

Dinâmica das Estruturas

Vibrações Forçadas

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

Resposta **não amortecida** a um carregamento harmônico:

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

1) Solução homogênea: **vibração livre não-amortecida**

$$x_h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

2) Solução particular: **resposta harmônica e em fase com o carregamento**

$$x_p(t) = C \sin \bar{\omega} t$$

Vibrações Forçadas

Resposta **não amortecida** a um carregamento harmônico

Solução particular: resposta harmônica e em fase com o carregamento:

$$x_p(t) = C \sin \bar{\omega} t$$

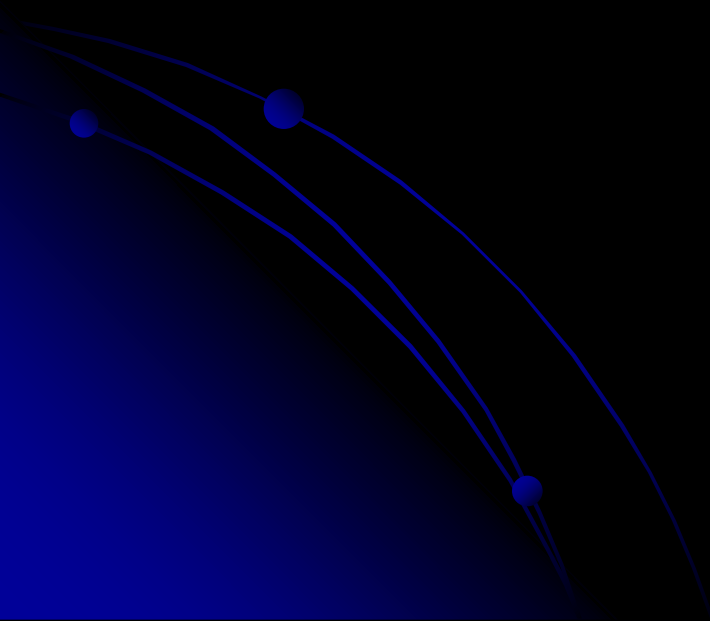


$$C = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right]$$

Deflexão
estática

Fator de amplificação
“Magnification Factor – MF”
(estruturas não-amortecidas)

$$\beta \equiv \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$



Vibrações Forçadas

Resposta **não amortecida** a um carregamento harmônico

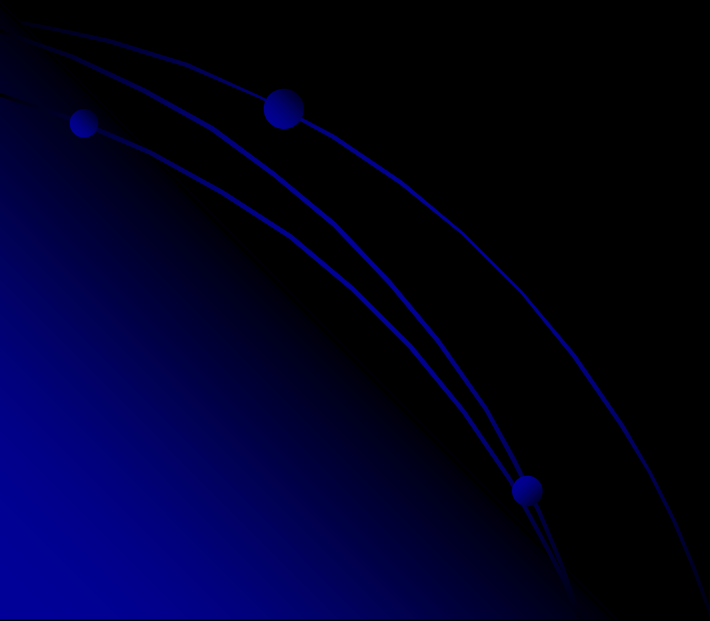
Solução geral para $x(0) = \dot{x}(0) = 0$:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right] (\sin \omega t - \beta^2 \sin \bar{\omega} t)$$

