

## **Capítulo IX**

### **Peças Comprimidas pelos Topos, Pilares e Escoras**

### **Flambagem**

## 9.0 – CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

As **colunas**, os **pilares** e as **escoras** são partes de estruturas, **axialmente comprimidas**, caracterizando-se pelo fato de que seus comprimentos são muito maiores que as dimensões de suas seções retas. Os termos coluna e pilar são empregados quando a peça tem a posição vertical; escora é usado sem essa restrição.

Em construção mecânica ocorrem situações idênticas como é o caso, por exemplo, das bielhas das máquinas; em construção civil peças comprimidas das estruturas reticuladas se comportam da mesma maneira.

Todas essas peças, podem, pois, ser enquadradas dentro de um mesmo esquema conforme se viu em 1.4.1.

Quando uma peça é comprimida haverá, provavelmente, como se verá a seguir, um certo momento fletor decorrente da própria compressão, momento fletor esse que, nas peças longas, assume primordial importância, enquanto que, nas peças curtas, é perfeitamente desprezível. Isto faz com que **o comportamento de uma peça comprimida seja diferente conforme seja ela curta ou longa**, porquanto, no primeiro caso, as tensões compressivas devidas à simples força normal são muito pouco afetadas pelas decorrentes do momento fletor; nas peças longas, ao contrário, elas podem ser violentamente alteradas.

**Os fenômenos de flexão ocorrentes quando uma peça longa é comprimida são denominadas fenômenos de flambagem.**

Várias são as **causas da ocorrência da flambagem**, a saber:

- a) **a instabilidade de forma** a que fica sujeita a peça quando a carga compressiva atinge a um determinado valor, próprio de cada peça. **Essa é a causa mais importante, e está presente em todas as situações;**
- b) **a falta de retilineidade perfeita do eixo da peça**, no caso de peças que devam ser retas;
- c) **a existência de uma, pequena que seja, excentricidade na atuação da carga compressiva;**
- d) **a falta de homogeneidade perfeita do material de que se constitui a peça.**

Compreende-se perfeitamente que quaisquer das circunstâncias apontadas em b), c) ou d) possam, isoladamente ou em conjunto, provocar a flexão da peça comprimida em maior ou menor grau; por mais que se procure eliminar, entretanto, as suas incidências, ainda assim **uma peça, perfeitamente reta e homogênea, submetida a uma carga compressiva rigorosamente centrada** continua sob a ameaça de flambagem quando esta carga atinge certo **valor crítico**, a partir do qual seu estado de equilíbrio se torna instável e será rompido à menor perturbação, com o que a peça se encurvará e será levada rapidamente ao colapso.

Efetivamente, as experiências mostram que quando uma força compressiva atuante sobre uma peça esbelta tem o seu valor se aproximando do valor crítico, uma deformação lateral começa a surgir e aumenta tão rapidamente com o crescimento da compressão que uma carga de valor muito próximo desse valor crítico é suficiente para produzir o colapso completo da estrutura.

Assim sendo, compreende-se porque a **carga crítica deve ser considerada como o limite de resistência a ser adotado no caso de peças comprimidas, principalmente quando se tratar de peças esbeltas.**

Esse limite jamais deverá ser atingido, uma vez que se deseje manter a peça trabalhando em condições de equilíbrio estável.

Conforme as circunstâncias, a flambagem pode ocorrer em quaisquer peças comprimidas. Dentro dos limites deste curso trataremos, apenas, do caso de peças comprimidas pelos topos por serem as que mais se encontram nas estruturas, limitando-nos às de seções simples e constantes.

Antes de encerrarmos estas considerações preliminares, julgamos útil esclarecer que **o fenômeno da flambagem**, aqui descrito como **decorrente da instabilidade de equilíbrio** a que ficam sujeitas as peças comprimidas, na realidade **é, apenas, um aspecto desse mesmo fenômeno de instabilidade** que ocorre em outras muitas circunstâncias, envolvendo peças com dimensões determinadas e solicitadas de várias outras maneiras. **Todos esses casos costumam ser estudados sob a designação genérica de Estabilidade Elástica.**

### 9.1 – PEÇAS RETAS COMPRIMIDAS PELOS TOPOS – ESTUDO GERAL PARA O CASO DA SEÇÃO RETA CONSTANTE

Estudando a flexão composta em peças longas (7.3) vimos, para o caso em que a força normal fosse compressiva, a existência de um valor crítico dessa força que conduz a deslocamentos laterais da peça infinitamente grandes por menores que sejam as causas do flexionamento lateral.

No caso de uma peça de seção constante com liberdade de rotação de suas duas extremidades – o que corresponde a uma haste bi-articulada – esse valor é

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{l^2} EJ \quad (a)$$

onde  $J$  é o menor momento de inércia da seção\*.

Esse valor se apresenta o mesmo, quer a flexão tenha sido provocada por uma excentricidade da ação compressiva, por uma pequena curvatura inicial do eixo da peça ou, ainda, pela ação de uma carga lateral; quaisquer dessas causas, por menores que sejam, conduzirão sempre ao rompimento do equilíbrio de forma da peça quando a carga axial vier a atingir esse valor que é, também, denominado de **carga de flambagem**, sendo, doravante notado sob o símbolo  $P_{fl}$  ou

$$P_{fl} = \frac{\pi^2}{l^2} EJ \quad (b)$$

Isto significa que ao comprimirmos crescentemente uma peça bi-articulada, quando o valor da carga compressiva  $P$  se aproximar de  $P_{fl}$  expresso por (b), qualquer perturbação capaz de iniciar um movimento lateral, por menor que seja, romperá o estado de equilíbrio instável da peça e esta se encurvará rapidamente e com grande amplitude no plano de menor rigidez à flexão, ficando sujeita ao colapso subsequente para pequenos acréscimos dados à carga  $P$ .

No caso de uma peça engastada em uma extremidade e inteiramente livre na outra vimos em 7.3.1 que o valor crítico ou de flambagem era

$$P_{fl} = \frac{\pi^2}{(2l)^2} EJ \quad (c)$$

As expressões (b) e (c) nos mostram, e é perfeitamente compreensível, **que, em igualdade de todas as demais circunstâncias** que possam caracterizar uma peça, **sua carga de flambagem dependerá da maneira pela qual estiver vinculada por suas extremidades**. É lógico que quando esses vínculos restringirem mais a possibilidade de deformação lateral, a carga de flambagem da peça será mais elevada, isto é, será possível aplicar à mesma uma carga compressiva mais elevada sem que seu estado de equilíbrio estável sob a forma retilínea seja rompido.

Observemos, agora, que as expressões (b) e (c) anteriores, foram encontradas em 7.3, partindo das hipóteses de existência de uma excentricidade da força normal, ou de uma

---

\* De acordo com a notação usual neste livro trata-se de  $J_y$ . Para simplificação das fórmulas prescindimos, entretanto, do índice e em todo esse capítulo.

curvatura no eixo da peça ou, ainda, de uma ação lateral qualquer. **Elas podem, entretanto, ser encontradas**, como veremos num caso a seguir a título de exemplo, **supondo a peça rigorosamente retilínea, carregada sem nenhuma excentricidade, e constituída de um material perfeitamente homogêneo.**

**Uma peça com tais características é denominada peça ideal**, por isso que jamais essas circunstâncias serão ocorrentes na prática.

Em contraposição, por mais cuidado que se tenha na confecção de uma peça, **quaisquer daquelas circunstâncias achar-se-ão presentes tornando a peça real, sempre, em uma peça imperfeita.** Deve-se, entretanto, ter em mente desde logo que a noção de peça imperfeita não significa que a mesma seja uma peça mal confeccionada; por maiores que sejam os cuidados tomados em sua preparação, toda a peça real será uma peça imperfeita onde as imperfeições inevitáveis existem, em maior ou menor grau a despeito de nossos esforços para eliminá-las.

Essa distinção, caracterizando as peças ideais e as peças reais, justifica o tratamento geralmente dado à busca da carga de flambagem das mesmas porque torna-se sensível que a peça ideal, como se concebeu até aqui, é apropriada a um tratamento teórico enquanto que a peça real ou imperfeita se constitui no campo adequado às investigações experimentais utilizando-se com bastante propriedade os métodos estatísticos.

### 9.1.1 – Peça comprimida ideal – fórmula de Euler

Coube a Euler fazer os primeiros estudos clássicos da flambagem no caso das peças ideais; outros físicos e matemáticos retomaram, posteriormente, o assunto como se verá a seguir.

Neste parágrafo, a título de exemplificação, mostraremos como obter a chamada **fórmula de Euler**, fazendo-o apenas, para o caso de uma peça bi-articulada que designaremos, de ora em diante, como de tipo 1. Posteriormente, generalizaremos a expressão estendendo-a às peças de outros tipos.

Consideremos, então, uma peça nas condições ideais, bi-articulada, e submetida a uma carga axial  $P$ , compressiva (Fig.911-1).

Suponhamos que, num determinado instante, por qualquer motivo capaz de dar início a um movimento lateral, a barra venha a fletir de modo que  $w$  seja o deslocamento de um ponto de seu eixo, ponto esse situado na abscissa  $x$ , supondo-se a origem das coordenadas no centro da barra.

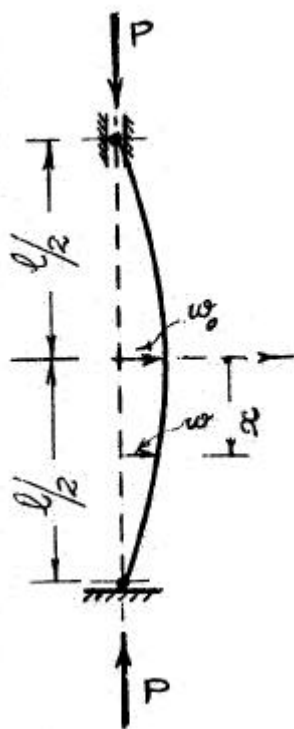


Fig.911-1

Ter-se-á para expressão dos momentos fletores daí decorrentes:

$$M = Pw$$

E a equação diferencial da elástica será:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{P}{EJ} w \quad (a)$$

Fazendo  $\frac{P}{EJ} = k^2$  fica-se com

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0$$

cuja solução é:

$$w = C_1 \operatorname{sen}(kx) + C_2 \operatorname{cos}(kx) \dots \quad (b)$$

A determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$  far-se-á em função das condições peculiares à peça.

Assim, a condição

$$\left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

conduz a

$$C_1 = 0 \quad \text{e a} \quad w = w_0 \operatorname{cos}(kx)$$

onde  $w_0$  é a deflexão máxima da peça.

Quando  $x = \frac{l}{2}$  deveremos ter  $w = 0$ , isto é:

$$w_0 \operatorname{cos}\left(\frac{k l}{2}\right) = 0$$

Havendo  $P$  atingido o valor crítico, desde que a flexão da peça haja sido iniciada por qualquer circunstância, ela será irreversível, isto é,  $w_0$  será diferente de zero apenas pela ação da carga  $P$ . Nesse caso a condição acima exige

$$\operatorname{cos}\left(\frac{k l}{2}\right) = 0 \quad \text{ou seja} \quad \frac{k l}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

Então

$$k^2 = (2n + 1)^2 \frac{\pi^2}{l^2}$$

e, finalmente,


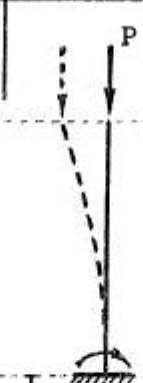
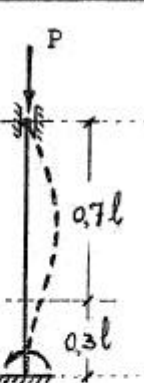
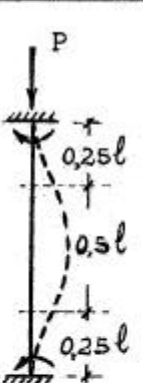
$$P_{fl} = \frac{\pi^2}{l^2} EJ$$

como já se havia encontrado em 7.3.1, uma vez que só o menor dos valores, ou seja, o correspondente a  $n = 0$ , tem interesse prático.

Procedendo-se analogamente nos casos de peças com outros tipos de fixação nas extremidades, chega-se aos valores consignados no quadro a seguir, onde se reencontra o caso anteriormente estudado e, também, as formas mais simples que as elásticas poderão assumir.

