III – INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DA RIGIDEZ E DA FLEXIBILIDADE

III.1 – Matriz de Compatibilidade ou Incidência Estática

Matriz de Compatibilidade (ou Incidência) Estática é aquela que permite exprimir os esforços {S} (representados segundo as *m* coordenadas locais) em função das ações externas {R} (dispostas segundo as *n* coordenadas globais da estrutura):

$$\left\{ S \right\}_{m} = \left[B \right]_{m,n} \cdot \left\{ R \right\}_{n}$$

A matriz [B] pode ser formulada diretamente, mediante simples condições de equilíbrio, se a estrutura for estaticamente determinada (isostática). Se houver indeterminação (hiperestaticidade), só se chegará à matriz [B] resolvendo o problema hiperestático, conforme será visto posteriormente.

Exemplo: Obter a Matriz de Compatibilidade Estática da estrutura abaixo:



Aplicando-se uma força externa segundo a coordenada global 1, ou seja, fazendo-se

1

Por fim, pode-se observar que as colunas da matriz [B] constituem os vetores de esforços locais, ao se impor forças externas unitárias segundo as coordenadas globais.

III.2 – Matriz de Compatibilidade ou Incidência Cinemática (Matriz Topológica)

Definição:



Não tem grau de liberdade (deslocamento nodal) livre quando submetida a seus próprios vínculos e a deslocamentos prescritos (nulos) segundo suas coordenadas globais.

Exemplo:

Quantas coordenadas são necessárias na estrutura abaixo para que a mesma seja cinematicamente determinada (no plano)?



conhecimentos é necessário para que se determine os deslocamentos em toda a estrutura (todos os elementos).

Um sistema estrutural cinematicamente determinado através do estabelecimento de um número de graus de liberdade igual ao seu grau de indeterminação cinemática, pode relacionar diretamente os deslocamentos {s} das extremidades dos elementos (segundo as *m* coordenadas locais) em termos deslocamentos nodais da estrutura {r} (expressos segundo as *n* coordenadas globais):

$$\left\{\!s\right\}_{\!m}=\left[A\right]_{\!m,n}\cdot\left\{\!r\right\}_{\!n}$$

onde [A] é definida como a Matriz de Compatibilidade Cinemática.

Exemplo: Obter a Matriz de Compatibilidade Cinemática da estrutura abaixo:



Pode-se observar que as colunas da matriz [A] constituem os vetores de deslocamentos locais, ao se impor deslocamentos unitários segundo as coordenadas globais.

III.3 – Matriz de Rigidez da Estrutura Integrada

Estrutura Integrada (montada)



Coordenadas Globais:



Relações Ações / Deslocamentos:

$$\{\mathbf{R}\} = [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{r}\}$$
$$\{\mathbf{r}\} = [\mathbf{F}] \cdot \{\mathbf{R}\}$$

onde {R} é o vetor das ações externas;

 $\{r\}$ é o vetor dos deslocamentos da estrutura segundo as coord. gobais;

[K] é a matriz de rigidez da estrutura integrada (montada);

[F] é a matriz de flexibilidade da estrutura integrada (montada).

Estrutura Desmembrada (desmontada):

Coordenadas Locais da estrutura desmembrada segundo os elementos de viga plana relativos à matriz de flexibilidade (método da flexibilidade):



Coordenadas Locais da estrutura desmembrada segundo os elementos de viga plana relativos à matriz de rigidez (método da rigidez):



Relações Ações / Deslocamentos:

$$\{S\} = [k_{\perp}] \cdot \{S\}$$
$$\{s\} = [f_{\perp}] \cdot \{S\}$$

onde $\{S\}_{m\times 1}$ é o vetor dos esforços locais

 ${s}_{m\times 1}$ é o vetor dos deslocamentos dos elementos (segundo as coord. locais);

 $[k_{L}]_{m \times m}$ é a matriz de rigidez da estrutura desmembrada;

 $[f_{L}]_{m_{xm}}$ é a matriz de flexibilidade da estrutura desmembrada;

m é o número de coordenadas locais.

Para a satisfação de tais equações, as matrizes da estrutura desmembrada $([k_L][f_L])$ devem ser formuladas diretamente, colocando-se em banda as matrizes de flexibilidade (ou de rigidez) dos elementos considerados isoladamente, as quais funcionam como sub-matrizes do conjunto.