↓
máx

↓
Batimento:

$$t \equiv \frac{2\kappa\pi}{\omega - \bar{\omega}}$$



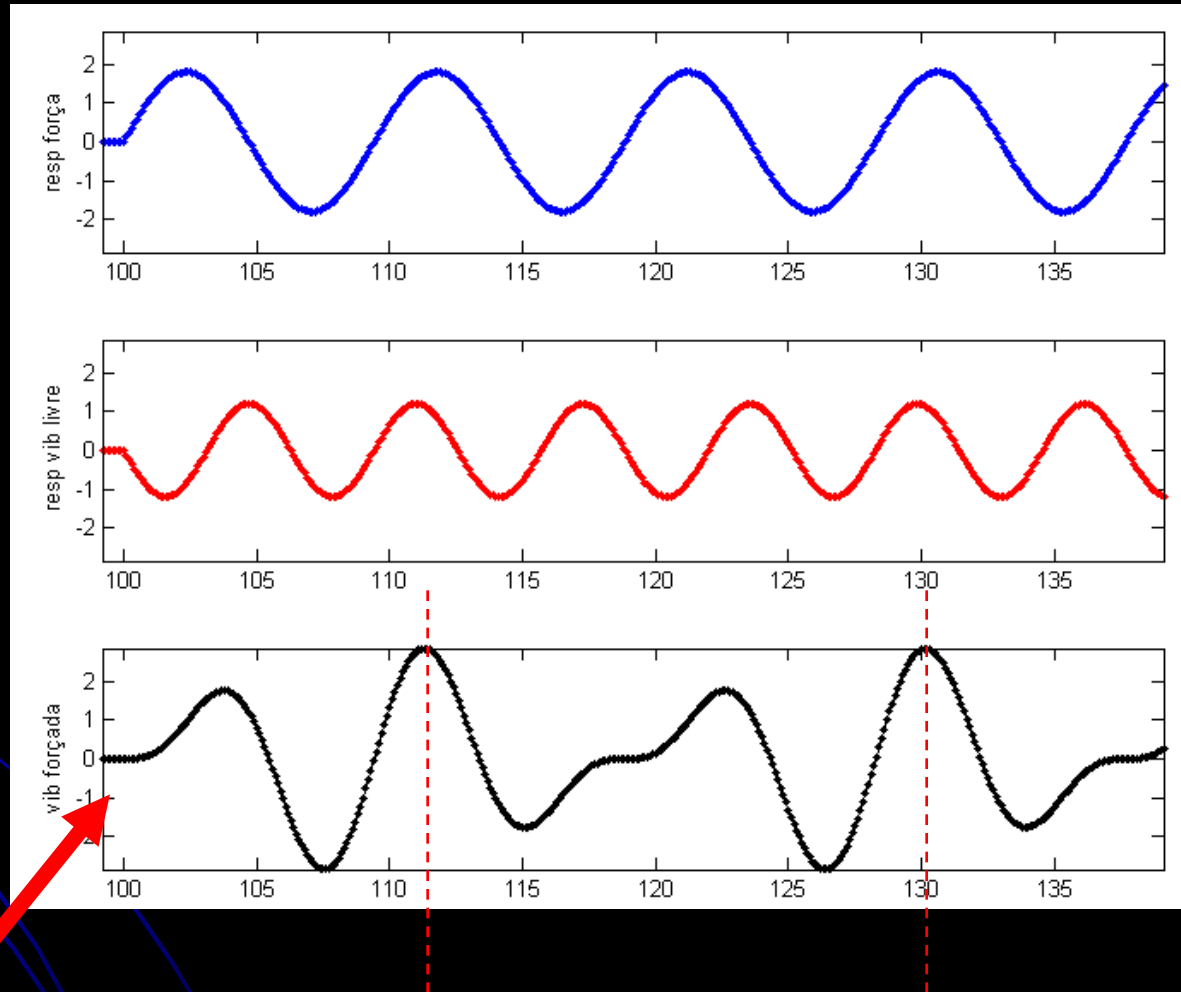
Vibrações Forçadas

Resposta **não amortecida** a um carregamento harmônico

$$\beta \equiv \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$\bar{\omega}$

ω



Início “suave” do movimento...

