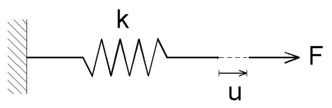
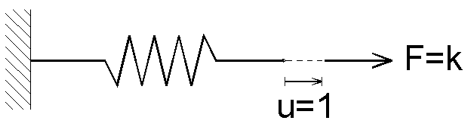
II – MATRIZES DE RIGIDEZ E FLEXIBILIDADE

II.1- Relação entre ações e deslocamentos



II.1.1 – Equação da força em termos do deslocamento

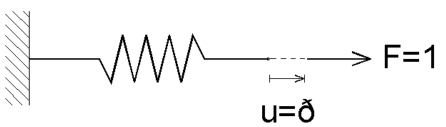
$$\boxed{F = k \cdot u}$$



Onde a rigidez da mola (k) é a força por unidade de deslocamento, ou seja, é a força requerida para produzir um deslocamento unitário na mola.

II.1.2 – Equação do deslocamento em termos da força:

$$\boxed{u = \delta \cdot F}$$



Onde δ é a deformabilidade da mola, geralmente chamada de flexibilidade, sendo o deslocamento por unidade de força, ou seja, é o deslocamento produzido pela aplicação de uma força de valor unitário.

II.2 – Definições

- **k_{ij} ≡ <u>Coeficiente de rigidez</u>:**

Representa a ação (<u>força</u>) na direção **i** causado por um <u>deslocamento unitário</u> na direção **j** (enquanto todos os outros deslocamentos são impostos como nulos).

- **f_{ij} ≡ <u>Coeficiente de flexibilidade</u>:**

Representa o <u>deslocamento</u> na direção **i** causado por uma <u>ação (força) de valor unitário</u> na direção **j** (enquanto todas as outras são nulas).

II.3 – Equações de Equilíbrio

II.3.1 – Força em função de deslocamentos

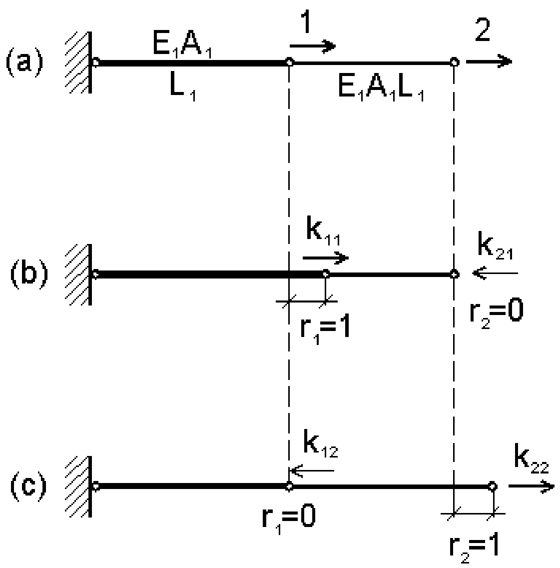


Fig II.1 – Coeficientes de rigidez em estrutura composta de 2 hastes com solicitação axial:
(a) - Sistema de coordenadas globais (1 e 2);
(b)e (c) - Coeficientes de rigidez.

O que eu conheço ?

⇒ ações (R_1 e R_2)

⇒ forças por unidade de deslocamento

≡ coeficientes de rigidez (k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22})

⇒ obtidos previamente.

O que eu quero ?

⇒ deslocamentos (r_1 e r_2)

Sendo $R_1 \equiv$ Força aplicada na coordenada 1, para se garantir o equilíbrio no nó, ela deve ser igual ao somatório das forças (internas) na coordenada 1 resultantes dos deslocamentos ocorridos ao longo da estrutura, ou seja:

$$\boxed{R_1 = k_{11} \cdot r_1 + k_{12} \cdot r_2}$$

Da mesma forma para a coordenada 2, obtém-se:

$$\boxed{R_2 = k_{21} \cdot r_1 + k_{22} \cdot r_2}$$

Reunindo as equações sob forma matricial, obtém-se ainda:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{R\} = [K]\{r\}$$

onde $\{R\}$é o vetor das ações externas (solicitações);

$\{r\}$é o vetor dos deslocamentos;

$[K]$ é ***<u>MATRIZ DE RIGIDEZ</u>*** da estrutura em estudo, de dimensões (2x2), correspondente ao número de coordenadas utilizadas. A matriz de rigidez é uma matriz de transformação linear: transforma o vetor dos deslocamentos no vetor das ações.

