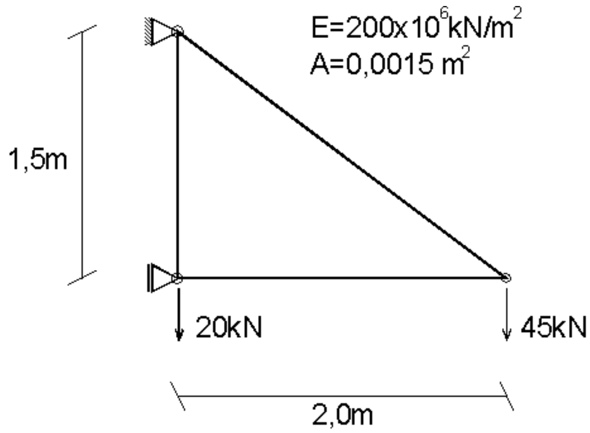
IV.5 – Solução de Treliça Plana Visando sua Implementação Computacional

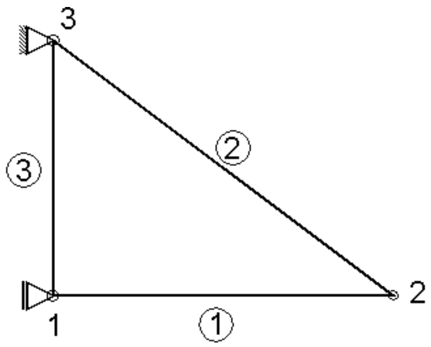
O exemplo roteirizado a seguir busca a apresentação dos passos e metodologias a serem adotados no tratamento de modelos estruturais planos, visando sua solução através da obtenção de seus diagramas solicitantes.

Seja a treliça plana, cujo modelo analítico é apresentado abaixo:

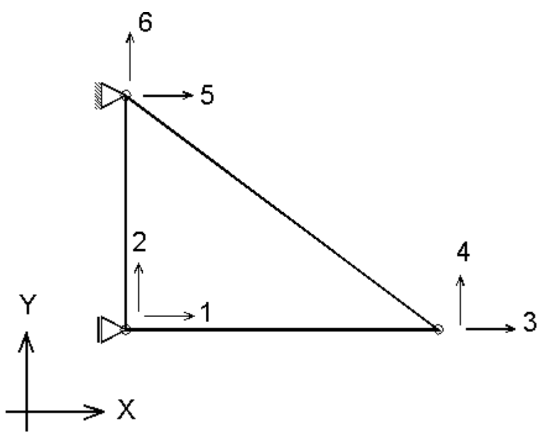


Para resolvê-la, serão adotados os seguintes passos:

1 – Numerar os nós e elementos do modelo analítico da estrutura;

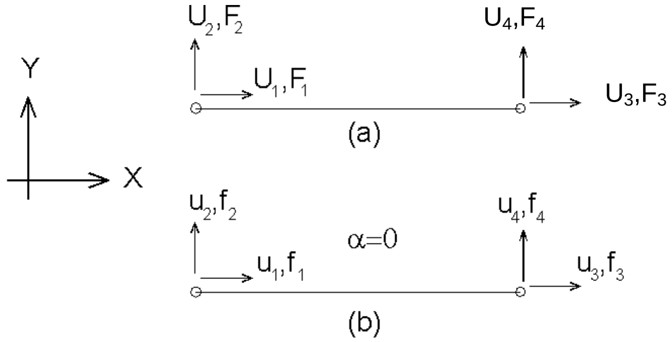


Numerar os graus de liberdade da estrutura no referencial global, seguindo-se o nº dos nós independentemente das condições de contorno;



2 – Escrever as equações de equilíbrio de cada elemento no referencial global; as coordenadas locais podem ser numeradas apenas até 4 (número de GL do elemento geral de treliça plana), visto que pelo processo da rigidez direta elas serão utilizadas somente na análise particular de cada elemento.

Elemento nº 1:



(a) Elemento nº1 segundo as coordenadas globais;
(b) Elemento nº1 segundo as coordenadas locais.