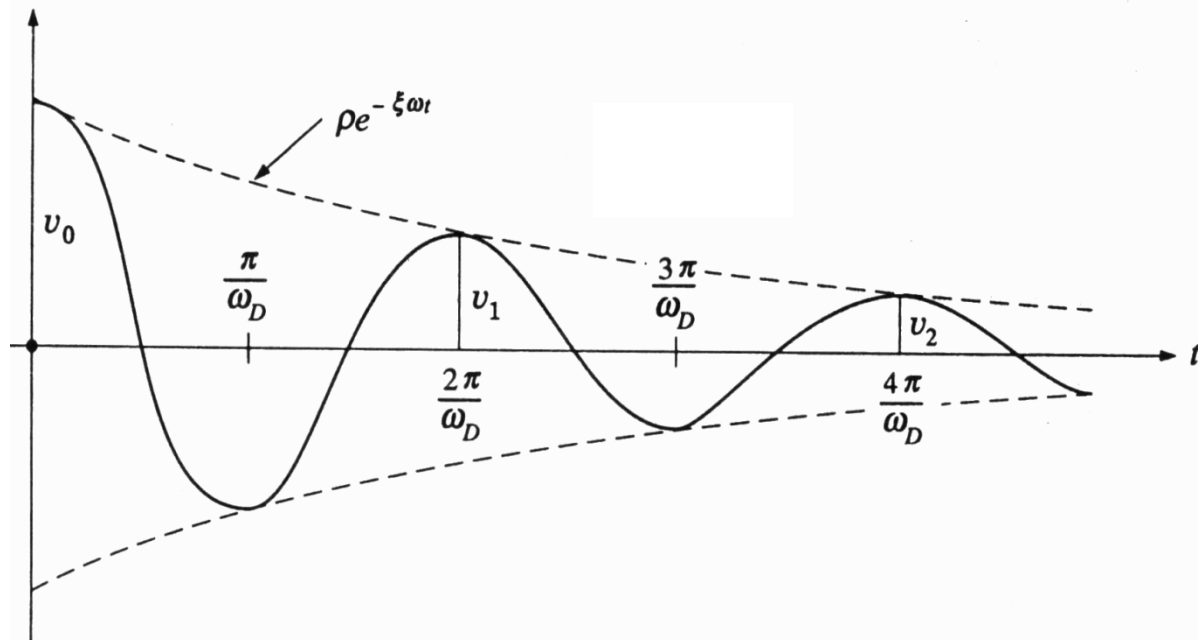
Batimento: $t \equiv \frac{2\pi}{\omega - \bar{\omega}} \cong 19 \text{seg}$

Vibrações Forçadas

Resposta **amortecida** a um carregamento harmônico

Solução homogênea: **vibração livre amortecida**

$$x_h(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t}$$



Vibrações Forçadas

Resposta **amortecida** a um carregamento harmônico

Solução particular: **resposta harmônica defasada do carregamento:**

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k} D \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$



$$D = \left[\frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \right]$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$$

Fator de amplificação dinâmica
“Dynamic Magnification Factor – D”

Vibrações Forçadas

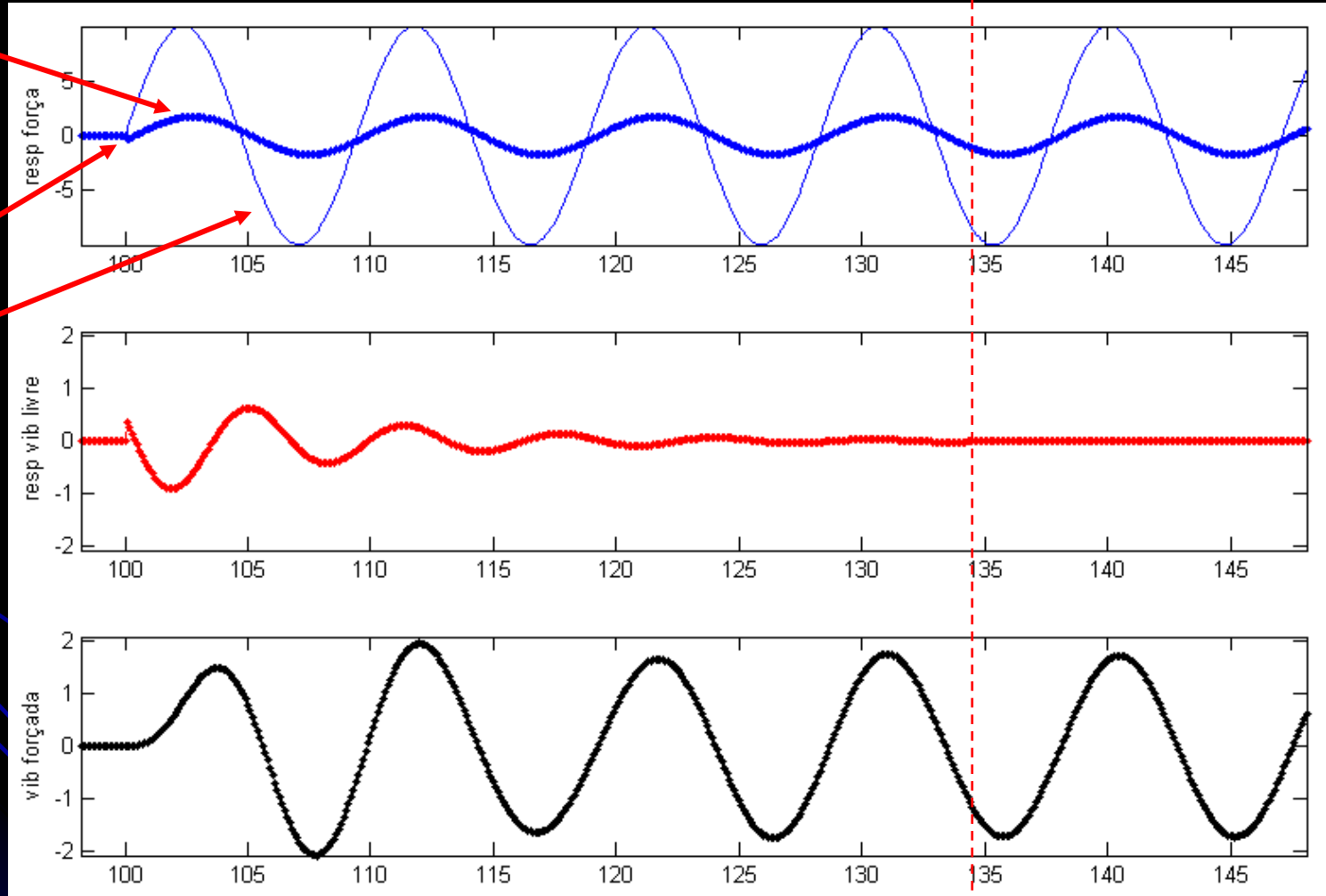
Resposta **amortecida** a um carregamento harmônico