II.3.2 – Deslocamento em função das forças

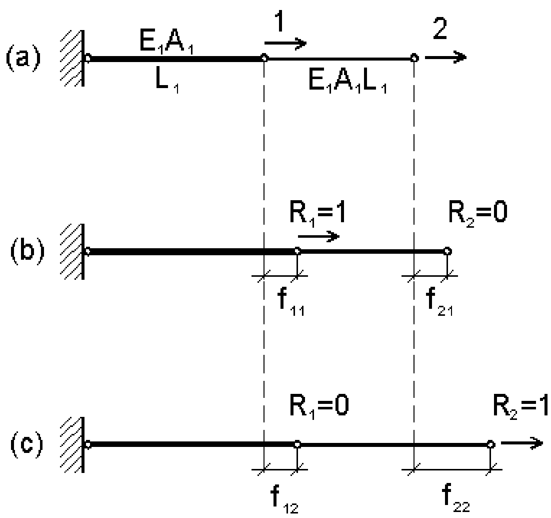


Fig II.2 – Coeficientes de flexibilidade em estrutura composta de 2 hastes com solicitação axial:
(a) - Sistema de coordenadas globais (1 e 2);
(b) e (c) - Coeficientes de flexibilidade.

O que eu conheço ?

$\Rightarrow$ ações (R_1 e R_2)

$\Rightarrow$ deslocamentos por unidade de força $\equiv$

$\equiv$ coeficientes de flexibilidade (f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22})

$\Rightarrow$ obtidos previamente.

O que eu quero ?

$\Rightarrow$ deslocamentos (r_1 e r_2)

Pelo princípio da superposição (regime elástico-linear), o deslocamento final na coordenada 1 será igual à soma dos deslocamentos ocorridos pela aplicação de cada uma das ações externas, ou seja:

$$\boxed{r_1 = f_{11} \cdot R_1 + f_{12} \cdot R_2}$$

Da mesma forma para a coordenada 2, obtém-se:

$$\boxed{r_2 = f_{21} \cdot R_1 + f_{22} \cdot R_2}$$

Reunindo as equações sob forma matricial, obtém-se ainda:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{r\} = [F]\{R\}$$

onde $\{R\}$é o vetor das ações externas (solicitações);

$\{r\}$é o vetor dos deslocamentos;

$[F]$ é ***<u>MATRIZ DE FLEXIBILIDADE</u>*** da estrutura em estudo, de dimensões (2x2), correspondente ao número de coordenadas utilizadas.

II.3.3 – Observações

1. As matrizes $[K]$ e $[F]$ estão vinculadas a um determinado sistema de coordenadas;
2. Só cabem no regime elástico e linear (na forma como aqui foram apresentadas);
3. Cada uma dessas matrizes é a inversa da outra:

   $\{r\} = [F]\{R\}$; $\{R\} = [K]\{r\}$;

   $\Rightarrow \{r\} = [F][K]\{r\} \Rightarrow [F][K] = I \Rightarrow [F] = [K]^{-1}$
4. No futuro será visto que nem sempre elas são inversíveis.

II.4 – Montagem das Matrizes de Flexibilidade e Rigidez pelo P.T.V.

