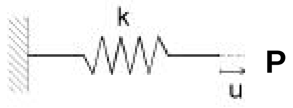
II.6 – FORMULAÇÃO DAS MATRIZES DE FLEXIBILIDADE E RIGIDEZ EM TERMOS DE ENERGIA

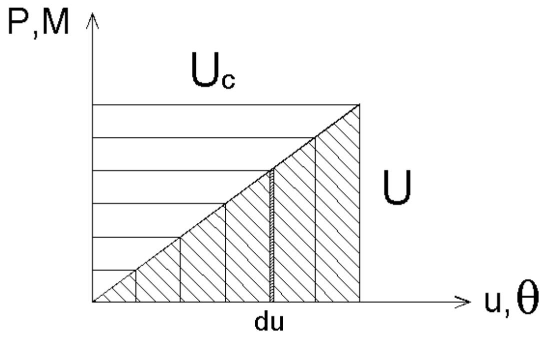
II.6.1 – Trabalho, Energia de Deformação e Energia Complementar de Deformação

Definições:

$d\tau = R_i \cdot dr_i$ ⇒ trabalho ou energia de deformação;

$d\tau_C = r_i \cdot dR_i$ ⇒ trabalho ou energia complemetar de deformação.





"Simplificadamente, pode-se entender Energia de Deformação como o trabalho acumulado por uma estrutura ao se deformar"

$\Rightarrow U = \tau = \int_0^{u_1} P \cdot du$ ou para esforços de momento, $U = \tau = \int_0^{\theta_1} M \cdot d\theta$

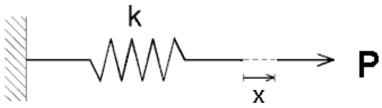
$\Rightarrow U^* = U_c = \tau_c = \int_0^{P_1} u \cdot dP$ ou, $U^* = U_c = \tau_c = \int_0^{M_1} \theta \cdot dM$

Para estruturas lineares e elásticas: $U = U_C$

"O trabalho complementar é representado pela área entre a curva carga-deslocamento e o eixo vertical. Ele não tem um significado físico óbvio como o trabalho τ, mas no sentido geométrico, consiste no complemento do trabalho de deformação τ porque completa o retângulo mostrado no gráfico citado."

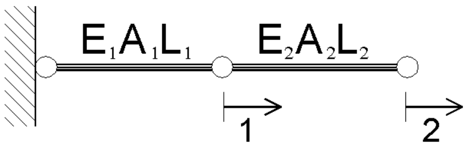
II.6.2 – Teoremas de Castigliano

Avaliando-se a energia de deformação acumulada por uma mola simples ao se estabelecer progressivamente um deslocamento x, tem-se:



$$U = \tau = \int P \cdot du = \int_0^x (k \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Para a estrutura composta de duas hastes com solicitação axial, obtêm-se:



$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1A_1}{L_1}\right) \cdot r_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{E_2A_2}{L_2}\right) \cdot (r_2 - r_1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r_1} = \left(\frac{E_1A_1}{L_1} + \frac{E_2A_2}{L_2}\right) \cdot r_1 - \left(\frac{E_2A_2}{L_2}\right) \cdot r_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r_2} = \left(\frac{E_2A_2}{L_2}\right) \cdot r_2 - \left(\frac{E_2A_2}{L_2}\right) \cdot r_1$$

<u>1º Teorema de Castigliano</u>:

"A derivada da energia de deformação U em relação a um dos deslocamentos r_i fornece a ação mecânica R_i aplicada na direção desse deslocamento."

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r_1} = R_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial r_2} = R_2$$

Logo, sendo o coeficiente de rigidez k_{ij}, por definição, a força na direção i por deslocamento na direção j, ou seja, $\frac{\partial R_i}{\partial r_j} = k_{ij}$, pode-se obter os valores de cada um dos coeficientes de rigidez da estrutura através da dupla derivação da expressão da energia de deformação:

$$\Rightarrow k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j} \quad \text{e} \quad k_{ii} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_i^2}$$

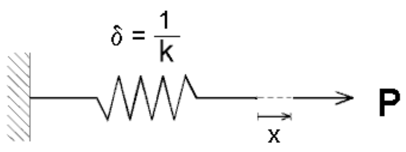
Assim, para a estrutura composta de duas hastes sob solicitação normal, tem-se:

$$\Rightarrow k_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} = \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2}$$

$$\Rightarrow k_{12} = k_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial r_2} = -\frac{E_2 A_2}{L_2}$$