resposta
forçada

defasagem

força

Vibração livre
amortecida



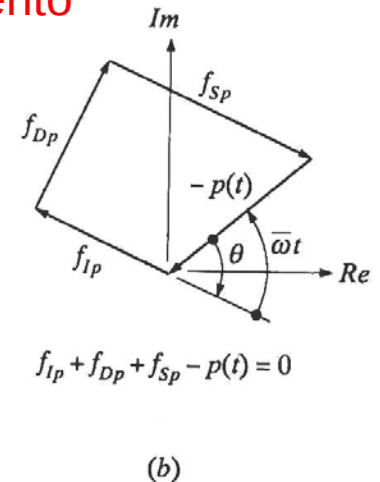
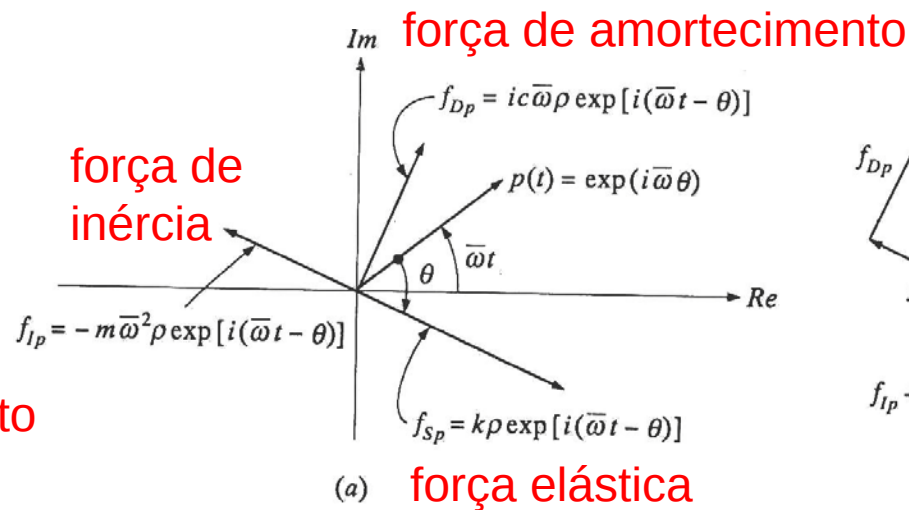
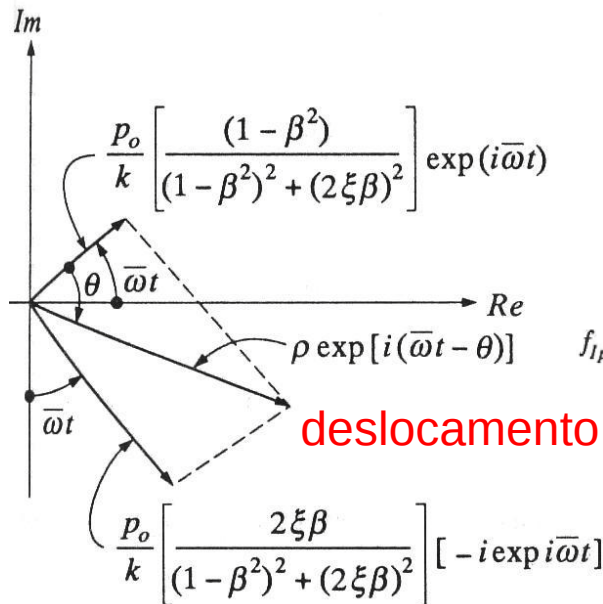
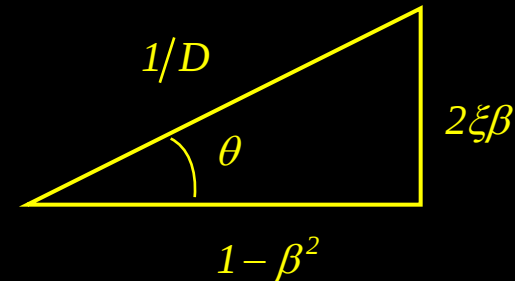
Transiente