II.4.1 – Exemplo da estrutura composta de 2 hastes com solicitação axial

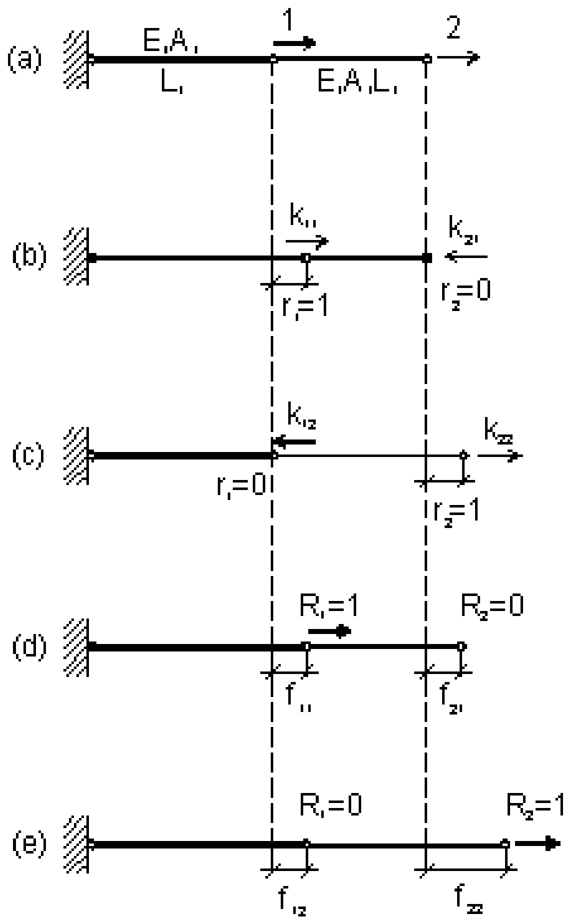


Fig II.3 –Estrutura composta de 2 hastes com solicitação axial:
(a) - Sistema de coordenadas globais (1 e 2);
(b) e (c) – Coeficientes de rigidez;
(d) e (e) – Coeficientes de flexibilidade.

II.4.1.1 – Matriz de Flexibilidade

Da resistência dos materiais, obtém-se as relações da haste com solicitação normal:

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon \\ \sigma = \dfrac{F}{A} \\ \varepsilon = \dfrac{u}{L} \end{cases} \Rightarrow F = \left(\frac{EA}{L}\right)\cdot u \Rightarrow u = \left(\frac{L}{EA}\right)\cdot F$$

A matriz de flexibilidade da estrutura pode então ser montada a partir do conceito de seus coeficientes:

f_{11} - é o deslocamento na coordenada 1 provocado pela aplicação de uma força unitária também na coordenada 1:

$$\begin{cases} R_1 = 1 \\ R_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f_{11} = u = \left(\frac{L_1}{E_1A_1}\right)\cdot 1 = \frac{L_1}{E_1A_1}$$

f_{21} - é o deslocamento na coordenada 2 provocado pela aplicação de uma força unitária na coordenada 1:

$$\begin{cases} R_1 = 1 \\ R_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f_{21} = f_{11}$$

f_{12} - é o deslocamento na coordenada 1 provocado pela aplicação de uma força unitária na coordenada 2:

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f_{12} = u = \left(\frac{L_1}{E_1A_1}\right)\cdot 1 = \frac{L_1}{E_1A_1}$$

f_{22} - é o deslocamento na coordenada 2 provocado pela aplicação de uma força unitária também na coordenada 2:

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f_{22} = u = \left(\frac{L_1}{E_1A_1}\right)\cdot 1 + \left(\frac{L_2}{E_2A_2}\right)\cdot 1 = \frac{L_1}{E_1A_1} + \frac{L_2}{E_2A_2}$$

Logo, obtém-se:

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_1}{E_1A_1} & \dfrac{L_1}{E_1A_1} \\ \dfrac{L_1}{E_1A_1} & \left(\dfrac{L_1}{E_1A_1} + \dfrac{L_2}{E_2A_2}\right) \end{bmatrix}$$

II.4.1.2 – Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez pode ser obtida pela simples inversão da matriz flexibilidade, obtendo-se:

$$\det(F) = \frac{L_1}{E_1A_1}\left(\frac{L_1}{E_1A_1} + \frac{L_2}{E_2A_2}\right) - \left(\frac{L_1}{E_1A_1}\right)^2 = \frac{L_1L_2}{E_1E_2A_1A_2}$$

$$[K] = [F]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \dfrac{L_1}{E_1A_1} & -\dfrac{L_1}{E_1A_1} \\ -\dfrac{L_1}{E_1A_1} & \left(\dfrac{L_1}{E_1A_1} + \dfrac{L_2}{E_2A_2}\right) \end{bmatrix}^t}{\det(F)} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{E_1A_1}{L_1} + \dfrac{E_2A_2}{L_2}\right) & -\dfrac{E_2A_2}{L_2} \\ -\dfrac{E_2A_2}{L_2} & \dfrac{E_2A_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez pode ainda ser obtida através da conceituação de seus coeficientes, e das relações existentes na haste submetida à carregamentos axiais.

k_{11} - é a força na coordenada 1 decorrente da imposição de um deslocamento unitário também na coordenada 1, mantendo-se as demais coordenadas restringidas.

