

IV – MÉTODO DA RIGIDEZ

IV.1 – Solução Geral

A modelagem de um sistema estrutural para sua resolução através do método da rigidez deve preferencialmente apresentar um número de coordenadas globais igual ao grau de indeterminação cinemática da estrutura, a partir de uma análise que deve levar em conta os tipos de deformações consideradas significativas. Em princípio haverá coordenadas globais onde houver cargas externas aplicadas, deslocamentos nodais impostos (recalques), deslocamentos de interesse e reações a calcular.

No método da rigidez, não há necessidade em se reduzir o número de coordenadas locais, como existe no método da flexibilidade. Como os esforços finais são obtidos em termos das coordenadas locais, deve-se utilizar uma discretização da estrutura em elementos que possuam tantos GL quantos sejam necessários para se definir as linhas de estado do sistema estrutural.

Para que a Matriz de Incidência Cinemática seja de obtenção direta, torna-se ainda indispensável a existência de GLs no referencia local que correspondam às coordenadas (GLs) globais daquele segmento.

Classificando-se os deslocamentos segundo as coordenadas globais em impostos (prescritos, restringidos, ou de índice 0) e desconhecidos (incógnitos ou de índice 1), o vetor dos deslocamentos locais (deformações) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\{s\} = \begin{bmatrix} [A_0] \\ [A_1] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \dots \\ \{x\} \end{Bmatrix}, \text{ onde } \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \dots \\ \{x\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_R \\ \dots \\ U \end{Bmatrix}$$

onde a matriz de incidência cinemática $[A]$ foi decomposta em duas submatrizes:

- $[A_0]$ que transforma os deslocamentos globais impostos ($\{r\}$ ou U_R) em deformações locais $\{s\}$;
- $[A_1]$ que transforma os deslocamentos globais livres ($\{x\}$ ou U) em deformações locais $\{s\}$.

A partir da equação de equilíbrio, podem-se separar os GL globais em prescritos e indeterminados, obtendo-se:

$$\begin{Bmatrix} \{R\} \\ \dots \\ \{X\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{00}] & \vdots & [K_{01}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [K_{10}] & \vdots & [K_{11}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \dots \\ \{x\} \end{Bmatrix}$$

A matriz de rigidez da estrutura integrada pode ser representada através das submatrizes:

- $[K_{00}]$ ou $[K_{RR}]$ é a matriz de rigidez (quadrada e simétrica), referente aos GLs prescritos da estrutura, que fornece as reações $\{R\}$ associadas aos deslocamentos globais;
- $[K_{10}]$ ou $[K_{LR}]$ e $[K_{01}]$ ou $[K_{RL}]$ são submatrizes de rigidez cruzadas que relacionam as forças externas com deslocamentos prescritos e as reações nodais com a configuração deformada;
- $[K_{11}]$ ou $[K_{LL}]$ é a matriz de rigidez (quadrada e simétrica), referente aos GLs livres da estrutura, que relaciona as ações externas $\{X\}$ aos deslocamentos globais.

As submatrizes podem ser obtidas algebricamente pela aplicação da equação da matriz de rigidez da estrutura integrada:

$$[K] = [A]^T \cdot [k] \cdot [A] = \begin{bmatrix} [A_0]^T \cdot [k] \cdot [A_0] & : & [A_0]^T \cdot [k] \cdot [A_1] \\ \dots & & \dots \\ [A_1]^T \cdot [k] \cdot [A_0] & : & [A_1]^T \cdot [k] \cdot [A_1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{00}] & : & [K_{01}] \\ \dots & & \dots \\ [K_{10}] & : & [K_{11}] \end{bmatrix}$$

Se forem conhecidos os deslocamentos impostos $\{r\}$ e as ações aplicadas $\{X\}$, podem-se obter os valores dos deslocamentos globais através da equação:

$$\begin{aligned} [K_{10}] \cdot \{r\} + [K_{11}] \cdot \{x\} &= \{X\} \\ \Rightarrow \{x\} &= [K_{11}]^{-1} (\{X\} - [K_{10}] \cdot \{r\}) \end{aligned}$$