Equação de equilíbrio do elemento:

$$\{f\} = [K_E] \cdot \{u\}$$

$$\Rightarrow [R_E] \cdot \{F\} = [K_E] \cdot [R_E] \cdot \{u\}$$

$$\Rightarrow \{F\} = [R_E]^{-1} \cdot [K_E] \cdot [R_E] \cdot \{u\}$$

$$\Rightarrow \{F\} = [R_E]^{T} \cdot [K_E] \cdot [R_E] \cdot \{u\}$$

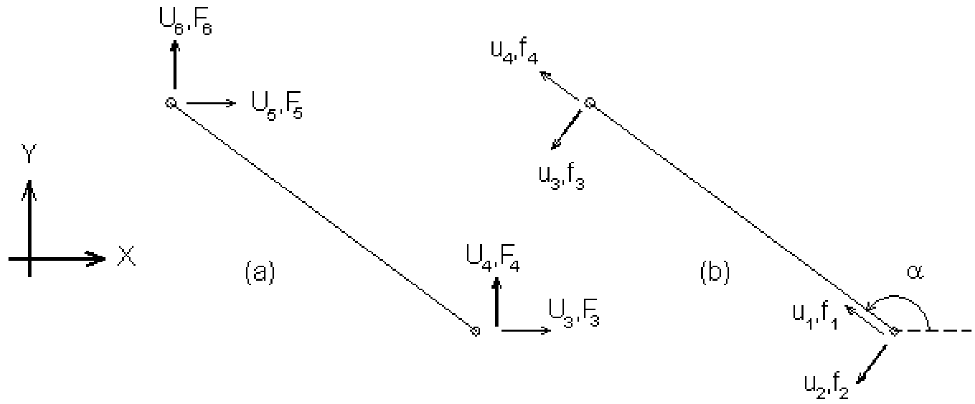
onde,

$$[R_E] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ 0 & 0 & -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [K_E] = \frac{EA}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{EA}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[K_E^G]} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

sendo $[K_E^G] = [R_E]^T \cdot [K_E] \cdot [R_E]$ a matriz de rigidez do elemento no referencial global.

Elemento nº 2:



(a) Elemento nº2 segundo as coordenadas globais;

(b) Elemento nº2 segundo as coordenadas locais.

Matriz de rotação do elemento:

$$[R_E] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ -0,6 & -0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 & -0,6 & -0,8 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez do elemento no referencial global:

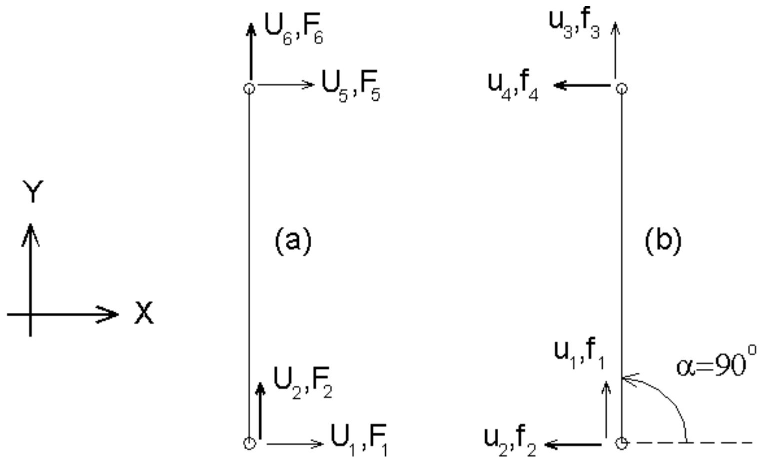
$$[K_E^G] = [R_E]^T \cdot [K_E] \cdot [R_E]$$

$$\Rightarrow [K_E^G] = \frac{EA}{L_2} \begin{bmatrix} 0,64 & -0,48 & -0,64 & 0,48 \\ -0,48 & 0,36 & 0,48 & -0,36 \\ -0,64 & 0,48 & 0,64 & -0,48 \\ 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0,36 \end{bmatrix}$$

Equação de equilíbrio no referencial global:

$$\Rightarrow \{F\} = \frac{EA}{L_2} \begin{bmatrix} 0,64 & -0,48 & -0,64 & 0,48 \\ -0,48 & 0,36 & 0,48 & -0,36 \\ -0,64 & 0,48 & 0,64 & -0,48 \\ 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0,36 \end{bmatrix} \cdot \{U\}$$

Elemento nº 3:



(a) Elemento nº3 segundo as coordenadas globais;

(b) Elemento nº3 segundo as coordenadas locais.