QUADRO 911-1

**Fórmula de Euler** para condições teóricas de fixação das extremidades das peças ideais comprimidas.

C A S O S	①	②	③	④
Comprimen- to } l				
Momento de Inércia Mínimo J				
Carga de flambagem $P_{fl}$	$\frac{\pi^2}{l^2} EJ$	$\frac{\pi^2}{(2l)^2} EJ$	$\frac{\pi^2}{(0,7l)^2} EJ$	$\frac{\pi^2}{(0,5l)^2} EJ$
Coefficiente de ex- tremidade $\gamma$	1,0	2,0	0,7	0,5

Os tipos mencionados até aqui, evidentemente, são teóricos; na prática, uma haste poderá ser vinculada em suas extremidades de maneiras mais ou menos próximas das correspondentes a esses tipos.

De qualquer forma, vê-se que é possível exprimir genericamente a **carga de flambagem** por

$$P_{fl} = \frac{\pi^2}{I_{fl}^2} EJ$$

911-I

onde  $I_{fl}$ , denominado de **comprimento de flambagem** da peça, se exprime por

$$I_{fl} = \gamma l$$

911-II

e representa o comprimento que precisaria ter uma peça vinculada como no caso 1 - tipo fundamental, de modo que, tendo as demais características idênticas às da peça em estudo, venha a ter a mesma carga de flambagem desta última.



O coeficiente  $\gamma$  da expressão 911-II atende às condições de extremidades da barra e se encontra no quadro anterior, para cada tipo teórico.

A expressão 911-I é chamada de **primeira forma da fórmula de Euler**; uma segunda pode ser obtida dividindo ambos os membros pela área da seção reta da peça. Fazendo então

$$\begin{array}{l} \sigma_{fl} = \frac{P_{fl}}{S} \quad (a) \\ \frac{J}{S} = i^2 \quad (b) \\ \lambda = \frac{l_{fl}}{i} \quad (c) \end{array} \quad 911\text{-III}$$

chega-se a

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E \quad 911\text{-IV}$$

que é a **segunda forma da fórmula de Euler**, onde  $\sigma_{fl}$  é a **tensão crítica** ou **tensão de flambagem** e  $\lambda$  um número relativo denominado **coeficiente de esbeltez** da peça.

**A tensão de flambagem, ou tensão crítica será, pois, a tensão a partir da qual a peça, tendo sido encurvada por qualquer causa sobreposta à força axial compressiva, permanecerá encurvada e tenderá a aumentar essa curvatura mesmo que se remova a causa que lhe deu origem**

Quanto ao coeficiente de esbeltez,  $\lambda$ , vemos que ele indica as dimensões relativas da peça.

As expressões 911-I e 911-IV mostram que tanto **a carga como a tensão de flambagem de uma determinada peça comprimida não dependem da resistência à compressão do material de que a mesma é constituída**. A influência do material se manifesta através o módulo de elasticidade, E, de sorte que peças, por exemplo, de aço comum ou de aço de alta resistência terão a mesma carga de flambagem em igualdade de dimensões, já que os aços apresentam os mesmos módulos de elasticidade. Afóra a influência do módulo de elasticidade, E, é a distribuição do material na peça, fazendo-a mais esbelta ou mais robusta, que pesa decididamente. Desse modo, com o mesmo volume de material podemos obter peças de mesmos comprimentos e diferentes capacidades de carga compressiva; **a de maior capacidade será obtida quando a área de seção reta estiver distribuída de modo a se ter o maior valor de J** (menor momento de inércia da seção).

Por tal motivo as peças de seção em coroa circular admitem maiores cargas que as de seção circular cheia de mesma área. Naturalmente há um limite para o afastamento das massas do centro de gravidade da seção; quando se tende para seções vazadas de paredes cada vez mais finas há um momento em que é a estabilidade elástica da própria parede em si que entra em jogo antes que o perigo de instabilidade atinja a peça como um todo.

**9.1.2 – Limite de aplicação da fórmula de Euler – esbeltez limite**

A fórmula de Euler, tal como foi obtida e apresentada, tem o seu campo de aplicação restrito uma vez que, ao instituí-la, foi suposto constante o módulo de elasticidade, E.

Isso só é aceitável enquanto estivermos com tensões abaixo do limite da elasticidade do material\*, o que corresponde a dizer que a **fórmula de Euler só é aplicável às peças sujeitas à flambagem no regime elástico**, ou seja quando  $\sigma_{fl} \leq \sigma_E$ .

Isto implica em dizer que o seu campo é o das **peças longas ou de grande esbeltez**

A esbeltez a partir da qual a flambagem ocorrerá no regime elástico, e, conseqüentemente, permitirá o emprego da fórmula de Euler com o aspecto até aqui apresentado, é denominada **esbeltez limite**. Nós a notaremos por  $\lambda_E$ .

Então, de 911-IV, virá, fazendo  $\sigma_{fl} = \sigma_E \approx \sigma_P$

$$\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_E}}$$

912-I

que mostra ser a **esbeltez limite** característica de cada material.

A curva representativa das tensões de flambagem segundo a fórmula de Euler tem o aspecto da Fig.912-1 onde, também, se acha assinalada a esbeltez limite  $\lambda_E$ .

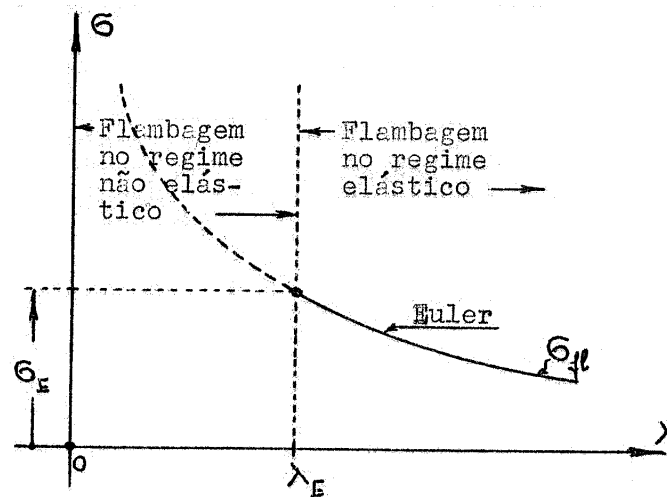


Fig. 912-1

\* Para os materiais que admitem regime proporcional sabe-se que o limite de proporcionalidade praticamente coincide com o de elasticidade.

Para os demais materiais, embora a rigor não haja nenhuma proporcionalidade entre tensões e deformações, pode-se, entretanto, sem cometer grande erro, supor essa proporcionalidade até o limite de elasticidade, adotando-se como módulo de elasticidade, constante, o **módulo de elasticidade secante** até aquele limite (ver 1.1.8.1).

Note-se que, como se trata evidentemente de tensões compressivas, para simplificação da notação usaremos  $\sigma_P$ ,  $\sigma_E$  e  $\sigma_S$  com o significado  $\sigma_{.P}$ ,  $\sigma_{.E}$  e  $\sigma_{.S}$ .

Para os materiais mais comuns podemos tomar, em média, os seguintes valores para  $\lambda_E$ :

Aços doces .....	100*
Ferro fundido .....	80
Madeiras .....	60 a 100 (variável)
Concreto .....	85

Quando  $\lambda < \lambda_E$ , a tensão de flambagem será maior que a tensão no limite de elasticidade e **a flambagem ocorrerá no regime não elástico**, não mais sendo aplicável a fórmula de Euler, como a apresentávamos em 911-I e 911-IV.

---

\* Os alemães, para os aços St37 e St52, adotam, respectivamente:

$$\text{St} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_P = 1920 \text{ N/mm}^2 \\ \lambda_E = 103,9 \end{array} \right. \quad \text{St52} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_P = 2880 \text{ N/mm}^2 \\ \lambda_E = 84,83 \end{array} \right.$$

### 9.1.3 – Flambagem das peças ideais no regime não elástico – fórmula de Engesser-Shanley para os materiais dúteis

Engesser, nos fins do século passado, e, posteriormente, Karman, nos princípios deste século, desenvolveram uma teoria da flambagem no regime não elástico.

Essa teoria, em última análise, consiste em estender a fórmula de Euler, sob o aspecto 911-IV, ao domínio das peças curtas, para o que haver-se-ia de substituir o módulo de elasticidade  $E$ , constante abaixo do limite de proporcionalidade, por um **módulo de elasticidade reduzido**,  $E_R$ , obtido em função não só de  $E$  como, também, do chamado **módulo tangente**,  $E_T$ ; este último nada mais é que o **coeficiente angular do diagrama tensão-deformação axial de compressão do material quando a tensão é igual à tensão crítica**, ou

$$E_T = \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\sigma=\sigma_{f1}} \quad (a)$$

Fazendo, então,  $E_R = \xi E$ , onde  $\xi$  depende da tensão crítica, a teoria de Engesser-Karman pode ser resumida na expressão

$$\sigma_{f1} = \xi \frac{\pi^2}{\lambda^2} E \quad 913-I$$

também conhecida como **fórmula do módulo duplo**.

Esta teoria, entretanto, levada a confronto com os resultados experimentais revelou não espelhar a realidade como o demonstrou, em 1947, Shanley.

Realmente, ela nos dá os limites superiores das tensões críticas de flambagem, podendo, entretanto, esta ocorrer sem que esses limites sejam atingidos, isto é, quando a tensão de compressão atinge valores menores correspondentes à expressão

$$\sigma_{f1} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E_T$$

que pode ser escrita, também, sob a forma

$$\begin{aligned} \sigma_{f1} &= \chi \frac{\pi^2}{\lambda^2} E \\ \chi &= \frac{E_T}{E} \end{aligned} \quad 913-II$$

É interessante notar que esta última fórmula, conhecida com o nome de **fórmula do módulo tangente**, havia sido instituída pelo mesmo Engesser antes da **fórmula do módulo duplo** que lhe parecera mais acertada, tendo sido, por isso, relegada a um segundo plano. Ela foi, porém, retomada após as experiências de Shanley e, posteriormente, de Duberg e Wilder, tendo estes últimos mostrado que, para as barras de aço com seção em duplo-te, não se pode ultrapassar de 5% os valores fornecidos por 913-II.

Nessas condições, a **fórmula do módulo tangente**, que também poderemos denominar de **fórmula de Engesser-Shanley**, parece dever ser a preferida para representar a lei de variação das tensões de flambagem dos materiais dúteis, como os aços doces, porque dá

valores não só próximos dos resultados experimentais como, também, afetados de erros para menos, o que nos coloca do lado de uma maior segurança.

Para sua aplicação, todavia, será preciso conhecer  $E_T$  que pode ser determinado, seja diretamente do diagrama tensão-deformação obtido experimentalmente para cada material, seja analiticamente, derivando a expressão  $\sigma = f(\epsilon)$ , de vez que  $E_T$  se exprime como em (a).

Para os aços doces de construção, os alemães (DIN-4114) admitem uma plasticidade ilimitada e propõem, para  $S = f(\epsilon)$  entre os limites de proporcionalidade e de escoamento, a expressão aproximada que se segue:

$$\frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_S - \sigma_P} = \operatorname{tgh} \left( \frac{\epsilon E - \sigma_P}{\sigma_S - \sigma_P} \right)$$

conforme se observa na Fig.913-1, da qual, por derivação, se deduz

$$E_T = \left[ 1 - \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_S - \sigma_P} \right)^2 \right] E$$

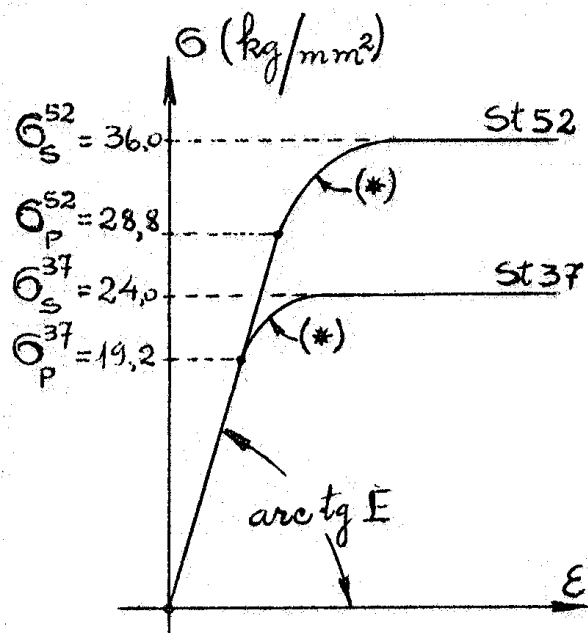


Fig.913-1

Nesse caso, quando  $\sigma = \sigma_{fl}$ , o coeficiente  $\chi$  da expressão 913-II se torna

$$\chi = 1 - \left( \frac{\sigma_{fl} - \sigma_P}{\sigma_S - \sigma_P} \right)^2 \tag{913-III}$$

Trazendo nesta expressão a primeira fórmula do grupo 913-II fica-se com  $\chi$  em função de  $\lambda$  e do material ( $\sigma_P, \sigma_S, E$ ).