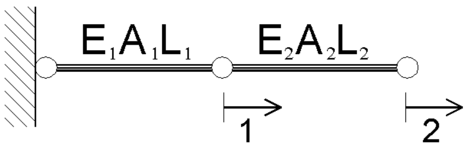
$$\Rightarrow k_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} = \frac{E_2 A_2}{L_2}$$

Avaliando-se agora a energia de deformação complementar acumulada por uma mola simples ao se aplicar progressivamente uma força P, obtêm-se:



$$U^* = \int u \cdot dP = \int_0^P (P \cdot \delta) \cdot dP = \frac{1}{2} \delta \cdot P^2$$

Avaliando-se agora, para a estrutura composta de duas hastes com solicitação axial, obtêm-se:



$$\delta = \frac{1}{k} = \frac{L}{EA}$$

$$U^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{L_1}{E_1 A_1} (R_1 + R_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_2}{E_2 A_2} R_2{}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial R_1} = \frac{L_1}{E_1 A_1} (R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial R_2} = \frac{L_1}{E_1 A_1} R_2 + \frac{L_2}{E_2 A_2} R_2$$

2º Teorema de Castigliano:

"A derivada da energia de deformação complemetar U^* em relação a uma das ações mecânicas R_i fornece o deslocamento na direção dessa ação."

$$\Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial R_1} = r_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U^*}{\partial R_2} = r_2$$

Logo, sendo o coeficiente de flexibilidade f_{ij}, por definição, o deslocamento na direção i por força na direção j, ou seja, $\frac{\partial r_i}{\partial R_j} = f_{ij}$, podem-se assim serem obtidos os valores de cada um dos coeficientes de flexibilidade da estrutura através da dupla derivação da expressão da energia de deformação, agora em relação às forças:

$$\Rightarrow f_{ij} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial R_i \partial R_j} \quad \text{e} \quad f_{ii} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial R_i^2}$$

Assim, para o caso da estrutura composta de duas hastes sob solicitação normal, tem-se:

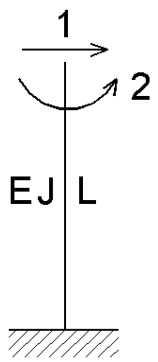
$$\Rightarrow f_{11} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial R_1^2} = \frac{L_1}{E_1 A_1}$$

$$\Rightarrow f_{12} = f_{21} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial R_1 \partial R_2} = \frac{L_1}{E_1 A_1}$$

$$\Rightarrow f_{22} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial R_2^2} = \frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2}$$

II.6.3 – Exemplo da Viga Engastada e Livre (elemento de viga)

Obter a matriz de rigidez da estrutura abaixo pela energia de deformação e pela definição dos coeficientes de rigidez:



$$U = \tau = \int M \cdot d\varphi = \int_0^L \left(EJ \frac{d^2v}{dx^2} \right) \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \cdot dx = \int_0^L EJ \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \cdot dx$$

Res Mat

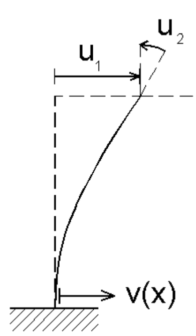
onde v(x)≡ expressão da elástica (deformada).

A partir da equação da elástica da viga $EJ_z \frac{d^4v(x)}{dx^4} = q_y$, considerando-se que a estrutura não possui cargas ao longo de seu comprimento (apenas nos nós), ou seja, $q_y = 0$, e que as condições de compatibilidade cinemática nos apoios da viga são:

$$v(x=0) = 0 \qquad \frac{dv}{dx}(x=0) = 0$$

e em sua extremidade são:

$$v(x=L) = u_1 \qquad \frac{dv}{dx}(x=L) = -u_2$$



pode-se obter a equação da elástica em termos de x.