Desta forma, a Matriz de Rigidez da estrutura desmembrada ficaria:

$$\begin{bmatrix} k_{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1}^{e} \end{bmatrix} \vdots 0 \\ \vdots \\ 0 \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix}$$

Onde a estrutura desmembrada poderia ter seus GLs locais representados por:



Sendo a Matriz de Rigidez do elemento de viga plana:

$$\left[k^{e} \right] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^{3}} & \frac{6EJ}{L^{2}} & -\frac{12EJ}{L^{3}} & \frac{6EJ}{L^{2}} \\ \frac{6EJ}{L^{2}} & \frac{4EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^{2}} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{12EJ}{L^{3}} & -\frac{6EJ}{L^{2}} & \frac{12EJ}{L^{3}} & -\frac{6EJ}{L^{2}} \\ \frac{6EJ}{L^{2}} & \frac{2EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^{2}} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$$

De forma análoga, a matriz de flexibilidade da estrutura desmembrada seria:

$$\begin{bmatrix} f_{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1}^{e} \end{bmatrix} \stackrel{:}{:} 0 \\ \cdots \quad \vdots \quad \cdots \\ 0 \quad \vdots \quad \begin{bmatrix} f_{2}^{e} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \vdots & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & f_{33} & f_{34} \\ 0 & 0 & \vdots & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}$$

Onde a estrutura desmembrada poderia ter seus GLs locais representados por:



Sendo a Matriz de Flexibilidade do elemento de viga plana:

$$\begin{bmatrix} f^{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^{3}}{3EJ} & \frac{L^{2}}{2EJ} \\ \frac{L^{2}}{2EJ} & \frac{L}{EJ} \end{bmatrix}$$

Compreende-se portanto que, se as matrizes de flexibilidade ou de rigidez dos elementos forem tabeladas é fácil compor a matriz total $[f_L]$ ou $[k_L]$, porque cada elemento não interfere nos outros.

O mesmo não se passa com a matriz [F] ou [K] para a estrutura integrada, porque os efeitos são acoplados, ou seja, os graus de liberdade globais referem-se geralmente à mais de um grau de liberdade local. Obter essas matrizes é praticamente quase resolver a estrutura. Até agora, foram analisados casos estruturais simples em que essas matrizes podiam ser obtidas diretamente, sem o emprego do desmembramento da estrutura.

A forma geral de determinação das matrizes de rigidez e flexibilidade da estrutura integrada pode ser deduzida a partir da obtenção da expressão da energia de deformação:

$$U = \sum \frac{1}{2} S_i \cdot s_i$$

Colocando-se sob forma matricial, obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \{S\}^{T} \cdot \{s\} = \frac{1}{2} \{s\}^{T} \cdot \{S\}$$

Sendo ${S} = [k_{L}] \cdot {s} e {s} = [A] \cdot {r}$, e substituindo-se na expressão anterior obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \{s\}^{\mathsf{T}} \cdot [k_{\perp}] \cdot \{s\} = \frac{1}{2} \{r\}^{\mathsf{T}} \cdot [\mathsf{A}]^{\mathsf{T}} \cdot [\mathsf{A}] \cdot \{r\}$$
(1)

Entretanto, a energia pode também ser representada em função da matriz de rigidez da estrutura completa (integrada):

$$\mathsf{U} = \frac{1}{2} \{ \mathsf{r} \}^{\mathsf{T}} \cdot \{ \mathsf{R} \}$$

Sendo $\{R\} = [R] \cdot \{r\}$ e substituindo-se na expressão anterior obtém-se:

$$\mathsf{U} = \frac{1}{2} \{ \mathsf{r} \}^{\mathsf{T}} \cdot [\mathsf{K}] \cdot \{ \mathsf{r} \}$$

Igualando-se à expressão da energia encontrada anteriormente (equação 1), obtém-se:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \{\mathbf{r}\}^{\mathsf{T}} \cdot [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{r}\} = \frac{1}{2} \{\mathbf{r}\}^{\mathsf{T}} \cdot [\mathbf{A}]^{\mathsf{T}} \cdot [\mathbf{k}_{\perp}] \cdot [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{r}\}$$

Implicando em:

$$[\mathsf{K}] = [\mathsf{A}]^{\mathsf{T}} \cdot [\mathsf{k}_{\mathsf{L}}] \cdot [\mathsf{A}]$$

De maneira análoga, pode-se mostrar que:

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{B}]^{\mathsf{T}} \cdot [\mathbf{f}_{\mathsf{L}}] \cdot [\mathbf{B}]$$

Desta forma, torna-se possível a obtenção das matrizes de rigidez e flexibilidade de estruturas mais complexas, a partir do desmembramento do sistema estrutural.