Matriz de rotação do elemento:

$$[R_E]=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez do elemento no referencial global:

$$[K_E^G]=[R_E]^T\cdot[K_E]\cdot[R_E]$$

$$\Rightarrow [K_E^G]=\frac{EA}{L_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equação de equilíbrio no referencial global:

$$\Rightarrow \{F\}=\frac{EA}{L_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\{U\}$$

3 – A partir da contribuição de cada elemento, formar um único sistema de equações de equilíbrio relativo à estrutura.

Contribuição do 1º elemento:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Ou ainda analisando as contribuições no referencial global apenas na matriz de rigidez elementar:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} & \end{array} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

Contribuição do 2º elemento:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}256 & -0{,}192 & -0{,}256 & 0{,}192 \\ 0 & 0 & -0{,}192 & 0{,}144 & 0{,}192 & -0{,}144 \\ 0 & 0 & -0{,}256 & 0{,}192 & 0{,}256 & -0{,}192 \\ 0 & 0 & 0{,}192 & -0{,}144 & -0{,}192 & 0{,}144 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Ou ainda,

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0{,}256 & -0{,}192 & -0{,}256 & 0{,}192 \\ -0{,}192 & 0{,}144 & 0{,}192 & -0{,}144 \\ -0{,}256 & 0{,}192 & 0{,}256 & -0{,}192 \\ 0{,}192 & -0{,}144 & -0{,}192 & 0{,}144 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array} \cdot \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Contribuição do 3º elemento:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}667 & 0 & 0 & 0 & -0{,}667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}667 & 0 & 0 & 0 & 0{,}667 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Ou ainda, analisando as contribuições no referencial global apenas na matriz de rigidez elementar:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 5 & \quad 6 \end{matrix} & \end{array} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Obtendo-se, por fim, a equação de equilíbrio do sistema global:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}667 & 0 & 0 & 0 & -0{,}667 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}756 & -0{,}192 & -0{,}256 & 0{,}192 \\ 0 & 0 & -0{,}192 & 0{,}144 & 0{,}192 & -0{,}144 \\ 0 & 0 & -0{,}256 & 0{,}192 & 0{,}256 & -0{,}192 \\ 0 & -0{,}667 & 0{,}192 & -0{,}144 & -0{,}192 & 0{,}811 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

4 – Aplicar as condições de contorno cinemáticas e estáticas (deslocamentos e forças nodais conhecidas);

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 = ? \\ F_2 = -20 \\ F_3 = 0 \\ F_4 = -45 \\ F_5 = ? \\ F_6 = ? \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 = 0 \\ U_2 = ? \\ U_3 = ? \\ U_4 = ? \\ U_5 = 0 \\ U_6 = 0 \end{Bmatrix}$$

Assim, o sistema passa a ser:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ -20 \\ 0 \\ -45 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,667 & 0 & 0 & 0 & -0,667 \\ -0,5 & 0 & 0,756 & -0,192 & -0,256 & 0,192 \\ 0 & 0 & -0,192 & 0,144 & 0,192 & -0,144 \\ 0 & 0 & -0,256 & 0,192 & 0,256 & -0,192 \\ 0 & -0,667 & 0,192 & -0,144 & -0,192 & 0,811 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nota-se que a matriz de rigidez da estrutura, desconsiderando-se as condições de contorno, é singular (não-inversível). Por exemplo, observa-se que a última linha é combinação da 2ª com a 4ª linha.

