temos o caso em que o corte ocorre em uma única seção; na Fig.521-1b ele ocorre em quatro seções em cada rebite.



(a) UMA seção ao corte (b) QUATRO seções ao corte

Fig.521-1

b) da **resistência ao esmagamento** oferecida pelo seu fuste ou pelos bordos do furo em que está introduzido, em decorrência da compressão reinante entre ambos (Fig.521-2). Em geral, quando se usa rebites de material adequado às chapas a ligar, o esmagamento tende a se produzir ao longo da superfície lateral do furo.

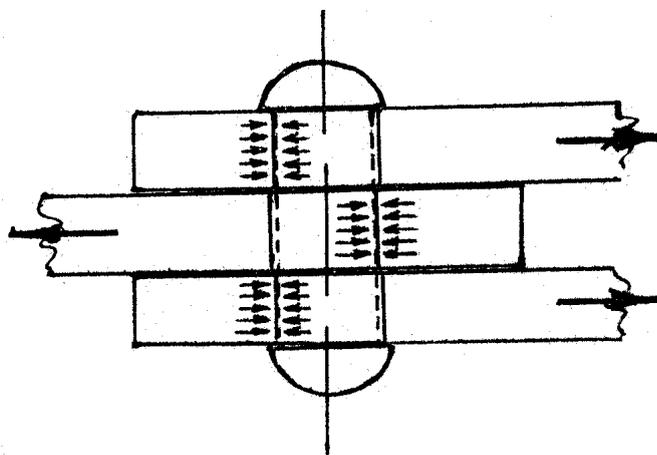


Fig.521-2

c) da **resistência ao arrancamento** das porções de chapas a ligar em frente a cada rebite (Fig.521-3). Desde que na direção da solicitação sejam observadas certas distâncias mínimas entre rebites e entre estes e as extremidades das chapas, esta condição não precisa ser verificada. Por isso, as diferentes Normas fixam os valores mínimos a serem observados para l , l_0 , l_1 , valores esses que geralmente se ligam ao do diâmetro do furo.

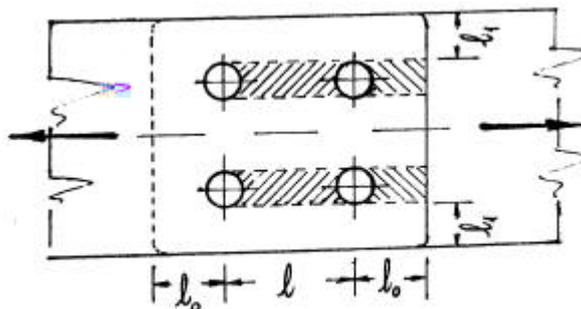


Fig.521-3

Sendo assim, suponhamos respeitadas as prescrições de Normas a que se refere a alínea c) anterior e notemos como

τ_{adm} – a tensão admissível ao corte para o material do rebite;

σ_{ladm} – a tensão admissível à compressão entre o rebite e as paredes do furo;

d_1 – o diâmetro do rebite acabado;

$\sum t$ – à menor soma de espessuras de chapas que agem em um dos sentidos da ligação;

m – ao número de seções cortadas em cada rebite.

Então as expressões

$$R' = m \frac{\pi d_1^2}{4} \tau_{adm} \quad (a) \quad 521-III$$

$$R'' = (\sum t) d_1 \sigma_{ladm} \quad (b)$$

darão dois valores, o **menor dos quais é a resistência R do rebite** nas condições particulares da ligação.

Para d_1 – diâmetro do rebite acabado – os valores adotados pelas diferentes normas variam como se vê a seguir, onde d é o diâmetro do rebite bruto.

Norma alemã	$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = d + 1 \text{ mm} \\ d_1 = d + 0,5 \text{ mm} \end{array} \right.$	<p>quando $d \geq 10 \text{ mm}$ quando $d < 10 \text{ mm}$</p>	
Norma americana	$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = d + 1/32'' \end{array} \right.$		521-IV
Norma Brasileira	$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = d + 1,5 \text{ mm} \end{array} \right.$		

Como informação complementar, acrescenta-se que as Normas alemã e brasileira supõem que o diâmetro do rebite acabado – d_1 – seja o mesmo do furo; a Norma americana admite que o furo tenha um diâmetro igual a $d+1/16''$

É evidente que se P for a força de ligação a ser exercida por um rebite, as tensões nele reinantes serão

$\tau = \frac{4}{m \pi d_1^2} P \quad (\text{ao corte}) \quad (a)$	
$\sigma = \frac{1}{(\sum t) d_1} P \quad (\text{compressão nas paredes do furo}) \quad (b)$	521-V

Ligações com soldas

As soldas, para ligar peças metálicas, podem ser **de topo** ou **laterais**: as primeiras podem suportar, apenas, forças decorrentes de tração ou compressão; as últimas podem receber, também, forças decorrentes de conjugados.

Não iremos nos alongar nos inúmeros detalhes concernentes às soldas para não fugirmos ao escopo principal deste estudo que é o de mostrar os princípios básicos de seu cálculo.

No caso de uma **solda de topo**, como se vê na Fig.521-4 para o caso de um cordão embutido, a capacidade de ligação da solda será dada por

$$R = t\ell\sigma_{adm}$$

521-VI

onde: ℓ é o comprimento do cordão;

t é a espessura da chapa mais fina (no caso em que não sejam de mesmas espessuras, e

σ_{adm} é a tensão admissível à tração ou à compressão para o material da solda.

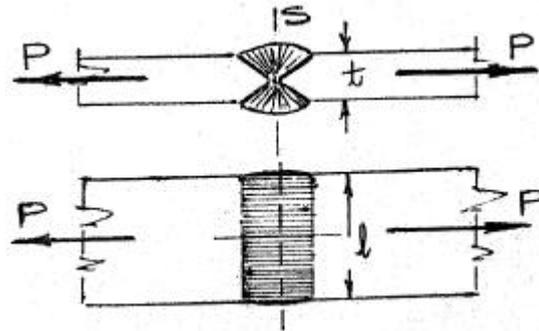


Fig.521-4

Este tipo de solda não é, propriamente, aquele que exemplifica uma aplicação das solicitações por corte, aparecendo aqui, apenas, incidentalmente.

Vejamos, então, as **soldas laterais** como as da Fig.521-5, que são as que trabalham ao corte.

Consideremos um cordão, de comprimento ℓ , solicitado ao corte por uma força P .

Supõe-se que essa força deva ser absorvida ao longo da superfície determinada pelo comprimento ℓ do cordão e pela distância a cujo valor é

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} b$$

onde $b \leq t$ conforme o tipo de solda usado seja de seção cheia (Fig.521-5-b) ou de seção vazada (Fig.521-5-c).

Sendo τ_{adm} a **tensão admissível ao corte na solda** a expressão

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} b \ell \tau_{adm}$$

521-VII

dará a resistência do cordão de solda e

$$\tau = \frac{\sqrt{2} P}{b l}$$

521-VIII

dá a tensão ao longo do cordão quando vier a receber uma carga P.

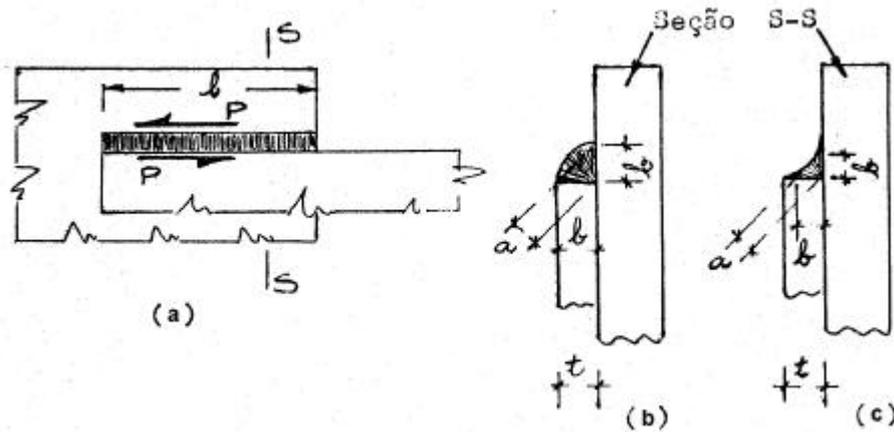


Fig.521-5

No caso em que a solda seja de seção cheia, como é o caso mais comum, basta, nas expressões anteriores, fazer $b = t$.

Ligações com cavilhas ou tarugos de madeira

Este é um tipo de ligação que ocorre freqüentemente em peças de madeira, particularmente na formação de vigas de seção composta como se verá em 5.5.

No momento procuraremos determinar a capacidade de carga de uma cavilha.

Para tanto consideremos o caso representado na Fig.521-6, onde uma força P deve ser transmitida de uma para outra peça de madeira.

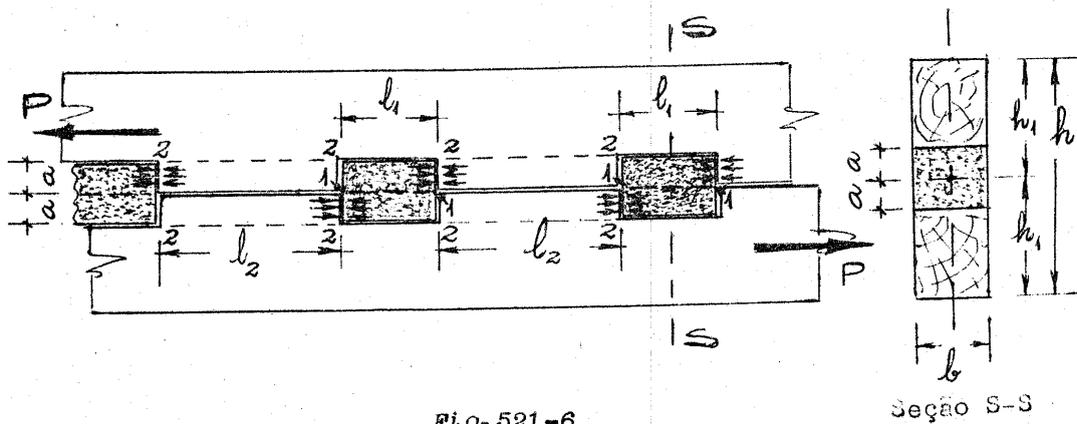


Fig. 521-6

A ligação entre as duas peças, evitando o deslizamento de uma sobre a outra, será obtida mediante o encaixe um certo número de cavilhas nos entalhes preparados para recebê-las.

A capacidade de carga R de uma cavilha, conforme assinalado na Fig.521-6, vai depender:

- a) da resistência R' ao corte da cavilha (plano 1-1);
- b) da resistência R'' ao corte do material da peça principal na base do dente que bloqueia a cavilha (plano 2-2);
- c) da resistência R''' ao esmagamento, seja da cavilha seja do flanco do entalhe, em virtude da compressão recíproca que exercem.

Sejam, então:

a – profundidade dos entalhes em cada peça;

l_1 – comprimento de cada cavilha;

l_2 – comprimento dos dentes da peça principal entre entalhes;

τ_{1adm} – tensão admissível ao corte para a cavilha. (Podendo ocorrer esse corte paralelamente às fibras da cavilha ou perpendicularmente a elas, em dúvida, se admite a primeira hipótese);

τ_{2adm} – tensão admissível ao corte para a madeira das peças principais (paralela às fibras);

σ_{adm} – tensão admissível à compressão entre a cavilha e o flanco dos entalhes. Essa tensão admissível deve ser tomada igual à menor entre as tensões admissíveis à compressão:

- paralela às fibras para a peça principal;

- paralela às fibras ou perpendicular a elas para as cavilhas conforme a posição em que estas venham a ser colocadas na peça. (Em dúvida será a perpendicular às fibras).

De tudo o que se disse conclui-se que

$$R' = b l_1 \tau_{1adm} \quad (a)$$

$$R'' = b l_2 \tau_{2adm} \quad (b)$$

$$R''' = b a \sigma_{adm} \quad (c)$$

521-IX

Evidentemente, o **menor desses três valores é a resistência ou capacidade de carga** de uma cavilha.

Note-se que a expressão (c) do grupo 521-IX subentende uma distribuição uniforme das pressões entre cavilha e entalhe o que é, apenas, uma simplificação para o cálculo.

As expressões do grupo 521-IX permitem verificar as ligações com cavilhas já que a força P_1 que deva tocar a uma cavilha não deve ultrapassar qualquer dos três valores aí expressos.

No caso em que se deseje **projetar** as ligações parte-se, em geral, de uma profundidade de entalhe – a – que se toma com valores recomendados pela experiência*.

* No caso de vigas de seção composta se recomenda tomar $a = (0,1 \text{ até } 0,2)h \geq 2 \text{ cm}$.

Neste caso igualando os três valores do grupo 521-IX virá:

$$l_1 = \frac{\sigma_{adm}}{\tau_{ladm}} a$$

$$l_2 = \frac{\sigma_{adm}}{\tau_{2adm}} a$$

como valores mínimos a serem adotados para l_1 e l_2 .

Sendo P a força total de ligação e $R = R' = R'' = R''' = b a \sigma_{adm}$ a resistência de uma cavilha, será necessário usar $n = \frac{P}{R}$ cavilhas a serem distribuídas em certo comprimento disponível **L** que, também, deve satisfazer à relação:

$$L \geq n (l_1 + l_2)$$

Às vezes esta última relação não é satisfeita e o projeto tem de ser modificado.

5.2.1.3 – Solicitações por cisalhamento

Para este caso é possível obter, mediante uma dedução teórica, a expressão da lei de distribuição das tensões cisalhantes ao longo da seção, pelo menos para certas formas da mesma.

Dizemos assim porque, infelizmente, não nos é possível obter uma expressão geral dessa distribuição que satisfaça a todas as formas de seção.

Restringiremos o nosso estudo aos casos de **prismas com secções admitindo um eixo de simetria, em coincidência com o qual esteja o plano solicitante**. O momento fletor que acompanha a força cortante dará lugar, pois, a uma flexão reta.

a) Seções compostas de retângulos

Consideremos a seção AA de um prisma fletido onde atuam uma força cortante Q e um momento fletor, M, supostos positivos na Fig.521-7.

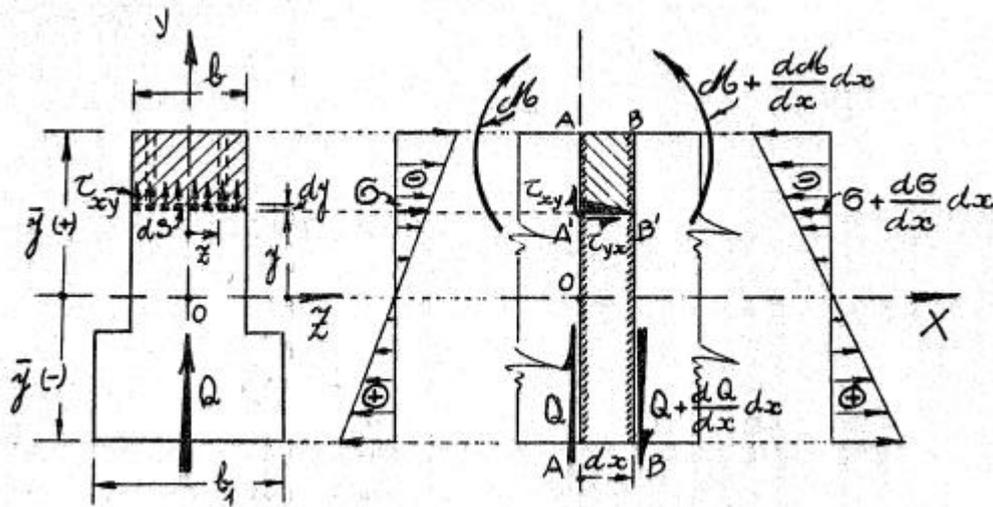


Fig.521-7

Na seção BB imediatamente vizinha, distante da anterior de dx , serão $Q + \frac{dQ}{dx}dx$ e $M + \frac{dM}{dx}dx$ as solicitações existentes.

Os momentos fletores dão lugar, ao longo das faces do prisma elementar que ficou destacado, a tensões normais cujos diagramas se vêem na figura notando-se que, sendo σ a tensão reinante em um ponto da seção AA, será $\sigma + \frac{d\sigma}{dx}dx$ a ocorrente no elemento de superfície correspondente na seção BB.