A integração direta da elástica fornece o seguinte polinômio do 3º grau:

$$v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

onde as 4 constantes de integração podem ser determinadas pelas condições de contorno cinemáticas:

$$v(x = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(x = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$$v(x = L) = u_1 \quad \Rightarrow \quad aL^3 + bL^2 = u_1$$

$$\frac{dv}{dx}(x = L) = -u_2 \quad \Rightarrow \quad 3aL^2 + 2bL = -u_2$$

Substituindo as constantes de integração na equação da elástica, e integrando a expressão do trabalho diferencial de deformação, obtêm-se a expressão final da energia de deformação em termos dos deslocamentos:

$$U = \frac{6\,EJ}{L^3}\left(u_1^2 + L \cdot u_1 \cdot u_2 + \frac{L^2 u_2^2}{3}\right)$$

Logo,

$$\Rightarrow k_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} = \frac{12EJ}{L^3}$$

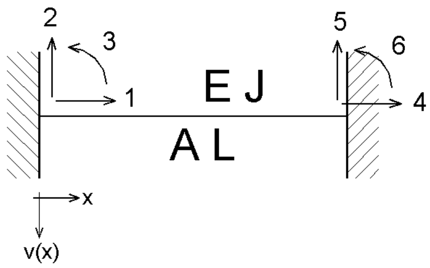
$$\Rightarrow k_{12} = k_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial r_2} = \frac{6EJ}{L^2}$$

$$\Rightarrow k_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} = \frac{4EJ}{L}$$

$$\Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$$

II.6.4 – Obtenção Matriz de Rigidez do Elemento de Pórtico Plano

Obter a matriz de rigidez da estrutura (elemento de pórtico plano) e sistema de coordenadas abaixo, utilizando-se do 1º Teorema de Castigliano:



Inicialmente deve-se lembrar que na teoria elástica linear os deslocamentos e rotações são considerados pequenos e, por isto, os efeitos de 2ª ordem podem ser desprezados, ou seja:

$$k_{12} = k_{13} = k_{15} = k_{16} = k_{42} = k_{43} = k_{45} = k_{46} \cong 0$$

isto é, desprezam-se os esforços axiais despertados pela imposição dos deslocamentos u_2, u_3, u_5 e u_6, e, naturalmente, as relações recíprocas:

$$k_{21} = k_{31} = k_{51} = k_{61} = k_{24} = k_{34} = k_{54} = k_{64} \cong 0$$

Por simetria, tem-se:

$$k_{32} = k_{23}; \quad k_{52} = k_{25}; \quad k_{62} = k_{26}; \quad k_{65} = k_{56}; \quad k_{53} = k_{35}; \quad k_{63} = k_{36}.$$

Para garantir o equilíbrio nos nós, tem-se ainda as seguintes relações:

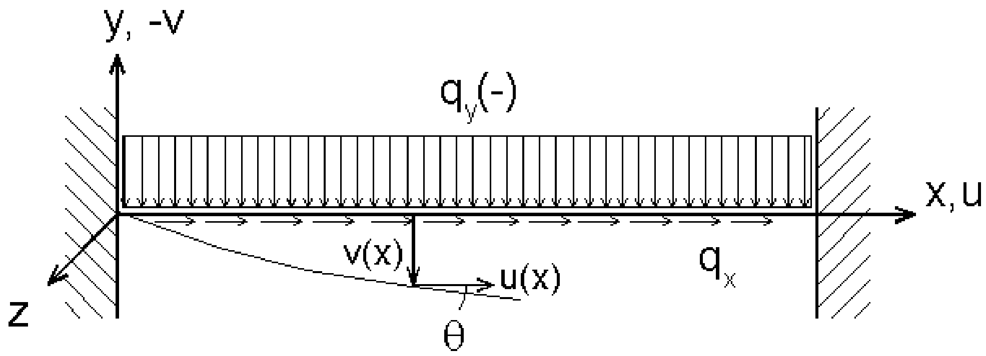
$$\begin{array}{lcl}
k_{52} = -k_{22} & ; & k_{25} = -k_{55} \\
k_{53} = -k_{23} & ; & k_{26} = -k_{56} \\
k_{62} = -k_{32} + k_{22} \cdot L & ; & k_{35} = -k_{65} + k_{55} \cdot L \\
k_{63} = -k_{33} + k_{23} \cdot L & ; & k_{36} = -k_{66} + k_{56} \cdot L \\
k_{41} = -k_{11} & ; & k_{14} = -k_{44}
\end{array}$$