Regime
permanente

Vibrações Forçadas

Forma exponencial complexa da resposta permanente:

$$x_p(t) = \underbrace{\left[\frac{p_0}{k} D \right]}_{\rho} \exp[i(\bar{\omega}t - \theta)]$$

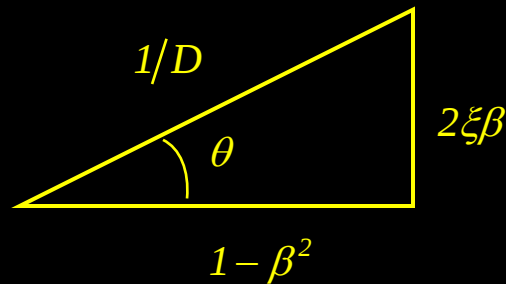


Vibrações Forçadas

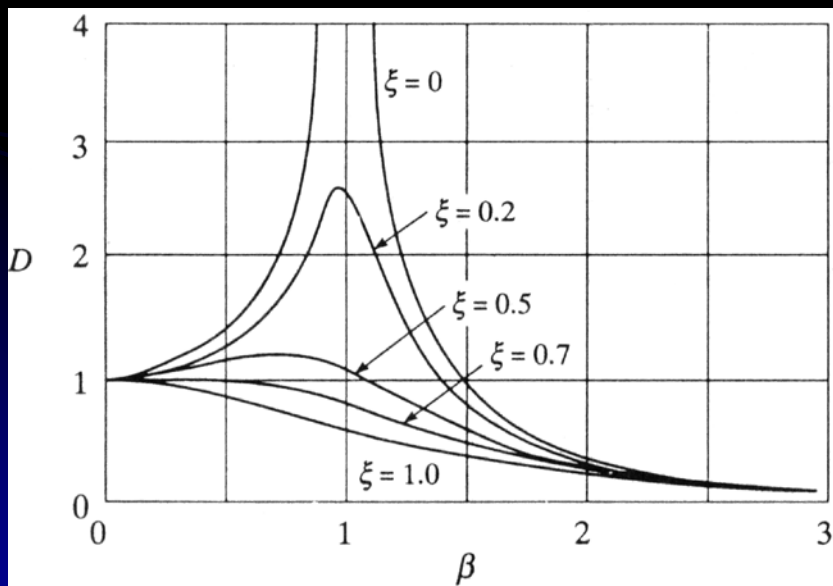
Resposta **amortecida** a um carregamento harmônico

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k} D \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

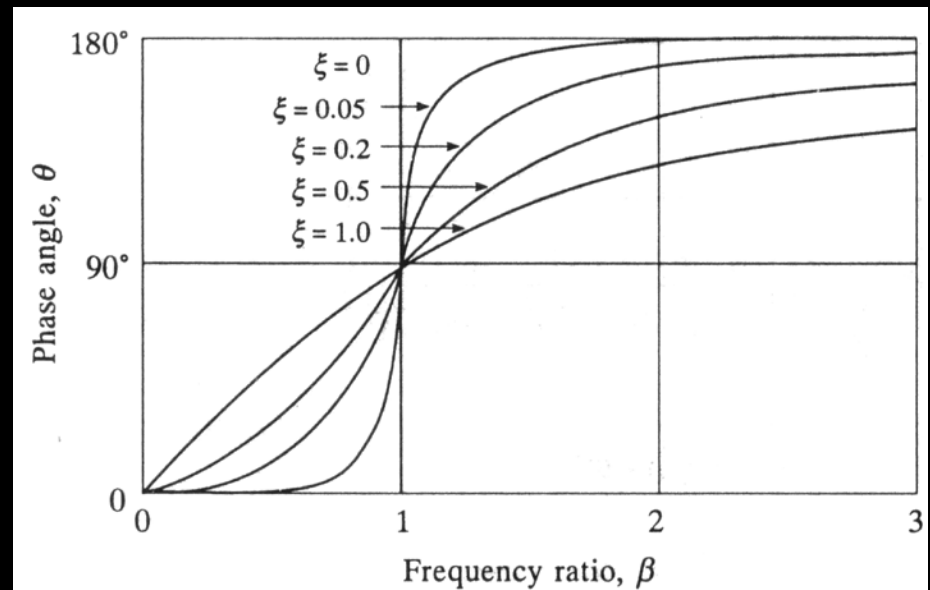
$$D = \left[\frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \right]$$



