V – MÉTODO DA FLEXIBILIDADE

V.1 - Aplicação às Estruturas Isostáticas

Roteiro de cálculo:

a. Fixar o sistema de coordenadas globais (de referência);

b. Subdividir a estrutura em elementos, e estabelecer o sistema de coordenadas locais;

c. Formular a matriz de incidência estática $[B]$, tal que $\{S\} = [B] \cdot \{R\}$;

d. Formular a matriz de flexibilidade da estrutura desmembrada, cujas sub-matrizes, referentes aos diversos elementos, se dispõem em banda:

$$[f] = \begin{bmatrix} [f]_I & & & \\ & [f]_{II} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [f]_n \end{bmatrix}$$

e. Compor a matriz de flexibilidade da estrutura integrada:

$$[F] = [B]^t \cdot [f] \cdot [B]$$

f. A partir do carregamento dado, formular o vetor das ações nodais $\{R\}$;

g. Calcular os esforços $\{S\}$, deslocamentos $\{r\}$ e deformações $\{s\}$:

$$\{S\} = [B] \cdot \{R\}; \quad \{r\} = [F] \cdot \{R\} \quad \text{e} \quad \{s\} = [f] \cdot \{S\}$$

V.2 - Aplicação às Estruturas Hiperestáticas:

Neste caso, a matriz de incidência estática $[B]$ não pode ser formulada diretamente a partir das equações de equilíbrio, porque há indeterminação estática na estrutura.

Para tal, transforma-se a estrutura hiperestática, rompendo-se tantos vínculos quantos necessários para se obter um modelo isostático (sistema principal). Neste sistema será sempre possível formular a matriz $[B]$ segundo a isostática.

O sistema principal deverá ser compatibilizado com a estrutura hiperestática original através da aplicação de ações $\{X\}$ nos locais e direções onde houve cortes de vínculos, implicando em deslocamentos finais nulos segundo as mesmas coordenadas.

Às ações $\{X\}$ dá-se o nome de hiperestáticos e às equações complementares que compatibilizam os modelos, dá-se o nome de equações de coerência.

<u>Roteiro de cálculo:</u>

a. Deve-se inicialmente estabelecer o sistema principal (isostático), numerando-se as coordenadas globais a partir de onde se aplicam as ações externas $\{R\}$ e então os hiperestáticos $\{X\}$;

b. Na equação de equilíbrio relativa ao sistema principal podem ser então considerados os seguintes vetores de ações exteriores e deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} R \\ \cdots \\ X \end{Bmatrix} \; ; \; \begin{Bmatrix} r \\ \cdots \\ x \end{Bmatrix}$$

c. Desmembra-se a estrutura em elementos, fixando-se as coordenadas locais;

d. A partir das equações de compatibilidade estática:

$$\{S_0\} = [\overline{B}_0] \cdot \{R\}$$

$$\{S_1\} = [\overline{B}_1] \cdot \{X\}$$

Formula-se a matriz de incidência estática $[\overline{B}]$ relativa ao sistema principal:

$$[\overline{B}] = \left[\, [\overline{B}_0] \vdots [\overline{B}_1] \,\right]$$

Ou ainda:

$$\{S\} = \left[\, [\overline{B}_0] \vdots [\overline{B}_1] \,\right] \cdot \begin{Bmatrix} R \\ X \end{Bmatrix}$$

e. Formulada a matriz de flexibilidade para a estrutura desmembrada, $[f]$, será possível compor a matriz de flexibilidade $[\overline{F}]$, do sistema principal integrado:

$$[\overline{F}] = [\overline{B}]^t \cdot [f] \cdot [\overline{B}] = \left[[\overline{B}_0] \; [\overline{B}_1]\right]^t \cdot [f] \cdot \begin{Bmatrix} [\overline{B}_0] \\ [\overline{B}_1] \end{Bmatrix}$$

$$[\overline{F}] = \left[\begin{array}{c:c} [\overline{B}_0]^t \cdot [f] \cdot [\overline{B}_0] & [\overline{B}_0]^t \cdot [f] \cdot [\overline{B}_1] \\ \hdashline [\overline{B}_1]^t \cdot [f] \cdot [\overline{B}_0] & [\overline{B}_1]^t \cdot [f] \cdot [\overline{B}_1] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} [\overline{F}_{00}] & [\overline{F}_{01}] \\ \hdashline [\overline{F}_{10}] & [\overline{F}_{11}] \end{array}\right]$$

f. Os deslocamentos do sistema principal são:

$$\begin{Bmatrix} r \\ \cdots \\ x \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} [\overline{F}_{00}] & [\overline{F}_{01}] \\ \hdashline [\overline{F}_{10}] & [\overline{F}_{11}] \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} R \\ \cdots \\ X \end{Bmatrix}$$

g. Desses deslocamentos, sabe-se que $\{x\} = \{0\}$, obtendo-se as equações de coerência:

$$[\overline{F}_{10}] \cdot \{R\} + [\overline{F}_{11}] \cdot \{X\} = \{0\}$$

obtendo-se os hiperestáticos:

$$\{X\} = -[\overline{F}_{11}]^{-1} \cdot [\overline{F}_{10}] \cdot \{R\}$$

a expressão final dos esforços (nas coord. locais):

$$\{S\} = \left[\, [\overline{B}_0] \vdots [\overline{B}_1] \,\right] \cdot \begin{Bmatrix} R \\ X \end{Bmatrix} = [\overline{B}_0] \cdot \{R\} + [\overline{B}_1] \cdot \{X\}$$

e os deslocamentos nodais (nas coord. globais):

$$\{r\} = [\overline{F}_{00}] \cdot \{R\} + [\overline{F}_{10}]^t \cdot \{X\}$$

h. Logo, a matriz de flexibilidade da estrutura hiperestática é:

$$\{F\} = [\overline{F}_{00}] - [\overline{F}_{10}]^t \cdot [\overline{F}_{11}]^{-1} \cdot [\overline{F}_{10}]$$