Pode-se, então, estabelecer a tabela 1, que adiante se vê:

TABELA 1

$\lambda$	$\frac{\pi^2}{\lambda^2} E$ (N/mm <sup>2</sup> )	Aço St. 37			Aço St. 52			Observações
		$\chi$	$E_T$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_{fl}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\chi$	$E_T$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_{fl}$ (N/mm <sup>2</sup> )	
0		0	0	240,0	0	0	360,0	$E = 21000 \text{ N/mm}^2$
10	20730	0,010	2400	240,0	0,017	3600	360,0	$\sigma_P = 0,8 \sigma_S$
20	5200	0,046	9660	239,7	0,069	14500	359,2	<u>St 37:</u>
30	2320	0,104	21840	239,1	0,155	32500	357,8	$\sigma_S = 240 \text{ N/mm}^2$
40	1300	0,184	38700	238,2	0,274	57500	355,3	$\sigma_P = 192 \text{ N/mm}^2$
50	830	0,285	59900	236,7	0,424	89000	351,1	$\lambda_E \approx 103,9$
60	577	0,407	85500	234,4	0,597	125500	343,9	
70	424	0,546	114600	230,9	0,784	164600	331,7	
80	324	0,696	146000	225,5	0,955	200500	309,3	<u>St 52:</u>
<u>84,8</u>					1,0	210000	288,0	$\sigma_S = 360 \text{ N/mm}^2$
90	256	0,848	178000	217,0				$\sigma_P = 288 \text{ N/mm}^2$
100	207	0,976	205000	202,4				
<u>103,9</u>	192	1,0	210000	192,0				$\lambda_E \approx 84,8$

Admitindo-se, portanto, como válidas, para as peças ideais, as fórmulas de Euler (zona elástica da flambagem) e de Engesser-Shanley (zona não elástica da flambagem), as tensões de flambagem para os aços St 37 e St 52 se representam como na fig.913-2.

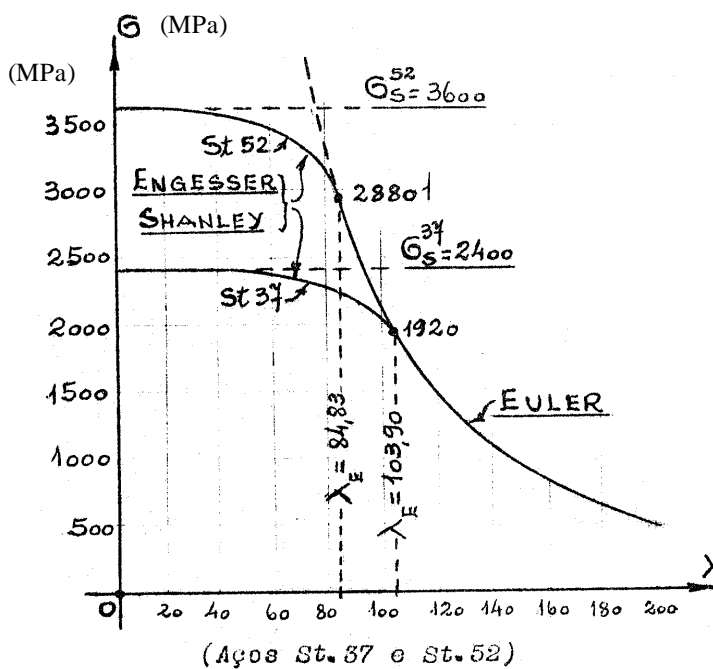


Fig.913-2

### 9.1.4 – A peça real ou imperfeita: tratamento teórico – fórmula de Scheffler – excentricidade equivalente

Já se viu que as imperfeições inevitáveis da peça têm influência na resistência à compressão da mesma, contribuindo para seu decréscimo.

Métodos baseados na ocorrência inevitável dessas imperfeições têm sido desenvolvidos por vários mestres, o mais comum e simples dos quais envolve a existência pressuposta de uma certa excentricidade cujo valor se toma de acordo com dados decorrentes da experiência e que, no mais das vezes, deverá atender, também, aos efeitos das demais imperfeições já mencionadas e que afetam a resistência da peça\*.

Para exemplificar, consideremos **o caso de uma peça bi-articulada e carregada com uma pequena excentricidade, c.**

Em 7.3.1 vimos que o maior momento fletor, quando a excentricidade ocorrer no plano de menor rigidez à flexão, era

$$\bar{M} = -\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{f1}}}\right)Pc$$

E como para o caso se tem

$$P_{f1} = \frac{\pi^2}{l^2} EJ$$

virá:

$$\bar{M} = -\sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)Pc$$

A maior tensão compressiva aparecerá na seção de maior momento fletor no bordo do lado da concavidade da peça encurvada e, **em valor absoluto** (sinal menos indicativo da compressão é dispensável no caso) será:

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{S} + \frac{\bar{M}}{W_y} = \frac{P}{S} + \frac{Pc}{W_y} \sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)$$

ou ainda

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{S} \left[ 1 + \frac{c}{k_y} \sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P/S}{Ei^2}}\right) \right] \quad (a)$$

Admitindo, então, que o limite de resistência da peça se esgote quando  $\bar{\sigma}$  atingir ao limite de escoamento para os materiais dúteis, ter-se-á:

$$P_{f1}^* = \frac{\sigma_s}{1 + \frac{c}{k_y} \sec\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{P_{f1}^*}{ES}}\right)} S$$

914-I

conhecida como **fórmula de Scheffler**.

\* Vê-se, desse modo, que, embora se pretenda estudar teoricamente o problema, acaba-se por se ter de admitir certos dados experimentais com o que, a rigor, o tratamento passará a ser semi-empírico.

O valor

$$\sigma_{fl}^* = \frac{P_{fl}^*}{S} \quad (*)$$

será o da **tensão média ocorrente no centro de gravidade da seção** quando tiver início o escoamento no bordo mais comprimido, e se exprimirá por

$$\sigma_{fl}^* = \frac{\sigma_s}{1 + \frac{c}{k_y} \sec \left( \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{fl}^*}{E}} \right)} \quad 914-II$$

As expressões 914-I e 914-II nos dão  $P_{fl}^*$  e  $\sigma_{fl}^*$  para determinados valores de  $\lambda$  e de  $\frac{c}{k_y}$ , devendo-se notar que  $k_y$  é a **distância nuclear** medida sobre o eixo central principal de maior momento de inércia (distância nuclear referente ao plano da flexão).

Na Fig.914-1 temos a representação gráfica da expressão 914-II para o caso de um aço estrutural apresentando um limite de escoamento de 250 MPa para diferentes valores da excentricidade de aplicação da carga compressiva.

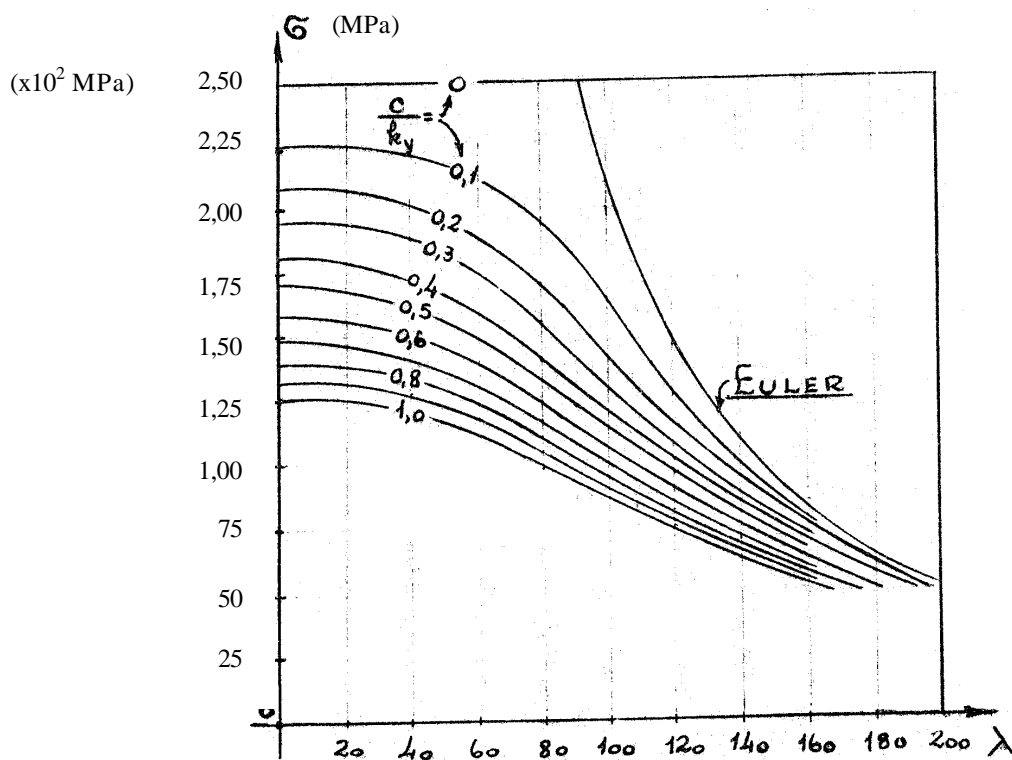


Fig.914-1

Aço estrutural com limite de escoamento de 250 MPa

(\*)  $\sigma_{fl}^*$  representa, como se verá explanado em 9.1.5, a tensão limite de resistência à compressão com flambagem de uma peça imperfeita.



Em lugar de se pressupor uma determinada excentricidade da carga compressiva poder-se-ia, também, admitir que a peça não fosse rigorosamente retilínea. Supondo, assim, como em 7.3.3 para uma haste bi-articulada, que a mesma apresentasse uma curvatura inicial, poderíamos, identicamente ao desenvolvimento anterior e partindo da expressão 733-III, encontrar uma expressão para  $\sigma_{f1}^*$  em função do maior afastamento inicial,  $e_0$ , do eixo da peça relativamente à sua posição no caso de ser retilínea.

É usual, entretanto, quando se busca o limite de resistência de uma haste comprimida, pressupondo a existência dessas imperfeições (assim como a ocorrência da falta de homogeneidade do material a termo-nos, apenas, à existência da excentricidade, com o emprego das expressões 914-I e 914-II. Para atender às demais imperfeições admite-se uma **excentricidade equivalente**,  $\frac{c}{k_y}$ , maior que a provavelmente existente e cujo valor será fixado em face dos resultados experimentais.

A título de exemplificação mencionaremos os valores recomendados por algumas autoridades no assunto.

Assim é que **Moncrief**, de numerosos ensaios efetuados, achou

$$\frac{c}{k_y} = (0,15 \text{ até } 0,60) \quad 914\text{-III}$$

recomendando, particularmente, o maior valor para maior segurança.

Segundo ele esses valores se aplicam aos aços de baixo e de alto teor de carbono, bem como ao ferro fundido e a muitas espécies de madeiras.