Para o caso dos deslocamentos prescritos serem nulos (estrutura plana fixada em apoios do 1º, 2º ou 3º gênero), tem-se:

$$\{x\} = [K_{11}]^{-1} \{X\}$$

Conhecidos os deslocamentos globais, pode-se então achar os valores das reações:

$$\{R\} = [K_{00}] \cdot \{r\} + [K_{01}] \cdot \{x\}$$

Os esforços são:

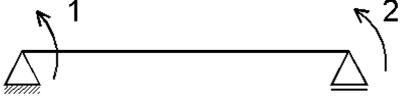
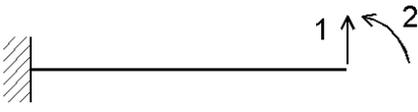
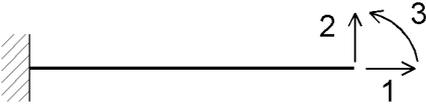
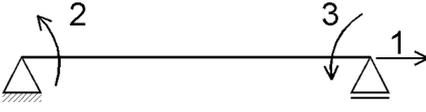
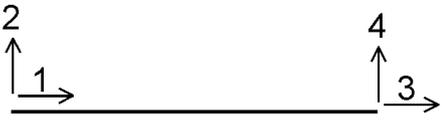
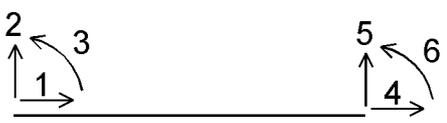
$$\begin{aligned} \{S\} &= \{S_0\} + [k] \cdot \{s\} \\ \{S\} &= \{S_0\} + [k] \cdot \left[[A_0] : [A_1] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \dots \\ \{s\} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Mais uma vez, para o caso dos deslocamentos prescritos serem nulos (estrutura plana fixada em apoios do 1º, 2º ou 3º gênero), tem-se:

$$\{S\} = \{S_0\} + [k] \cdot [A_1] \cdot [K_{11}]^{-1} \cdot \{X\}$$

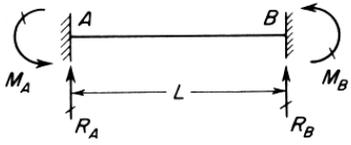
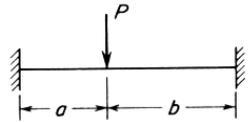
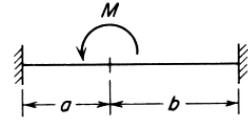
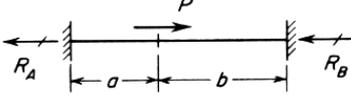
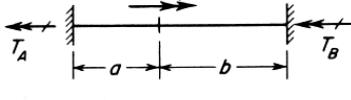
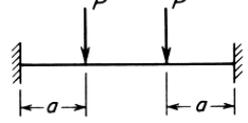
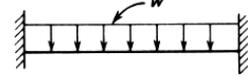
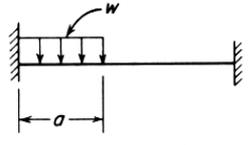
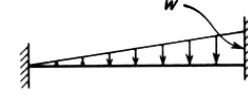
IV.2 – Matrizes de Rigidezes Elementares

A partir da tabela de relações ações/deslocamentos deduzida no capítulo II, pode-se facilmente, pela definição de coeficiente de rigidez, montar-se as matrizes abaixo relacionadas:

	$\frac{2EJ}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
	$\frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{-6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ}{L} & \frac{2EJ}{L} \\ 0 & \frac{2EJ}{L} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{-6EJ}{L^2} \\ -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{-6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{-6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$

IV.3 – Reações de Fixação para Cálculo do CNE

Apresenta-se abaixo uma tabela referente às reações de fixação devidas a carregamentos genéricos na barra biengastada, para o cálculo do carregamento nodal equivalente (CNE), conforme explicado no capítulo III:

	
1	 $M_A = \frac{Pab^2}{L^2} \quad M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$ $R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b) \quad R_B = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)$
2	 $M_A = \frac{Mb}{L^2}(2a - b)$ $M_B = \frac{Ma}{L^2}(2b - a)$ $R_A = -R_B = \frac{6Mab}{L^3}$
3	 $R_A = \frac{Pb}{L} \quad R_B = \frac{Pa}{L}$
4	 $T_A = \frac{Tb}{L} \quad T_B = \frac{Ta}{L}$
5	 $M_A = -M_B = \frac{Pa}{L}(L - a)$ $R_A = R_B = P$
6	 $M_A = -M_B = \frac{wL^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{wL}{2}$
7	 $M_A = \frac{wa^2}{12L^2}(6L^2 - 8aL + 3a^2)$ $M_B = -\frac{wa^3}{12L^2}(4L - 3a)$ $R_A = \frac{wa}{2L^3}(2L^3 - 2a^2L + a^3)$ $R_B = \frac{wa^3}{2L^3}(2L - a)$
8	 $M_A = \frac{wL^2}{30} \quad M_B = -\frac{wL^2}{20}$ $R_A = \frac{3wL}{20} \quad R_B = \frac{7wL}{20}$

IV.4 – Processo da Rigidez Direta

Os coeficientes das matrizes de rigidez tanto no referencial local (matrizes elementares) quanto no referencial global são formulados a partir de um mesmo princípio físico: correspondem à força necessária para que se imponha um deslocamento unitário segundo aquele determinado grau de liberdade (GL), enquanto todos os outros deslocamentos são nulos.

Quando um sistema estrutural tem os seus GLs identificados por um conjunto de coordenadas globais, e está discretizado em elementos que possuem representações locais (coordenadas) de tais GLs globais, evidencia-se a correspondência existente entre os deslocamentos da estrutura montada, decorrentes do equilíbrio global, e os deslocamentos (relativos) impostos em cada um dos elementos no referencial local.

O sistema estrutural passa então a se comportar como uma associação de molas em paralelo, onde cada mola consiste em um elemento da estrutura. Logo a força necessária à realização de um determinado deslocamento segundo uma coordenada global, será igual ao somatório das forças necessárias para se impor o mesmo deslocamento segundo cada um dos elementos que incidem sobre aquele GL. Em termos matriciais isso pode ser entendido como o coeficiente k_{ij} da matriz de rigidez global segundo os GLs i e j sendo igual ao somatório dos coeficientes das matrizes de rigidez elementares referentes a cada um dos elementos conexos aos GLs i e j , respeitadas as convenções de direção e sentido:

$$[K^G]_{ij} = \sum_{n=1}^{nelm} [k_{E_n}^G]_{ij}$$

onde $[K^G]$ é a matriz de rigidez da estrutura montada (global);

$[k_{E_n}^G]$ é a matriz de rigidez do n -ésimo elemento no referencial global;

$nelm$ é o número de elementos que contém os GL i e j .

Seja a estrutura plana representada abaixo, onde se desprezam os efeitos axiais:

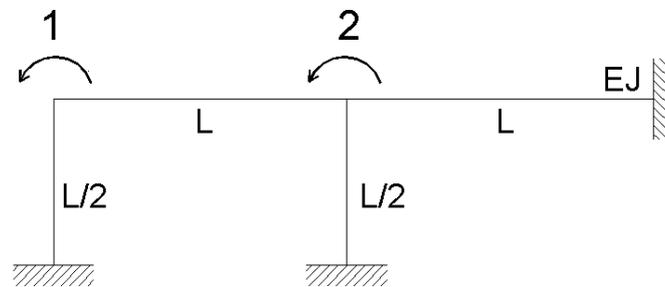


Figura III.4.1 – Coordenadas Globais do sistema estrutural plano.

