IV.7 – Condições de Apoio

IV.7.1 - Recalques de apoio

Os recalques, ou outros deslocamentos quaisquer impostos aos apoios (ou em outros nós da estrutura) compõem o vetor $\{U_R\}$ (expresso em coordenadas globais), na equação de equilíbrio reordenada:

$$[K]\cdot\{U\}=\{F\}\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c:c} K_{RR} & K_{RU} \\ \hdashline K_{UR} & K \end{array}\right]\cdot\left\{\begin{array}{c} U_R \\ \hdashline U \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} R \\ \hdashline F \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$[K_{UR}]\cdot\{U_R\}+[K]\cdot\{U\}=\{F\} \qquad \text{(IV.1)}$$

$$\Rightarrow \{U\}=[K]^{-1}\{\{F\}-[K_{UR}]\cdot\{U_R\}\}$$

A partir do valor de $\{U\}$ determinado através da solução da eq. (IV.1), obtém-se as reações de apoio pela sua substituição na segunda equação:

$$\{R\}=[K_{RR}]\cdot\{U_R\}+[K_{RU}]\cdot\{U\} \qquad \text{(IV.2)}$$

Os esforços nos elementos podem então ser obtidos utilizando-se a matriz de rigidez da estrutura desmembrada $[k]$:

$$\{S\}=\{S_0\}+[k]\cdot[A]\cdot\begin{Bmatrix} U_R \\ U \end{Bmatrix}$$

Ou pela rotação dos deslocamentos globais:

$$\{S_E\}=\{S_0\}+[K_E]\cdot[R_E]\cdot\{U_E^G\}$$

onde $\{S_0\}$ são as reações de engastamento perfeito

Seja uma estrutura que possui seus dois primeiros GL restringidos por apoios, havendo ainda um recalque segundo o GL global 2. A fim de se utilizar a <u>técnica dos zeros e um</u>, faz-se a seguinte substituição na equação de equilíbrio:

$$[K]\cdot\{U\}=\{F\}\Rightarrow\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} U_{R1} \\ U_{R2} \\ U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ F_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}\begin{matrix} \\ \leftarrow \text{GL com recalque} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow\left(\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ k_{31} & 0 & k_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & k_{12} & 0 & \cdots \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots \\ 0 & k_{32} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{Bmatrix} U_{R1} \\ U_{R2} \\ U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ F_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ k_{31} & 0 & k_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} U_{R1} \\ U_{R2} \\ U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ F_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} k_{12}\cdot U_{R1} \\ k_{21}\cdot U_{R1}+k_{22}\cdot U_{R2}+k_{23}\cdot U_3 \\ k_{32}\cdot U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ k_{31} & 0 & k_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} U_{R1} \\ U_{R2} \\ U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} R_1-k_{12}\cdot U_{R1} \\ R_2-\left(k_{21}\cdot U_{R1}+k_{22}\cdot U_{R2}+k_{23}\cdot U_3+\cdots\right) \\ F_3-k_{32}\cdot U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}\leftarrow \text{eq.}(\text{IV}.2)$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ k_{31} & 0 & k_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} U_{R1} \\ U_{R2} \\ U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} R_1-k_{12}\cdot U_{R1} \\ 0 \\ F_3-k_{32}\cdot U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Impondo as condições de contorno de indeslocabilidade (técnica dos zeros e um):

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & k_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} U_{R1} \\ U_{R2} \\ U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3-k_{32}\cdot U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \text{GL restringido} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

A matriz de rigidez obtida não é inversível, pois apresenta sua segunda linha nula, referente ao GL com recalque. A fim de torná-la inversível e viabilizar a resolução do sistemas de equações lineares (eq. de equilíbrio), introduziremos uma equação, totalmente desacoplada do resto do sistema, que nos fornecerá o valor já conhecido do recalque no apoio:

$$0+\ldots+1\cdot U_m+\ldots+0=\delta_m$$

onde δ_m é o valor do recalque segundo o GL global m.