$$\theta = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$$



$$\beta \equiv \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

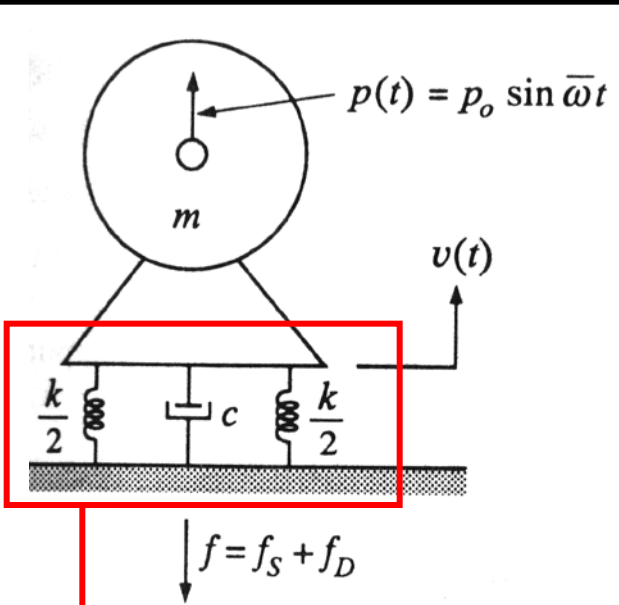


$$\beta \equiv \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

Isolamento de vibrações

- Conforto humano;
- Proteção de estruturas;
- Proteção de equipamentos sensíveis;

1º caso: excitação sobre base rígida



Resposta no regime permanente:

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k} D \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

Força elástica: $f_s(t) = k \cdot x(t) = p_0 D \sin(\bar{\omega} t - \theta)$

Força de amortecimento: $f_D(t) = c \cdot \dot{x}(t) = 2\xi \cdot \beta \cdot p_0 \cdot D \cos(\bar{\omega} t - \theta)$

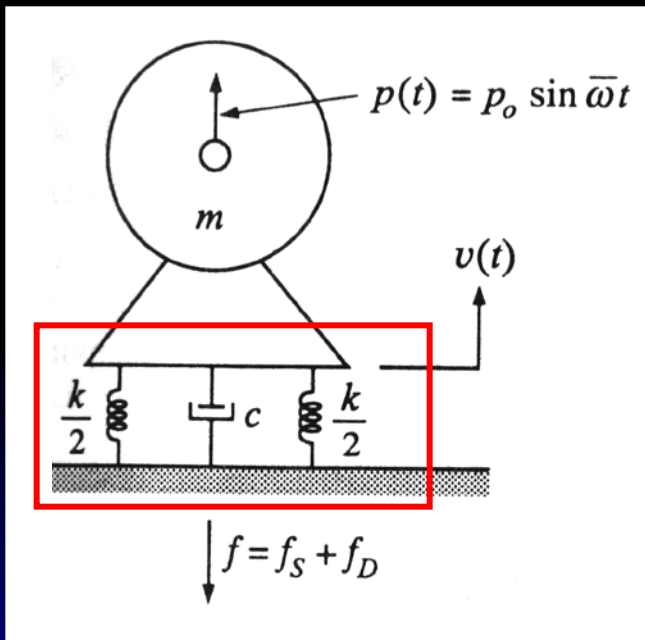
Força total: $\vec{f} = \vec{f}_s + \vec{f}_D = \sqrt{f_s^2(t) + f_D^2(t)} \Rightarrow f_{\max} = p_0 D \frac{1}{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}$

Transmissibilidade: $TR \equiv \frac{f_{\max}}{p_0} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$