Para se determinar cinematicamente a estrutura discretizada (desconsiderando-se os efeitos axiais) foram utilizadas duas coordenadas globais. A estrutura foi então desmembrada em elementos de viga, conforme ilustra a figura a seguir:

Entretanto, percebe-se na figura III.4.2, que os GLs locais 2 e 3 coincidem com o GL 1 global, ou seja, um deslocamento segundo a coordenada global 1 (restringindo-se todas as demais coordenadas) implica em deslocamentos de igual intensidade e direção nos elementos 1 e 2, ou melhor, segundo as coordenadas locais 2 e 3. Da mesma forma, pode-se dizer que a força necessária para que o nó gire segundo o GL global 1 é igual a soma das forças necessárias para se deslocar os GL locais 2 e 3, ou seja:

$$[K]_{11} = [k_{E1}]_{22} + [k_{E2}]_{11}$$

Identificando-se nas matrizes de rigidez elementares a correspondência dos GLs locais (número das linhas e colunas) com os globais, teríamos:

$$[k_{E1}] = \frac{EJ}{L} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{X} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{X} \\ \textcircled{1} \end{matrix} \quad [k_{E2}] = \frac{EJ}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

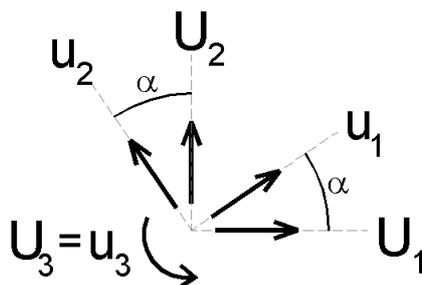
$$[k_{E3}] = \frac{EJ}{L} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{X} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{X} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \quad [k_{E4}] = \frac{EJ}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{X} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{X} \end{matrix}$$

A partir da correspondência verificada acima, pode-se então montar diretamente a matriz de rigidez direta global da estrutura somando-se as contribuições elementares:

$$[K] = \frac{EJ}{L} \begin{bmatrix} 8+4 & 2 \\ 2 & 8+4+4 \end{bmatrix} = \frac{EJ}{L} \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

A metodologia de montagem da matriz de rigidez global da estrutura por “acumulação das contribuições locais”, descrita acima, consiste no processo da rigidez direta (*assembly process*).

Quando as coordenadas globais e locais não apresentarem direções e sentidos iguais, situação bastante comum em estruturas aperticadas, deve-se realizar uma transformação de coordenadas:



$$u_1 = U_1 \cdot \cos \alpha + U_2 \cdot \sin \alpha$$

$$u_2 = -U_1 \cdot \sin \alpha + U_2 \cdot \cos \alpha$$

$$u_3 = U_3$$

onde: U_i – Coordenadas Globais;

u_i – Coordenadas Locais.

Logo, para o caso mais genérico no plano (3 GLs por nó), a matriz de transformação de coordenadas consiste numa matriz de rotação de um ângulo α :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os deslocamentos locais (deformações) de um elemento de pórtico plano pode então ser obtido a partir dos deslocamentos globais da estrutura, pela fórmula:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_\alpha & 0 \\ 0 & R_\alpha \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Para fins de generalização do processo, visando sua implementação computacional, deve-se estabelecer sempre sistemas de coordenadas semelhantes, isto é, dispostos em posição relativa idêntica. Quando isto ocorrer, a matriz de transformação de coordenadas consistirá sempre numa matriz de rotação com a forma dada acima.

Pode-se ainda mostrar ainda que a matriz de rotação é uma matriz ortogonal, o que fornece:

$$\begin{aligned} R_\alpha^{-1} &= R_\alpha^T \\ \Rightarrow \{U\} &= [R_\alpha]^T \cdot \{u\} \end{aligned}$$

A equação de equilíbrio de um elemento no referencial global pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned} \{S\} &= [k_e] \cdot \{u\} \Rightarrow \\ \Rightarrow [R]^T \cdot \{S\} &= [R]^T \cdot [k_e] \cdot \{u\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{F\} &= [R] \cdot [k_e] \cdot [R] \cdot \{U\} \end{aligned}$$

Percebe-se, desta forma, que a acumulação das matrizes de rigidez elementares na matriz de rigidez global pelo processo da rigidez direta, envolverá uma prévia transformação de coordenadas para o referencial global, conforme indica a expressão abaixo:

$$[K_G] = \sum_{\text{elem}=1}^n [R]^T \cdot [k_e] \cdot [R]$$

Estes conceitos poderão ser melhor compreendidos nos exemplos a seguir, onde serão apresentadas ainda as técnicas computacionais mais utilizadas para facilitar sua implementação.