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_{11} = F = \left(\frac{E_1 A_1}{L_1}\right) + \left(\frac{E_2 A_2}{L_2}\right)$$

k_{21} - é a força na coordenada 2 decorrente da imposição de um deslocamento unitário na coordenada 1, mantendo-se as demais coordenadas restringidas.

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_{21} = -\left(\frac{E_2 A_2}{L_2}\right)$$

k_{12} - é a força na coordenada 1 decorrente da imposição de um deslocamento unitário na coordenada 2, mantendo-se as demais coordenadas restringidas.

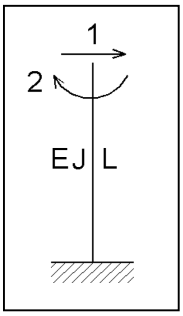
$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow k_{12} = -\left(\frac{E_2 A_2}{L_2}\right)$$

k_{22} - é a força na coordenada 2 decorrente da imposição de um deslocamento unitário na coordenada 2, mantendo-se as demais coordenadas restringidas.

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow k_{12} = \left(\frac{E_2 A_2}{L_2}\right)$$

Obtendo-se por fim a mesma matriz de rigidez:

$$[K] = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{E_1 A_1}{L_1} + \dfrac{E_2 A_2}{L_2}\right) & -\dfrac{E_2 A_2}{L_2} \\ -\dfrac{E_2 A_2}{L_2} & \dfrac{E_2 A_2}{L_2} \end{bmatrix}$$



II.4.2 – Exemplo da estrutura engastada e livre

II.4.2.1 – Revisão do Princípio dos Trabalhos Virtuais

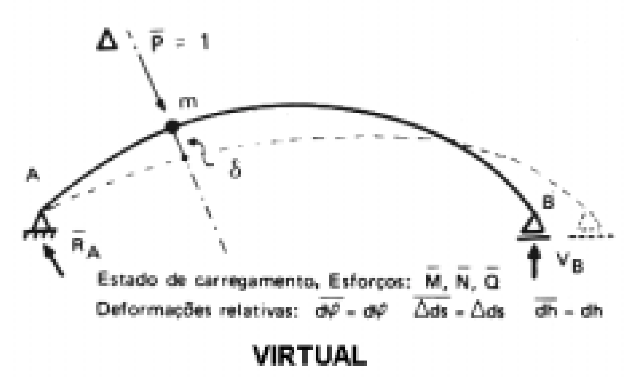
P.T.V.$\Rightarrow$ "O trabalho virtual das forças externas é igual ao trabalho virtual das forças internas, para todos os deslocamentos virtuais arbitrários impostos."

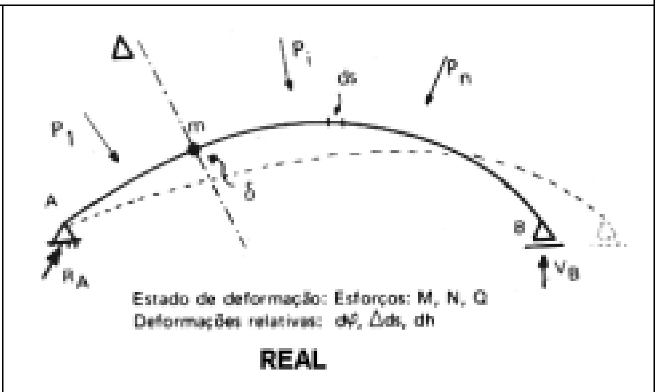
$$W_{ext} = \overline{P} \cdot \delta\,, \qquad W_{int} = \int_L \overline{M} \cdot d\varphi\,,$$

Pela resistência dos materiais, tem-se que $d\varphi = \dfrac{M}{EJ} ds$. Logo:

$$W_{ext} = W_{int} \;\Rightarrow\; \overline{P} \cdot \delta = \int_L \overline{M} \cdot \frac{M}{EJ} \cdot ds$$