III.4 – Carregamento Nodal Equivalente

Seja uma estrutura genérica submetida a um carregamento distribuído. Deseja-se saber os esforços existentes em nós discretos do sistema estrutural, decorrentes da aplicação de tal carregamento.

Sabe-se ainda que as reações de fixação no engastamento (apresentadas abaixo) são aquelas que garantem a condição de deslocamentos e rotações nulos nas extremidades de cada elemento:



Portanto, ao se estabelecer um carregamento distribuído numa partição da estrutura (elemento), e simultaneamente se aplicar reações de fixação de engastamento em suas extremidades, o restante do sistema estrutural não sentirá a existência do carregamento distribuído aplicado. Entretanto, localmente, surgirão esforços decorrentes das reações de fixação impostas.



Pode-se entender o carregamento acima como uma superposição da carga distribuída e das cargas nodais aplicadas:



Os esforços locais existentes do carregamento distribuído podem então ser calculados pela superposição de duas situações conhecidas de carregamento:



A segunda parcela, por estarmos no regime elástico linear, pode ser substituída por um carregamento nodal de sentido inverso àqueles das reações de fixação:



Logo, os esforços finais nos elementos podem ser obtidos pelo cálculo da estrutura (global) através da aplicação de uma <u>carregamento nodal equivalente</u> (CNE), obtendo-se a primeira parcela dos esforços, e somando-se à ela (localmente) os esforços gerados pelas reações de fixação:



onde $\{S\}_m$ é o vetor dos esforços locais

 $\{s\}_m$ é o vetor dos deslocamentos dos elementos (segundo as coord. locais);

 $\left[k_{L}\right]_{m \times m}$ é a matriz de rigidez da estrutura desmembrada;

 $\{\overline{S}\}_{m}$ é o vetor dos esforços locais surgidos pela aplicação do CNE;

 $\{S_0\}_m$ é o vetor das reações de fixação no referencial local;

m é o número de coordenadas locais.

III.5 – Apresentação dos Métodos da Rigidez e da Flexibilidade

<u>Exemplo</u>: Buscando-se resolver a viga contínua apresentada abaixo, serão abordados os princípios dos métodos da rigidez e flexibilidade:



Coordenadas Globais:



Coordenadas Locais:



O carregamento contínuo pode ser discretizado segundo um <u>carregamento nodal</u> <u>equivalente</u> (CNE), conforme ilustra a figura:



Carregamento aplicado nos nós da estrutura

Método da Flexibilidade

Grau de indeterminação estática: 1

Sistema Principal:

Equações de coerência (hiperestático):

$$\begin{array}{c|c} A & B & C \\ \hline & & \uparrow_4 & \hline \end{array}$$

$$\delta_{B}^{vert} = 0 \Longrightarrow \delta_{q} + \delta_{B} \cdot R_{B} = 0$$

Matriz de compatibilidade estática do sistema principal (isostático):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de compatibilidade estática da estrutura completa (com hiperestático):

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & \vdots & -L/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & \vdots & L/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de flexibilidade elementar:

$$\left[f^{e} \right] = \begin{bmatrix} L & -\frac{L}{6EJ} \\ -\frac{L}{6EJ} & \frac{L}{3EJ} \end{bmatrix}$$

Matriz de flexibilidade de estrutura desmembrada:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathsf{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{\mathsf{e}} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2^{\mathsf{e}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Matriz de flexibilidade do SP integrado:

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}_{4\times4} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^{T} \cdot \begin{bmatrix} f_{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7L}{24EJ} & -\frac{L}{12EJ} & \frac{L}{24EJ} & \frac{2L^{2}}{3EJ} \\ -\frac{L}{12EJ} & \frac{L}{6EJ} & -\frac{L}{12EJ} & -\frac{L^{2}}{12EJ} \\ \frac{L}{24EJ} & -\frac{L}{12EJ} & \frac{7L}{24EJ} & -\frac{L^{2}}{3EJ} \\ \frac{2L^{2}}{3EJ} & -\frac{L^{2}}{12EJ} & -\frac{L^{2}}{3EJ} & -\frac{2L^{3}}{3EJ} \end{bmatrix}$$

Método da Rigidez

Grau de indeterminação cinemática: 3



Matriz de compatibilidade cinemática:

[A]=	1	0	0
	0	1	0
	0	1	0
	0	0	1

Matriz de rigidez elementar:

$$\begin{bmatrix} k^{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{L} & \frac{2EJ}{L} \\ \frac{2EJ}{L} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez da estrutura desmembrada:

$$\begin{bmatrix} k_{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{1}^{e} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} k_{2}^{e} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez da estrutura integrada:

$$\left[\overline{\mathsf{K}}\right]_{3\times3} = \left[\mathsf{A}\right]^{\mathsf{T}} \cdot \left[\mathsf{k}_{\mathsf{L}}\right] \cdot \left[\mathsf{A}\right] = \begin{bmatrix} \frac{4\mathsf{EJ}}{\mathsf{L}} & \frac{2\mathsf{EJ}}{\mathsf{L}} & 0\\ \frac{2\mathsf{EJ}}{\mathsf{L}} & \frac{8\mathsf{EJ}}{\mathsf{L}} & \frac{2\mathsf{EJ}}{\mathsf{L}}\\ 0 & \frac{2\mathsf{EJ}}{\mathsf{L}} & \frac{4\mathsf{EJ}}{\mathsf{L}} \end{bmatrix}$$

Método da Flexibilidade

Cálculo dos Hiperestáticos e deslocamentos:

$$\begin{cases} \mathbf{r} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \mathbf{R} \\ \cdots \\ \mathbf{X} \end{cases}$$

Cálculo dos Esforços:

$$\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{S}_0\} + [\overline{\mathbf{B}}] \cdot \{\mathbf{R}\} \\ \cdots \\ \mathbf{X}\}$$

Método da Rigidez

Cálculo dos deslocamentos:

$$\{\mathbf{R}\} = [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{r}\}$$
$$\{\mathbf{s}\} = [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{r}\}$$

Cálculo dos Esforços:

$$\{S\} = \{S_0\} + [k_L] \cdot \{s\} = \{S_0\} + \{\overline{S}\}$$

III.6 – Comparação dos Métodos

Os métodos da flexibilidade e rigidez são idênticos na sua formulação matemática, ambos requerendo o princípio da superposição para obter as equações fundamentais. As semelhanças entre os dois procedimentos, bem como as diferenças podem ser vistas rapidamente quando se comparam em paralelo, como feito anteriormente. As colunas acima mostram todas as etapas principais na resolução de uma estrutura por ambos os métodos.

No método da flexibilidade, a escolha de redundantes hiperestáticos pode ter um efeito significativo na quantidade de trabalho de cálculo requerido. Por exemplo, em vigas contínuas os momentos fletores nos apoios serão escolhidos como hiperestáticos, porque a estrutura liberada consiste numa série de vigas simplesmente apoiadas. Esta estrutura liberada é fácil de analisar tanto para os efeitos das cargas, como para os efeitos dos valores unitários das redundantes. A aplicação de um valor unitário de cada redundante influi unicamente nos vãos adjacentes da viga. Outras escolhas para as redundantes não dão esta vantajosa localização de efeitos - e, pelo contrário, os efeitos de uma redundante unitária podem-se propagar por toda a estrutura. No caso de estruturas que não sejam vigas contínuas, normalmente não é possível localizar os efeitos quando se utiliza o método da flexibilidade.

No método da rigidez nunca existe qualquer questão acerca da escolha da estrutura restringida, visto que só há uma possibilidade. A análise da estrutura restringida usualmente não é difícil, porque todos os efeitos estão localizados. Por exemplo, o efeito de um deslocamento unitário num só está limitado aos membros que chegam a este nó.

Em geral, ambos os métodos de análise são úteis para cálculos manuais. O método de resolução preferido comumente será o que envolve menor número de incógnitas. Para programação computacional, o método da rigidez é normalmente muito mais adequado que o método da flexibilidade. A vantagem do método da rigidez resulta da determinação automática da estrutura restringida e do fato de que todos os efeitos estão localizados. A conveniência de um ou outro método está indicada em termos gerais na Tabela apresentada a seguir. Naturalmente, deve-se admitir que uma vez ou outra serão encontradas exceções à regra geral.

Grau de Indeterminação		Método apropriado	
Estática	Cinemática	Cálculo manual	Cálc. Aux. Computador
Baixo	Baixo	Qualquer	Rigidez
Baixo	Alto	Flexibilidade	Rigidez
Alto	Baixo	Rigidez	Rigidez
Alto	Alto	Nenhum	Rigidez