Quanto à força cortante Q , diremos que ela dá origem a tensões tangenciais nos elementos de superfície da seção AA; em um ponto de coordenadas z e y a tensão será τ_{xy} no plano da seção reta AA. Nesse caso, tendo em vista a igualdade das tensões tangenciais recíprocas, haverá no plano normal ao da seção uma tensão τ_{yx} tal que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Havendo equilíbrio em toda a peça, a porção de prisma elementar abaixo (ou acima) da fibra A'B' também em idêntica situação estará de modo que, como não há forças horizontais outras que não as elásticas, somos obrigados a concluir que as tensões τ_{yx} **surtem em virtude do acréscimo do momento fletor** e que as forças elásticas tangenciais que correspondem a τ_{yx} são equilibradas, para cada fibra, pelas forças elásticas provenientes das tensões normais que atuam abaixo ou acima dessa fibra.

Consideremos então a porção de prisma elementar A'B'AB, acima da fibra A'B'*. Se subdividíssemos essa porção em fatias elementares, por meio de planos verticais (Fig.521-7a), como a tendência de deslocamento de cada uma delas, no sentido do eixo da peça, se deve só às diferenças de forças elásticas normais ocorrentes nos seus topos (seções AA e BB), e como, dada a distribuição de tensões normais nessas faces, as diferenças são iguais para todas as fatias, conclui-se que todas tendem a se deslocar igualmente, isto é, não havendo tendência de escorregamento ao longo dos planos verticais que as separam, as tensões τ_{zx} e τ_{xz} são nulas, ao mesmo tempo que se pode dizer que τ_{yx} tem valor uniforme ao longo da largura b da fibra elementar A'B'.

Então, escrevendo a equação de equilíbrio à translação na direção X se tem

$$\int_y^{\bar{y}} \left(\sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx \right) ds - \int_y^{\bar{y}} \sigma ds = \tau_{yx} b dx \quad (a)$$

A força elementar interior que tende a deslocar a porção de prisma ao longo da fibra A'B' é pois

$$dH = \int_y^{\bar{y}} \left(\frac{d\sigma}{dx} dx \right) ds \quad (b)$$

Notando que, em valor absoluto,

$$\sigma = \frac{My}{J_z}$$

* O raciocínio e as conclusões seriam as mesmas se tomássemos a porção inferior.

teremos, sucessivamente

$$\frac{d\sigma}{dx} dx = \frac{y}{J_z} \frac{dM}{dx} dx = \frac{y}{J_z} Q dx \tag{c}$$

e

$$\boxed{dH = \frac{Q}{J_z} dx \int_y^{\bar{y}} y ds} \tag{521-X}$$

Então (a) nos conduz a

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{Q}{bJ_z} \int_y^{\bar{y}} y ds$$

Notando que a integral desta expressão é o valor absoluto do momento estático, relativamente ao eixo médio, de uma das partes da seção separadas pela corda de ordenada y que contém o ponto em estudo, e como os índices, na tensão τ , são perfeitamente dispensáveis no caso vem

$$\tau = \frac{Q}{J_z} \frac{M}{b} \tag{521-XI}$$

onde

$$M = \left| \int_y^{\bar{y}} y ds \right|$$

Esta expressão nos mostra que as tensões cisalhantes que acompanham a flexão não se distribuem uniformemente ao longo da seção; elas são constantes para pontos estudados sobre uma mesma corda; variam do longo do eixo OY conforme a variação de $\frac{M}{b}$.

Na maioria dos casos, à proporção que nos aproximamos do centro de gravidade da seção, a $\frac{M}{b}$ cresce, de sorte que, ao contrário das tensões normais que crescem para os pontos superior e inferior, as tensões cisalhantes se tornam nulas nesses pontos.

Se chamarmos de τ_m ao valor médio da tensão cisalhante, ou $\tau_m = \frac{Q}{S}$, será possível escrever 521-XI como segue

$$\boxed{\begin{aligned} \tau &= \psi \tau_m \tag{a} \\ \psi &= \frac{S}{J_z} \frac{M}{b} \tag{b} \end{aligned}} \tag{521-XII}$$

onde ψ é um coeficiente corretivo de tensão cisalhante em cada ponto.

Vê-se, assim, que a lei de distribuição das tensões τ é a mesma do coeficiente ψ , e que, portanto, basta estudar a variação deste.

Antes de fazê-lo notemos que para os pontos situados sobre o eixo médio, onde a largura da seção será designada por b_o , teremos para τ_o :

$$\tau_o = \frac{Q}{J_z} \frac{M_z}{b_o}$$

e tendo em vista 511-III e 511-IX e virá

$$\tau_o = \frac{Q}{b_o d}$$

521-XIII

onde d é o braço de alavanca do conjugado interior das forças totais Z e D de tração e compressão, despertadas pelo momento fletor.

Seção retangular

Neste caso, para pontos de ordenada y temos

$$M = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

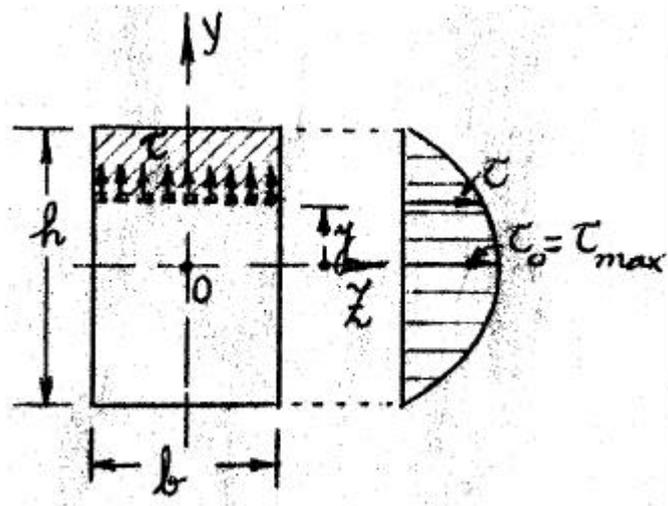


Fig.521-8

Então 521-XII-b dá

$$\psi = \frac{3}{2} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

521-XIV

que mostra ser parabólica a lei de distribuição das tensões cisalhantes.

O valor máximo de Ψ corresponde aos pontos onde $y=0$, isto é, situados sobre o eixo médio OZ. Esse valor é

$$\Psi_o = \Psi_{\max} = \frac{3}{2}$$

que conduz a

$$\tau_o = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \quad (*)$$

521-XV

A expressão 521-XIII é válida, sendo, em geral sob essa forma, indicada nas normas para cálculos do concreto (Ver NB1)*.

Seção duplo T (teórica)

Neste caso teremos

$$J_z = \frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3) + b_1 h_1^3$$

A expressão que nos há de dar τ terá que ser dividida em duas conforme o ponto em estudo esteja na mesa do perfil ou na alma do mesmo.

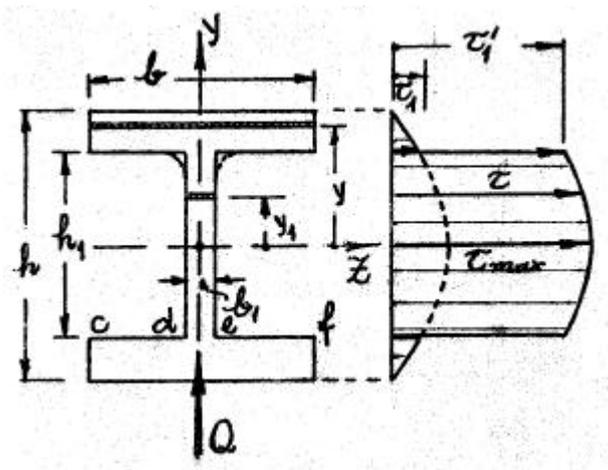


Fig.521-9

- Pontos sobre as mesas

$$M = \int_y^{\frac{h}{2}} y b dy = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

* Estas expressões são válidas como as demais deste parágrafo, para peças de seção constante. Considerando que no caso de peças de seção retangular, podendo variar simultaneamente b e h, se tem sempre

$$d = \frac{2}{3} h$$

é possível demonstrar que

$$\tau_o = \frac{3}{2bh} \left(Q \pm \frac{M}{h} \operatorname{tg} \theta \right) = \frac{1}{bd} \left(Q \pm \frac{M}{h} \operatorname{tg} \theta \right)$$

onde θ é a inclinação recíproca das tangentes aos bordos superior e inferior da peça. O sinal (-) será usado quando M e h crescerem no mesmo sentido; o sinal (+) no caso contrário.

A expressão 521-XI dá

$$\tau = \frac{Q}{8J_z}(h^2 - 4y^2)$$

521-XVI

que é uma distribuição parabólica.

Seu valor máximo ocorre para $y = \frac{h_1}{2}$ com o que

$$\tau_1 = \frac{Q}{8J_z}(h^2 - h_1^2) \quad (a)$$

- Pontos na alma de perfil

Agora

$$M = \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h}{2}} y b dy + \int_{y_1}^{\frac{h_1}{2}} y_1 b_1 dy_1 = \frac{b}{8}(h^2 - h_1^2) + \left[\left(\frac{h_1}{2} \right)^2 - y_1^2 \right]$$

E ainda 521-XI nos dá

$$\tau = \frac{Q}{8J_z} \left[\frac{b}{b_1}(h^2 - h_1^2) + (h_1^2 - 4y_1^2) \right]$$

521-XVII

outra parábola para a qual, fazendo $y_1 = \frac{h_1}{2}$ virá

$$\tau_1' = \frac{Q}{8J_z} \left[\frac{b}{b_1}(h^2 - h_1^2) \right] = \frac{b}{b_1} \tau_1 \quad (b)$$

Quando $y_1 = 0$, 521-XVII dará

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{8J_z} \left[\frac{b}{b_1}(h^2 - h_1^2) + h_1^2 \right]$$

521-XVIII

que é a tensão cisalhante máxima na seção.

As expressões 521-XVII e 521-XVIII nos mostram que à proporção que b_1 se torna menor relativamente a b , as diferenças entre as tensões ao longo da alma vão diminuindo tendendo a ser uniformes ao longo da mesma.

Notando ainda que quando as mesas não são muito grossas em relação à altura do perfil a maior parte da força cortante é absorvida pela alma simplesmente, conclui-se que **como uma aproximação para cálculos rápidos**, pode-se tomar τ_{\max} dividindo toda a força cortante Q pela área da alma do perfil, ou

$$\tau_{\max} \approx \frac{Q}{S_{\text{alma}}} \quad (*)$$

521-XIX

Devemos notar que as expressões achadas anteriormente são apenas aproximadas porque, evidentemente, ao longo dos bordos interiores das mesas (cd; ef), a tensão cisalhante deve ser nula, não podendo ter o valor τ_1 achado em (a). Também no trecho de, ao se passar da mesa para a alma a tensão não deve sofrer uma brusca variação como a assinalada em (b). Na realidade a distribuição das tensões próximo a essa junção é mais complicada e fora do alcance de nossos métodos simplificados de análise. Para evitar concentração de tensões nos ângulos reentrantes, os perfis são dotados de concordâncias como se vê na parte superior da figura em linhas pontilhadas.

Analogamente à seção em duplo T se supõe possível determinar a distribuição das tensões cisalhantes em outras seções compostas de elementos retangulares.

b) Outras formas de seção

Trataremos agora de seções não compostas de retângulos, mas, possuindo, ainda, um eixo de simetria em coincidência com o qual esteja o eixo solicitante na seção.

Uma vez que a peça em questão **não está sujeita a forças longitudinais em sua periferia**, o que será sempre admitido, a consideração do equilíbrio do paralelepípedo elementar que tenha uma das faces no plano do elemento de superfície da periferia e outra face no plano da própria seção, exige que a tensão cisalhante nesta última face (Fig.521-10) não tenha componente normal ao contorno; se esta componente existisse, uma tensão cisalhante recíproca, contida no elemento plano da superfície periférica, com a direção do eixo do prisma, deveria existir também o que contraria a nossa hipótese inicial.

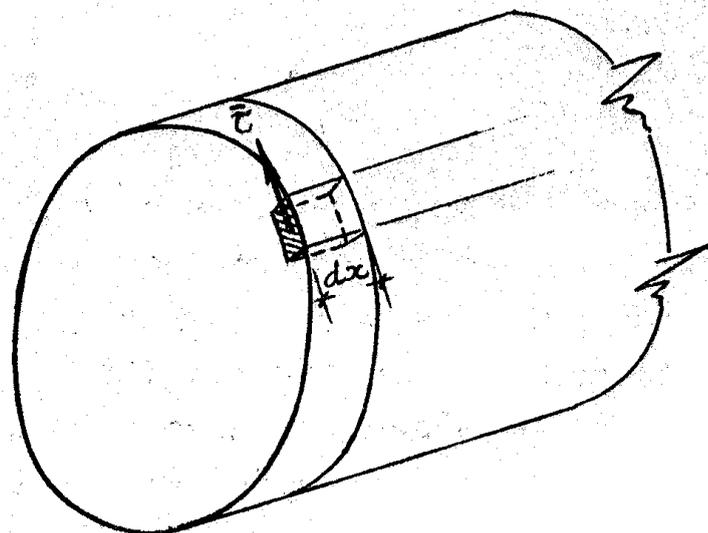


Fig.521-10

* Alguns autores mencionam esta fórmula aproximadamente sob a forma:

$$\tau_{\max} = 1,1 \frac{Q}{S_{\text{alma}}}$$

521-XIX-bis

Conclui-se que, **para os pontos situados sobre o contorno da seção reta do prisma, a tensão cisalhante, referente ao plano dessa seção reta, é, necessariamente, dirigida segundo a tangente ao contorno.**

Feita esta consideração inicial, vejamos outros elementos da distribuição das tensões cisalhantes provenientes das forças cortantes.

A solução que vamos apresentar é simplesmente aproximada, mas, o suficiente para as necessidades correntes.

Fixemo-nos na Fig.521-11 admitindo-a como forma de uma seção onde atua a força cortante Q .

Considerando os pontos situados sobre uma corda AA', as tensões $\bar{\tau}$ correspondentes aos elementos de superfície dos extremos da corda são tangentes ao contorno e convergem em um ponto P da linha de ação de Q .

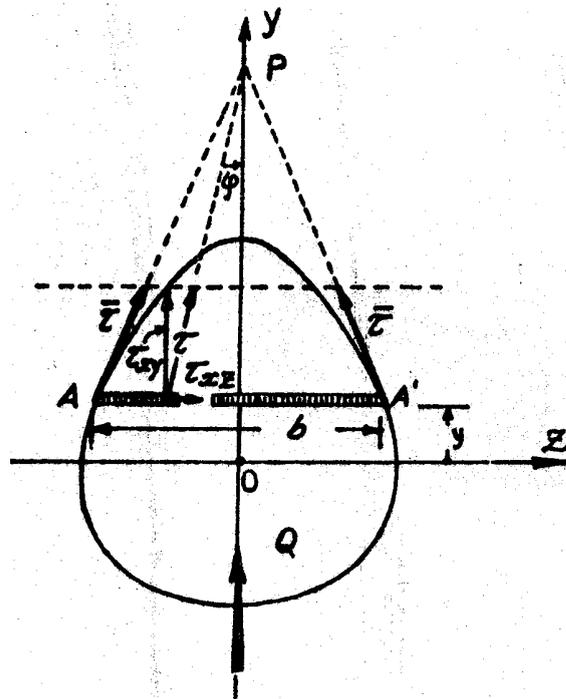


Fig.521-11

Admitiremos então que

1º) as tensões cisalhantes referentes aos elementos de superfície situados nos pontos de uma mesma corda (tal como AA') converjam no mesmo ponto (tal como P);

2º) as componentes dessas tensões, de suportes paralelos ao eixo solicitante, tenham para valor:

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{J_z} \frac{M}{b} = \psi \tau_m$$

521-XX

isto é, a mesma expressão 521-XI.

Nesse caso o valor de τ_{xy} **continuará a ser constante para todos os pontos situados sobre uma mesma corda, ao passo que a tensão total, τ , irá crescendo, ao longo da corda, à proporção que nos aproximamos do contorno da seção onde será $\bar{\tau}$.**

Designando por φ a inclinação do suporte de τ com o eixo de simetria, (o qual varia, quando nos deslocamos ao longo da corda, de zero até $\bar{\varphi}$) virá

$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{\cos \varphi} = \left(\frac{\psi}{\cos \varphi} \right) \tau_m \quad (a)$$

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_{xy}}{\cos \bar{\varphi}} = \left(\frac{\psi}{\cos \bar{\varphi}} \right) \tau_m \quad (b)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} \operatorname{tg} \varphi = \psi \operatorname{tg} \varphi \tau_m \quad (c)$$

$$\psi = \frac{S}{J_z} \frac{M}{b} \quad (d)$$

$$\tau_m = \frac{Q}{S} \quad (e)$$

521-XXI

Vê-se, assim, que a tensão cisalhante máxima ocorre na periferia da seção e será dada por

$$\tau_{\max} = \left(\frac{\psi}{\cos \bar{\varphi}} \right)_{\max} \tau_m$$

521-XXII

obtida de 521-XXI(b) quando $\left(\frac{\psi}{\cos \bar{\varphi}} \right)$ atingir a um valor máximo.