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & k_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} U_{R1} \\ U_{R2} \\ U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ \delta \\ F_3-k_{32}\cdot U_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Logo, para implementar os recalques de apoio no algoritmo da técnica dos zeros e um, basta transformar o vetor em forças externas através do seguinte algoritmo:

```
para r=1 até NNR
        para i=1 até NGL, i≠r
                {F̄}_i = {F}_i − [K]_i,r · {U}_r
        fim (i)
fim (r)
para r=1 até NNR
        {F̄}_r = {U}_r
fim (r)
```

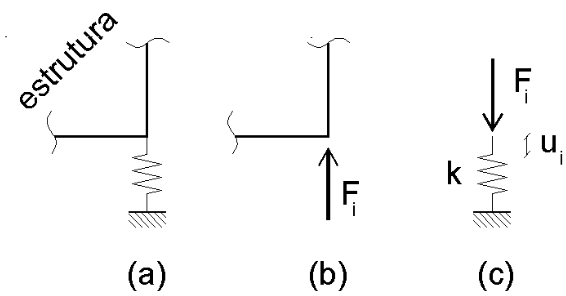
Além disto, deve-se introduzir as condições de contorno na matriz de rigidez de forma idêntica à dos apoios indeslocáveis, ou seja, zerando-se as linhas e colunas referentes àqueles GLs e colocando-se o valor unitário no elemento da diagonal.

IV.7.2 - Apoios Elásticos

Em muitas situações práticas, os apoios e/ou conexões entre partes da estrutura são ligações elásticas que se situam entre os dois casos extremos de vinculações:

- com impedimento total, ou,
- com liberdade total ao movimento em uma ou mais direções generalizadas.

A consideração de apoios elásticos pode ser feita introduzindo-se no vetor de forças globais $\{F\}$, uma força F_i dependente do deslocamento u_i , e corresponde à ação do apoio elástico de rigidez k:



(a) – Visualização do apoio elástico;
(b) – Diagrama do Corpo Livre (DCL) da estrutura;
(c) – DCL do apoio (mola).

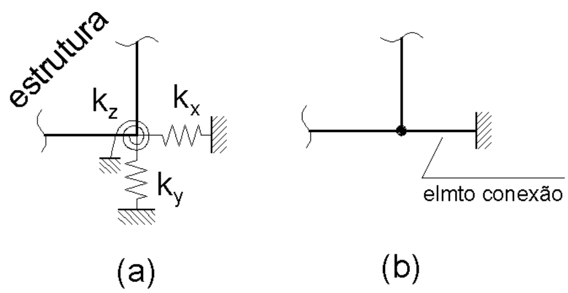
O que matricialmente pode ser expresso por:

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ -k \cdot u_i \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & \\ & \ddots & \vdots & \\ \cdots & \cdots & k_{ii} & \cdots \\ & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

e equivale a somar k ao coeficiente de rigidez de diagonal k_{ii} :

$$\begin{Bmatrix} \\ \\ 0 \\ \\ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & k_{ii} + k & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \\ \\ u_i \\ \\ \end{Bmatrix}$$

Uma generalização de fácil implementação consiste na criação de um elemento de conexão elástica, fornecendo diretamente os coeficientes de rigidez nas direções globais, podendo ser representado no plano pela figura abaixo:



(a) – Apoio elástico nas três coordenadas do plano;
(b) – Idealização de um elemento de conexão elástica.

A matriz de rigidez do elemento conexão já no sistema de coordenadas globais é dada por:

$$\left[K^{G}_{conexão}\right] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & -k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 & -k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & -k_z \\ -k_x & 0 & 0 & k_x & 0 & 0 \\ 0 & -k_y & 0 & 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & -k_z & 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

Para a utilização do elemento de conexão como apoio elástico, o nó externo do elemento mola (aquele que não estiver ligado à estrutura) deve ser totalmente impedido (engastado).

A reação no apoio elástico é igual ao esforço no elemento conexão.