(expressão instituída por Mohr para estruturas submetidas à flexão somente)





$\overline{P} \equiv$ carga externa virtual $\overline{M} \equiv$ esforço de momento interno (virtual)	$\delta \equiv$ deslocamento real (a calcular) $d\varphi \equiv$ deslocamento angular conhecido (real)

Carregamento e esforços fictícios estaticamente compatíveis

$$\Rightarrow \boxed{\overline{P} = 1} \times \boxed{\delta} = \boxed{\text{Esforços}} \times \boxed{\text{Deformações}}$$

expressas em termos dos esforços reais

Deslocamento a calcular e deformação real cinematica e elasticamente compatíveis

II.4.2.2 – Matriz de Flexibilidade

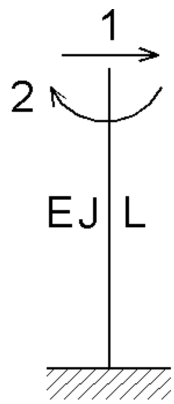
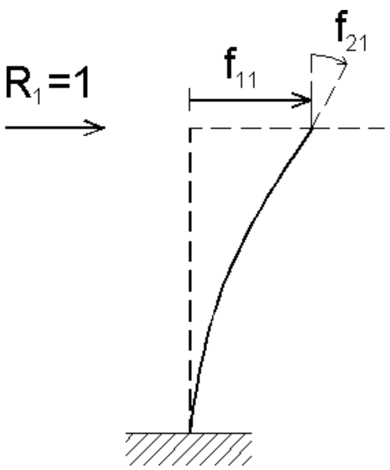
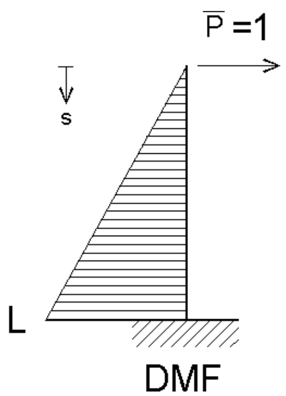


Fig. II.4 – Viga engastada e livre com duas coordenadas



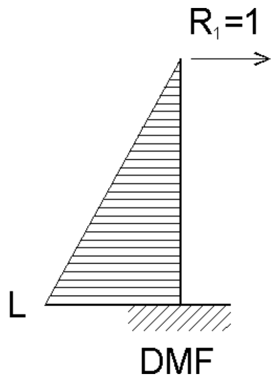
f_{11} = desloc. na coordenada 1 devido a uma carga unitária também na coordenada 1;

O coeficiente f_{11} pode ser então obtido pelo P.T.V. como sendo o deslocamento (real) da extremidade da viga segundo a coordenada 1 decorrente da introdução de uma força unitária (real) segundo a coordenada 1. A partir de uma força virtual unitária aplicada no nó da extremidade, obtém-se o seguinte estado de carregamento (virtual):



$$\Rightarrow \quad \overline{M}(s) = s \qquad , s \text{ de } 0 \text{ até } L$$

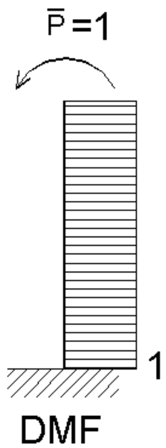
Já o estado de deformação (real) fornece os esforços decorrentes da aplicação do conjunto de ações externas (reais). Por Hipótese, as ações externas para obtenção de f_{11} são: $\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 1 \end{cases}$



$$\Rightarrow \quad M(s) = s \qquad , \text{s de 0 até L}$$

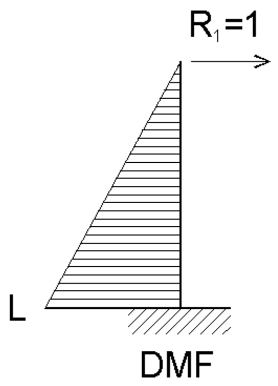
$$\Rightarrow 1 \cdot \delta = \int_0^L s \cdot \frac{s}{EJ} ds = \left[\frac{s^3}{3EJ} \right]_0^L = -\frac{L^3}{3EJ}$$

