

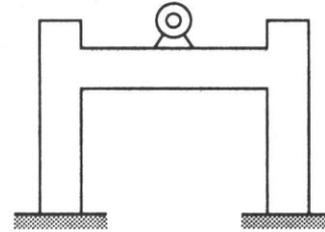
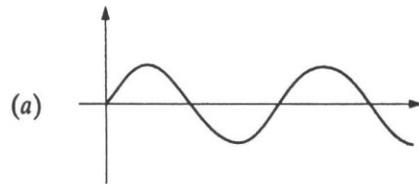
Instituto Militar de Engenharia
Engenharia de Fortificação e Construção

Dinâmica das Estruturas

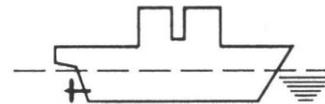
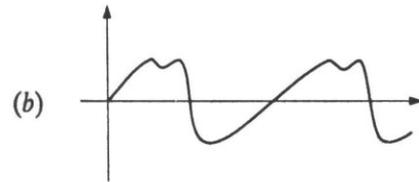
Aula #1

Carregamentos Dinâmicos X Tipos de Estruturas

Periodic

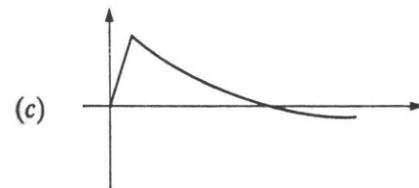


Unbalanced rotating machine in building

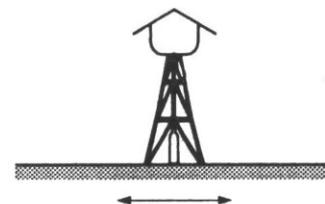


Rotating propeller at stern of ship

Nonperiodic



Bomb blast pressure on building



Earthquake on water tank

Loading histories

Typical examples

(Clough e Penzien, 1993)

Movimento Oscilatório

Uma partícula está oscilando quando se move periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio:

- movimento de um pêndulo é oscilatório;
- um peso amarrado na extremidade de uma mola esticada oscila ao ser abandonado;
- os átomos num sólido estão em movimento oscilatório (ou vibracional);
- os elétrons numa antena executam rápidas oscilações.

Movimento Harmônico Simples (MHS)

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \alpha)$$

x é o deslocamento em relação à origem do sistema de coordenadas;

A é a amplitude ou deslocamento máximo do MHS;

$(\omega t + \alpha)$ é a fase do movimento;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência angular do movimento;

α é a fase inicial;

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Gráficos do deslocamento (x), velocidade (v) e aceleração (a) em função do tempo no MHS:

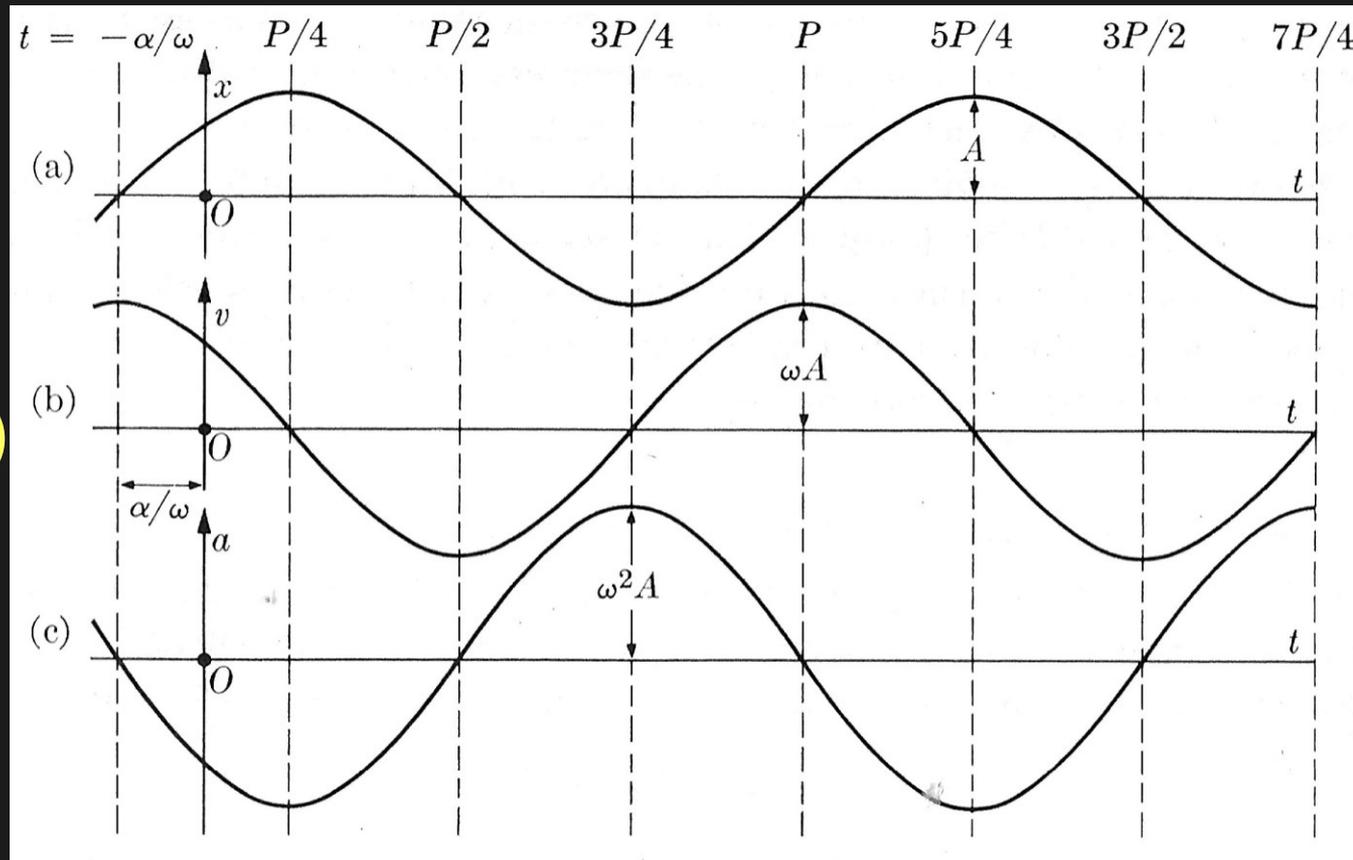
$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

A velocidade da partícula em MHS é:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$$

A aceleração fica igual a:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \\ = -\omega^2 x$$