Para a imposição das condições de contorno, citam-se dois métodos:

a. <u>Reordenação das equações</u>:

Para facilitar, o sistema pode ser reordenado da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} -20 \\ 0 \\ -45 \\ R_1 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0,667 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,667 \\ 0 & 0,756 & -0,192 & -0,5 & -0,256 & 0,192 \\ 0 & -0,192 & 0,144 & 0 & 0,192 & -0,144 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,256 & 0,192 & 0 & 0,256 & -0,192 \\ -0,667 & 0,192 & -0,144 & 0 & -0,192 & 0,811 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que corresponde aos dois seguintes sistemas:

$$\begin{Bmatrix} -20 \\ 0 \\ -45 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0,667 & 0 & 0 \\ 0 & 0,756 & -0,192 \\ 0 & -0,192 & 0,144 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,256 & 0,192 \\ -0,667 & 0,192 & -0,144 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

b. <u>Técnica dos Zeros e Um</u>:

Esta técnica utiliza o seguinte artifício numérico que evita a reordenação das direções nodais:

- para cada equação relativa a uma direção restringida m, faz-se:

$$\lfloor K^G \rfloor_{m,n} = 0\,;\; m \neq n \quad \text{(linha m)}$$

$$\lfloor K^G \rfloor_{m,m} = 1; \quad \text{(coef. da diagonal principal)}$$

$$\lfloor K^G \rfloor_{n,m} = 0\,;\; m \neq n \quad \text{(coluna m)}$$

Desta forma obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \\ -45 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = EA \cdot \left[\begin{array}{c|cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0{,}667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}756 & -0{,}192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}192 & 0{,}144 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que corresponde a:

$$\begin{Bmatrix} -20 \\ 0 \\ -45 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0{,}667 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}756 & -0{,}192 \\ 0 & -0{,}192 & 0{,}144 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

5 – Cálculo dos deslocamentos globais da estrutura:

Os deslocamentos globais podem ser calculados pela solução dos sistemas de equações obtidos pela imposição das condições de contorno, para ambos os métodos apresentados:

$$\begin{Bmatrix} -20 \\ 0 \\ -45 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0{,}667 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}756 & -0{,}192 \\ 0 & -0{,}192 & 0{,}144 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1{,}0 \cdot 10^{-4} \\ -4{,}0 \cdot 10^{-4} \\ -1{,}575 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

6 – Cálculo dos Esforços

A partir dos deslocamentos globais, obtém-se os deslocamentos locais pela aplicação das matrizes de rotação dos elementos:

$$\{u\} = [R_E] \cdot \{U\}$$

Com os delocamentos no referencial local, é possível obter os esforços a partir da equação de equilíbrio:

$$\{S\} = [K_E] \cdot \{u\}$$

Esforços do 1º elemento:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -1{,}0 \cdot 10^{-4} \\ -4{,}0 \cdot 10^{-4} \\ -1{,}575 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 \\ 0 \\ -60 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Analisando as coordenadas do elemento nº1, verifica-se que, para o carregamento aplicado neste exemplo, o esforço normal é de 60kN de compressão (-60kN):

De forma análoga, obtém-se os esforços de 75kN de tração no elemento 2, e de 20kN de tração no elemento 3.

7 – Cálculo das reações de apoio

Caso tenha sido utilizado o método da reordenação das equações para a imposição das condições de contorno, as reações podem ser obtidas através da substituição dos valores dos deslocamentos globais (já calculados) no sistema de equações obtido:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,256 & 0,192 \\ -0,667 & 0,192 & -0,144 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

Se o método utilizado for o das técnicas dos zeros e um, as reações não podem ser calculadas diretamente pela perda de informações ocorrida ao se “zerar” as linhas e colinas restringidas.

As reações podem então ser calculadas pela acumulação (num vetor $\{R\}$) dos esforços locais rotacionados para o referencial global, para cada um dos elementos conexos ao apoio:

$$\{R\} = \sum [R_E]^T \cdot \{S\}$$

Os valores das reações são, portanto:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 \\ -60 \\ 65 \end{Bmatrix} kN$$