Seção circular:

Designando por R o raio do círculo teremos

$$b = 2R \cos \bar{\varphi}$$

$$y = R \operatorname{sen} \bar{\varphi}$$

$$M = \int_y^R bydy = \int_{-\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}} 2R^3 \cos^2 \bar{\varphi} \operatorname{sen} \bar{\varphi} d\bar{\varphi} = \frac{2}{3} R^3 \cos^3 \bar{\varphi}$$

ou
$$M = \frac{2}{3} R^3 \cos^3 \bar{\varphi}$$

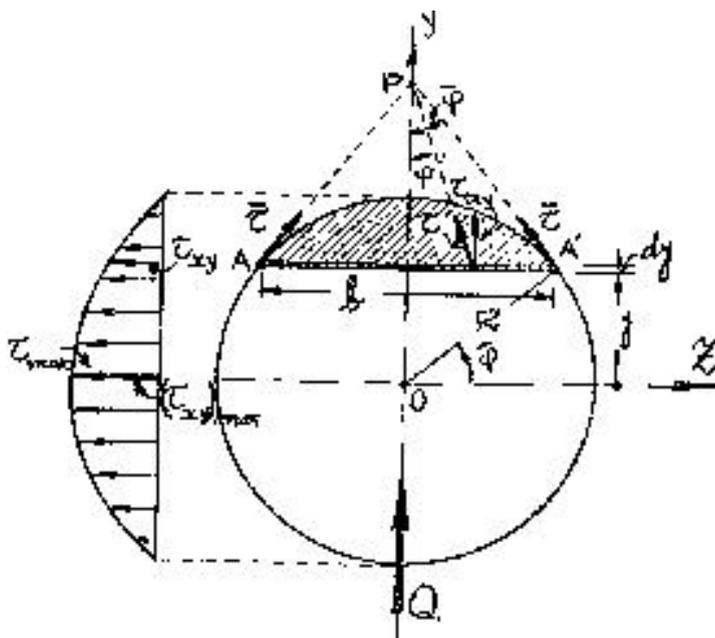


Fig.521-12

Notando que:

$$J = \frac{\pi R^4}{4}$$

a expressão 521-XX nos dá

$\Psi = \frac{4}{3} \cos^2 \bar{\varphi} = \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right] \quad (a)$
$\tau_{xy} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \cos^2 \bar{\varphi} = \quad (b)$
$\tau_{xy} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \left[1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right] \quad (b_1)$
$\tau_{xz} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \left[1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right] \operatorname{tg} \bar{\varphi} \quad (c)$
$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \frac{R^2 - y^2}{R^2 \cos \bar{\varphi}} \quad (d)$
$\bar{\tau} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2} = \quad (e)$
$\bar{\tau} = \frac{4}{3} \frac{Q}{R^2} \cos \bar{\varphi} \quad (e_1)$

A expressão 521-XXIII(b₁) nos mostra ser parabólica a lei de variação de τ_{xy} . Também 521-XXIII(e) que nos dá a lei de variação das maiores tensões tangenciais – as que ocorrem no contorno.

Mostra-nos que o máximo absoluto da tensão cisalhante ocorrem quando $\bar{\varphi}=0$ ou $y=0$, isto é, sobre o eixo médio OZ. Deve-se notar que sobre esse eixo OZ se tem

$$\tau_{\max} = \bar{\tau}_o = (\tau_{xy})_o = \frac{4}{3} \tau_m = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \quad 521-XXIV$$

Quanto à componente τ_{xz} da tensão total τ em cada ponto, observe-se que **ela é sempre nula para os pontos situados sobre o eixo solicitante**; quando sobre uma determinada corda, tal como AA', se caminha para as extremidades ela vai crescendo em valor absoluto de sorte que nessas extremidades

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \cos^2 \bar{\varphi} \operatorname{tg} \bar{\varphi} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \operatorname{sen} \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}$$

Então

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \left(\frac{y}{R} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2}$$

Seção triangular
(isósceles)

Designemos por **b** e **h**, respectivamente, a base e a altura do triângulo (Fig.521-13), e por **b₁** o comprimento da corda, perpendicular ao eixo solicitante, situada na ordenada **y**.

Então a expressão 521-XXI-d se torna

$$\psi = \frac{S}{J_z} \frac{M}{b_1}$$

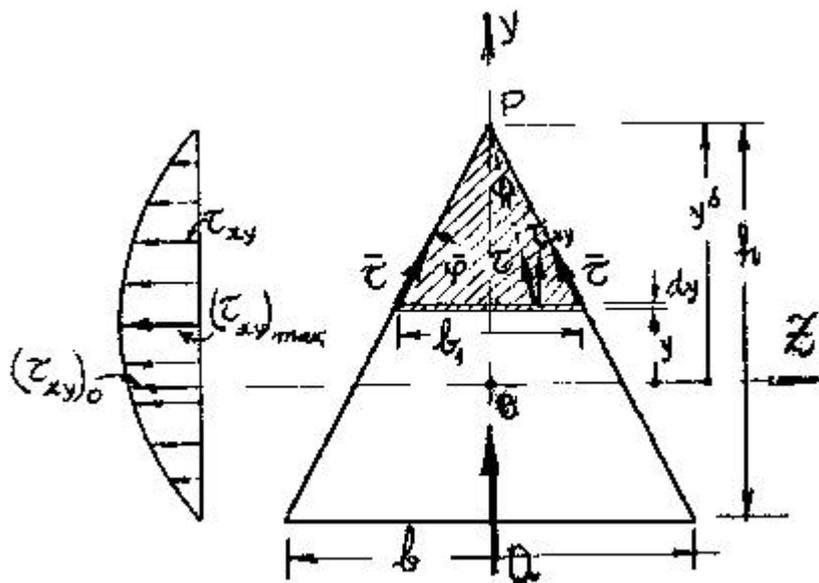


Fig.521-13

Teremos

$$b_1 = \frac{y^s - y}{h} b$$

$$|M| = \frac{1}{2} b_1 (y^s - y) \left[\frac{1}{3} (y^s - y) + y \right]$$

que desenvolvido dá:

$$M = \frac{b}{6h} (y - y)^2 (y^s + 2y)$$

Também

$$S = \frac{bh}{2}$$

$$J_z = \frac{bh^3}{36}$$

Então

$$\Psi = \frac{3}{h^2} [(y^s - y) (y^s + 2y)]$$

que em face de ser $y^s = \frac{2}{3}h$ dá:

$$\Psi = \frac{2}{3} \left[2 + 3 \left(\frac{y}{h} \right) - 9 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{4Q}{3bh} \left[2 + 3 \left(\frac{y}{h} \right) - 9 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (b)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} \operatorname{tg} \varphi \quad (c)$$

$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{\cos \varphi} \quad (d)$$

$$\bar{\tau} = \frac{4Q}{3bh} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2h} \right)^2} \left[2 + 3 \left(\frac{y}{h} \right) - 9 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (e)$$

521-XXV

As expressões 521-XXV(b) e 521-XXV(e) nos mostram que as tensões τ_{xy} e $\bar{\tau}$ variam parabolicamente.

Seus máximos ocorrem para Ψ_{\max} o que se dá quando

$$y = \frac{h}{6}$$

que não coincide com o eixo médio OZ, estando a fibra **a meia altura do triângulo**.

Ter-se-á para essa fibra:

$$\begin{aligned}\Psi_{\max} &= \frac{3}{2} \\ (\tau_{xy})_{\max} &= 3 \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{S} \\ \bar{\tau}_{\max} &= 3 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2h}\right)^2} \frac{Q}{bh}\end{aligned}$$

521-XXVI

Sobre o eixo médio teremos:

$$\begin{aligned}\Psi_o &= \frac{4}{3} \\ (\tau_{xy})_o &= \frac{8}{3} \frac{Q}{bh} \\ \bar{\tau}_o &= \frac{8}{3} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2h}\right)^2} \frac{Q}{bh}\end{aligned}$$

521-XXVII

Seção em losango*

Designaremos por **D** e **d**, respectivamente, as duas diagonais do losango (Fig.521-14).

No caso, por ser Z um eixo de simetria basta que façamos o estudo da distribuição das tensões na metade da seção de um lado desse eixo.

Assim, para coordenadas compreendidas entre $y = 0$ e $y = y^s$, teremos:

$$\Psi = \frac{S}{J_z} \frac{M}{b}$$

onde

$$S = \frac{Dd}{2} \quad J_z = 2 \frac{d \left(\frac{D}{2}\right)^3}{12} = \frac{dD^3}{48}$$

$$M = \frac{1}{2} b \left(\frac{D}{2} - y\right) \left(\frac{\frac{D}{2} - y}{3} + y\right) = \frac{1}{6} b \left(\frac{D}{2} - y\right) \left(\frac{D}{2} + 2y\right)$$

$$\frac{M}{b} = \frac{1}{6} \left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)y - 2y^2 \right] = \frac{D^2}{24} \left[1 + \left(\frac{y}{y^s}\right) - 2\left(\frac{y}{y^s}\right)^2 \right]$$

visto que $\frac{D}{2} = y^s = y^i$.

* Como caso particular temos a seção quadrada solicitada na direção de uma diagonal.

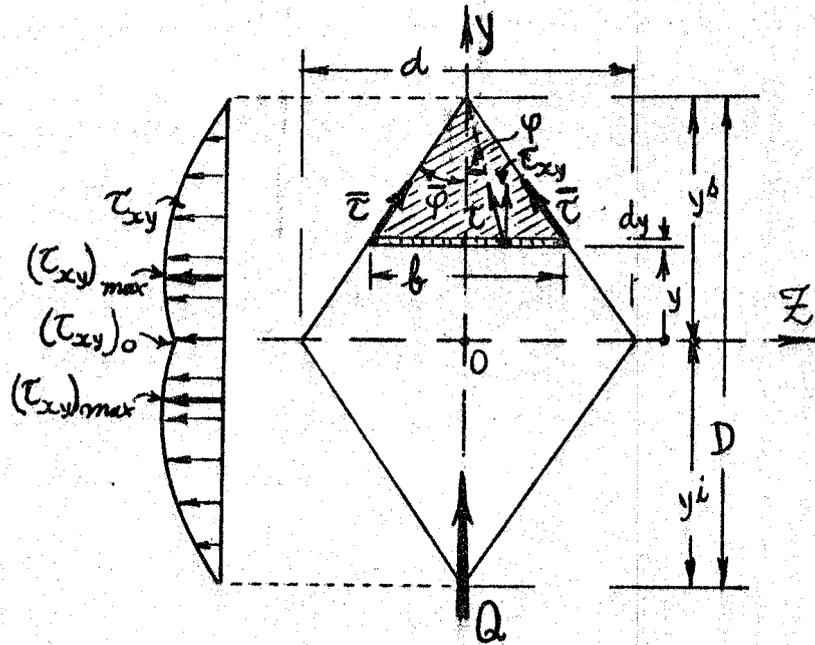


Fig.521-14

Então

$$\psi = \left[1 + \frac{y}{y^s} - 2 \left(\frac{y}{y^s} \right)^2 \right] (*) \quad (a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2Q}{Dd} \left[1 + \left(\frac{y}{y^s} \right) - 2 \left(\frac{y}{y^s} \right)^2 \right] (*) \quad (b)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} \operatorname{tg} \varphi \quad (c) \quad 521\text{-XXVIII}$$

$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{\cos \varphi} \quad (d)$$

$$\bar{\tau} = \frac{2Q}{Dd} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2} \left[1 + \left(\frac{y}{y^s} \right) - 2 \left(\frac{y}{y^s} \right)^2 \right] (*) \quad (e)$$

As expressões 521-XXVIII(b) e 521-XXVIII(e) mostram que as tensões τ_{xy} e $\bar{\tau}$ variam parabolicamente de cada lado do eixo OZ.

* Para pontos abaixo do eixo Z, cujas ordenadas y e y^i são negativas, os colchetes se tornam

$$\left[1 + \left(\frac{y}{y^i} \right) - 2 \left(\frac{y}{y^i} \right)^2 \right]$$

Seus máximos ocorrem para Ψ_{\max} o que se dá para

$$\frac{y}{y^s} = \frac{1}{4} \text{ e } \frac{y}{y^i} = -\frac{1}{4}$$

Nessas condições teremos dois máximos de mesmo valor, que não ocorrem sobre o eixo médio.

Então:

$$\begin{aligned} \Psi_{\max} &= \frac{9}{8} \\ (\tau_{xy})_{\max} &= \frac{9}{4} \frac{Q}{Dd} = \frac{9}{8} \frac{Q}{S} \\ \bar{\tau}_{\max} &= \frac{9}{4} \frac{Q}{Dd} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2} = \frac{9}{8} \frac{Q}{S} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2} \end{aligned}$$

521-XXIX

Sobre o eixo médio ($y=0$) teremos:

$$\begin{aligned} \Psi_o &= 1,0 \\ (\tau_{xy})_o &= \frac{2Q}{Dd} = \frac{Q}{S} = \tau_{\text{med}} \end{aligned}$$

521-XXX

c) Deformações locais

Uma vez obtidas as tensões em um ponto qualquer da seção do prisma por meio de uma das expressões anteriormente estabelecidas, as distorções correspondentes serão obtidas mediante a relação já conhecida

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Como consequência da distribuição não uniforme das tensões τ ao longo da seção, as distorções dos diferentes elementos, superpostos uns aos outros, também são diferentes acarretando empenamento das seções retas do prisma, primitivamente planas.

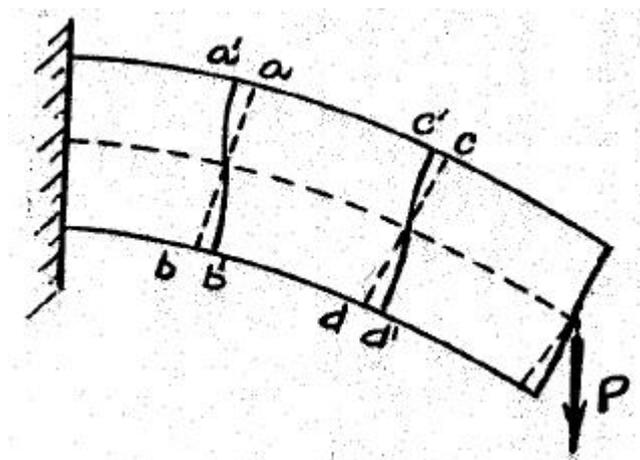


Fig.521-15

Para uma peça de seção constante sujeita a forças cortantes constantes, esse empenamento é o mesmo para todas as seções.

Assim, como se vê na Fig.521-15, em vez de termos **ab** e **cd** como posições finais de duas seções retas do prisma, teremos realmente **a'b'** e **c'd'**.

Como a tensão tangencial é nula nos pontos superior e inferior da seção, em **a'**, **b'**, **c'**, **d'**... as superfícies empenadas manter-se-ão perpendiculares às superfícies superiores e inferiores da peça; a inclinação máxima das seções empenadas, relativamente às mesmas supostas planas, dar-se-á quando τ for máximo, o que ocorre, para as seções mais comuns, sobre a fibra média.

Como se disse anteriormente, sendo esses empenamentos das seções idênticas enquanto a força cortante for constante, conclui-se que, nesses casos, os comprimentos das fibras elementares não são influenciados pelas distorções, ou seja, pela força cortante.

Então, para o estudo da distribuição das tensões normais devidas ao momento fletor, as conseqüências da hipótese da permanência da seção plana após a deformação não são afetadas nesses casos.

Quando, entretanto, a força cortante varia, o empenamento afeta os comprimentos das fibras elementares, e a hipótese de Bernoulli deve ser tomada como uma simples aproximação. Deve-se, contudo, convir que estudos mais apurados do fenômeno mostram que as diferenças decorrentes do fato mencionado só são importantes nas proximidades dos pontos de aplicação de cargas concentradas, caracterizando-se essas discrepâncias por serem eminentemente locais.

5.2.2 – Influência da força cortante na deformação do eixo do prisma

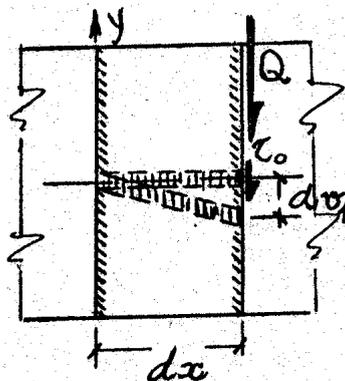
No item 5.1.2 estudamos a influência do momento fletor na deformação do eixo de um prisma fletido.

De um modo geral, todavia, o momento fletor é acompanhado de força cortante que exerce sua influência na curva final adquirida pela peça.