No MHS a aceleração é sempre proporcional e de sentido oposto ao deslocamento

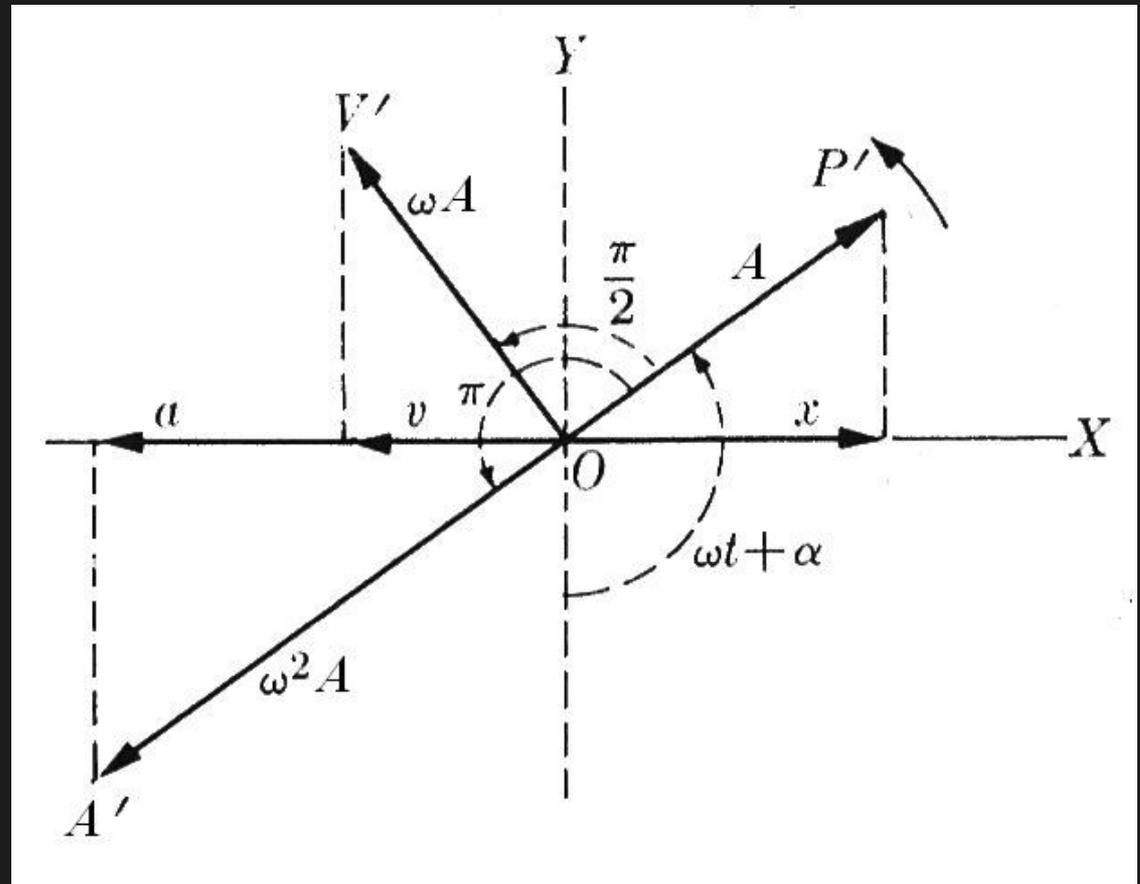
Movimento Harmônico Simples (MHS)

Representação do deslocamento (x), velocidade (v) e aceleração (a) no MHS pela projeção de vetores girantes defasados no eixo das abscissas:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$v = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$



Movimento Harmônico Simples (MHS)

A partir da equação da aceleração no MHS, pode-se obter a expressão da força que deve agir sobre uma partícula de massa m para que esta oscile em MHS:

$$F = m a = -m \omega^2 x = -k x$$

- ⇒ No MHS a força é proporcional e de sentido contrário ao desloc.;
- ⇒ A força sempre aponta para a origem O (ponto de equilíbrio);
- ⇒ A força F é atrativa e o centro de atração é o ponto O .