Estrutura 1 GL

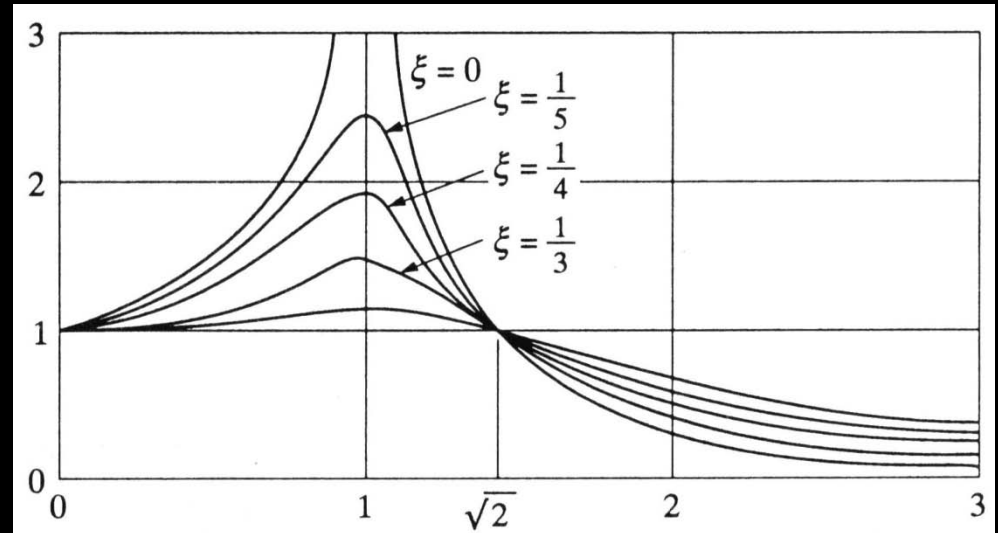
Isolamento de vibrações

1º caso: excitação sobre base rígida



Transmissibilidade: $TR \equiv \frac{f_{\max}}{p_o} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$

TR



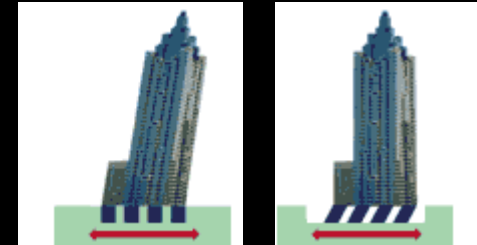
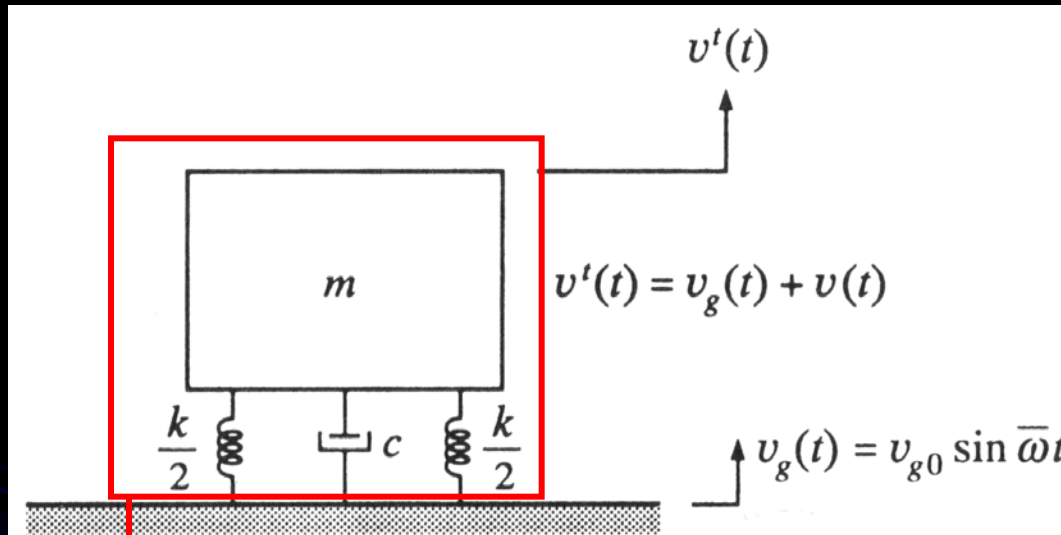
β

amortecimento pequeno: $TR \cong \frac{1}{(\beta^2 - 1)}$

Isolamento: $IE = 1 - TR \Rightarrow \beta > \sqrt{2} \Rightarrow k \leq \frac{m\bar{\omega}^2}{2}$ (molas macias)