Vamos, neste parágrafo, procurar avaliar essa influência reportando-nos ao caso da flexão reta ocorrendo num plano de simetria da peça*, e mostrar que a mesma é bastante pequena nos casos correntes, de modo que pode ser abandonada, como geralmente se faz. A pequenês dessa influência não será muito modificada no caso de uma flexão desviada.

Consideremos, portanto, em uma peça fletida, uma seção onde Q seja a força cortante (Fig.522-1).

A tensão τ_{xy} na direção da força cortante será (521-XII), para um ponto qualquer da seção:



$$\tau_{xy} = \psi \tau_m = \psi \frac{Q}{S}$$

Em geral, para o centro de gravidade da seção se tem

$$(\tau_{xy})_o = \psi_o \frac{Q}{S}$$

Fig.522-1

Se todas as as fibras elementares constitutivas do prisma elementar, de comprimento dx , fossem independentes entre si, isto é, se não fossem ligadas umas às outras lateralmente, o abaixamento de cada superfície elementar da seção, relativamente à sua correspondente na seção vizinha, seria

$$dv = \psi \frac{Q}{SG} dx$$

e, em particular, para o eixo do prisma ter-se-ia

$$dv_o = \psi_o \frac{Q}{SG} dx \tag{a}$$

Havendo, entretanto, ligação lateral, as fibras que tendem a se deslocar mais arrastam as que tendem a se deslocar menos; estas diminuem o deslocamento das que tendem a se deslocar mais. Assim sendo, o abaixamento do centro de gravidade de uma seção relativamente ao da seção vizinha será, na realidade, da forma

$$dv_1 = \chi \frac{Q}{SG} dx$$

522-I

* Quando não se tratar de um plano de simetria, o plano solicitante da peça deverá passar pelo **centro de torção**. Esse assunto será tratado em 5.7.

onde χ é um fator corretivo de deformação cujo valor será, evidentemente, diferente de Ψ_0 (na maioria dos casos, menor).

Note-se que, enquanto Ψ variava de ponto para ponto qualquer que fosse a forma da seção, agora χ , por se referir ao centro de gravidade, terá **um valor constante para cada forma de seção**.

O abaixamento, pois, de uma seção de abcissa x_1 relativamente a outra de abcissa x_0 , será

$$v_1 = \frac{1}{G} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\chi Q}{S} dx$$

$$\boxed{v_1 = \frac{\chi}{SG} \int_{x_0}^{x_1} Q dx} \quad 522-II$$

Esta expressão nos mostra que a **influência da força cortante no desnível relativo de duas seções é proporcional à área do diagrama de forças cortantes entre essas mesmas seções**.

Antes de utilizar a expressão 522-II para mostrar a influência da força cortante em face da do momento fletor na deformação do prisma, geralmente pequena, deveremos saber calcular os coeficientes χ para as diferentes formas de seção.

Cálculo de c

Para um prisma elementar de comprimento dx , o trabalho da força cortante (tomada como força exterior a esse prisma) é igual ao potencial elementar nele armazenado durante a deformação correspondente, ou

$$\frac{1}{2} Q dv_1 = \int_{dv} \overline{\sigma}^* dv$$

ou ainda

$$\frac{1}{2} Q dv_1 = dx \int_s \frac{\tau^2}{2G} ds$$

Como $\tau = \Psi \frac{Q}{S}$ e considerando a expressão 522-I virá

$$\boxed{\chi = \frac{\int_s \Psi^2 ds}{S}} \quad 522-III$$

Para as **seções retangulares** temos, de acordo com 521-VI:

$$\int_s \Psi^2 ds = \frac{9}{4} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] b dy = \frac{6}{5} bh$$

Então, a expressão 522-III dá

$$\chi = 1,2.$$

Para as **seções circulares**, considerando a expressão 521-XIV(a) e adotando as mesmas notações da Fig.521-12 virá:

$$\int_s \Psi^2 ds = \frac{32}{9} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^6 \bar{\varphi} d\bar{\varphi}$$

Chega-se à expressão acima notando que $ds = b dy$ e que

$$y = R \operatorname{sen} \bar{\varphi} ; \quad dy = R \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi}$$

$$b = 2R \cos \bar{\varphi}$$

A última integral é resolvida por meio de redução e seu valor é:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \bar{\varphi} d\bar{\varphi} = \frac{5}{16} \pi$$

Então

$$\int_s \Psi^2 ds = \frac{10}{9} \pi R^2$$

e 522-III conduz a

$$\chi = \frac{10}{9} \approx 1,1.$$

Para perfis $\bar{\Gamma}$ (duplo T) chega-se aos valores aproximados seguintes:

$$\begin{array}{ll} \bar{\Gamma}8 & \chi = 2,4 \\ \bar{\Gamma}50 & \chi = 2,0 \end{array}$$

Admite-se que para os perfis intermediários se possa adotar uma interpolação linear.

Passemos, agora, a mostrar como é pequena, nos casos normais, a influência das forças cortantes na deformação das peças fletidas.

Para isso nos utilizaremos de exemplos simples.

Seja o caso de calcular a flecha em uma viga simplesmente apoiada, carregada com uma carga concentrada no meio do vão.

É este um caso bem desfavorável para o que desejamos provar porque o diagrama das forças cortantes se mantém sem diminuição de valor desde um apoio até o centro da viga, onde vamos calcular o abaixamento.

A influência do momento fletor é (expressão 512-XIII):

$$\frac{P\ell^3}{48EJ_z} \quad (a)$$

A influência da força cortante será dada pela expressão 522-II. Se a seção da peça for retangular de base b e altura h virá:

$$\chi = 1,2$$

$$S = bh = \frac{12 J}{h^2}$$

Supondo um material para o qual se tenha $\nu = 0,25$

$$G = \frac{1}{2(1+\nu)} E = 0,4 E$$

Considerando ainda que

$$\int_0^{\ell/2} Q dx = \int_0^{\ell/2} \frac{P}{2} dx = \frac{P\ell}{4}$$

a influência da força cortante no valor da flecha, pela expressão 522-II, será:

$$\frac{P\ell h^2}{16EJ_z} \quad (b)$$

Então o valor da flecha será:

$$f = \frac{P\ell^3}{48EJ_z} \left[1 + 3 \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 \right] \quad 522-IV$$

Esta expressão mostra que a parcela de influência da força cortante tem seu valor relativo variável conforme a relação h/ℓ entre as alturas da viga e seu vão.

Quando $h/\ell = 1/5$ a influência da força cortante corresponde a 12% da influência do momento fletor; quando $h/\ell = 1/10$ essa influência baixa para, apenas, 3% e assim por diante.

Procedendo, analogamente, com uma viga simplesmente apoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída q, teríamos, para $\nu = 0,25$ e seção retangular:

$$f = \frac{5q\ell^4}{384EJ_z} \left[1 + 2,4 \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 \right] \quad 522-V$$

Vê-se que a influência da força cortante é menor que no caso anterior, para os mesmos valores da relação h/l .

Conclui-se que, nos casos gerais, a parcela de influência da força cortante na deformação das peças fletidas é pequena em presença da parcela de influência do momento fletor. Esta última, por ser a mais ponderável é, assim, aquela que convém ser considerada em tais cálculos.

Só quando a peça tem altura de seção relativamente grande em presença de seu comprimento é que a força cortante começa a pesar em tais cálculos.

Este o motivo pelo qual, nos cálculos correntes, não se costuma levar em conta os efeitos da força cortante. Então **todo o estudo da elástica feito em 5.1.2, tendo em vista, apenas, o efeito dos momentos fletores, pode ser tomado como definitivo**, ficando bem entendido que se trata de uma aproximação que satisfaz às necessidades dos cálculos técnicos.

5.2.3 – Influência da força cortante no potencial elástico armazenado

A força cortante Q produz, em cada ponto da peça fletida, tensões τ no plano da seção reta e no seu ortogonal, em consequência, um potencial elástico será armazenado, e sua expressão, por unidade de volume, é obtida em 231-IX:

$$\overline{\sigma}^* = \frac{\tau^2}{2G}$$

O trabalho total de deformação da peça, suposto o regime elástico, será

$$\overline{\sigma} = \int_V \overline{\sigma}^* dv = \frac{1}{2G} \int_V \tau^2 dv$$

Para peças prismáticas, como as nossas, poderemos escrever:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{2G} \int_{\ell} dx \int_S \tau^2 dS \quad (a)$$

De um modo geral

$$\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$$

onde τ_{xy} sendo a tensão na direção da própria força cortante, τ_{xz} sê-lo-á na direção perpendicular. Esta última, nos casos de seções compostas de elementos retangulares torna-se nula.

No caso geral, pois, o potencial elástico terá uma parcela dependente das tensões τ_{xz} perpendiculares à própria força cortante. Entretanto, considerando que essa influência é pequena, é possível desprezá-la, utilizando-se, em todos os casos, a expressão que resulta para as seções compostas de retângulos, em que elas são nulas.

Nessas condições fazendo, como anteriormente,

$$\tau = \psi \frac{Q}{S}$$

virá:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{2G} \int_{\ell} dx \int_S \frac{\psi^2 Q^2}{S^2} dS$$

E levando em conta 522-III chegar-se-á

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{2G} \int \frac{\chi Q^2}{S} dx$$

523-I

que dá a influência da força cortante no trabalho de deformação da peça fletida. Ela deveria ser adicionada à proveniente da influência de momento fletor, obtida com a expressão 513-I.

Os cálculos correntes mostram, entretanto, que a parcela 523-I é pequena em face da parcela 513-I, a não ser nos casos excepcionais de peças extremamente curtas relativamente às suas alturas.

Por esse motivo, assim como no cálculo das deformações das peças fletidas é costume negligenciar a força cortante em presença do momento fletor, idêntico procedimento se tem ao calcular o trabalho de deformação de tais peças, o qual diga-se de passagem, está intimamente ligado àquelas deformações.

5.3 – VIGAS DE RESISTÊNCIA CONSTANTE OU DE IGUAL RESISTÊNCIA

5.3.1 – Apresentação do problema. Exemplos simples

Quando uma viga tem seção constante, as tensões normais máximas, de tração e de compressão, relativas a elementos de superfície de suas seções retas são variáveis, a menos que o diagrama solicitante de momentos fletores seja também constante.

O mesmo acontece nas peças de seção reta variável quando essa variação não estiver convenientemente ligada ao diagrama de momentos fletores.

Em outras palavras, nesses casos supramencionados, as tensões $\sigma^{s,i}$ não se mantêm constantes ao longo da peça.

Ora, do ponto de vista do consumo de material é de toda a conveniência que tal constância ocorra porque poderemos fazer com que esses valores constantes de σ^s ou σ^i sejam iguais aos valores admissíveis $\sigma_{T_{adm}}$ ou $\sigma_{C_{adm}}$ obtendo-se uma viga que, em todas as suas seções, tenha as dimensões estritamente necessárias à cobertura do diagrama de momentos fletores.

Uma viga nessas condições se denomina de **viga de resistência constante** ou de **igual resistência**.

A determinação da maneira por que se haverá de fazer variar a seção de uma viga de modo a que a mesma apresente resistência constante depende do diagrama de momentos fletores, portanto, do sistema estático e das cargas atuantes.

Como exemplo trataremos do caso de uma viga em balanço carregada com uma carga concentrada na sua extremidade (Fig.531-1).

O momento fletor ao longo de uma tal viga, é um valor absoluto

$$M = Px$$

de modo que, para termos uma peça de igual resistência é preciso que

$$\frac{M}{W} = \text{constante}$$

isto é, que W varie, também, linearmente com x , ou seja

$$W = kx \quad (a)$$

o que pode ser obtido de várias maneiras, dependendo, inclusive, da forma da seção.

Tratemos somente da **forma retangular** em que

- a largura da seção é mantida constante;
- a altura da seção é mantida constante.

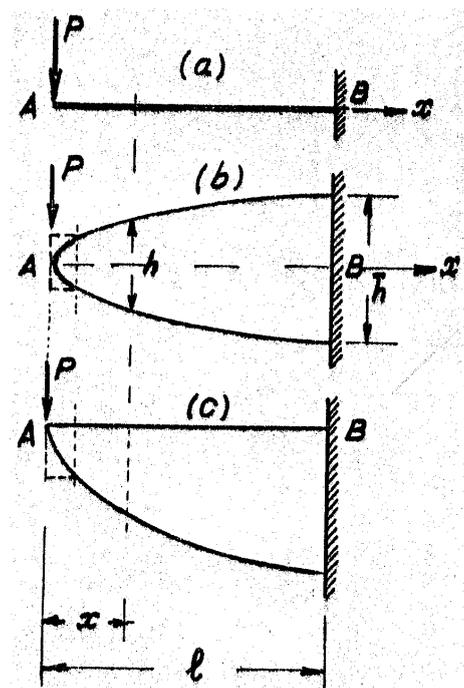


Fig.531-1

Quando a seção for de largura b constante

$$W = \frac{bh^2}{6} = kx \quad \text{ou}$$

$$h^2 = \frac{6k}{b}x = K_1x \quad (\text{b})$$

Para se obter o valor da constante K_1 notaremos que, no engastamento teremos

$$\bar{h}^2 = K_1 \ell \quad \text{ou} \quad K_1 = \frac{\bar{h}^2}{\ell}$$

Então:

$$h^2 = \left(\frac{x}{\ell}\right) \bar{h}^2$$

531-I

que mostra a altura variando parabolicamente.

A altura \bar{h} será obtida dimensionando a seção do engastamento para um momento $P\ell$, em valor absoluto.

A peça tomará a forma, em perfil, da Fig.531-1, (b) ou (c) devendo-se notar que, a extremidade A seria de altura nula. Este último resultado se deve ao fato de só se ter considerado o efeito do momento fletor. Nas aplicações práticas, na região de momentos fletores muito pequenos é preciso considerar a resistência às tensões tangenciais decorrentes das forças cortantes de modo que, próximo à extremidade A, a viga deverá manter uma certa altura capaz de transmitir a força cortante.

No que diz respeito à deformação dessa viga, calcularemos sua flecha que, segundo o procedimento de Möhr vale

$$v_{\max} = \int_0^{\ell} \frac{Px \, x}{EJ} \, dx = \frac{12P}{Eb} \int_0^{\ell} \frac{x^2}{h^3} \, dx$$

Tendo em conta a expressão 531-I virá:

$$v_{\max} = \frac{12P}{Eb} \int_0^{\ell} \frac{x^2 \ell^{\frac{3}{2}}}{h^3 x^{\frac{3}{2}}} \, dx = \frac{12P \ell^{\frac{3}{2}}}{Eb \bar{h}^3} \int_0^{\ell} x^{1/2} \, dx$$

Notando que $\bar{J} = \frac{b \bar{h}^3}{12}$ virá:

$$v_{\max} = \frac{2}{3} \frac{P \ell^3}{E \bar{J}}$$

531-II

que mostra que a flecha é o dobro da que ocorreria se a peça fosse de seção constante igual à do engastamento, isto é, que a peça de resistência constante, embora ofereça a mesma resistência da peça de seção constante, tem menos rigidez que esta última.

Quando a seção for de altura h constante

$$W = \frac{bh^2}{6} = kx$$

ou

$$b = \frac{6k}{h^2}x = K_2x \tag{c}$$

que nos mostra a largura variando linearmente conforme se vê na Figura 531-2(b) em planta.

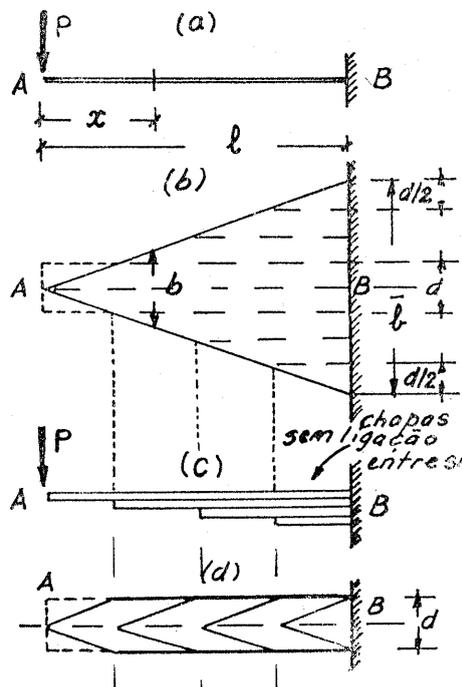


Fig.531-2

O valor de K_2 será obtido fazendo no engaste $\bar{b} = K_2\ell$ ou $K_2 = \frac{\bar{b}}{\ell}$.

Então

$$b = \left(\frac{x}{\ell}\right)\bar{b}$$

531-III

Do mesmo modo obtém-se \bar{b} dimensionando a seção do engastamento para o momento $P\ell$, em valor absoluto.