De forma análoga, o coeficiente f_{21} pode ser obtido pelo P.T.V. como sendo o deslocamento (real) da extremidade da viga segundo a coordenada 2 decorrente da introdução de uma força unitária (real) segundo a coordenada 1. A partir de uma força virtual (também unitária) aplicada no nó da extremidade segundo a coordenada 2, obtém-se o seguinte estado de carregamento (virtual):



$$\Rightarrow \quad \overline{M}(s) = 1 \qquad , \text{s de 0 até L}$$

O estado de deformação relativo ao coeficiente f_{21} é obtido pelas aplicação das ações externas (reais) $\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 1 \end{cases}$, relacionando o deslocamento (que se quer conhecer) do topo da viga segundo a coordenada 2 às deformações correspondentes ao longo de toda estrutura (obtíveis pelo DMF e Res. Mat.):

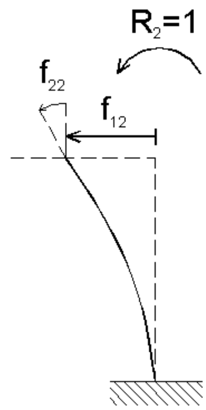


$$\Rightarrow \quad M(s) = s \qquad , s \text{ de } 0 \text{ até } L$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \delta = \int_0^L 1 \cdot \frac{(-s)}{EJ} ds = \left[\frac{-s^2}{2EJ} \right]_0^L = -\frac{L^2}{2EJ}$$

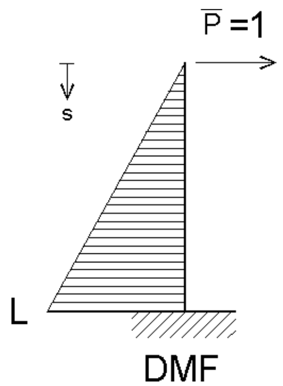
Da mesma forma, para os deslocamentos f_{12} e f_{22} obtém-se:

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

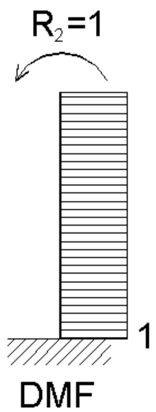


Desta forma, pode-se calcular os deslocamentos pelo P.T.V.:

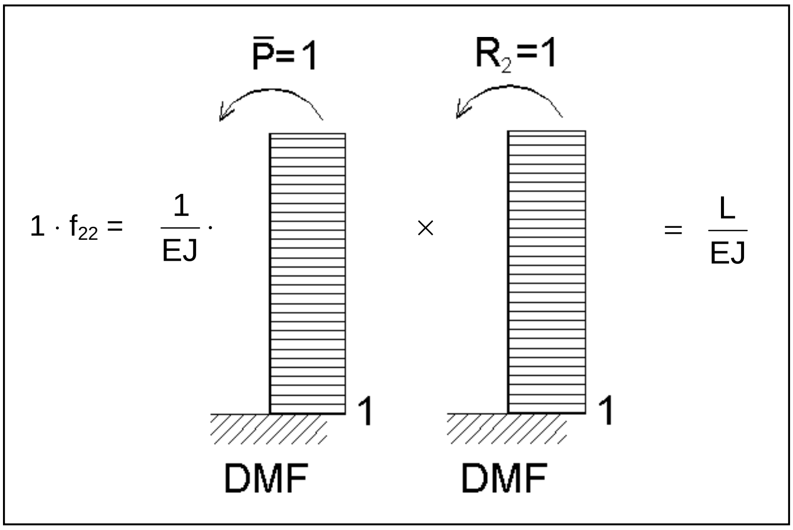
$1 \cdot f_{12} = \dfrac{1}{EJ} \cdot$



$\times$



$= -\dfrac{L^2}{2EJ}$



As integrais podem ser obtidas através da tabela II apresentada no livro "Curso de Análise Estrutural" de José Carlos Susskind, vol. 2, 1980:

	$\bar M$	$\bar M_B$	$\bar M_A$ $\bar M_B$	par. 2º grau $\bar M_m$	par. 2º grau $\bar M_B$ tang. horiz.	par. 2º grau $\bar M_B$ tang. horiz.	$\bar M$ αl βl
M	$l' M\bar M$	$\frac{1}{2} l' M\bar M_B$	$\frac{1}{2} l' M(\bar M_A + \bar M_B)$	$\frac{2}{3} l' M\bar M_m$	$\frac{2}{3} l' M\bar M_B$	$\frac{1}{3} l' M\bar M_B$	$\frac{1}{2} l' M\bar M$
M_B	$\frac{1}{2} l' M_B\bar M$	$\frac{1}{3} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{6} l' M_B(\bar M_A+2\bar M_B)$	$\frac{1}{3} l' M_B\bar M_m$	$\frac{5}{12} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{4} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{6} l'(1+\alpha) M_B\bar M$
M_A	$\frac{1}{2} l' M_A\bar M$	$\frac{1}{6} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{6} l' M_A(2\bar M_A+\bar M_B)$	$\frac{1}{3} l' M_A\bar M_m$	$\frac{1}{4} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{12} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{6} l'(1+\beta) M_A\bar M$
M_A M_B	$\frac{1}{2} l'(M_A+M_B)\bar M$	$\frac{1}{6} l'(M_A+2M_B)\bar M_B$	$\frac{1}{6} l'[\bar M_A(2M_A+M_B)+\bar M_B(2M_B+M_A)]$	$\frac{1}{3} l'(M_A+M_B)\bar M_m$	$\frac{1}{12} l'(3M_A+5M_B)\bar M_B$	$\frac{1}{12} l'(M_A+3M_B)\bar M_B$	$\frac{1}{6} l'\bar M[M_A(1+\beta)+M_B(1+\alpha)]$
par. 2º grau M_m	$\frac{2}{3} l' M_m\bar M$	$\frac{1}{3} l' M_m\bar M_B$	$\frac{1}{3} l' M_m(\bar M_A+\bar M_B)$	$\frac{8}{15} l' M_m\bar M_m$	$\frac{7}{15} l' M_m\bar M_B$	$\frac{1}{5} l' M_m\bar M_B$	$\frac{1}{3} l'(1+\alpha\beta) M_m\bar M$
par. 2º grau M_B tang. horiz.	$\frac{2}{3} l' M_B\bar M$	$\frac{5}{12} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{12} l' M_B(3\bar M_A+5\bar M_B)$	$\frac{7}{15} l' M_B\bar M_m$	$\frac{8}{15} l' M_B\bar M_B$	$\frac{3}{10} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{12} l\,(5-\beta-\beta^2)\times M_B\bar M$
M_A par. 2º grau tang. horiz.	$\frac{2}{3} l' M_A\bar M$	$\frac{1}{4} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{12} l' M_A(5\bar M_A+3\bar M_B)$	$\frac{7}{15} l' M_A\bar M_m$	$\frac{11}{30} l' M_A\bar M_B$	$\frac{2}{15} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{12} l'(5-\alpha-\alpha^2)\times M_A\bar M$
par. 2º grau M_B tang. horiz.	$\frac{1}{3} l' M_B\bar M$	$\frac{1}{4} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{12} l' M_B(\bar M_A+3\bar M_B)$	$\frac{1}{5} l' M_B\bar M_m$	$\frac{3}{10} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{5} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{12} l'(1+\alpha+\alpha^2)\times M_B\bar M$
M_A par. 2º grau tang. horiz.	$\frac{1}{3} l' M_A\bar M$	$\frac{1}{12} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{12} l' M_A(3\bar M_A+\bar M_B)$	$\frac{1}{5} l' M_A\bar M_m$	$\frac{2}{15} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{30} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{12} l'(1+\beta+\beta^2)\times M_A\bar M$
M αl βl	$\frac{1}{2} l' M\bar M$	$\frac{1}{6} l'(1+\alpha)\bar M_B M$	$\frac{1}{6} l' M[(1+\beta)\bar M_A+(1+\alpha)\bar M_B]$	$\frac{1}{3} l'(1+\alpha\beta) M\bar M_m$	$\frac{1}{12} l'(5-\beta-\beta^2)\times M\bar M_B$	$\frac{1}{12} l'(1+\alpha+\alpha^2)\times M\bar M_B$	$\frac{1}{3} l' M\bar M$