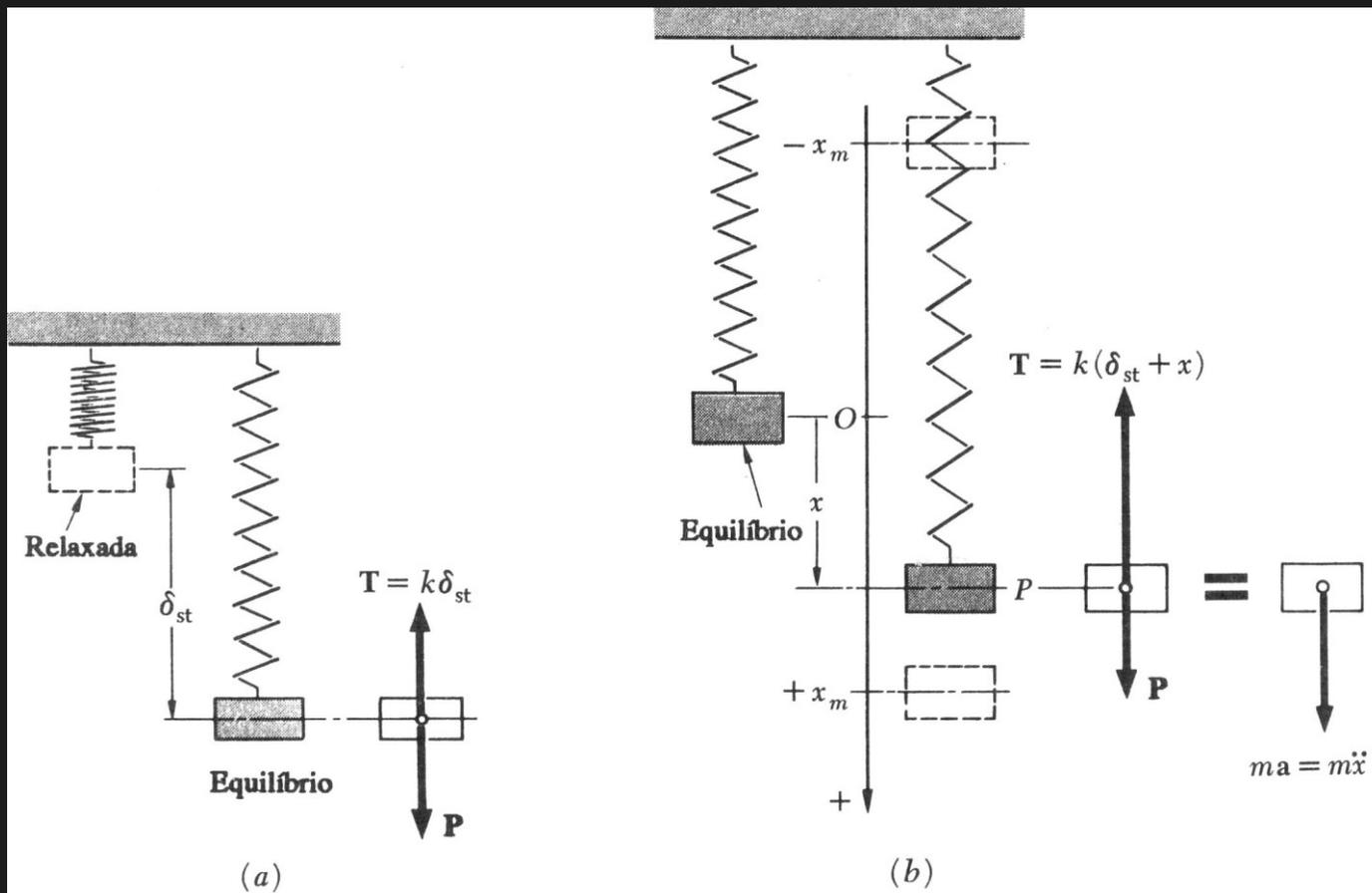
*Força atrativa proporcional
ao deslocamento*



MHS

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Em sistemas mecânicos elásticos (uma mola, por exemplo) a força de restituição que surge ao se deformá-lo produz movimento harmônico simples.



Equação do movimento:

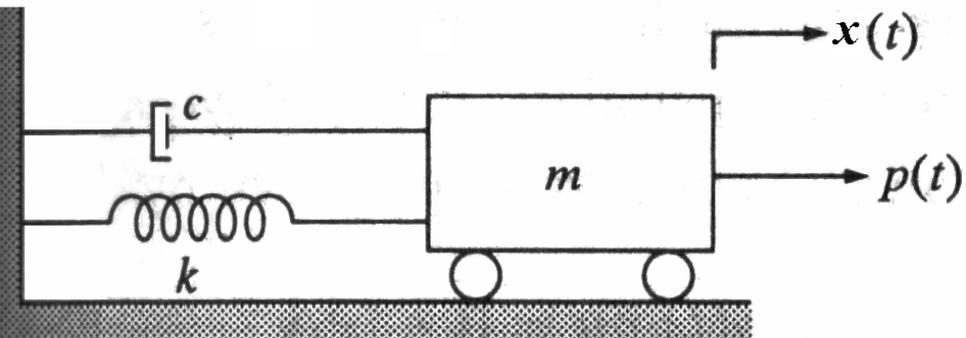
$$\begin{cases} F = ma \\ P - T = -kx \end{cases}$$