Da mesma maneira que no exemplo anterior, a peça tende para seção nula em A. A consideração da resistência necessária às tensões tangenciais decorrentes da força cortante faz com que nas proximidades dessa extremidade se tenha de manter uma certa largura de seção.

No que diz respeito à deformação dessa viga observaremos, em primeiro lugar, que os momentos de inércia J das diferentes seções são proporcionais às abscissas x de modo que os

momentos reduzidos $\frac{M}{EJ}$ serão constantes, isto é, teremos uma elástica de curvatura constante, ou seja, um arco de circunferência.

Nesse caso, as deformações sendo pequenas, o abaixamento máximo pode ser tomado, com aproximação suficiente, como

$$v_{\max} = \frac{\ell^2}{2\rho}$$

onde ρ é o raio de curvatura do arco de círculo.

Considerando que em valores absolutos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = \frac{\bar{M}}{EJ} = \frac{P\ell}{EJ} = \frac{2\bar{\sigma}}{Eh}$$

virá:

$$\begin{array}{l} v_{\max} = \frac{P\ell^3}{2E\bar{J}} \\ \text{ou} \\ v_{\max} = \frac{\bar{\sigma}}{E} \frac{\ell^2}{h} \end{array}$$

531-IV

onde $\bar{\sigma}$ é o valor absoluto das tensões nos bordos da seção do engastamento.

Vê-se que a flecha é 1,5 vezes maior que a da viga de seção constante e que é proporcional ao quadrado do vão e inversamente proporcional à altura da seção.

Os resultados obtidos neste último exemplo, em que se tratou de uma viga em balanço de resistência constante e seção retangular de altura h constante podem ser aplicados no cálculo aproximado das **molas em folhas** formando um feixe.

Como toda a chapa triangular (Fig.531-2b) se deforma segundo um arco de círculo, isto é, mantendo a mesma curvatura ao longo de todo o seu comprimento é possível supô-la dividida em um certo número de faixas de largura d com comprimentos variáveis, as quais, indiferentemente, podem estar dispostas lateralmente ou verticalmente, umas livremente sobre as outras, como se vê nas Figuras 531-2(b),(c),(d).

Todo o atrito entre as folhas assim formadas é desprezado.

Nesse caso as fórmulas 531-IV podem ser aplicadas **com suficiente aproximação**.

Deve-se notar que

$$\begin{array}{l} \bar{J} = \frac{\bar{b}h^3}{12} = \frac{n}{12}dh^3 \\ \bar{W} = \frac{n}{6}dh^2 \\ \bar{\sigma} = \frac{P\ell}{\bar{W}} \end{array}$$

531-V

onde n é o número de folhas e d a sua largura.

Ao longo de uma seção praticada no feixe as tensões se distribuirão como na Fig.531-3.

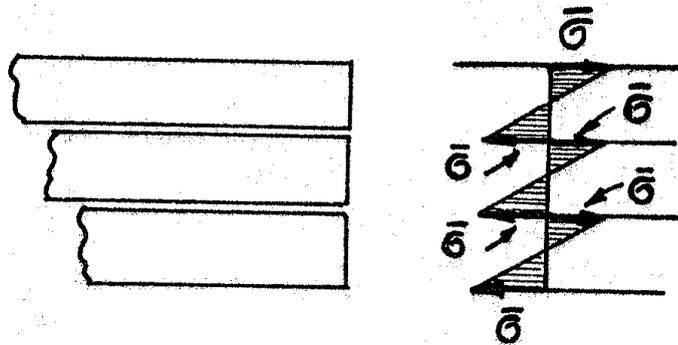


Fig.531-3

5.4 – EFEITOS DO MOMENTO FLETOR E FORÇA CORTANTE COMBINADOS

5.4.1 – Os estados de tensão reinantes no caso geral da flexão simples

Até aqui os efeitos do momento fletor e da força cortante foram apreciados separadamente. No que diz respeito à deformação geral do prisma e ao potencial armazenado esse fato não traz maiores conseqüências porque, como se viu em 5.2.2 e em 5.2.3, a influência da força cortante é, em geral, pequena; em qualquer caso, além disso, bastaria adicionar as duas parcelas.

No que tange às tensões, contudo, o problema da superposição dos efeitos exige um tratamento mais cuidadoso, visto que momento fletor e força cortante dão lugar a tensões que, para elementos contidos na seção reta do prisma, são de naturezas diferentes, pois que são tensões normais e tangenciais, respectivamente, com características de distribuição inteiramente próprias.

Para suporte de nosso raciocínio, consideremos uma peça de seção retangular fletida no plano XOY.

Em um ponto qualquer dessa peça, as tensões relativas a um elemento de superfície da seção reta passando pelo ponto serão:

$$\sigma = -\frac{My}{J_z} \quad (\text{influência do momento fletor})$$

$$\tau = \frac{Q}{J_z} \frac{M}{b} \quad (\text{influência da força cortante})$$

Essas tensões se distribuem ao longo da seção conforme se viu em 5.1.1.2 e em 5.2.1.2 (Fig.541-1).

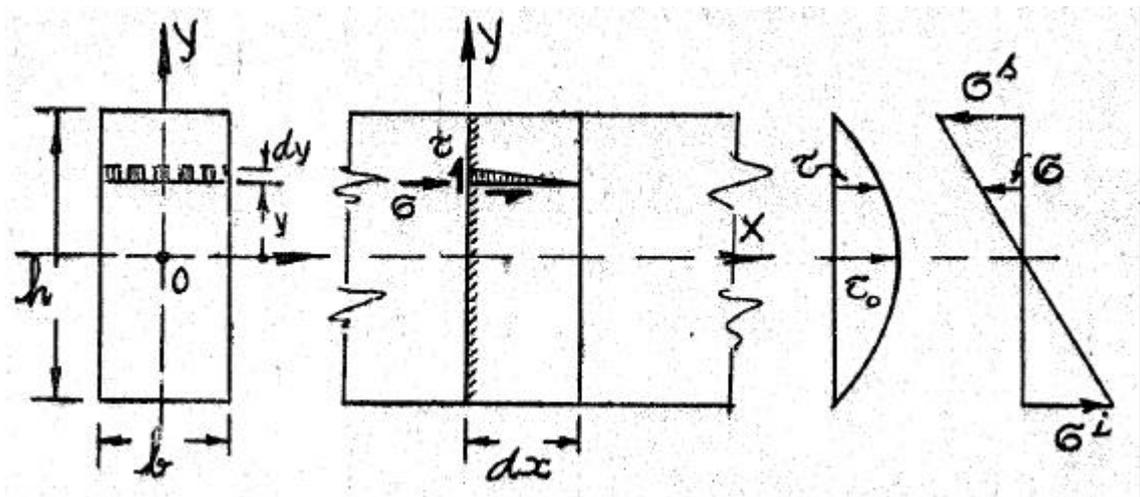


Fig.541-1

Pode-se, portanto, concluir que o **efeito conjunto de momento fletor e da força cortante dá lugar, em cada ponto, a um estado plano de tensões** (o plano solicitante, no ponto, sendo definido pelos suportes de σ e τ). Esquemáticamente, ter-se-á, no caso de um ponto qualquer, a Figura 541-2(a e b), onde se supõe a existência de uma força cortante positiva.

A fig.(a) corresponde à zona tracionada, e a fig.(b) à zona comprimida da seção reta.

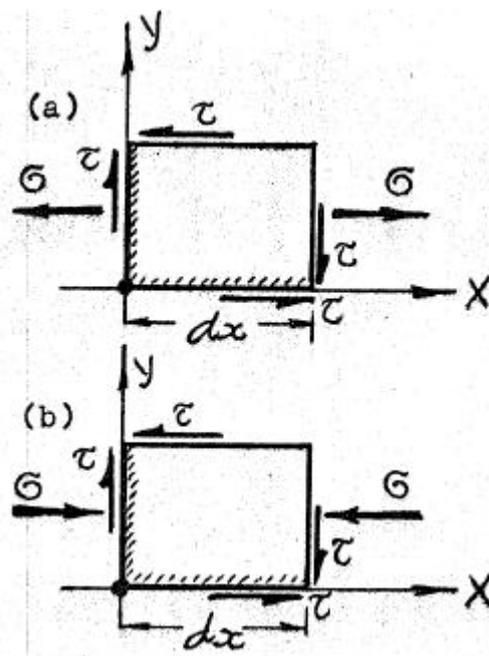


Fig.541-2

Claro é que as tensões σ e τ que definem esse estado de tensão variam de ponto para ponto, dando lugar a que **dois casos particulares** importantes possam ocorrer, a saber:

a) O caso em que τ se anula, permanecendo $\sigma \neq 0$

Tem-se, então, um **estado uni-axial** de tração ou compressão em que a tensão σ_0 é a própria tensão σ referente ao elemento de seção reta da peça.

Este caso ocorre nos pontos **superiores e inferiores** das seções da peça e em **todos os pontos das seções em que seja nula a força cortante**.

A tensão σ calculada em função do momento fletor é uma das **tensões principais** no ponto, **sendo nula a que lhe é perpendicular**.

b) O caso em que σ se anula, permanecendo $\tau \neq 0$

Tem-se, então, um **estado de cisalhamento puro** definido pelas próprias tensões τ ocorrentes no plano da seção reta e no seu perpendicular.

Este caso ocorre nos **pontos situados sobre a fibra neutra**.

As tensões principais serão, então, iguais, de sinais contrários, de valores absolutos iguais ao de τ , e se inclinam de $\pm 45^\circ$ com a fibra neutra.

Vê-se, assim, que exceção feita dos casos mencionados na alínea a) anterior, a tensão σ calculada com auxílio das expressões 511-I(c), 511-VIII(c) ou 511-IX(c) não é tensão principal no ponto, isto é, em geral, em um ponto qualquer, o plano da seção reta da peça não é plano principal.

Assim sendo, nesses pontos haverá em uma direção, diferente da do eixo prisma, uma tensão normal (principal) de valor absoluto maior que a tensão σ referente ao elemento da seção reta. Na zona tracionada será σ_I ; na zona comprimida será σ_{II} . Em qualquer caso a outra tensão principal lhe será perpendicular, e essas direções principais no ponto poderão ser determinadas conforme se viu em 2.1.1 (fórmula 211-IV).

De uma maneira geral, quando se passa de um para outro ponto, a inclinação desse par de direções principais varia, relativamente à direção do eixo da peça.

Denominam-se **trajetórias das tensões principais** ou **linhas isostáticas** a curvas tais que suas tangentes e normais, em cada ponto, estejam nas direções principais nesses mesmos pontos.

É claro que essas linhas isostáticas formarão uma rede, cruzando-se, duas a duas, em ângulo reto em cada ponto, como se vê, a título de simples exemplificação, na Fig.541-3, onde se apresenta o caso de uma viga em balanço, de seção retangular, carregada na ponta.

Notem-se as **isostáticas de tração** (em linhas cheias) e as **de compressão** (em linhas pontuadas), as quais se cortam em ângulos retos, passando pela fibra neutra sob ângulos de 45° .

A determinação da rede de isostáticas é um dos problemas que interessam ao estudo experimental do comportamento de peças sob a ação de forças exteriores, particularmente quando esse estudo se faz com auxílio dos métodos foto-elásticos.

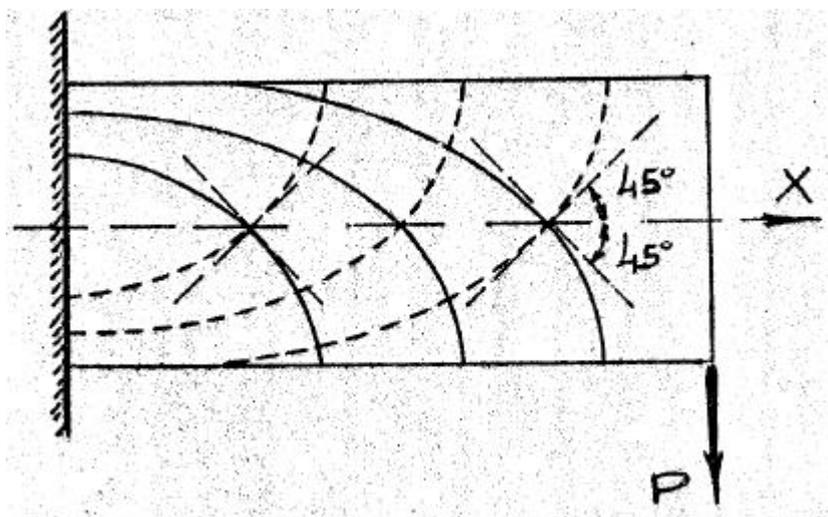


Fig. 541-3

5.4.2 – O dimensionamento e a verificação da estabilidade das peças fletidas

De tudo o que se viu em 5.4.1 conclui-se que a aceitabilidade de uma peça sujeita a flexão simples, isto é sujeita aos efeitos combinados do momento fletor e da força cortante vai depender, no que diz respeito às tensões* :

a) **das tensões normais \mathbf{S}^s ou \mathbf{S}^i** referentes aos elementos de seção reta do prisma nos pontos mais afastados do eixo neutro da seção em que esses valores sejam maiores. Nas peças de seção constante essas seções serão as de maiores momentos fletores, \bar{M} .

Para o dimensionamento serão determinados os módulos W^s e W^i que permitam às tensões σ^s e σ^i nessas seções não ultrapassarem as tensões $\sigma_{T_{adm}}$ e $\sigma_{C_{adm}}$ convenientemente escolhidas para os pontos superior ou inferior.

No caso de se ter de verificar a estabilidade de uma peça já dimensionada calcular-se-iam os momentos fletores resistentes em conformidade com o que se viu em 5.1.1.2 e em 5.1.1.3, os quais serão comparados com os solicitantes decorrentes da ação exterior.

b) **das tensões tangenciais τ_o** que definem os estados de cisalhamento puro ocorrentes na fibra média, onde $\sigma=0$.

O maior valor de τ_o na peça será posto em confronto com o valor de τ_{adm} próprio do material, daí decorrendo seja o dimensionamento seja a verificação. Para peças de seção constante, τ_o será calculado para a seção de maior força cortante \bar{Q} .

Note-se que, conforme o sistema estático, as seções a estudar, tendo em vista a alínea a) anterior, podem ser ou não as mesmas que as convenientes a esta alínea b). Em geral, o primeiro caso ocorre nas vigas de seção constante em consolo, pois que, para os carregamentos mais usados, é no engastamento que se tem \bar{M} e \bar{Q} simultaneamente; nas vigas simplesmente apoiadas, em geral, \bar{M} e \bar{Q} ocorrem em seções distintas.

O critério desta alínea b) é particularmente importante no caso de certos materiais que apresentam pequena resistência ao cisalhamento, pelo menos em uma direção, como é o caso das madeiras quando se considera a direção paralela às suas fibras. Nas vigas de madeira as fibras têm a orientação do eixo da própria peça, direção em que se manifesta a tensão tangencial $(\tau_{yx})_o$.

c) **das maiores tensões principais** ocorrentes em torno de um ponto qualquer da peça.

Conforme se viu em 5.4.1, os efeitos combinados do momento fletor e da força cortante fazem com que, em cada ponto, haja uma tensão principal de maior valor absoluto que a tensão normal referente ao elemento de seção reta no ponto, salvo os casos de exceção lá mencionados.

Assim sendo, o critério da alínea a) deste parágrafo que pressupõe as maiores tensões normais na peça como sendo as tensões σ^s ou σ^i pode não ser verdadeiro em certos casos, bastando, para isso, que a influência da força cortante (através a tensão τ no ponto) seja

* Em certos casos a deformabilidade da peça decide de sua aceitabilidade ou limita o seu carregamento.

capaz de aumentar bastante a diferença entre a tensão σ paralela ao eixo da peça e a tensão principal de mesmo sinal. Nesse caso pode acontecer que essa tensão principal ultrapasse a tensão σ^s ou σ^i no bordo da seção.

Esse fato em geral não ocorre em peças de seções correntes como a retangular ou circular e semelhantes, mas costuma ocorrer para as formas de seção que possibilitem o aparecimento de tensões tangenciais elevadas em pontos ainda distantes do centro de gravidade, quando as tensões σ , decorrentes do momento fletor, ainda são elevadas. **É o caso das seções sob a forma de perfis laminados** \perp , \square , etc.

Como o fato decorre da ação combinada do momento fletor e da força cortante, ele exige a nossa atenção quando em face dos sistemas estáticos em que, **na mesma seção**, ocorram momentos fletores e forças cortantes, ambos elevados.

O critério desta alínea c) é, em geral, levado em conta, apenas, sob a forma de verificação de tensões em pontos críticos da peça que já tenha sido dimensionada ou verificada tendo em vista os critérios usuais das alíneas a) e b)*.

5.4.2.1 – Exemplos de dimensionamento e de verificação

Admitiremos, para simplificar, peças de seção constante.