Já **Prichard** aconselha para peças bi-articuladas:

$$\frac{c}{k_y} = 0,1 + \frac{\lambda}{700} \quad 914\text{-IV}$$

enquanto **Basquin** indica

$$\frac{C}{k_y} = 0,1 + \frac{\lambda}{1000} \quad 914\text{-V}$$

e os alemães, na DIN 4114, indicam uma excentricidade

$$c = \frac{i}{20} + \frac{1}{500} \quad 914\text{-VI}$$

Como o raio de giração,  $i$ , em igualdade de áreas de seção, depende da forma da seção eles a admitem em condições bem desfavoráveis como as de um perfil de aba dupla. Para esses perfis se tem, em média

$$i \approx \frac{k_y}{3}$$

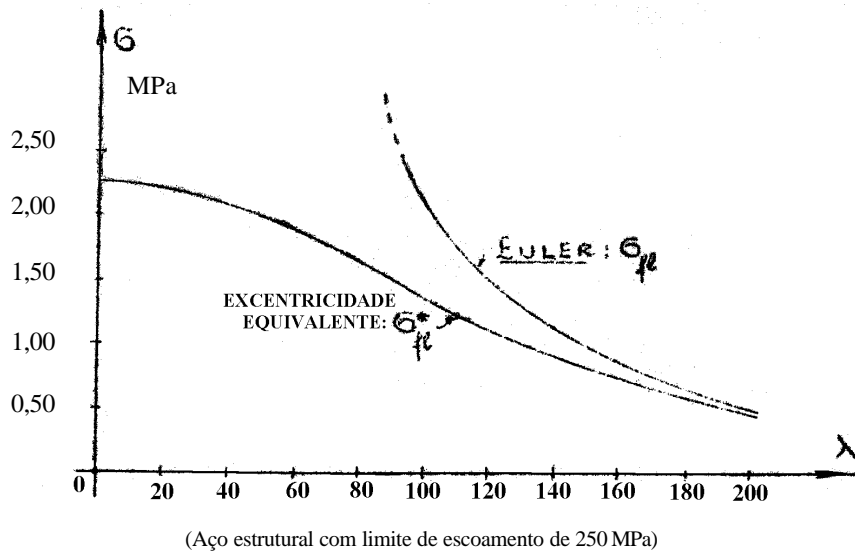
com o que se chega a

$$\frac{c}{k_y} = 0,15 + \frac{\lambda}{167}$$

914-VII

muito mais desfavorável que as expressões 914-III, 914-IV e 914-V.

Supondo aplicável a expressão 914-IV para a **excentricidade equivalente** e levando seus valores na expressão 914-II, encontra-se, para as diversas esbeltezas e para um aço estrutural com limite de escoamento de 250 MPa (o mesmo da Fig.914-1) a curva da Fig. 914-2.



Excentricidade equivalente segundo 914-IV

Fig.914-2

### 9.1.5 – Estudo experimental da flambagem – áreas de resultados experimentais

Até aqui nos ocupamos da flambagem sob o aspecto teórico.

Quando consideramos as peças ideais ao determinarmos suas tensões críticas ou de flambagem,  $\sigma_{fl}$  seguimos um tratamento teórico perfeitamente ajustável a tais peças que, por sua natureza, são de existência, também, teórica. **As imperfeições inevitáveis, seja da própria peça, seja de centragem na aplicação da carga, não foram levadas em conta**, de modo que se pode prever que **os resultados assim obtidos devem estar mais ou menos divorciados da realidade estrutural**.

Ora, as experiências mostram que a influência das imperfeições varia com a esbeltez da peça, de modo que muitas normas de cálculo de peças comprimidas, tomando como referência as tensões de flambagem em peças ideais,  $\sigma_{fl}$ , esbarram na necessidade de adotar coeficientes de segurança muito variáveis com a esbeltez para, além do mais, atender a essas imperfeições. Em geral, as leis de variação desses coeficientes de segurança são bastante arbitrárias e passíveis de críticas.

Por isso, muitos mestres preferem incluir, desde logo, as imperfeições da peça no estudo da flambagem, referindo seus cálculos não mais à tensão de flambagem,  $\sigma_{fl}$ , de uma peça ideal, mas à **tensão limite de resistência à compressão com flambagem, de uma peça imperfeita,  $S_{fl}^*$** .

Em 9.1.4 já procuramos determinar expressões para  $\sigma_{fl}^*$  ainda sob o aspecto teórico, mas ficou evidenciado que um certo empirismo estará presente nos valores que haverão de traduzir, nessas expressões, as influências das imperfeições que, por serem de caráter eminentemente fortuito, a rigor, não podem ser expressas por estes ou aqueles valores.

Essa é a razão porque muitos estudiosos do fenômeno optaram, desde logo, por um **tratamento francamente experimental** mediante o qual o **limite de resistência à compressão com flambagem de uma peça imperfeita,  $S_{fl}^*$** , **procura ser determinado a partir de numerosos ensaios de laboratório, exprimindo-se, conseqüentemente, por fórmulas empíricas**.

Nessas experiências, cuidados especiais são tomados de modo que certas condições de extremidade sejam asseguradas tanto quanto possível. As mais comuns são aquelas que correspondem aos casos de números (1) e (4) a que nos referimos em 9.1.1, sendo que o primeiro é o mais usual. As questões atinentes à retilineidade da peça, à centragem da carga e à homogeneidade do material devem ser, também, devidamente apreciadas.

Usualmente, os resultados obtidos se assinalam em gráficos referidos a um sistema de eixos cartesianos, onde os diferentes graus de esbeltez,  $\lambda$ , figuram em abcissas e as tensões limites,  $\sigma_{fl}^*$ , em ordenadas.

É óbvio que, para cada material, **os resultados encontrados**, para todos os valores de  $\lambda$ , não podem se encontrar sobre uma curva, **espalhando-se**, ao revés, por uma área que se denomina de **área de resultados experimentais** e que pode ser considerada limitada, superior e inferiormente, por duas curvas que podemos denominar de **curva limite superior** e **curva limite inferior**.

Essas áreas de resultados experimentais podem se referir aos resultados de uma determinada pesquisa feita por um experimentador como, num âmbito mais geral, ao conjunto de todos os resultados conhecidos obtidos no decorrer do tempo por muitos deles. No que veremos a seguir, esta última aceção será a considerada por nós.

É interessante notar que a forma dessa área de resultados experimentais depende não só do material como, também, das condições da experimentação. A dispersão dos resultados deve ser levada à conta das imperfeições inevitáveis na peça, bem como a outras circunstâncias da experimentação (operador, equipamento, etc.), de sorte que supondo estas últimas invariáveis – o que a rigor não é bem verdade um material pouco fiel em suas qualidades dará lugar a áreas mais largas que outro capaz de apresentar essas qualidades com mais uniformidade. Também experimentações levadas a cabo com mais rigor e cuidado devem conduzir a áreas mais estreitas que as correspondentes a trabalhos feitos em moldes mais tolerantes.

De tudo isso se infere que a **curva limite superior representará os resultados dos ensaios em que as imperfeições estejam reduzidas a um mínimo**, isto é, **representará, proximamente, a resistência das peças ideais**, enquanto que para a **curva limite inferior** tenderão os resultados correspondentes às amostras sobre as quais todas as circunstâncias desfavoráveis se fizeram presentes.

Estas assertivas, decorrentes de um raciocínio lógico são confirmadas pelas experiências como veremos a seguir.

A Fig.915-1 nos mostra a configuração da área de resultados experimentais referente a amostras de aço-doce com boas condições de operação. Esse aspecto da área pouco se altera para outros materiais que, como o aço-doce apresentem um escoamento nítido.

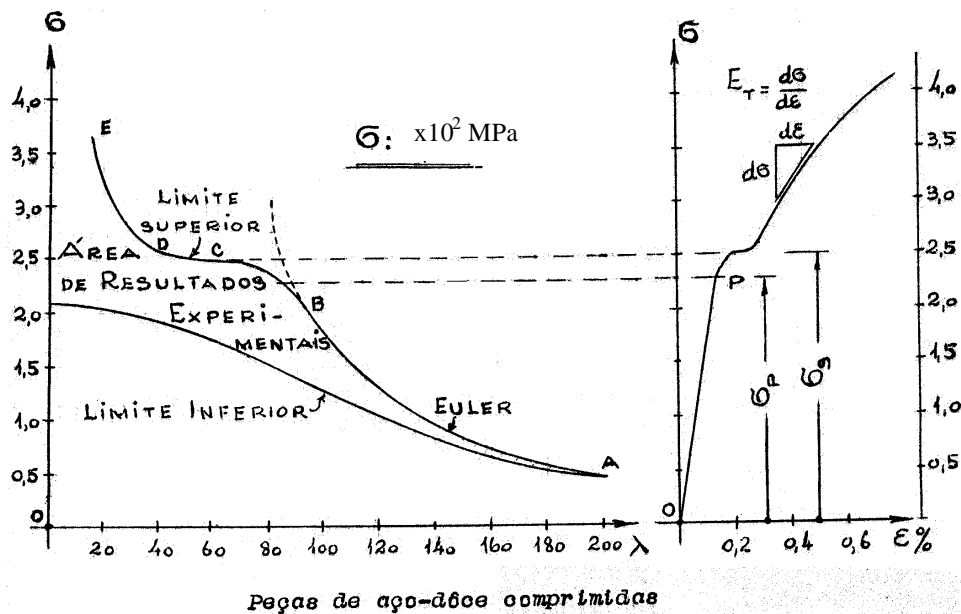


Fig.915-1

Para amostras de ferro fundido o aspecto geral dessa área é o da Fig.915-2, enquanto que, para peças de madeira temos a representação da Fig.915-3, onde a curva limite superior tem um andamento parecido com o da referente ao aço-doce, mas, dada a heterogeneidade do material, a área de resultados é muito mais alargada.

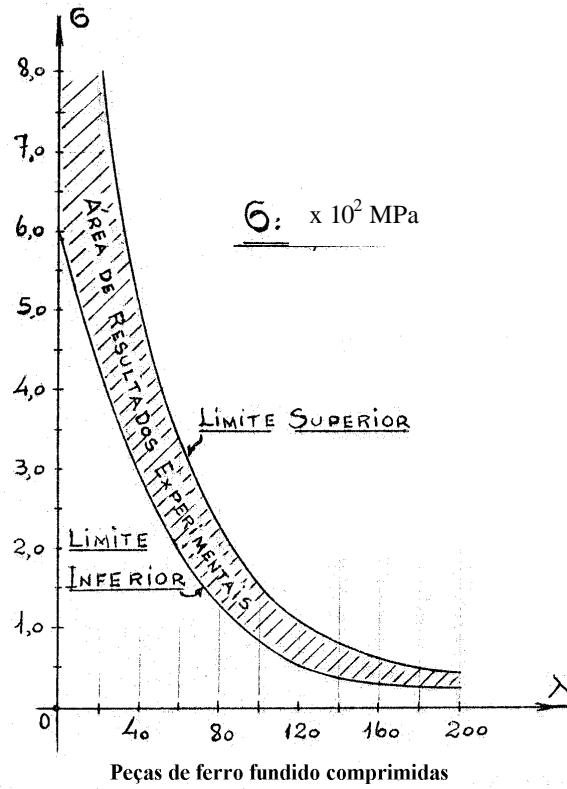


Fig.915-2

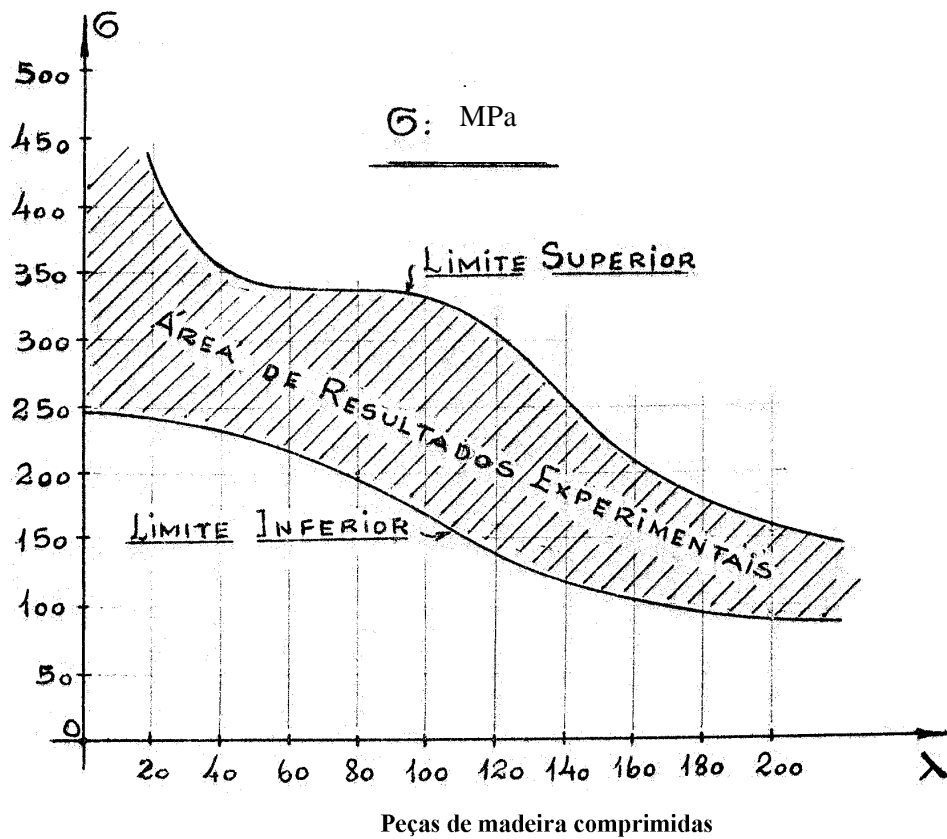


Fig.915-3

Essas áreas e seus limites, superior e inferior, merecem uma análise mais detalhada.