$$\sum F_y = m \cdot a \therefore$$

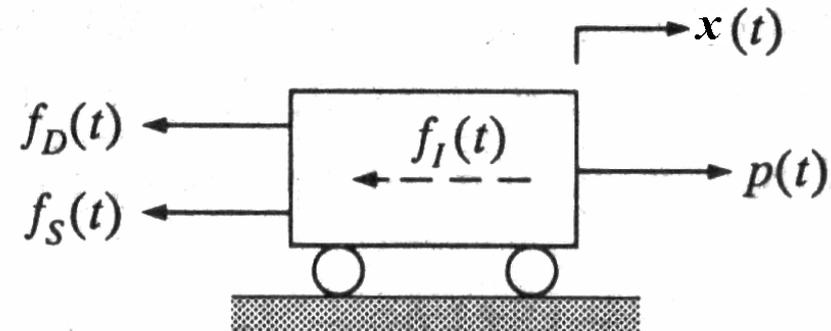
$$m\ddot{x} + kx = 0$$

⇒ A equação do movimento expressa em relação à posição de equilíbrio estático não é afetada por forças gravitacionais.

Sistema Dinâmico Básico



(a)



(b)

- Grandezas físicas envolvidas:

MASSA (m)

PROPRIEDADES ELÁSTICAS (k)

AMORTECIMENTO (c)

FORÇA EXTERNA DINÂMICA ($p(t)$)

- Equação de equilíbrio:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$$

FORÇAS DE INÉRCIA:

$$f_I(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$$

FORÇAS DE AMORTECIMENTO:

$$f_D(t) = c \cdot \dot{x}(t)$$

(Viscoso)

FORÇAS ELÁSTICAS:

$$f_S(t) = k \cdot x(t)$$

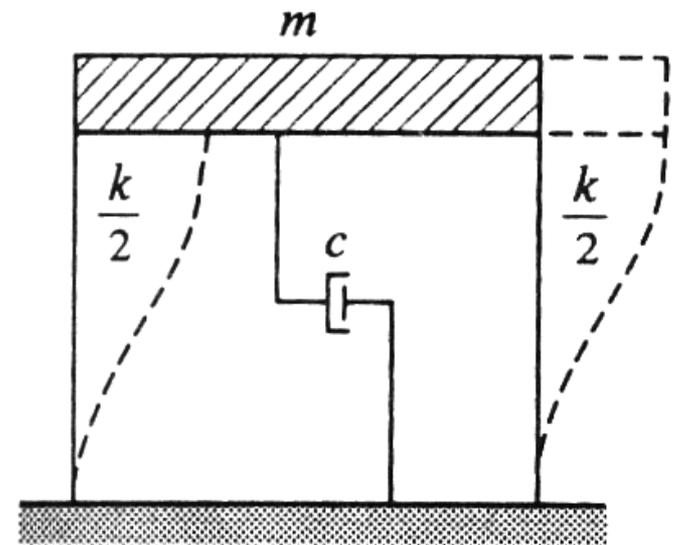
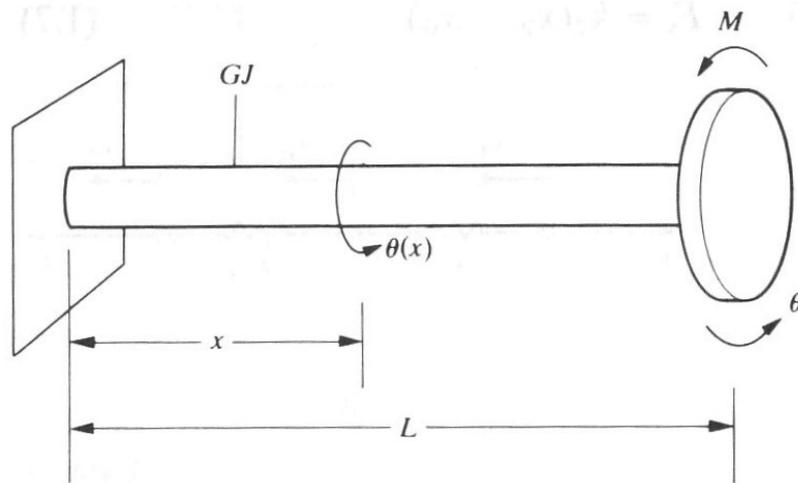
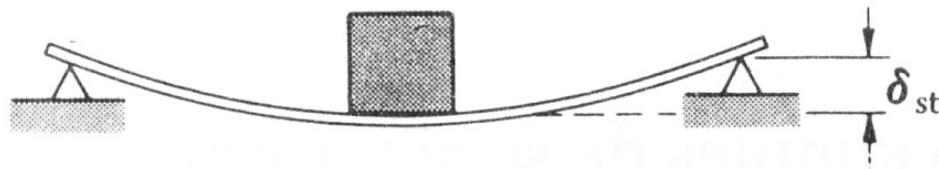
$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = p(t)$$

- Princípio de d'Alembert:

“A massa m desenvolve uma força de inércia proporcional a sua aceleração e oposta a ela.”

Sistema Dinâmico Básico

Outros sistemas de 1 grau de liberdade (GL):



Vibração Livre Não-amortecida

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = 0$$

VIBRAÇÕES LIVRES: $p(t) = 0$

VIBRAÇÕES NÃO-AMORTECIDAS: $c \rightarrow 0$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0}$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0 \quad \text{onde } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot e^{st}$$

Vibração Livre Não-amortecida

Substituindo na equação anterior:

$$s^2 + \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow s = \pm i\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = A_1 \cdot e^{i\omega t} + A_2 \cdot e^{-i\omega t}$$

Onde A_1 e A_2 são constantes de integração, dependendo dos valores iniciais de deslocamento $x(0)$ e velocidade $\dot{x}(0)$.

$$\Rightarrow x(t) = A_1 \cdot e^{i\omega t} + A_2 \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow x(t) = A_1 \cdot (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + A_2 \cdot (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \cos \omega t (A_1 + A_2) + \operatorname{sen} \omega t \cdot i (A_1 - A_2)$$

$$\Rightarrow x(t) = \cos \omega t \cdot (A \cdot \cos \phi) + \operatorname{sen} \omega t \cdot (A \cdot \operatorname{sen} \phi)$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot (\cos \omega t \cdot \cos \phi + \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \phi)$$

$$\boxed{\Rightarrow x(t) = A \cdot \cos(\omega t - \phi)}$$

Vibração Livre Não-amortecida

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi)$$

$$x_h(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

AMPLITUDE DO MOVIMENTO: $A = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right]^2}$

ÂNGULO FASE: $\phi = \arctg\left[\frac{-\dot{x}(0)}{\omega \cdot x(0)}\right]$

O sistema realiza oscilação harmônica simples (OHS ou MHS) com frequência $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

O termo ω é conhecido como frequência natural, pois, quando colocado em movimento através de condições iniciais não-nulas de deslocamento e/ou velocidade, livre de carregamentos e sem amortecimento, sempre oscilará com a mesma frequência ω .

Vibração Livre Não-amortecida