1º Exemplo: Peças de seção sem particularidades

É o caso das seções retangulares, circulares e semelhantes. Os critérios das alíneas a) e b) anteriores são suficientes.

Suponhamos um sistema estático tal que \bar{M} e \bar{Q} sejam os maiores momento fletor e força cortante, ocorrentes na mesma ou em seções distintas.

Suponhamos como admissíveis as seguintes tensões:

σ_{adm} – a tensão normal admissível na flexão (em valor absoluto). Será a de tração ou de compressão dependente de uma análise prévia da simetria ou não da seção relativamente ao eixo médio e do sinal do momento fletor.

τ_{adm} – tensão tangencial admissível (valor absoluto).

Tendo em vista o momento fletor a tensão normal no bordo mais afastado do eixo neutro será, em valor absoluto:

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{M}y}{J_z} \quad (a)$$

* Para tais peças será preciso haver uma certa folga nos limites fixados nas alíneas a) e b) de modo que, ao verificar os pontos críticos, que ainda são mais solicitados, nestes, não se ultrapassem as tensões admissíveis.

E, tendo em vista a força cortante, o cisalhamento mais intenso será:

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{Q}}{J_z} \left(\frac{M}{b} \right)_{\max} \quad (b)$$

Para o dimensionamento ou a verificação de uma peça dimensionada, uma vez calculados esses valores, bastaria compará-los com os admissíveis.

Poder-se-ia, também, operar como segue.

Dividindo (a) por (b) virá

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\tau}} = \frac{\bar{M}}{\bar{Q}} \bar{y} \left(\frac{b}{M} \right)_{\min} \quad (c)$$

Por outro lado, consideremos a relação

$$\frac{\sigma_{\text{adm}}}{\tau_{\text{adm}}} = n \quad (d)$$

que só depende do material.

Ora, se $\bar{\sigma}$ atingir σ_{adm} antes de $\bar{\tau}$ atingir τ_{adm} ter-se-á:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\tau}} > \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\tau_{\text{adm}}}$$

e os efeitos do momento fletor são mais de temer que os da força cortante.

Se $\bar{\tau}$ atingir τ_{adm} antes de $\bar{\sigma}$ atingir σ_{adm} virá:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\tau}} < \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\tau_{\text{adm}}}$$

e os efeitos da força cortante devem ser os mais temíveis.

Se, finalmente, $\bar{\sigma}$ e $\bar{\tau}$ atingirem simultaneamente σ_{adm} e τ_{adm} virá:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\tau}} = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\tau_{\text{adm}}}$$

e será indiferente nos preocuparmos com qualquer das duas solicitações.

Grupando e substituindo os valores:

$$\boxed{\frac{\bar{M}}{\bar{Q}} \bar{y} \left(\frac{b}{M} \right)_{\min} > n}$$

532-I

expressão que nos permite decidir entre o momento fletor e a força cortante no dimensionamento ou na verificação.

Como aplicação, suponhamos o caso de uma viga simplesmente apoiada com seção retangular, carregada uniformemente ao longo do vão.

Virá:

$$\bar{M} = \frac{q\ell^2}{8} \quad ; \quad \bar{Q} = \frac{q\ell}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{h}{2} \quad ; \quad \left(\frac{b}{M} \right)_{\min} = \frac{b}{\frac{bh^2}{8}} = \frac{8}{h^2}$$

onde n é a carga distribuída, ℓ o vão da viga, b e h as dimensões da seção.

Então, se a peça for de madeira com

$$\sigma_{\text{adm}} = 10 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{adm}} = 0,8 \text{ MPa}$$

teremos:

$$\frac{\ell}{h} > 12,5$$

significando que para peças com vão maior que 12,5 vezes a altura só devemos temer o momento fletor; se $\ell < 12,5h$ temeremos apenas a força cortante.

Vê-se que a relação $\frac{\ell}{h}$ entre o vão e a altura da seção é um dos fatores decisivos na importância relativa do momento fletor e da força cortante quanto à estabilidade da peça; outros fatores são a natureza do material, o sistema estático, e a forma da seção.

Conhecida, então, a solicitação mais perigosa, restará, apenas, utilizar uma das expressões anteriores (a) ou (b).

2º Exemplo: Peças com seções particulares

Neste caso haver-se-á de verificar o comportamento de **certos pontos críticos** tendo já a peça dimensionada com folga nos moldes do exemplo anterior.

Consideremos o caso de uma viga em balanço formada por um perfil $\text{I}40$ nas condições da Figura 542-1.

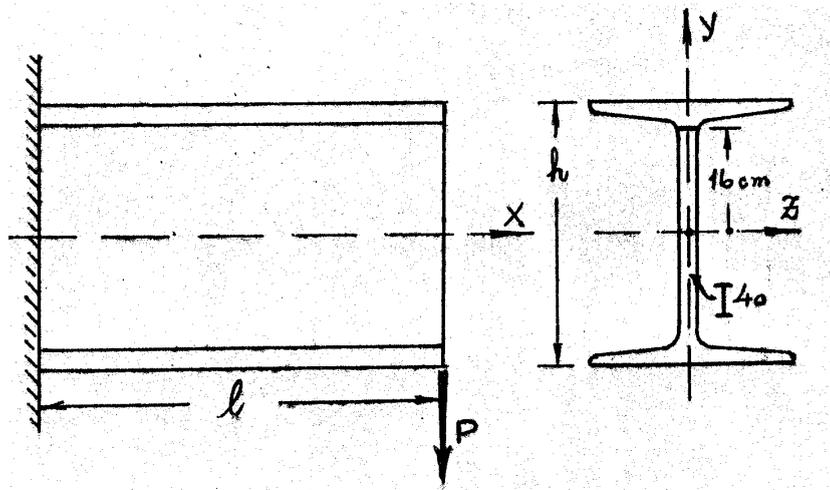
Na seção do engastamento teremos, para $\ell=1,5h=60$ cm.

$$\bar{M} = -60P$$

$$\bar{Q} = P$$

As tensões normais nos pontos superiores e inferiores da peça e referentes ao plano da seção reta são:

$$\sigma^{s,i} = \mp \frac{-60P}{1460} = \pm 0,041P$$



$$\text{I}40: J_z = 29210 \text{ cm}^4$$

$$M = 857 \text{ cm}^3$$

$$d=b = 1,44 \text{ cm}$$

Fig.542-1

A tensão cisalhante máxima, sobre o eixo da peça, será:

$$\tau_o = \frac{P}{29210} \frac{857}{1,44} = 0,0204P$$

Consideremos, agora, os pontos próximos à junção da mesa com a alma do perfil; por exemplo os situados a 16 cm acima do eixo da peça.

Virá:

$$\sigma = \frac{16}{20} 0,041P = 0,0328P$$

$$\tau = \frac{P}{29210} \frac{857-184}{1,44} = 0,016P$$

As tensões principais nesse ponto serão:

$$\sigma_{I,II} = \left[\frac{0,0328}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{0,0328^2 + 4 \times 0,016^2} \right] P$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_I = 0,037 P \\ \sigma_{II} = - 0,0042 P \end{array} \right.$$

onde a tensão principal trativa é ainda pouco menor que a tensão σ^s que normalmente seria utilizada no controle da peça segundo o exposto anteriormente.

Se, porém, tivermos um vão mais curto, digamos $\ell = h = 40$ cm virá:

$$\sigma^{s,i} = \pm 0,0274 P$$

$$\tau_o = 0,0204 P$$

Para os pontos da junção da alma com a mesa, mencionados acima virá:

$$\sigma = 0,0219 P$$

$$\tau = 0,016 P$$

$$\sigma_{I,II} = \left[\frac{0,0219}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{0,0219^2 + 4 \times 0,016^2} \right] P$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_I = 0,0305 P \\ \sigma_{II} = - 0,0085 P \end{array} \right.$$

onde a tensão principal σ_I já é maior que a tensão σ^s .

Vê-se que, ainda aqui, a relação $\frac{\ell}{h}$ entre o vão e a altura da seção tem importância no que diz respeito à influência relativa da força cortante.

É evidente que, neste último caso, para que a tensão de comparação σ_T^k referente ao ponto não ultrapasse $\sigma_{T_{adm}}$, seria preciso ter controlado a peça, através σ^s , com uma certa folga.

5.5 – VIGAS DE SEÇÃO COMPOSTA

5.5.0 – O problema a resolver

De **seção composta** são denominadas as vigas formadas pela justaposição lateral de peças colocadas a trabalhar em conjunto de modo que uma seção se compõe de duas ou mais **seções simples**.

O emprego das vigas de seção composta se impõe, quase sempre, quando se tem grandes momentos fletores a cobrir, não sendo possível fazê-lo com peças de seção simples; é-se obrigado a justapor seções ao longo de toda ou de parte da peça. Em outras ocasiões seu emprego decorre da necessidade de se obter formas especiais de seção não existentes como seção simples.

De qualquer modo, o **princípio fundamental do cálculo** dessas peças é o de que, **tanto quanto possível, elas devem se comportar como uma peça de seção simples de mesmo contorno**.

Assim sendo, seu cálculo comporta dois aspectos:

- a) **o projeto ou a verificação da viga como se fosse de seção simples;**
- b) **o projeto ou a verificação dos elementos de ligação entre as partes componentes da viga** de modo que o princípio fundamental seja alcançado. Haver-se-á de levar em conta a natureza, as dimensões, os espaçamentos e a disposição a dar a esses elementos.

No que diz respeito ao aspecto da alínea a) supõe-se válido tudo o que foi explanado em 5.1, 5.2 e 5.4. Apenas **devem ser levadas em conta as reduções de seção decorrentes do emprego dos elementos de ligação** como, também, a experiência tem mostrado que uma certa redução deve ser feita nas tensões admissíveis para atender à impossibilidade de se assegurar um ajustamento perfeito no trabalho das partes componentes. Essas reduções são objeto de normatização para os tipos correntes de seções compostas, e variam com esses tipos.

Assim sendo, o nosso estudo quase que se reduz ao dos elementos de ligação com o estabelecimento das bases para o seu cálculo.

5.5.1 – Cálculo das ligações

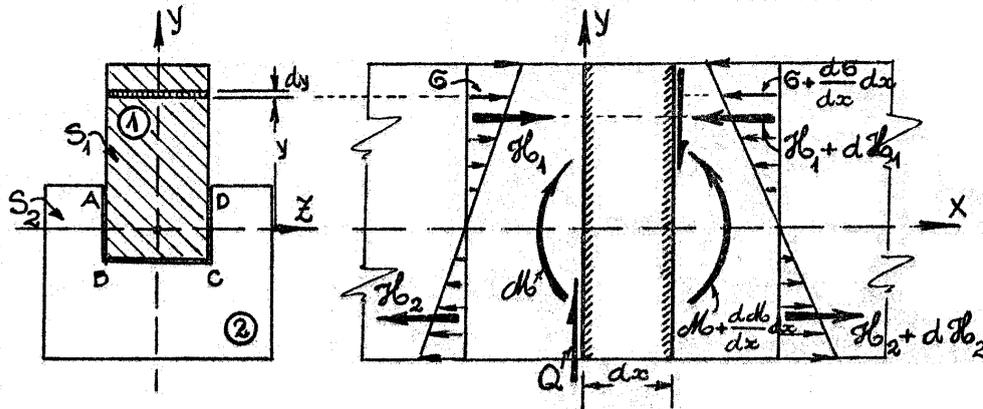


Fig.551-1

Suponhamos que se deseje constituir uma viga com a seção composta da Fig.551-1, formada pela justaposição das seções mais simples ① e ②.

Segundo o princípio fundamental já exposto, a seção deverá se comportar, tanto quanto possível, como se fora de seção simples com o mesmo contorno exterior.

A diferença, entretanto, que há entre os dois casos é que, no caso em pauta, há descontinuidade de material ao longo do contorno ABCD, enquanto que, se de seção simples, ao longo desse contorno o material será contínuo.

Infere-se daí que elementos de ligação deverão ser colocados de forma a compensar a ausência de continuidade.

Tomemos, então, duas seções vizinhas, afastadas de dx, em um trecho em que a seção composta se mantenha constante. Sobre seus elementos de superfície, e normalmente a eles, atuarão, em decorrência dos momentos fletores, as tensões σ e $\sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx$ distribuídas segundo os diagramas lineares que se vêem na figura.

Considerando, portanto, a porção de prisma elementar de comprimento dx correspondente a uma das partes da seção – a parte ①, por exemplo, – verifica-se que em suas duas faces atuam as forças horizontais.

$$H_1 = \int_{S_1} \sigma ds \quad \text{e} \quad H_1 + dH_1 = \int_{S_1} \left(\sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx \right) ds$$

cuja diferença

$$dH_1 = \int_{S_1} \left(\frac{d\sigma}{dx} dx \right) ds$$

será a força horizontal, correspondente ao comprimento dx, que deverá ser absorvida pelos elementos de ligação, sob pena de as partes ① e ② deslizarem, uma sobre a outra, ao longo da superfície que as separa.

Se, em lugar de considerarmos a parte ①, tivéssemos considerado a parte ②, chegaríamos, pelo mesmo raciocínio, a

$$d\mathbf{H}_2 = \int_{S_2} \left(\frac{d\sigma}{dx} dx \right) ds$$

Evidentemente, em valores absolutos, poderemos escrever:

$$d\mathbf{H}_1 = d\mathbf{H}_2 = d\mathbf{H}$$

Como

$$\frac{d\sigma}{dx} dx = \frac{y}{J_z} \frac{dM}{dx} dx = \frac{Q}{J_z} y dx$$

virá

$$d\mathbf{H} = \frac{Q}{J_z} dx \int_{S_1} y ds$$

Note-se que, sendo ① e ② partes complementares da seção total, se tem, em valor absoluto:

$$\int_{S_1} y ds = \int_{S_2} y ds = M$$

sendo, portanto, **M o valor absoluto do momento estático**, relativamente ao eixo baricêntrico de toda a seção, **de uma das duas partes da seção isolada pela superfície de separação que se pretende reconstituir.**

Então:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{H}}{dx} = \frac{M}{J_z} Q} \quad 551\text{-I}$$

onde J_z é o momento de inércia de toda a seção composta relativamente ao eixo baricêntrico.

Portanto em um comprimento finito, compreendido entre duas abcissas x_0 e x_1 , mantida constante a seção composta, ter-se-á:

$$\boxed{\mathbf{H}_{x_0}^{x_1} = \frac{M}{J_z} \int_{x_0}^{x_1} Q dx} \quad 551\text{-II}$$

que é **proporcional à área do diagrama de forças cortantes entre essas abcissas.**

As expressões 551-I e 551-II resolvem, fundamentalmente, o problema das ligações a estabelecer entre as partes a unir; a primeira, dando **a força de ligação por unidade de comprimento ao longo do eixo da peça**, e, a segunda, a **força total para um trecho qualquer**

É claro que se em um trecho de comprimento w a força cortante for constante virá:

$$\boxed{\mathbf{H}_w = \frac{M}{J_z} Qw} \quad 551\text{-III}$$

No caso em que no trecho entre x_0 e x_1 se empreguem elementos de ligação descontínuos, cada um com resistência R , o número de elementos necessários no trecho será:

$$n = \frac{\mathbf{H}_{x_0}^{x_1}}{R}$$

os quais deveriam ter sua distribuição, teoricamente mais acertada, de modo que a cada um deles correspondesse um painel de carga do diagrama de forças cortantes com a mesma área.

Isso permite concluir que, no caso em que o diagrama de forças cortantes não seja constante, o espaçamento dos elementos de ligação deve ser variável, ficando mais próximos uns dos outros quanto maiores as ordenadas do diagrama correspondente à área atendida pelo elemento. Quando o diagrama for constante impõe-se a distribuição equidistante dos elementos. Sendo \bar{e} essa equidistância, podemos obtê-la de 551-III fazendo $\mathbf{H}_w = R$, $w = \bar{e}$, ou seja:

$$\boxed{\bar{e} = \frac{J_z}{M} \frac{R}{Q}} \quad 551\text{-IV}$$

Nesta expressão, \bar{e} é a **distância máxima** sob que se poderia distribuir uniformemente os elementos de ligação de resistência R .

Em alguns casos o problema se apresenta invertido, isto é, dispõe-se de uma peça composta cujos elementos de ligação conhecidos e de resistência R – estão separados de e .

Neste caso, cada um deles terá a seu encargo uma força de ligação

$$\mathbf{H}' = \frac{M}{J_z} Q e$$

obtida de 551-III.

É evidente que se poderá ter, então

$$\mathbf{H}' \leq R \quad \text{ou} \quad \mathbf{H}' < R$$

correspondendo aos casos em que uma ou mais das condições que definem a resistência R (conforme se viu em 5.2.1.2) são ultrapassadas, igualadas ou ainda atingidas.