Isolamento de vibrações

2º caso: excitação pela base

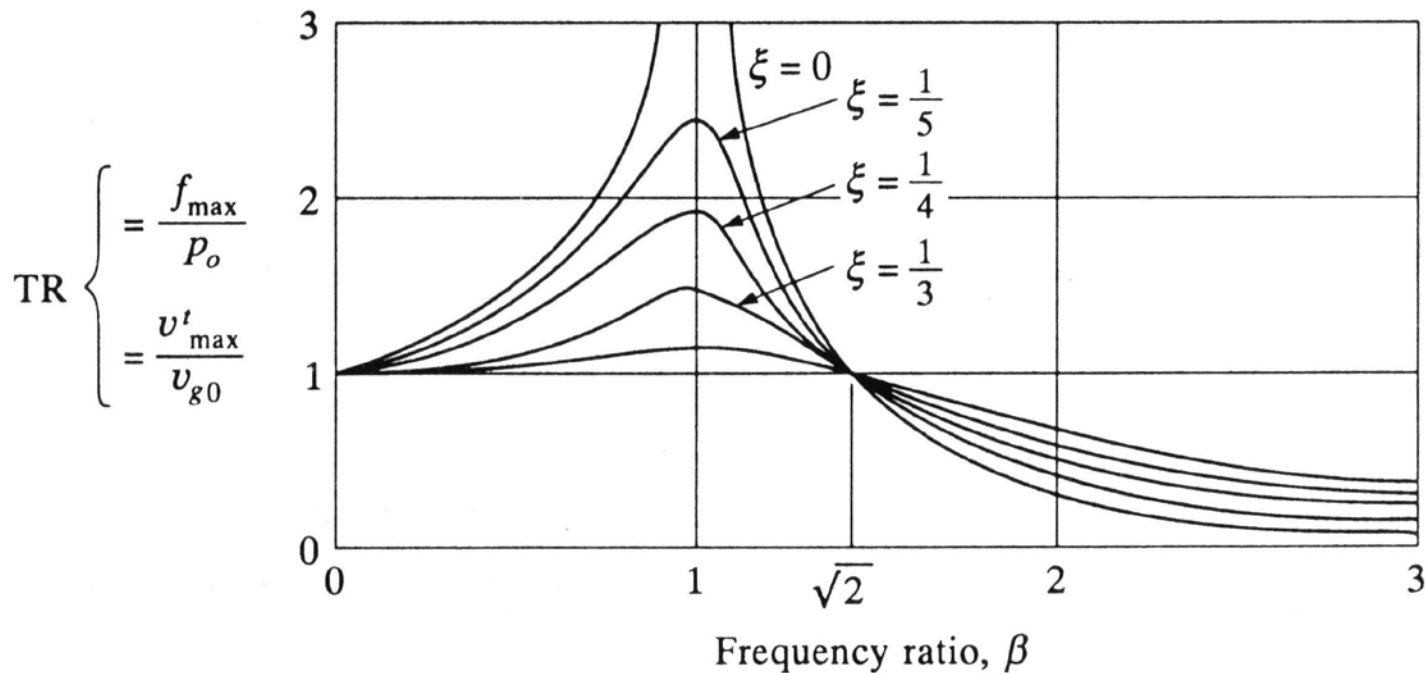


Estrutura
1 GL

$$TR \equiv \frac{\text{desloctotal máximo}}{\text{amplitudedeslocbase}} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

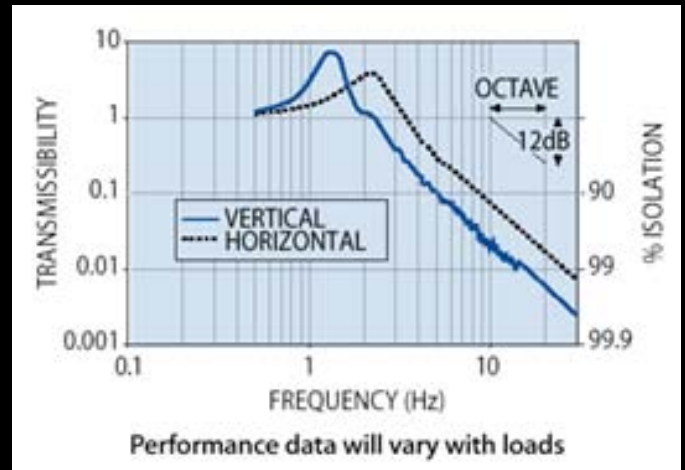
Isolamento de vibrações

Transmissibilidade $\times \beta$



Isolamento de vibrações

Suportes isoladores



Max. Load @ 80 psi

Vertical Natural Frequency 1.5 Hz

Isolation Efficiency @ 5 Hz 89%

Isolation Efficiency @ 10 Hz 97%

Horizontal Natural Frequency 2.1 Hz

Isolation Efficiency @ 5 Hz 78%

Isolation Efficiency @ 10 Hz 94%