No que tange às curvas limites superiores, comecemos pela da Fig.915-1, onde se verifica:

- a) que o trecho AB, correspondente a tensões de flambagem menores que o limite de proporcionalidade, é, praticamente, coincidente com a hipérbole de Euler;
- b) que, quando se ultrapassa o limite de elasticidade, a curva começa a mudar de rumo e a se afastar da curva de Euler, como se vê no trecho BC, até que se atinja ao limite de escoamento. Nesta ocasião, em consequência das grandes deformações plásticas, e enquanto elas se processam, a curva apresenta o trecho CD sob a forma de um patamar mais ou menos acentuado;
- c) que, ultrapassado o limite de escoamento, o material se revigora e a curva limite assume o aspecto DE, subindo rapidamente;
- d) que há, portanto, uma íntima correlação entre a forma da curva limite superior e a do diagrama tensão-deformação axial de compressão dos materiais dúteis, como o aço-doce.

Quanto mais bem definido o escoamento do material, mais proeminente e nítido se torna o trecho BCD e, assim, conhecendo a forma do diagrama tensão-deformação axial desses materiais pode-se prever a dessa curva limite superior.

Verifica-se que, para os aços-doces e materiais dúteis semelhantes, a curva limite superior pode ser representada pela expressão 913-II

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E_T$$

que é a **fórmula do módulo tangente de Engesser-Shanley**.

Lembremos aqui que esta fórmula, idêntica à fórmula de Euler, 911-IV, dela difere, apenas, pelo fato de que o módulo de elasticidade tangente,  $E_T$ , é variável com a tensão crítica, ou seja, com a esbeltez,  $\lambda$ , da peça. Quando essa esbeltez é maior que a esbeltez limite,  $\lambda_E$ , ( $\lambda \geq \lambda_E$ ), se tem  $E_T = E = \text{constante}$ , e se recai na fórmula de Euler.

Analisemos, agora, a curva limite superior da Fig.915-2, referente ao ferro fundido.

Ela não apresenta nenhuma das características encontradas na Fig.915-1, pois que se desenvolve como uma curva de curvatura pouco variável. Isso acontece porque o ferro fundido apresenta um diagrama tensão-deformação axial de compressão sem nenhuma particularidade, isto é, com uma curvatura também contínua, não havendo escoamento. É interessante notar que os aços duros, de alto teor de carbono, cujo diagrama tensão-deformação axial é semelhante, em forma, ao do ferro fundido, apresentam, também, uma curva limite superior idêntica à de que estamos tratando; à proporção que o teor de carbono vai diminuindo e os aços se vão tornando mais doces, uma proeminência, como o trecho BCD da Fig.915-1, vai surgindo e se tornando mais e mais nítida.

Passando às curvas limites inferiores, verifica-se da experimentação que, além da natureza do material, elas dependem, principalmente, do cuidado e exatidão com que tenham sido conduzidos os ensaios e colhidos seus resultados. Quando essas condições são boas e uniformes, a curva limite inferior pode ser expressa, com bastante acerto, pela expressão da **fórmula de Scheffler**, 914-II, que resulta da consideração de se supor as imperfeições da peça representadas por uma certa excentricidade na aplicação da carga.

Isto mostra que a **excentricidade da carga** e a **falta de retilineidade da peça** são **fatores importantes no decréscimo de sua resistência à compressão**.

Para terminar estas apreciações sobre as áreas de resultados experimentais é da maior importância observar que elas se alargam à proporção que a esbeltez diminui e se estreita para o lado das peças de maior esbeltez.

Isto significa que, embora **as imperfeições inevitáveis da peça contribuam para a diminuição do valor de sua resistência à compressão com flambagem**, essa influência é **maior no caso das peças menos esbeltas que no caso das mais esbeltas; nestas últimas, a instabilidade do equilíbrio elástico, próprio da natureza da solitação, tem papel preponderante no limite de sua resistência à compressão**, as imperfeições influenciando acessoriamente.

Isto significa que a aplicação da fórmula de Euler às peças de grande esbeltez, considerando-as como peças ideais, conduz a erros menores que os decorrentes da aplicação de qualquer outra expressão teórica a peças de pequena ou média esbeltez, supondo-as também como ideais, tudo na hipótese de que venha a ocorrer alguma das imperfeições fortuitas já mencionadas.

### **9.1.6 – Critério geral para a fixação dos limites de resistência e das cargas admissíveis nas hastes comprimidas**

Com base no que se acaba de expor, costumam ser fixados os limites de resistência à compressão com flambagem de hastes comprimidas axialmente pelas diversas normas de cálculo estrutural.

Em geral, os critérios adotados preceituam o seguinte:

- a) para **peças de esbeltez maior que a esbeltez limite**, ( $\lambda \geq \lambda_E$ ), em que a flambagem ocorrerá no regime elástico, **adoção da fórmula de Euler para limite de resistência**. Neste caso, a peça é, suposta nas condições ideais e quanto mais esbeltas, mais facilmente passam do equilíbrio estável ao instável, deve-se utilizar coeficientes de segurança capazes não só de atender a essa circunstância como, também, a influência, se bem que pequena, das imperfeições inevitáveis;
- b) para **peças com coeficientes de esbeltez menores que a esbeltez limite**, ( $\lambda < \lambda_E$ ), em que a flambagem ocorrerá no regime não elástico, **recorso aos resultados experimentais obtidos sobre peças reais**, fugindo-se da consideração da peça ideal. Como tais resultados experimentais já atendem à ocorrência fortuita das imperfeições das peças e de centragem da carga, os coeficientes de segurança a adotar para fixar as cargas admissíveis deverão ser adequados às fórmulas que se estejam empregando. É quando se usa uma fórmula que represente valores situados nas zonas mais altas das áreas de resultados experimentais, impõe-se o emprego de um coeficiente de segurança maior do que o adotado para outra fórmula que traduza valores situados nas regiões mais baixas daquelas mesmas áreas.

Assim sendo, desde que se usem com coeficientes de segurança ajustados à região das áreas de resultados experimentais em que passam as curvas que as representam, quaisquer fórmulas empíricas podem ser consideradas como suscetíveis de emprego; a preferência por uma em relação a outras decorre, em geral, de fatos sem qualquer fundamentação essencial, por exemplo a moda. Isso justifica o grande número de fórmulas empíricas existentes e preconizadas por normas diferentes, todas, afinal, conduzindo a resultados praticamente comparáveis. A fórmula de Scheffler, 914-II, pode, também, ser empregada desde que se fixe um valor para a **excentricidade equivalente** e um coeficiente de segurança correlato.

No parágrafo a seguir, 9.1.7, a título de exemplificação, mencionaremos algumas dessas fórmulas empíricas mais comumente preconizadas.



### 9.1.7 – Fórmulas empíricas

Como acabamos de ver, para as peças de pequena e média esbelteza é razoável nos atermos aos resultados experimentais para determinar seus limites de resistência à compressão com flambagem, resultados esses que, se espalhando por uma área mais ou menos larga, devem, para efeito dessa determinação, ser representados por fórmulas empíricas.

Muitas dessas fórmulas têm sido sugeridas por diferentes pesquisadores dos fenômenos ligados à compressão das hastes, entretanto uma simples equação não pode representar uma área de resultados experimentais; elas podem, quando muito, ser arrançadas de tal modo que venham a aproximar um certo conjunto desses valores experimentais.

Encarando assim o problema, vê-se que não haverá outras razões que não as de mero hábito, simplicidade de emprego e, talvez, até de moda, que nos induzam a considerar quaisquer dessas fórmulas empíricas como mais recomendáveis que outras, desde que aplicadas aos materiais para que tenham sido instituídas e com os coeficientes de segurança impostos pelo maior ou menor rigor das experiências de que resultaram.

Embora haja um grande número dessas fórmulas empíricas, podemos sintetizá-las sob a forma geral

$$\sigma_{fl}^* = f(\text{material}, \lambda) \quad 917\text{-I}$$

onde a influência do material se faz sentir através os valores de certos coeficientes nas várias expressões.

Para efeito de exemplificação citaremos, apenas, as fórmulas mais comumente usadas.

#### 9.1.7.1 – Fórmula de Gordon-Rankine

Apresenta-se sob a forma

$$\sigma_{fl}^* = \frac{\sigma_o}{1 + \beta \lambda^2} \quad 917\text{-II}$$

onde  $\sigma_o$  é a tensão limite de resistência à compressão em peça curta (limite de escoamento para materiais que escoam ou limite de ruptura para os demais),  $\lambda$  é a esbelteza da peça e  $\beta$  é um coeficiente próprio de cada material e obtido experimentalmente.

É curioso assinalar que esta fórmula foi obtida partindo da consideração de uma carga excêntrica comprimindo a peça e causando-lhe, conseqüentemente, uma flexão composta. O limite de resistência da peça seria atingido quando, no bordo mais comprimido da seção mais solicitada, a tensão alcançasse o valor  $\sigma_o$ . Esse tratamento, inicialmente teórico, fica sujeito, entretanto, à críticas em passagens posteriores quando se é obrigado a fixar o valor da excentricidade a ser suposta como ocorrente. Em face disso, tendo-se que adotar um valor experimental, a fórmula acaba por tomar todas as características de empírica, como, é preferível considerá-la desde logo.

Os valores de  $\beta$  mais comumente indicados são os seguintes:

Aços-doces .....	$(0,8 \text{ a } 1,5) \times 10^{-4}$
Ferro fundido .....	$(5 \text{ a } 6) \times 10^{-4}$
Madeiras rijas .....	$(1 \text{ a } 1,5) \times 10^{-3}$ .

Costuma-se indicar valores variando de 2,0 a 3,5 para os coeficientes de segurança a serem usados com esta fórmula.

Muitas vezes se diz que a fórmula de Rankine é aplicável a todas as esbeltezas, idéia que, contudo, pode conduzir a erros sensíveis, uma vez que os valores de  $\beta$  variam com a própria esbeltez. Assim sendo, ao empregarmos essa fórmula, é preciso conhecer dentro de que limites de  $\lambda$  são válidos os valores de  $\beta$  disponíveis.

Os apontados anteriormente por nós se referem às peças de média esbeltez, para as quais, então, será mais razoável aplicar a fórmula em pauta.

**9.1.7.2 – Fórmula de Tetmajer**

De seus numerosos e cuidadosos ensaios levados a efeito no laboratório de Ensaios de Materiais de Zurich, M.Tetmajer constatou que, para peças de média e pequena esbeltez, as tensões limites de resistência com flambagem podiam se exprimir sob a forma

$$\sigma_{fl}^* = \sigma_o - a\lambda + b\lambda^2 \tag{917-III}$$

onde  $\sigma_o$  é o limite de resistência à compressão sem flambagem (peça curta) e **a** e **b** são coeficientes próprios de cada material.

Verificou, ainda, Tetmajer que o coeficiente **b** da expressão anterior, exceto para o ferro fundido, é, em geral, muito pequeno, de modo que, a não ser para este material, os valores limites da resistência à compressão com flambagem podem ser expressos por uma fórmula linear.

Usando como unidade de tensão o MPa, a fórmula de Tetmajer para os materiais por ele estudados pode ser escrita como se segue:

Aço St.37	$\sigma_{fl}^* = 289,05 - 0,8175 \lambda$	(a)	
Aço St.52	$\sigma_{fl}^* = 58,905 - 3,8175 \lambda$	(b)	
Ferro fundido	$\sigma_{fl}^* = 776 - 12 \lambda + 0,053 \lambda^2$	(c)	917-IV
Madeiras macias	$\sigma_{fl}^* = 30 - 0,20 \lambda$	(d)	
Madeiras rijas	$\sigma_{fl}^* = 37,5 - 0,25 \lambda$	(e)	

Os aços St.37 e St.52, alemães, correspondem, próxima e respectivamente aos aços CA-24 e CA-32 a que se referem as especificações brasileiras EB-3.