A esta altura, observa-se que com todas estas relações apesentadas é possível obter todos os coeficientes não nulos da matriz de rigidez em função de apenas 4 delas:

$$k_{11},\ k_{22},\ k_{33} \text{ e } k_{23}.$$

Pela Resistência dos Materiais tem-se que as equações diferenciais da elástica são:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = -q_x \\ \dfrac{d^4v}{dx^4} = \dfrac{q_y}{EJ_z} \end{cases}$$



Considerando-se o elemento sem carregamento ao longo de seu comprimento (somente nos nós), ou seja, $q_x = q_y = 0$, tem-se:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = ex + f$$

As condições de contorno cinemáticas podem ser expressas em termos dos deslocamentos nos nós, segundo o sistema de coordenadas estabelecido:

$$u(x = 0) = u_1 \qquad u(x = L) = u_4$$

$$v(x = 0) = u_2 \qquad v(x = L) = u_5$$

$$\frac{dv}{dx}(x = 0) = u_3 \qquad \frac{dv}{dx}(x = L) = u_6$$

Substituindo-se nas equações u(x) e v(x), obtém-se os valores das constantes de integração em função dos deslocamentos u_i :

$$\Rightarrow u(x) = u_1 + (u_4 - u_1)\frac{x}{L}$$

$$\Rightarrow v(x) = (2u_2 - 2u_5 + Lu_3 + Lu_6)\left(\frac{x}{L}\right)^3 + (-3u_2 + 3u_5 - 2Lu_3 - Lu_6)\left(\frac{x}{L}\right)^2 + u_3 x + u_2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\int_0^L \left[EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + EJ\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2\right]dx$$

Substituindo-se as funções de deslocamento u(x) e v(x) obtidas anteriormente, e integrando a expressão da energia, tem-se:

$$\Rightarrow U = \frac{EA}{2L}(u_4 - u_1)^2 + EJ\left[\frac{6}{L^3}(u_2 - u_5)^2 + \frac{6}{L^2}(u_2 - u_5)(u_3 + u_6) + \frac{2}{L}(u_3^2 + u_3 u_6 + u_6^2)\right]$$

Aplicando-se o 1º Teorema de Castigliano, obtêm-se:

$$\Rightarrow k_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} = \frac{EA}{L}; \qquad k_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_2^2} = \frac{12EJ}{L^3}$$

$$\Rightarrow k_{23} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_2 \partial u_3} = \frac{6EJ}{L^2}; \qquad k_{33} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_3^2} = \frac{4EJ}{L}$$

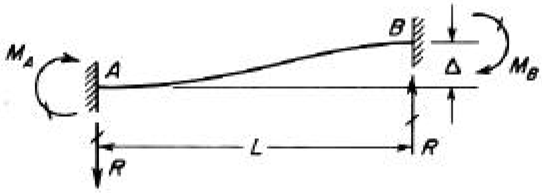
$$\Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$$

Os valores dos coeficientes da matriz de rigidez demonstrados acima correspondem aos resultados apresentados na tabela de relações forças/deslocamentos, do livro dos autores Gere & Weaver (tabela B.4):

1

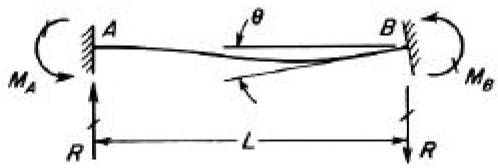
$$R = \frac{EA\Delta}{L}$$

2



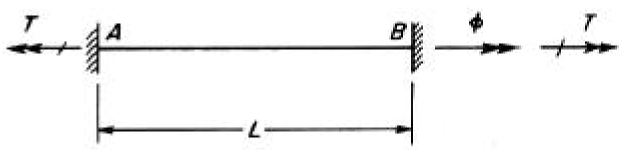
$$M_A = M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2} \qquad R = \frac{12EI\Delta}{L^3}$$

3



$$M_A = \frac{2EI\theta}{L} \qquad M_B = \frac{4EI\theta}{L} \qquad R = \frac{6EI\theta}{L^2}$$

4



$$T = \frac{GJ\phi}{L}$$

G = módulo de elasticidade transversal

J = constante de torção

Ações de Engastamento produzidas por deslocamentos de extremidade