TABELA II – Cálculo de $J_C/J \int M\bar M ds$**, para barras retas de comprimento** l **e inércia** J**.** $\left(l' = l\,\frac{J_C}{J} \right)$

A matriz de Flexibilidade da estrutura em estudo é portanto:

$$\Rightarrow [F] = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EJ} & -\frac{L^2}{2EJ} \\ -\frac{L^2}{2EJ} & \frac{L}{EJ} \end{bmatrix} = \frac{L}{6EJ} \cdot \begin{bmatrix} 2L^2 & -3L \\ -3L & 6 \end{bmatrix}$$

As unidades dos coeficientes da matriz de flexibilidade são:

$$\Rightarrow \text{un}\,[F] = \begin{bmatrix} \frac{m}{kN} & \frac{m}{m \cdot kN} \\ \frac{rad}{kN} & \frac{rad}{m \cdot kN} \end{bmatrix}$$

II.4.2.3 – Matriz de Rigidez

A matriz de Rigidez pode ser obtida pela inversão da matriz de flexibilidade:

$$\Rightarrow \det[F] = \frac{L^4}{3E^2J^2} - \frac{L^4}{4E^2J^2} = \frac{L^4}{12\,E^2J^2}$$

$$\Rightarrow \text{cof}[F] = \begin{bmatrix} \frac{L}{EJ} & \frac{L^2}{2EJ} \\ \frac{L^2}{2EJ} & \frac{L^3}{3EJ} \end{bmatrix} \Rightarrow [K] = \frac{1}{\det[F]} \begin{bmatrix} \frac{L}{EJ} & \frac{L^2}{2EJ} \\ \frac{L^2}{2EJ} & \frac{L^3}{3EJ} \end{bmatrix}^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} \frac{12\ EJ}{L^3} & \frac{6\ EJ}{L^2} \\ \frac{6\ EJ}{L^2} & \frac{4\ EJ}{L} \end{bmatrix} \Rightarrow [K] = \frac{EJ}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

II.4.2.4 – Aplicações

- A partir de ações externas conhecidas $\{P\} = \begin{Bmatrix} 2\,kN \\ 3\,m \cdot kN \end{Bmatrix}$, quais os deslocamentos na extremidade da viga?

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EJ} & -\frac{L^2}{2EJ} \\ -\frac{L^2}{2EJ} & \frac{L}{EJ} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2L^3}{3EJ} - \frac{3L^2}{2EJ} \\ -\frac{L^2}{EJ} + \frac{L}{EJ} \end{Bmatrix}$$

- A partir de deslocamentos impostos $\{r\} = \begin{Bmatrix} 0{,}01 \cdot L\ m \\ 0{,}002\ rad \end{Bmatrix}$, quais os esforços na extremidade da viga?

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12\ EJ}{L^3} & \frac{6\ EJ}{L^2} \\ \frac{6\ EJ}{L^2} & \frac{4\ EJ}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0{,}01L \\ 0{,}002 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}108\ EJ/L^2 \\ 0{,}052\ EJ/L \end{Bmatrix}$$

II.5 – Teoremas da reciprocidade de Betti-Maxwell

Teorema de Betti

“O trabalho produzido por um sistema de forças em equilíbrio quando se desloca devido às deformações produzidas por um outro sistema de forças em equilíbrio, é igual ao trabalho produzido por este segundo sistema de forças quando se desloca devido às deformações produzidas pelo primeiro sistema”.

Teorema de Maxwell

- “O deslocamento segundo **i**, causado por $\mathbf{R_j}$=1, é igual ao deslocamento segundo **j**, causado por $\mathbf{R_i}$=1” ($\mathbf{f_{ij}=f_{ji}}$).
- Implicando em: “A grandeza mecânica a aplicar segundo **i**, para manter a configuração deformada com $\mathbf{r_j}$=1, é igual à grandeza mecânica aplicada $\mathbf{R_j}$, para manter a configuração deformada com $\mathbf{r_i}$=1” ($\mathbf{k_{ij}=k_{ji}}$).

⇒ As matrizes de Rigidez e Flexibilidade são sempre simétricas.