São aconselhados para esta fórmula os seguintes coeficientes de segurança:

aços ..... 2,0 a 3,0

madeiras e ferro fundido ..... 3,0 a 5,0.

Para os materiais que escoam, como é o caso dos aços de construção, a validade dessas fórmulas está circunscrita aos valores de  $\lambda$  menores que  $\lambda_E$  e maiores que aquele correspondente à tensão no limite de escoamento.

Desse modo, para tais aços, o campo de aplicação da fórmula corresponde a peças com esbeltez.

$$60 < \lambda < 100$$

tomando-se  $\lambda_E \approx 100$  como se viu em 9.1.2.

Observe a Fig.918-1, a seguir.

### 9.1.7.3 – Fórmula Johnson

Esta fórmula, muito do agrado dos norte-americanos, foi proposta pelo Professor J.B.Johnson e, posteriormente, por A.Ostenfeld, apresentando-se sob a forma

$$\sigma_{f1}^* = \sigma_o - c \lambda^2 \quad 917-V$$

onde  $\mathbf{S}_o$  tem a mesma significação encontrada nas expressões anteriores e  $\mathbf{c}$  é um coeficiente, próprio de cada material, determinado de modo que a curva representativa da equação venha a concordar com a hipérbole de Euler.

Fazendo, como preconizado por Johnson,

$$c = \frac{\sigma_s^2}{4 \pi^2 E}$$

onde  $\mathbf{S}_s$  é o limite de escoamento do material, quando dútil, a concordância com a hipérbole de Euler se dá quando

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_s}}$$

isto é, numa esbeltez maior que  $\lambda_E$ . Para os aços doces de construção esse valor está próximo de 130.

Para uso desta fórmula é comum recomendar-se um coeficiente de segurança em torno de 2,5.

### 9.1.8 – As normas brasileiras para peças de aço e de madeira

Como exemplificação vamos passar em revista o que preconizam as Normas Brasileiras para os aços estruturais e para as madeiras.

#### 9.1.8.1 – Aços para estruturas

A Norma Brasileira NB-14 (em estágio experimental), admite os seguintes valores característicos para os aços estruturais:

- tensão no limite de proporcionalidade:  $\sigma_P = 190 \text{ MPa}$
- tensão no limite de escoamento:  $\sigma_S = 240 \text{ MPa}$
- módulo de Young:  $E = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa}$
- esbeltez limite:  $\lambda_E = 105$ .

Preconiza, então, que as tensões limites de resistência à compressão com flambagem sejam calculadas, dos modos que se seguem.

##### a) peças de esbeltez maior que a esbeltez limite ( $l > l_E$ ):

emprego da fórmula de Euler

$$\sigma_{f1} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E$$

##### b) peças de esbeltez menor que a esbeltez limite ( $l \leq l_E$ ):

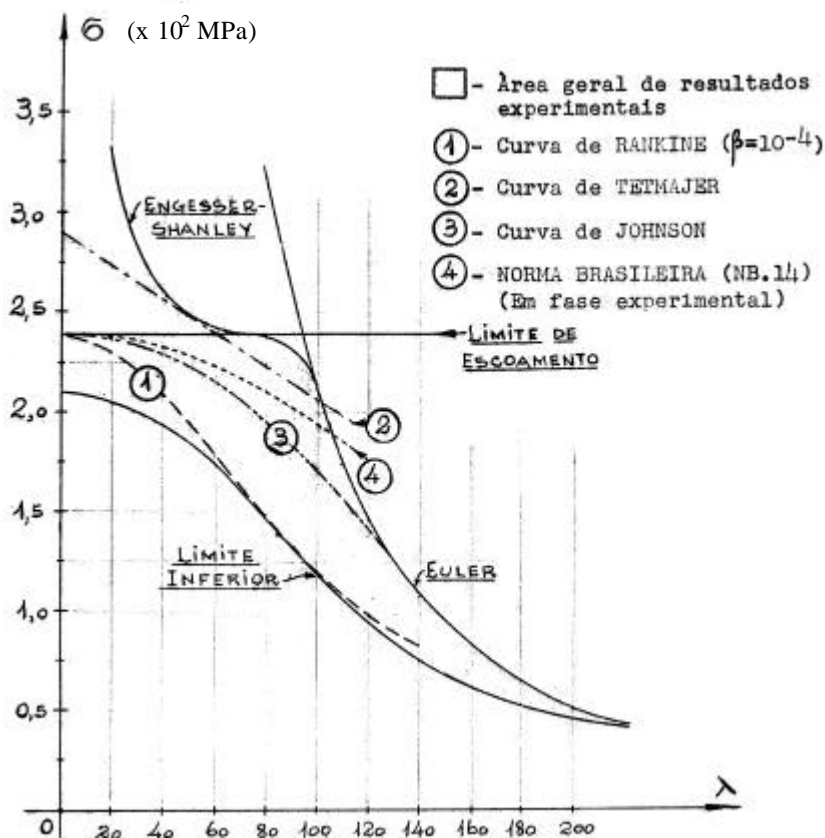
emprego da fórmula parabólica

$$\sigma_{f1}^* = 240 - 0,0046 \lambda^2$$

918-I

Admite, ainda, para efeito de fixação dos valores admissíveis, que se use um coeficiente de segurança único  $V_{f1} = V_{f1}^* = 2,0$ .

Os valores correspondentes à expressão 918-I situam-se sobre a curva (4) da Fig. 918-1, onde, para confronto, se encontram, também, as curvas representativas das expressões 917-II, 917-IV-a e 917-V, todas dentro da área geral de resultados experimentais.



Aço doce para estruturas  $\sigma_s = 240$  MPa

$\sigma_p = 190$  MPa

Fig.918-1

9.1.8.2 – Madeiras

Para as estruturas de madeira prevalece a NB-11 que, no que concerne à compressão axial de peças de seção simples, estabelece o seguinte:

a) peças com esbeltez maior que a esbeltez limite ( $l > l_E$ ):

emprego da fórmula de Euler

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E \quad (*)$$

com um coeficiente de segurança  $V_{fl} = 4,0$ .

b) peças de média esbeltez ( $40 < l \leq l_E$ ):

emprego da expressão empírica

$$\sigma_{fl}^* = \left[ 1 - \frac{18}{5} \left( \frac{\lambda - 40}{\lambda_E - 40} \right) + \frac{1}{15} \left( \frac{\lambda - 40}{\lambda_E - 40} \right)^2 \right] R_c \quad 918-II$$

onde  $R_c$  é o limite de resistência à compressão da madeira em peça curta (paralelo às fibras).

\* A Norma adota a notação  $E_m$  (madeira verde).

Preconiza o emprego de um coeficiente de segurança,  $v_{f1}^*$ , variável linearmente com a esbeltez e expresso por:

$$v_{f1}^* = 5 - \frac{\lambda - 40}{\lambda_E - 40}$$

918-III

### c) peças de pequena esbeltez ou peças curtas (I £ 40)

A norma admite considerar como limite de resistência à compressão o próprio valor  $R_c$  e fixa como o coeficiente de segurança a adotar,  $v_{f1}^* = 5,0$ .

Para todos os efeitos a NB-11 admite que a tensão no limite de proporcionalidade tenha o valor

$$\sigma_P = \frac{8}{15} R_c$$

A tabela a seguir dá, para as madeiras mais usadas no Brasil em peças estruturais, alguns de seus valores característicos.

Madeiras	Peso Específico (kN/m <sup>3</sup> ) (1)	Módulo de Elasticidade (MPa) (2)	Resistência à Compressão (MPa) (3)	Esbeltez Limite $\lambda_E$	Observações
Aroeira do Sertão	12,1	15200	75	62	(1) Com 15% de umidade (2) Madeira verde (3) Madeira verde, paralela às fibras
Gonçalo Alves	9,1	14100	63	65	
Ipê Amarelo	10,3	15400	62	68	
Peroba de Campos	7,2	12000	46,5	69	
Peroba Rosa	7,8	9400	42	64	
Pinho do Paraná	5,4	10500	25,5	87	

## 9.2 – A VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE E O DIMENSIONAMENTO DAS PEÇAS COMPRIMIDAS PELOS TOPOS – O PROCESSO W

Considerando a flambagem como sendo um fenômeno de ocorrência possível a partir do instante em que a tensão compressiva no centro de gravidade da seção da haste atinja ao valor  $\sigma_{fl}$  ou  $\sigma_{fl}^*$ , será necessário contar com uma certa segurança contra essa possibilidade, segurança essa expressa por um coeficiente  $v_{fl}$  ou  $v_{fl}^*$ , conforme o caso.

Dessa forma, conforme o grau de esbeltez da peça, poderemos escrever

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{fl})_{adm} &= \frac{\sigma_{fl}}{v_{fl}} && \text{quando } \lambda \geq \lambda_E \\ (\sigma_{fl}^*)_{adm} &= \frac{\sigma_{fl}^*}{v_{fl}^*} && \text{quando } \lambda < \lambda_E \end{aligned} \right\} 920-I$$

Em geral, as diferentes Normas vigentes nos diversos países adotam expressões para  $\sigma_{fl}$  e  $\sigma_{fl}^*$  que são funções dos materiais e de  $\lambda$ , o mesmo acontecendo em relação a  $v_{fl}$  e a  $v_{fl}^*$  com o que, tanto  $(\sigma_{fl})_{adm}$  como  $(\sigma_{fl}^*)_{adm}$  se tornam, afinal, funções do material e, também, de  $\lambda$ .

De qualquer modo, haverá sempre dois problemas típicos a resolver relativamente à flambagem: o da **verificação de uma peça conhecida** e o do **dimensionamento de uma peça cujas dimensões se procura completar**.

Abordaremos ambos os problemas sob forma inteiramente geral.

### 9.2.1 – O problema da verificação

O que caracteriza esse problema é o fato de que, sendo inteiramente conhecida a peça em todas as suas circunstâncias (material, dimensões e modo de fixação de suas extremidades), conhece-se a esbeltez da peça,  $\lambda$ , e o valor da esbeltez limite,  $\lambda_E$ , que é própria do seu material.

Desse modo tem-se a relação entre  $\lambda$  e  $\lambda_E$ :

$$\lambda \gtrless \lambda_E$$

**1ª hipótese:**  $\lambda \geq \lambda_E$

Estamos no campo de aplicação da fórmula de Euler e, assim:

$$\begin{aligned} (\sigma_{f1})_{adm} &= \frac{1}{v_{f1}} \frac{\pi^2}{\lambda^2} E \\ P_{adm} &= (\sigma_{f1})_{adm} S \end{aligned} \quad 921-I$$

A verificação está, assim, concluída.

**2ª hipótese:**  $\lambda < \lambda_E$

Estamos no campo da flambagem fora do regime elástico para o qual se prefere usar fórmulas empíricas da forma 917-I

$$\sigma_{f1}^* = f(\text{material}, \lambda).$$

Adotada, então, uma dessas fórmulas e um valor de  $v_{f1}^*$  adequado, obtém-se, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (\sigma_{f1}^*)_{adm} &= \frac{\sigma_{f1}^*}{v_{f1}^*} = \frac{f(\text{material}, \lambda)}{v_{f1}^*} \\ P_{adm} &= (\sigma_{f1}^*)_{adm} S \end{aligned} \quad 921-II$$

Geralmente, quando se adota uma determinada Norma, os valores decorrentes de 921-I e 921-II se encontram tabelados, em função de  $\lambda$ , para cada material.



### 9.2.2 – O problema do dimensionamento

Neste problema trata-se, geralmente, de completar o dimensionamento de uma peça de certo material destinada a receber uma carga conhecida. Essa complementação de dimensionamento se traduz pela procura do valor que deve ter a área da seção reta da peça suposta com determinada forma.

Percebe-se, desde logo, que, não conhecendo essa área, a esbeltez que terá a peça é, também desconhecida. Desse modo, como os valores das tensões admissíveis dependem da esbeltez, a solução do problema cai, muitas vezes, num impasse que terá de ser rompido por meio de tentativas. Estas podem ser orientadas da maneira a seguir.

Em primeiro lugar supor-se-á (para depois confirmar) que a peça venha a ser de grande, média ou pequena esbeltez, conforme as hipóteses a seguir.