A fixação dos valores de R , conforme o tipo de ligação, já foi feita em 5.2.1.2.

5.6 – VIGAS DE MATERIAIS DIFERENTES. SEÇÕES MISTAS.

5.6.1 – Apresentação do problema. Vigas de dois materiais.

Até aqui, no estudo das peças trabalhando como vigas, temos considerado a natureza do material como constante ao longo de suas seções. Casos há, entretanto, em que a peça pode ter sido constituída pela justaposição de outras, de dois ou mais materiais diferentes, formando-se **seções mistas**.

Vamos tratar, apenas, dos casos mais simples em que haja dois materiais dispostos **simetricamente em relação ao eixo solicitante na seção**, o qual suporemos ser um **eixo de simetria da mesma**.

Suporemos que não haja escorregamentos entre os dois materiais durante o flexionamento da peça, isto é, que as suas **seções se mantenham planas após a deformação**.

Então as deformações ocorrentes nas diferentes fibras serão proporcionais às suas distâncias ao eixo neutro na seção mista.

Fixemos a nossa atenção no caso da Fig.561-1(a) onde suporemos os materiais ① e ② com módulos de elasticidade tais que $E_1 < E_2$.

Para que as fibras situadas na região ② tenham, em valor absoluto, as mesmas deformações longitudinais que as situadas nas ordenadas simétricas na região ① será preciso que as ações interiores guardem a mesma relação dos módulos de elasticidade.

Compreende-se que isso será equivalente a supor cada fibra de um material, situada em uma certa ordenada, como equivalente a uma do outro material, **situada nas mesma posição, mas com área de seção multiplicada pela relação dos módulos de elasticidade**.

Em outras palavras, reportando-nos à Fig.561-1(a) diremos que qualquer elemento de área, $b_1 dy$, do material ① é equivalente a um elemento de área do material ②, **situado na mesma posição**, de valor

$$\frac{E_1}{E_2} b_1 dy$$

Analogamente, qualquer elemento de área, $b_2 dy$, do material ② é equivalente a um elemento de área,

$$\frac{E_2}{E_1} b_2 dy$$

de material ①, **situado na mesma posição**.

Então podemos homogeneizar a seção em material ② conforme a Fig.561-1(b) ou em material ① conforme a Fig.561-1(c).

No primeiro caso bastará tomar as fibras ①, de larguras b_1 , modificadas na relação E_1/E_2 ; no segundo caso as fibras ②, de larguras b_2 , serão modificadas na relação E_2/E_1 .

Isto feito, o problema recai no caso de uma peça de seção homogênea, devendo-se, apenas, observar que se a seção tiver sido homogeneizada em ①, as tensões ocorrentes na

zona de material ② serão as encontradas nas mesmas ordenadas da seção homogeneizada em ①, multiplicadas, porém, pela relação E_2/E_1 .

Se a seção tiver sido homogeneizada em ② as tensões nas fibras da zona de material ① serão as encontradas nas mesmas ordenadas da seção homogeneizada em ② multiplicadas pela relação E_1/E_2 .

Uma vez homogeneizada a seção é fácil calcular a força de ligação **H** que deve ser

mantida entre as seções componentes da seção mista para um certo comprimento de viga.

Compreende-se facilmente a aplicabilidade das expressões 551-I e 551-II de gênese idêntica à expressão 521-II. Tudo se resume no cálculo de M e de J_z pertencentes àquelas fórmulas.

Quanto a M , seu valor será o do momento estático de ① ou de ② **relativamente ao eixo OZ, médio da seção homogeneizada**. No caso da Figura 561-I é mais simples calcular o momento estático da porção ②, e este será

$$M = S_2 y_2 \text{ quando a seção estiver homogeneizada em ② (Fig.b)}$$

ou então

$$M = \frac{E_1}{E_2} S'_2 y_2 \text{ quando a seção estiver homogeneizada em ① (Fig.c).}$$

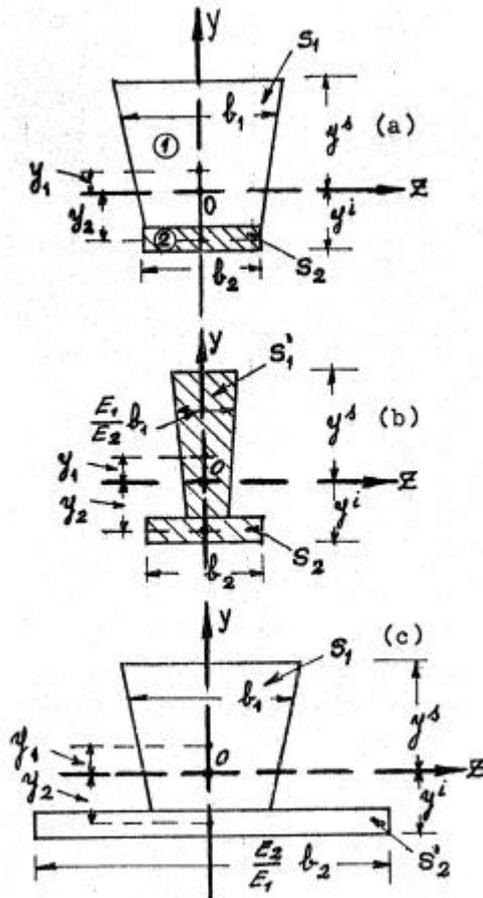


FIG.561-1

Poder-se-ia, também, calcular M partindo da porção ①:

$$M = S_1 y_1 \text{ quando a seção estiver homogeneizada em ①, (Fig.c)}$$

ou então

$$M = \frac{E_2}{E_1} S'_1 y_1 \text{ quando a seção estiver homogeneizada em ② (Fig.b)}$$

Quanto a J_z será

$$J_z = (J_1)_z + \frac{E_2}{E_1} (J_2)_z \text{ quando a seção estiver homogeneizada em ①}$$

(Fig.c)

ou então

$$J_z = \frac{E_1}{E_2} (J_1)_z + (J_2)_z \quad \text{quando a seção estiver homogeneizada em } \textcircled{2}$$

(Fig.b).

Nestas expressões $(J_1)_z$ é o momento de inércia da parte $\textcircled{1}$ em relação ao eixo OZ e $(J_2)_z$ o da parte $\textcircled{2}$ em relação ao mesmo eixo.

Finalmente restar-nos-á mostrar como determinar a posição do baricêntrico da seção mista, que, diga-se de passagem, é o mesmo da seção homogeneizada em 1 ou em 2.

Ele poderá, pois, ser determinado mediante

$$y^s = \frac{M_1^s}{S_1 + \frac{E_2}{E_1} S_2} \quad (\text{seção homogeneizada em } \textcircled{1}) \quad \text{ou} \quad y^i = \frac{M_1^i}{S_1 + \frac{E_2}{E_1} S_2}$$

$$y^s = \frac{M_2^i}{\frac{E_1}{E_2} S_1 + S_2} \quad (\text{seção homogeneizada em } \textcircled{2}) \quad \text{ou} \quad y^i = \frac{M_2^i}{\frac{E_1}{E_2} S_1 + S_2}$$

Em todas essas expressões $M_{1,2}^s$ representa o momento estático da área homogeneizada em $\textcircled{1}$ ou em $\textcircled{2}$ relativamente a um eixo paralelo a OZ passando no bordo superior; $M_{1,2}^i$ quando o momento estático, nas mesmas condições for tomado em relação a um eixo passando no bordo inferior.

5.7 – CENTRO DE TORÇÃO NA FLEXÃO FORA DE UM PLANO DE SIMETRIA

5.7.0 – Apresentação do problema

Quando em 5.1.2 estudamos a deformação geral de uma haste por influência do momento fletor, vimos que, no caso de uma flexão reta, essa deformação se processava no próprio plano solicitante que é, então, perpendicular ao eixo neutro na seção. Em se tratando de uma solicitação contida em um plano de simetria da peça isso é sempre verdadeiro, quer se trate de uma **flexão pura** quer de uma **flexão simples**, isto é, quer ocorra, ou não, força cortante acompanhando o momento fletor.

Se, entretanto, o plano solicitante, embora principal, não for um plano de simetria a deformação da peça só ocorrerá nos moldes anteriormente mencionados quando não houver força cortante, isto é, na flexão pura uma vez que, como se verá a seguir, **a existência de uma força cortante em tais casos dará lugar a um conjugado de torção** a menos que se faça o plano solicitante da peça deslocar-se paralelamente a si mesmo de modo a fazer com que o eixo solicitante na seção deixe de ser um eixo baricêntrico e venha a passar por um ponto denominado **centro de torção** na seção.

Quando em casos como esses o eixo solicitante na seção não venha a passar pelo centro de torção, a deformação da peça deixará de ter lugar no plano das cargas e as tensões normais não se distribuirão mais como havia sido encontrado, isto é, proporcionalmente às distâncias de cada ponto da seção ao eixo principal perpendicular ao solicitante.

No estudo que vamos fazer da determinação do centro de torção, vamos nos limitar aos casos de seções sob as formas de perfis onde o problema se torna mais importante.

5.7.1 – Seções com um eixo de simetria

Pelo que se acabou de explicar, o eixo de simetria não será o eixo solicitante; este será o perpendicular àquele.

Começaremos pelo caso de uma seção como a da Fig.571-1 solicitada num plano paralelo ao eixo OZ.

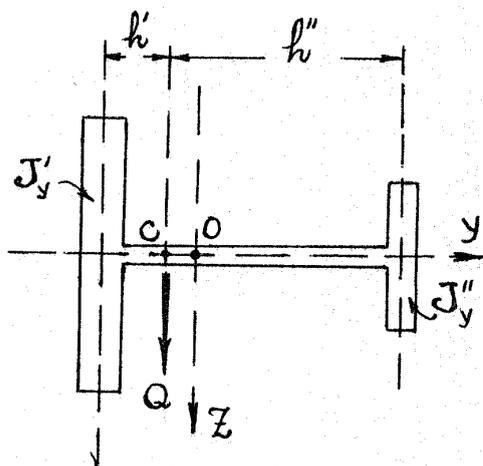


Fig.571-1

Para que não haja torção, isto é, para que a deformação da peça tenha lugar num plano paralelo a OZ, as duas mesas do perfil deverão sofrer a mesma deformação, o que só poderá acontecer se, supondo-as independentes uma da outra, vierem a receber cargas proporcionais aos seus próprios momentos de inércia J'_y e J''_y .

Essa condição será satisfeita se o plano das cargas passar pelo ponto C, tal que

$$\frac{h'}{h''} = \frac{J''_y}{J'_y}$$

571-I

O ponto C é o centro de torção da seção.

Vê-se que o plano do carregamento deverá ser deslocado do centro de gravidade **o** para o lado da mesa de maior momento de inércia individual.

A validade do raciocínio feito está no fato de que, para a seção em pauta, a força cortante é absorvida, na sua maior parte, pelas duas mesas do perfil paralelas ao plano do carregamento, não se tendo considerado a contribuição da alma do perfil, no caso, pequena.

No caso limite em que uma das mesas do perfil desapareça, ficando-se com uma seção como a da Fig.571-2, vemos que o centro de torção C tende para o centro de gravidade da mesa por onde deve passar o plano das cargas para que a flexão não seja acompanhada de torção.

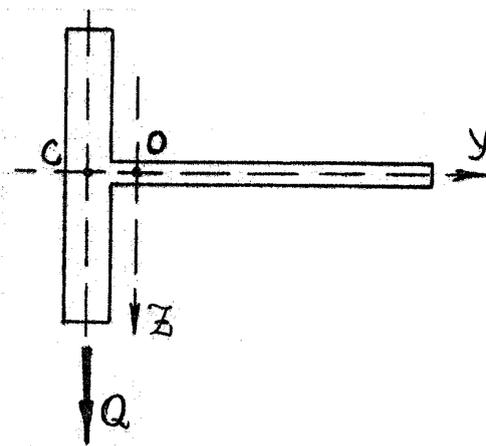


Fig.571-2

Tratemos, agora, do caso de uma seção \square (muitas vezes denominada seção em canal) solicitada no plano que contém o eixo Y (Fig.571-3).

Já vimos em 5.2.1.3 como calcular as tensões tangenciais paralelas à alma do perfil, ou seja, as tensões τ_{xy} , as quais dão lugar a forças elásticas tangenciais verticais cuja soma iguala a força cortante e que, na sua quase totalidade, se distribuem ao longo da alma do perfil, pouco contribuindo as mesas do mesmo.

Enquanto ao longo das mesas as tensões τ_{xy} são negligenciáveis, assim não acontece com as tensões τ_{xz} , a elas perpendiculares, que, nessas mesas têm valores apreciáveis como veremos.

Para constatar esse fato consideremos um trecho de mesa compreendido entre duas seções vizinhas, distantes entre si de dx , limitado por um plano mn paralelo à alma (Fig.571-3).

Admitindo que tudo esteja disposto de modo que a flexão ocorra em torno ao eixo Z, as duas forças elásticas $-H$ e $H + dH$ – atuantes nos planos das seções retas da peça e correspondentes ao trecho de mesa considerado, serão tomados todos os elementos em valores absolutos:

$$H = \frac{M}{J_z} \int y ds$$

$$H + dH = \frac{M + \frac{dM}{dx} dx}{J_z} \int y ds$$

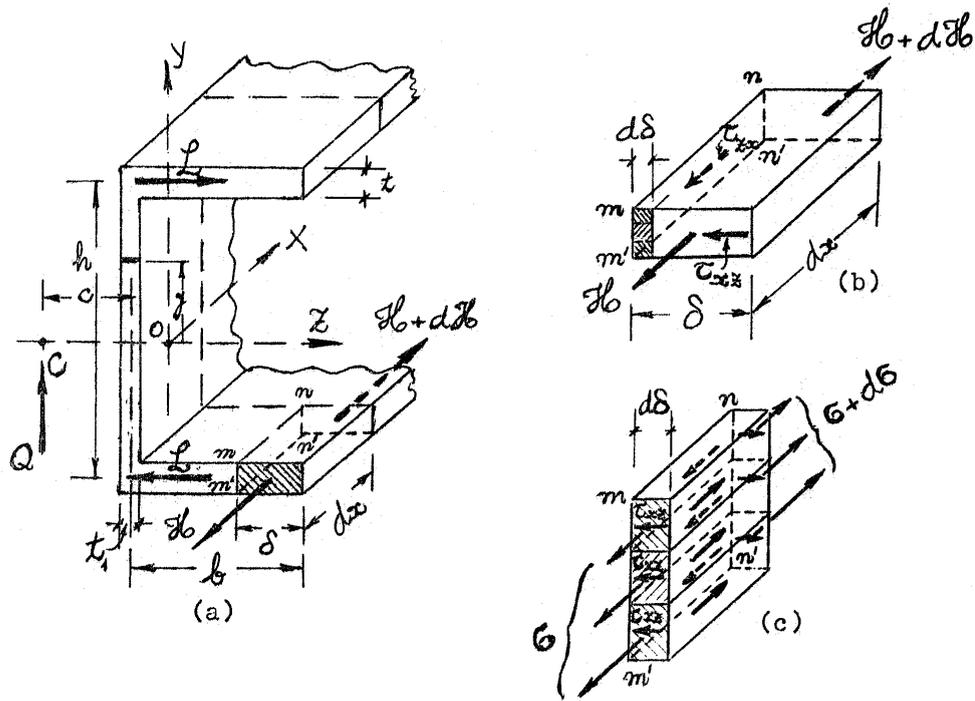


Fig.571-3

Nestas expressões as integrais representam, em valor absoluto, o momento estático da área hachurada relativamente ao eixo Z.

É claro que sendo M variável, isto é, havendo força cortante, essas duas forças horizontais serão diferentes, o equilíbrio só sendo possível graças às forças elásticas a elas paralelas e atuantes ao longo da superfície $mm'nn'$. Desde que a espessura t da mesa não seja muito grande, as tensões cisalhantes τ_{zx} que lhe correspondem poderão ser supostas constantes ao longo do elemento de superfície $mm'nn'$, isto é

$$\frac{dM}{dx} \frac{dx}{J_z} \int y dS = \tau_{zx} t dx$$

ou então

$$\tau_{zx} = \frac{Q}{t J_z} \int y ds \tag{a}$$

onde todos os elementos, repetimos, são considerados em valores absolutos.

Nesta expressão (a) a integral que representa o momento estático da área tracejada em relação ao eixo Z, vai crescendo à proporção que consideramos o plano $mm'nn'$ mais e mais próximo da alma do perfil, isto é:

- seu valor absoluto é proporcional a δ ;
- as tensões tangenciais τ_{xz} , horizontais e ocorrentes ao longo dos elementos de superfície das mesas, vão crescendo linearmente de zero, na borda das mesas, até um valor máximo que podemos supor ocorrer no eixo da alma, isto é, à distância b da borda.