**Hipótese A: grande esbeltez**

$$(\lambda \geq \lambda_E)$$

A fórmula de Euler é a indicada e pode ser escrita sob a forma

$$P_{fl} = \frac{\pi^2}{l_{fl}^2} EJ$$

Como a carga  $P$  não deverá ultrapassar  $\frac{P_{fl}}{V_{fl}}$  teremos

$$P = \frac{\pi^2}{V_{fl} l_{fl}^2} EJ$$

que nos dá

$$J_{nec} = \left( \frac{V_{fl}}{\pi^2 E} \right) l_{fl}^2 P$$

922-I

Nesta expressão os elementos contidos no parêntese podem ser, desde logo, reduzidos a um valor numérico próprio de cada material e da segurança desejada.

Uma vez calculado  $J_{nec}$  dar-se-á à seção dimensões tais que seu momento de inércia mínimo se iguale a esse valor.

Com a área dessa seção fica-se em condições de determinar a esbeltez da peça projetada, se adotada tal seção; resta verificar se essa esbeltez,  $\lambda$ , é realmente maior que a esbeltez limite,  $\lambda_E$ , como foi suposto (e nesse caso o dimensionamento está terminado) ou se tal fato não acontece, caso em que proceder-se-á como na hipótese B explanada mais adiante.

Antes de encerrarmos esta apreciação sobre a hipótese em que  $\lambda \geq \lambda_E$  será interessante preparar, desde logo, a expressão 922-I para atender a certos casos específicos, reduzindo o parêntese a um valor numérico como se verá a seguir.

Eis como se apresentará, então, preparando-se para usar as seguintes unidades:

P	em kN
l	em metros
E	em kPa
J	em cm <sup>4</sup>

### Aços para construção

(E = 2,1 . 10<sup>8</sup> kPa)

$$J_{nec} \approx 0,120 P l_{f1}^2 \text{ (com } v_{f1} = 2,5)$$

$$J_{nec} \approx 0,097 P l_{f1}^2 \text{ (com } v_{f1} = 2,0)$$

922-II

### Madeiras

Tomando, em média, E = 1,2 . 10<sup>7</sup> kPa

$$J_{nec} = 5,0 P l_{f1}^2 \text{ (com } v_{f1} = 6,0)$$

$$J_{nec} = 3,35 P l_{f1}^2 \text{ (com } v_{f1} = 4,0)$$

922-III

### Ferro fundido

(E = 10<sup>5</sup> kPa)

$$J_{nec} = 0,61 P l_{f1}^2 \text{ (com } v_{f1} = 6)$$

922-IV

### Hipótese B: média e pequena esbeltez

$$(\lambda < \lambda_E)$$

Nesse caso, para usar uma das fórmulas empíricas já mencionadas, proceder-se-á por tentativas adotando-se a seqüência a seguir:

a) supor uma certa esbeltez  $\lambda_1$ , em conseqüência do que chegar-se-á a um valor para  $(\sigma_{f1}^*)_{adm}$ ;

b) calcular a seção necessária  $S_1 = \frac{P}{(\sigma_{f1}^*)_{adm}}$  e, em seguida, o raio de giração,  $i_1$ , da seção obtida;

c) calcular a esbeltez realizada  $\lambda'_1 = \frac{l}{i_1}$  e verificar se  $\lambda'_1 \geq \lambda_1$ ;

d) no caso em que aconteça a igualdade, então a área  $S_1$  encontrada é justamente necessária e o problema está resolvido. Mas isto raramente acontece. Se, então,

$\lambda'_1 > \lambda_1$  a área realmente necessária é maior que  $S_1$ ; repetiremos toda a seqüência partindo da alínea a) supondo uma esbeltez inicial,  $\lambda_2$ , com valor compreendido entre  $\lambda_1$  e  $\lambda'_1$ . Se tiver ocorrido  $\lambda'_1 < \lambda_1$  a área realmente necessária é menor que  $S_1$ ; nesse caso, ao remontarmos à alínea a), partiremos de uma esbeltez,  $\lambda_2$ , menor que  $\lambda_1$ , mas, ainda compreendida entre  $\lambda_1$  e  $\lambda'_1$ .

O processo será repetido tantas vezes quantas necessárias de modo que a diferença entre a esbeltez suposta de início e a atingida no final seja pequena.

No caso da média e da pequena esbeltez muitas vezes se procura fazer o dimensionamento adotando a chamada **fórmula parabólica de dimensionamento**, que foi preconizada pelos alemães antes da DIN 4114 e que, em sua essência, consiste em admitir valores para  $\sigma_{f1}^*$  e para  $v_{f1}^*$  (funções de  $\lambda$ ) tais que  $(\sigma_{f1}^*)_{adm}$  venham decrescendo parabolicamente entre as esbeltezas zero e  $\lambda_E$ .

Desse modo fica-se com

$$\boxed{(\sigma_{f1}^*)_{adm} = \sigma_{c_{adm}} - a \lambda^2} \quad 922-V$$

onde  $\sigma_{c_{adm}}$  é a tensão admissível em peça isenta de flambagem.

Quando  $\lambda = \lambda_E$ , a fórmula de Euler com seu coeficiente de segurança próprio nos fornece o correspondente valor de  $(\sigma_{f1})_{adm}$ . Denominando, para simplificar, de A a este valor virá:

$$A = \sigma_{c_{adm}} - a \lambda_E^2$$

e então

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sigma_{c_{adm}} - A}{\lambda_E^2} \\ A &= [(\sigma_{f1})_{adm}]_{\lambda=\lambda_E} = \frac{\sigma_P}{v_{f1}} \end{aligned}} \quad 922-VI$$

Os valores de  $\sigma_{c_{adm}}$ , A e  $\lambda_E$  são próprios de cada material e serão exemplificados a seguir.

Note-se que a Norma Brasileira NB-14 adota uma expressão do mesmo tipo da fórmula parabólica 922-V.

Quando se tratar de dimensionar com esta fórmula prepara-se como se segue.

Assim, multiplicando-se ambos os membros de 922-V pela área, S, da seção da peça virá:

$$P = \sigma_{c_{adm}} S - a S \lambda^2$$

Notando que  $S\lambda^2 = \frac{S}{i^2} I_{f1}^2$  e fazendo

$$\boxed{\frac{S}{i^2} = \frac{S^2}{J} = k} \quad 922-VII$$

virá, resolvendo em relação a S:

$$\boxed{S_{nec} = \frac{10^4 P}{\sigma_{c_{adm}}} + \frac{a}{\sigma_{c_{adm}}} k I_{f1}^2} \quad 922-VIII$$

Nesta expressão S será obtido em  $\text{cm}^2$  quando tivermos P(N),  $\sigma_{c_{adm}}$  (kPa), a(kPa),  $I_{f1}$  (cm).

Usualmente, para peças estruturais,  $I_{f1}$  se exprime em metros, caso em que a expressão ficará:

$$\boxed{S_{nec} = 10^4 \left[ \frac{P}{\sigma_{c_{adm}}} + \frac{a}{\sigma_{c_{adm}}} k I_{f1}^2 \right]} \quad 922-VIII-bis$$

Nestas expressões, bem como nas que se seguirão preparadas especificamente para certos materiais, **k** é um **coeficiente de forma** da seção. Ele exprime o modo pelo qual a área da seção é aproveitada na obtenção de um momento de inércia mínimo. Quanto menor o seu valor, mais bem aproveitada estará a área da seção no que tange à rigidez da mesma, isto é, a seção é mais favorável ao emprego como peça sujeita à flambagem.

No quadro 922-1 da página seguinte, temos os valores de k para algumas formas de seção.

As expressões 922-VIII-bis e 922-V assumem os aspectos particulares a seguir para os diversos materiais.

### Aço St.37 (alemão)

$$\sigma_P = 192 \text{ MPa}; \sigma_S = 240 \text{ MPa}; \lambda_E = 103,9$$

$$\sigma_{c_{adm}} = \frac{240}{1,71} \approx 140 \text{ MPa}$$

$$v_{f1} = 2,5$$

$$A = \frac{192}{2,5} = 76,9 \text{ MPa}; a = 5,85 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_{nec} &= \frac{P}{14000} + 0,418 k I_{f1}^2 \quad (\text{cm}^2) \\ (\sigma_{f1}^*)_{adm} &= 140 - 5,85 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \quad (\text{MPa}) \end{aligned}} \quad 922-IX$$

**Aço St.52 (alemão)**

$\sigma_P = 288 \text{ MPa}; \sigma_S = 360 \text{ MPa}; \lambda_E = 84,8$

$\sigma_{c_{adm}} = \frac{360}{1,71} \approx 210 \text{ MPa}$

$v_{f1} = 2,5$

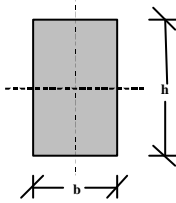
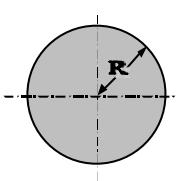
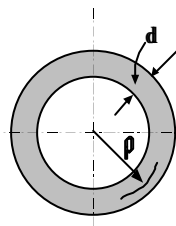
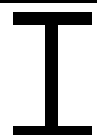
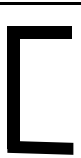
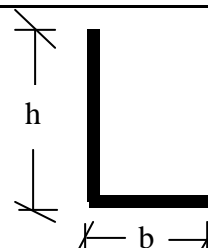
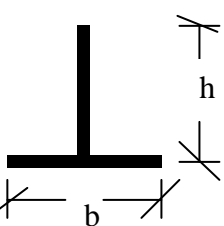
$A = \frac{288}{2,5} = 115,2 \text{ MPa}; a = 1,32 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$

$S_{nec} = \frac{P}{21000} + 0,628 k I_{f1}^2 \text{ (cm}^2\text{)}$   
 $(\sigma_{f1}^*)_{adm} = 210 - 1,32 \cdot 10^{-2} \lambda^2 \text{ (MPa)}$

922-X

**QUADRO 922-1**

Valores do coeficiente de forma k para a fórmula parabólica

Formas de seção	k	Formas de seção	k
 <p><math>h \geq b</math> (valor exato)</p>	$12 \frac{h}{b}$	 <p>(valor exato)</p>	$4\pi$
 <p><math>\frac{\delta}{\rho} = \begin{cases} 0,05 \\ 0,10 \\ 0,15 \\ 0,20 \end{cases}</math></p> <p><math>\rho</math> - raio médio</p>	<p>0,63</p> <p>1,25</p> <p>1,87</p> <p>2,50</p>	 <p>(em média)</p>	10,0
		 <p>(em média)</p>	7,0
 <p><math>h = \begin{cases} b \\ 1,5b \\ 2,0b \end{cases}</math></p> <p>(valores médios)</p>	<p>6,0</p> <p>7,0</p> <p>11,0</p>	 <p><math>b = h</math></p> <p><math>b = 2h</math></p> <p>(valores médios)</p>	<p>5,0</p> <p>7,5</p>

**Aço para estruturas (NB-14)**

$$\sigma_P = 190 \text{ MPa} ; \quad \sigma_S = 240 \text{ MPa} ; \quad \lambda_E = 105$$

$$\sigma_{c_{adm}} = \frac{240}{2,0} = 120 \text{ MPa}$$

$$v_{f1} = 2,0$$

$$A = \frac{190}{2,0} = 95 \text{ MPa} ; \quad a = 2,27 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$$

$$S_{nec} = \frac{P}{12000} + 0,190 \text{ k}l_{f1}^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(\sigma_{f1}^*)_{adm} = 120 - 2,3 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \text{ (MPa)}$$

922-XI

**Madeiras rijas**

Aroeira do sertão

Ipê roxo

Ipê amarelo

Gonçalo Alves

$$E \geq 14000 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c_{adm}} \geq 12,5 \text{ MPa}$$

$$\lambda_E \approx 70$$

$$v_{f1} = 4,0$$

$$A = \frac{33,4}{4} = 8,35 \text{ MPa} ; \quad a = 8,47 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}$$

(em média)

$$S_{nec} = \frac{P}{1250} + 0,680 \text{ k}l_{f1}^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(\sigma_{f1}^*)_{adm} = 12,5 - 0,85 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \text{ (MPa)}$$

922-XII

**Madeiras médias**

Peroba de Campos

Peroba Rosa

$$E \approx 11000 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c_{adm}} \approx 9 \text{ MPa}$$

$$\lambda_E \approx 70$$

$$v_{f1} = 4,0$$

$$A = \frac{24}{4,0} = 6 \text{ MPa} ; \quad a = 6,12 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}$$

(em média)

$$S_{nec} = \frac{P}{900} + 0,680 \text{ k}l_{f1}^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(\sigma_{f1}^*)_{adm} = 9 - 0,61 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \text{ (MPa)}$$

922-XIII

**Madeiras tenras - Pinho do Paraná**

$$\left. \begin{array}{l} E \approx 10000 \text{ MPa} \\ \sigma_{c_{adm}} \approx 5 \text{ MPa} \\ \lambda_E \approx 90 \\ \nu_{f1} = 4,0 \\ A = \frac{13,4}{4} = 3,34 \text{ MPa} ; a = 2,05 \cdot 10^{-3} \text{ MPa} \end{array} \right\} \text{ (em média)}$$

$$\begin{array}{l} S_{nec} = \frac{P}{500} + 0,410k l_{f1}^2 \text{ (cm}^2\text{)} \\ (\sigma_{f1}^*)_{adm} = 5 - 0,21 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \text{ (MPa)} \end{array}$$

922-XIV

Para as madeiras, consideramos, em conformidade com a NB-11:

$$\sigma_{c_{adm}} = \frac{R_c}{5,0} ; \sigma_P = \frac{8}{15} R_c ; \nu_{f1} = 4,0.$$

A Fig.922-1 mostra, no caso das madeiras, uma comparação entre a fórmula parabólica e o preconizado pela NB-11.

**Ferro fundido**

$$\begin{array}{l} E \approx 1,0 \times 10^5 \text{ MPa} \\ \sigma_{c_{adm}} \approx 90 \text{ MPa} \\ \lambda_E \approx 80 \\ \nu_{f1} = 6,0 \\ A = \frac{154,4}{6,0} = 25,73 \text{ MPa} ; a = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ MPa} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} S_{nec} = \frac{P}{9000} + 1,110k l_{f1}^2 \text{ (cm}^2\text{)} \\ (\sigma_{f1}^*)_{adm} = 90 - 1 \cdot 10^{-2} \lambda^2 \text{ (MPa)} \end{array}$$

922-XV

### 9.2.3 – O processo $\omega$

Este processo, aplicável quer à **verificação**, quer ao **dimensionamento** das peças comprimidas, tem o seu nome derivado da notação  $\omega$  adotada, quase sempre para designar o valor de um coeficiente tabelável, o qual torna muito simples a solução daqueles problemas quando se dispõe dessas tabelas.

Vejam os em que consiste o processo.

Já vimos, ao longo de toda a exposição anterior, que, para nos prevenirmos contra a flambagem, as tensões normais admissíveis à compressão,  $(\sigma_{f1})_{adm}$  ou  $(\sigma_{f1}^*)_{adm}^{(*)}$  vão diminuindo à medida que a esbelteza da peça vai crescendo.

Isto quer dizer que sendo  $\sigma_{c_{adm}}$  a **tensão admissível à compressão em peças curtas**, ensaiadas em condições ideais, e isentas de flambagem, o valor da área

$$S_o = \frac{P}{\sigma_{c_{adm}}} \quad (a)$$

será, em geral, insuficiente, porquanto, tendo a peça uma certa esbelteza, o valor  $(\sigma_{f1})_{adm}$  que lhe compete será sempre menor que  $\sigma_{c_{adm}}$ , conforme seja sua esbelteza.

Então a seção necessária poderá ser expressa por

$$S_{nec} = \omega S_o \quad (b)$$

onde  $\omega$  é um coeficiente a ser determinado em função da esbelteza da peça e de seu material, de valor não menor que 1,0, como se verá:

$$S_{nec} = \frac{P}{(\sigma_{f1})_{adm}} \quad (c)$$

e nesse caso (a), (b) e (c) conduzem a

$$\omega = \frac{\sigma_{c_{adm}}}{(\sigma_{f1})_{adm}} = \frac{\sigma_{c_{adm}}}{\sigma_{f1}} \cdot V_{f1}$$

923-I

---

(\*) Neste parágrafo, para simplificar, passaremos a usar simples e indistintamente as notações  $\sigma_{f1}$ ,  $(\sigma_{f1})_{adm}$  e  $V_{f1}$  não só para os casos em que estavam sendo empregadas como, também, para os casos em que havíamos adotado  $\sigma_{f1}^*$ ,  $(\sigma_{f1}^*)_{adm}$  e  $V_{f1}^*$ , já que o processo se aplica, indiferentemente, às zonas elástica e não elástica da flambagem.



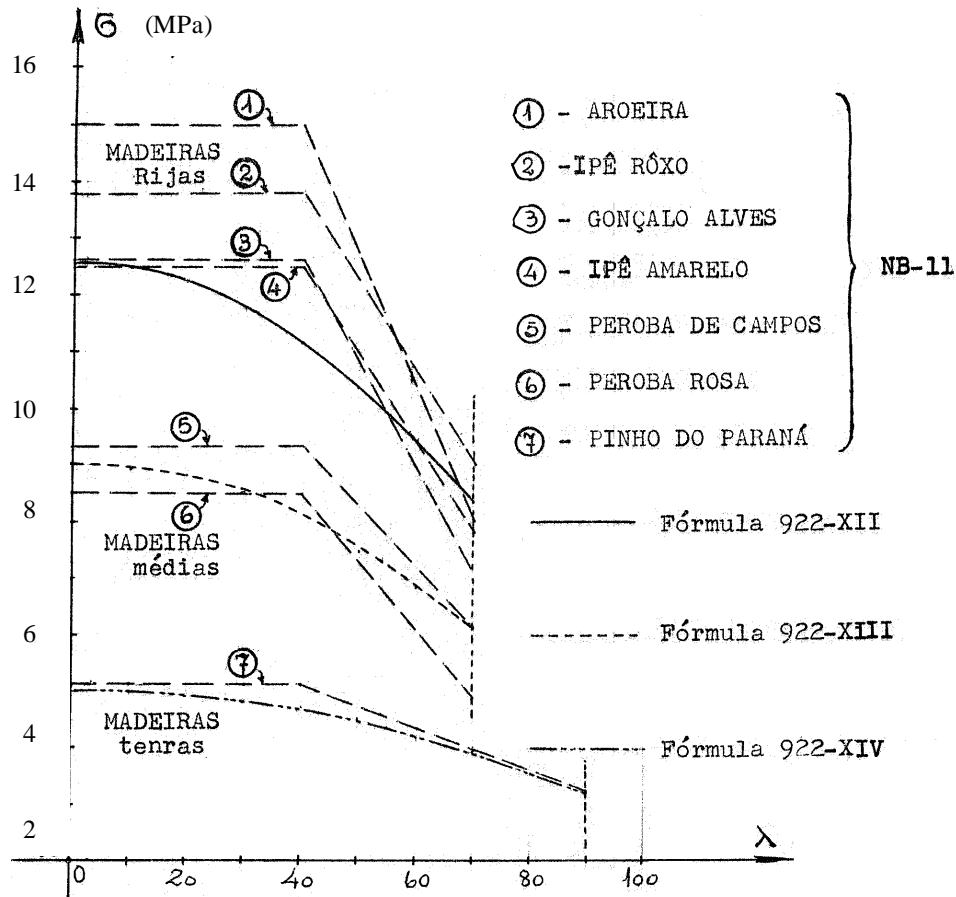


Fig.922-1

**Tensões admissíveis em peças comprimidas com esbelteza menor que a esbelteza limite - Comparação entre o preconizado pela NB-11 e a fórmula parabólica 922-V.**

Pode-se, então, tabelar  $\omega$  em função de  $\lambda$ , para cada material e em consonância com uma determinada normalização que se deseje adotar.

A expressão (c) permite escrever ainda

$$S_{nec} = \frac{P}{\left( \frac{\sigma_{c_{adm}}}{\omega} \right)} = \frac{\omega P}{\sigma_{c_{adm}}} \quad (d)$$

Vê-se, portanto, que o processo consiste, em última análise, em supor a peça isenta de flambagem desde que se tome como tensão admissível na compressão um valor  $\omega$  vezes menor que o próprio do material, ou então, desde que se suponha a carga compressiva atuante com um valor  $\omega$  vezes maior que o real.

De qualquer forma, todo o problema recai na necessidade de se adotar um valor justo para o coeficiente  $\omega$  dado pela expressão 923-I, e tabelável em função de  $\lambda$  para cada material, como já se viu.

Na **solução do problema da verificação de estabilidade** são conhecidos :

- a carga P atuante (em alguns casos);
- a peça com suas características físicas e geométricas e, em última análise, sua esbeltez  $\bar{\lambda}$ .

Da tabela de  $\omega$  relativo ao material da peça se tira o valor de  $\bar{\omega}$  correspondente à esbeltez  $\bar{\lambda}$  conhecida.

A tensão compressiva admissível será então:

$$\left(\sigma_{fl}\right)_{adm} = \frac{\sigma_{c_{adm}}}{\bar{\omega}}$$

Se a carga P for conhecida dever-se-á ter:

$$\frac{P}{S} \leq \left(\sigma_{fl}\right)_{adm}$$

Se a carga P, permissível, tiver de ser determinada, seu valor deverá ser:

$$P \leq \left(\sigma_{fl}\right)_{adm} S$$

No **caso de um dimensionamento serão conhecidos** :

- a carga P atuante;
- o comprimento de flambagem da peça,  $l_{fl}$  ;
- o material a usar e, conseqüentemente,  $\sigma_{c_{adm}}$  ;
- a forma a dar à seção.

A seção necessária será dada por (b) e (a), isto é, calculado  $S_o = \frac{P}{\sigma_{c_{adm}}}$  resta aumentar esse valor multiplicando-o por um outro, adequado, de  $\omega$ .

Denominemos, então, de  $\lambda_o$  à esbeltez que teria a peça se adotássemos a área insuficiente  $S_o$ ; como já se viu, a esbeltez que a peça procurada haverá de ter será sempre

$$\lambda < \lambda_o$$

porque a seção  $S_{nec}$  será

$$S_{nec} = \omega S_o \geq S_o$$

Admitamos, então, que ao aumentarmos a seção de  $S_o$  para  $S_{nec}$  mantenhamos a semelhança geométrica (o que em muitos casos é uma simples aproximação).

Como as áreas de figuras semelhantes são proporcionais aos quadrados de quaisquer linhas homólogas, virá:

$$\frac{S_{nec}}{S_o} = \frac{i^2}{i_o^2} = \omega$$

onde i e  $i_o$  são os raios de giração mínimos dessas áreas.

Então

$$\frac{i^2 \mathbf{I}_{fl}^2}{i_o^2 \mathbf{I}_{fl}^2} = \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}$$

que fornece

$$\boxed{\lambda_o = \lambda \sqrt{\omega}} \quad (e)$$

Tendo-se, pois, uma tabela de  $\omega$  em função de  $\lambda$  pode-se completá-la tabelando, paralelamente, valores de  $\lambda_o$  de acordo com (e).

De posse, então, de uma tabela em que figuram correlacionados  $\lambda_o$ ,  $\lambda$  e  $\omega$ , e estando calculado  $S_o = \frac{P}{\sigma_{c_{adm}}}$ , resta determinar:

- o valor de  $\lambda_o$  correspondente à seção  $S_o$ ;
- o valor de  $\omega$  retirado da tabela em função de  $\lambda_o$ .

A área necessária será  $S_{nec} = \omega S_o$  e a esbeltez final da peça,  $\lambda$ , será encontrada na mesma linha em que estiverem  $\lambda_o$  e  $\omega$ .

Observe-se que  $\lambda_o$ , parâmetro de entrada nas tabelas supra mencionadas, pode ser calculado da forma abaixo:

$$\lambda_o^2 = \frac{\mathbf{I}_{fl}^2}{i_o^2} = \frac{\mathbf{I}_{fl}^2}{S_o} k$$

$$\boxed{\lambda_o = \sqrt{\frac{k \mathbf{I}_{fl}^2}{S_o}}}$$

923-II

onde  $k$  é o coeficiente de forma da seção,  $S_o$  já está calculado e  $\mathbf{I}_{fl}$  é o comprimento de flambagem da peça.

Na falta de uma tabela desse tipo ter-se-á que proceder por aproximações sucessivas, como se verá nos exercícios numéricos referentes a este parágrafo.