Então

$$(\tau_{xz})_{\max} = (\tau_{zx})_{\max} = \frac{Qbh}{2J_z} \quad (b)$$

Assim, em cada mesa, haverá uma força elástica tangencial, perpendicular à alma do perfil, cujo valor absoluto será:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\tau_{xz})_{\max} tb = \frac{Qb^2ht}{4J_z} \quad (c)$$

Vê-se, desse modo, que para se ter a deformação da peça fletida em um plano paralelo ao eixo OY, as tensões tangenciais despertadas ao longo da seção dão lugar às seguintes forças elásticas:

- duas forças \mathbf{L} perpendiculares ao eixo Y decorrentes das tensões \mathbf{t}_{xz} nas mesas do perfil, dando lugar a um momento de torção $\mathbf{L}h$;
- uma força \mathbf{Q} paralela ao eixo da alma decorrente das tensões \mathbf{t}_{xy} ao longo dessa mesma alma.

Evidentemente esse grupo de forças elásticas é equivalente à própria força \mathbf{Q} passando em um ponto C a uma distância c do eixo da alma dada por

$$c = \frac{\mathbf{L}h}{\mathbf{Q}} = \frac{b^2h^2t}{4J_z} \quad 571-II$$

O ponto C é o centro de torção da seção [].

Como novo exemplo trataremos, agora, do caso da seção em cantoneira de abas iguais, como se vê na Fig.571-4.

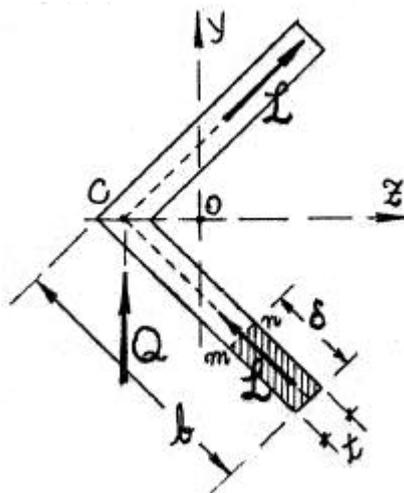


Fig.571-4

Para um caso como esse, supondo o plano solicitante perpendicular ao eixo de simetria OZ, um raciocínio idêntico ao anterior nos leva a concluir pela existência de tensões tangenciais τ (que suporemos iguais ao longo de mn) paralelas às próprias abas, as quais poderão ser obtidas ainda pela expressão (a) do caso anterior, ou

$$\tau = \frac{Q}{tJ_z} \int yds$$

onde, ainda, todos os elementos são considerados em valores absolutos, sendo que a integral representa o momento estático da área hachurada relativamente ao eixo OZ.

Ao longo de mn, situado à distância δ da ponta da aba, ter-se-á:

$$\int yds = t\delta \left(b - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{t\sqrt{2}}{4} (2\delta b - \delta^2)$$

e então

$$\tau = \frac{\sqrt{2} Q}{4J_z} (2\delta b - \delta^2) \quad (d)$$

O valor máximo, para $\delta=b$, será:

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Qb^2}{J_z} \quad (e)$$

ocorrendo na ligação das duas abas.

Essas tensões tangenciais, variando de zero a τ_{\max} em cada aba, dão lugar, em cada uma delas, a uma força resultante, tangencial, \mathbf{L} , como se vê na figura, e, cujo valor é

$$\mathbf{L} = \int_0^b \tau t \delta = \frac{\sqrt{2} Q t}{4J_z} \int_0^b (2b\delta - \delta^2) d\delta$$

que conduz a

$$\mathbf{L} = \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{Qb^3 t}{J_z} \quad (f)$$

Como em cada aba há uma força \mathbf{L} e a resultante de ambas deve ser igual à força cortante Q , conclui-se que o **centro de torção** está em C, na interseção das linhas médias das abas.

5.7.2 – Seções sem eixo de simetria

Até agora as seções estudadas apresentaram um eixo de simetria, o que permitiu fixar a posição do centro de torção mediante a determinação de uma só coordenada, medida ao longo desse mesmo eixo.

Quando, porém, não há um eixo de simetria são necessárias, em geral, duas coordenadas para fixar a posição do **centro de torção** como nos mostra o exemplo da Fig.572-1.

Trata-se de uma seção em canal com abas desiguais de modo que os eixos baricêntricos O_m e O_p , paralelos respectivamente às abas e à alma, não são principais, não havendo na seção, nenhum eixo de simetria.

Para fixar a posição do centro de torção procuraremos, neste caso, determinar suas coordenadas m_o e p_o , procedendo de uma forma análoga à que adotamos no caso da Fig.571-3.

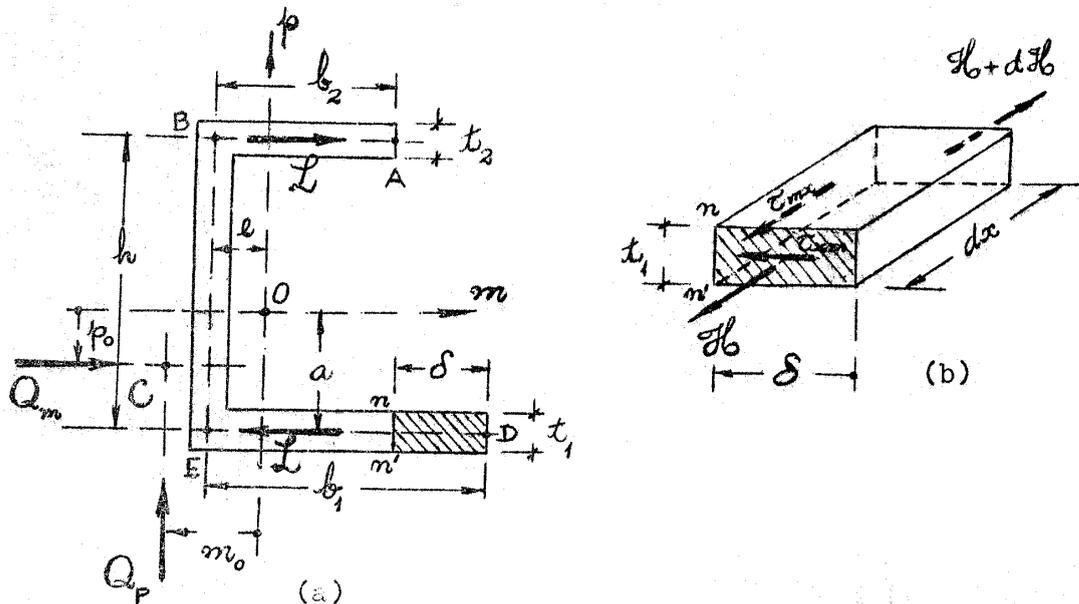


Fig.572-1

Considerando a solicitação contida num plano paralelo à alma, ou seja, ao eixo O_p .

Haverá tensões tangenciais τ_{xp} ao longo da alma dando lugar a forças elásticas equivalentes a Q_p e tensões tangenciais τ_{xm} paralelas às abas dando lugar a duas forças L , iguais e de sentidos contrários em cada uma das abas as quais produzem um conjugado de momento Lh . Estas forças L têm, respectivamente, os sentidos de D para E e de B para A quando Q_p tiver o sentido da figura.

Ter-se-á, então:

$$m_o = \frac{Q_p e + Lh}{Q_p} \tag{g}$$

Para obter o valor de \mathbf{L} consideraremos uma porção da mesa inferior (poder-se-ia raciocinar com a superior) compreendida entre duas seções vizinhas, afastadas de dx , e limitada por um plano situado à distância δ de sua extremidade.

Nas duas faces dessa porção (a hachurada da Fig.572-1 e a sua correspondente na seção vizinha) ocorrerão forças elásticas \mathbf{H} e $\mathbf{H}+d\mathbf{H}$ em decorrência das tensões normais da flexão, sendo, de acordo com 511-XVII

$$\mathbf{H} = \int \sigma ds = - \frac{M}{J_m J_p - J_{mp}^2} \left(J_p \int p ds - J_{mp} \int m ds \right) \quad (h)$$

Nesta expressão

$$\int p ds = - a t_1 \delta$$

e

$$\int m ds = t_1 \delta \left(b_1 - e - \frac{\delta}{2} \right) = - t_1 \left(\frac{\delta^2}{2} + e\delta - b_1 \delta \right)$$

Evidentemente é a diferença $\frac{d\mathbf{H}}{dx} dx$ entre aquelas forças que vai dar lugar às tensões τ_{mx} e τ_{xm} pelo que, para calculá-la, vamos diferenciar a expressão (h). Notando que

$$\frac{dM}{dx} dx = Q_p dx$$

e feitas as substituições dos valores das integrais anteriores chega-se a

$$\frac{d\mathbf{H}}{dx} dx = \frac{Q_p dx}{J_m J_p - J_{mp}^2} \left[J_p a t_1 \delta - J_{mp} t_1 \left(\frac{\delta^2}{2} + e\delta - b_1 \delta \right) \right]$$

Como, em valores absolutos, deveremos ter

$$\frac{dM}{dx} dx = \tau_{mx} t_1 dx$$

virá:

$$\tau_{xm} = \tau_{mx} = \frac{Q_p}{J_m J_p - J_{mp}^2} \left[J_p a \delta - J_{mp} \left(\frac{\delta^2}{2} + e\delta - b_1 \delta \right) \right]$$

A força \mathbf{L} será então:

$$\mathbf{L} = t_1 \int_0^{b_1} \tau_{xm} d\delta = \frac{Q_p b_1^2 t_1}{J_m J_p - J_{mp}^2} \left[\frac{a}{2} J_p - J_{mp} \left(\frac{e}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \quad (i)$$

Como a força cortante Q_p é equivalente às forças elásticas despertadas na alma do perfil, o momento de todas as forças elásticas relativamente do baricentro é:

$$Q_p e + \mathbf{L}h = Q_p \left\{ e + \frac{b_1^2 t_1 h}{J_m J_p - J_{mp}^2} \left[\frac{a}{2} J_p - J_{mp} \left(\frac{e}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \right\}$$

Isto indica que o plano paralelo à alma, em que devem agir as forças de modo a não haver torção, passa por um ponto C situado à distância m_o , obtida da expressão anterior e de (g):

$$m_o = e + \frac{b_1^2 t_1 h}{J_m J_p - J_{mp}^2} \left[\frac{a}{2} J_p - J_{mp} \left(\frac{e}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \quad 572-I$$

Nesta expressão J_{mp} deve ser considerado em seu valor absoluto.

Quando as duas abas forem iguais, os eixos \underline{m} e \underline{p} se confundem, respectivamente, com os eixos principais, caso em que $J_{mp}=0$ e $a = \frac{h}{2}$. Chega-se ao mesmo resultado expresso na fórmula 571-II.

Resta determinar, ainda, a coordenada \mathbf{p}_o para o que suporemos o plano solicitante paralelo às mesas, isto é, paralelo ao eixo Om .

Neste caso, seguindo um caminho idêntico ao anterior, teremos sucessivamente:

$$\sigma = - \frac{M}{J_p J_m - J_{pm}^2} (J_m m - J_{pm} p)$$

$$\mathbf{H} = \int \sigma ds = - \frac{M}{J_p J_m - J_{pm}^2} (J_m \int m ds - J_{pm} \int p ds)$$

As integrais do parênteses são as mesmas já encontradas anteriormente pelo que, substituindo seus valores e calculando a diferencial $\frac{d\mathbf{H}}{dx}$ da força \mathbf{H} correspondente à porção hachurada da mesa inferior virá, em valor absoluto:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dx} dx = \frac{Q_m dx}{J_p J_m - J_{pm}^2} \left[J_{pm} a t_1 \delta - J_m t_1 \left(\frac{\delta^2}{2} + e\delta - b_1 \delta \right) \right]$$

Como deveremos ter

$$\frac{d\mathbf{H}}{dx} dx = \tau_{mx} t dx$$

e como $\tau_{xm} = \tau_{mx}$, ter-se-á em valor absoluto

$$\tau_{xm} = \frac{Q_m}{J_p J_m - J_{pm}^2} \left[J_{pm} a \delta - J_m \left(\frac{\delta^2}{2} + e \delta - b_1 \delta \right) \right]$$

que nos dá os valores das tensões tangenciais, paralelas ao eixo Om , na mesa inferior. A elas corresponderá uma força \mathbf{L}^i , nessa mesa, de valor:

$$\mathbf{L}^i = t_1 \int_0^{b_1} \tau_{xm} d\delta = \frac{Q_m b_1^2 t_1}{J_p J_m - J_{pm}^2} \left[J_{pm} \frac{a}{2} - J_m \left(\frac{e}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right]$$

Na outra mesa haverá uma outra força \mathbf{L}^s cujo valor poderíamos calcular identicamente, mas que não precisamos fazê-lo neste caso, devendo o grupo das duas - \mathbf{L}^i e \mathbf{L}^s - ser equivalente a Q_m , bastar-nos á, para ter a posição do **centro de torção** por onde deverá passar a linha de ação de Q_m , tomar os momentos em relação a um ponto - como o ponto B - por onde passará \mathbf{L}^s .

Antes de fazê-lo observaremos que \mathbf{L}^i e \mathbf{L}^s , **que não se acham representadas na figura**, bem como Q_m são paralelas e de mesmo sentido.

Então:

$$Q_m(p_p + h - a) = \mathbf{L}^i h$$

ou

$$p_o = \frac{b_1^2 t_1}{J_p J_m - J_{pm}^2} \left[J_{pm} \frac{a}{2} - J_m \left(\frac{e}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] - (h - a) \quad 572-II$$

Ainda aqui J_{pm} é tomado em valor absoluto pelo que pode ser substituído por J_{mp} .

Quando as duas abas forem iguais têm-se $J_{pm}=0$ e $a = \frac{h}{2}$ com o que, calculados J_p e a distância e , chega-se a um valor nulo para p_o como seria de esperar.

Abordaremos, agora, o **caso da seção** \square .

Considerando em primeiro lugar, Fig.572-2, a solitação contida em um plano paralelo ao eixo Om , isto é, às mesas, as parcelas da força cortante correspondentes a cada uma destas serão iguais e de mesmo sentido, seu valor sendo $\frac{1}{2}Q_m$.

Isto indica que o centro de torção deve se encontrar sobre o próprio eixo Om .

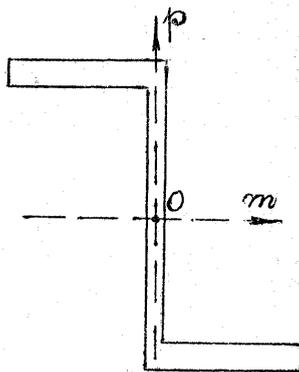


Fig. 572-2

De outro lado, ao considerarmos a sollicitação paralela ao eixo Op , verifica-se que não há nenhum motivo, atendendo à própria configuração da seção, de o **centro de torção** se encontrar mais para a direita ou mais para a esquerda do ponto O sobre o eixo Om (como já se viu que estava).

Conclui-se, então, que o centro de torção da seção é o próprio centro de gravidade o .

Estendendo-se as conclusões anteriores aos casos de seções constituídas por elementos retangulares cujos eixos se interceptam num ponto C , Fig.572-3, diremos que a força cortante deverá passar por esse ponto que, então, é o centro de torção da seção.

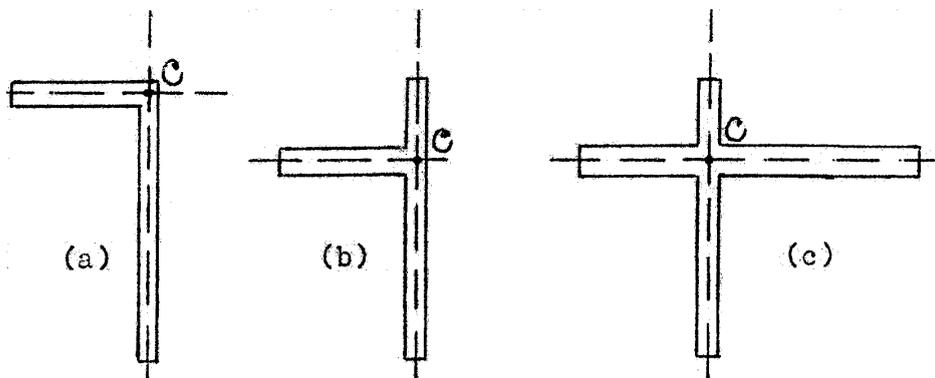


Fig.572-3

Para concluir, diremos que no caso de se ter uma flexão em vigas cujas seções não sejam simétricas em relação ao eixo sollicitante, essa flexão só será simples, isto é, sem torção, se as cargas exteriores, aplicadas ao longo da peça, passarem pelo lugar geométrico dos centros de torção, lugar esse que é o **eixo dos centros de torção**.