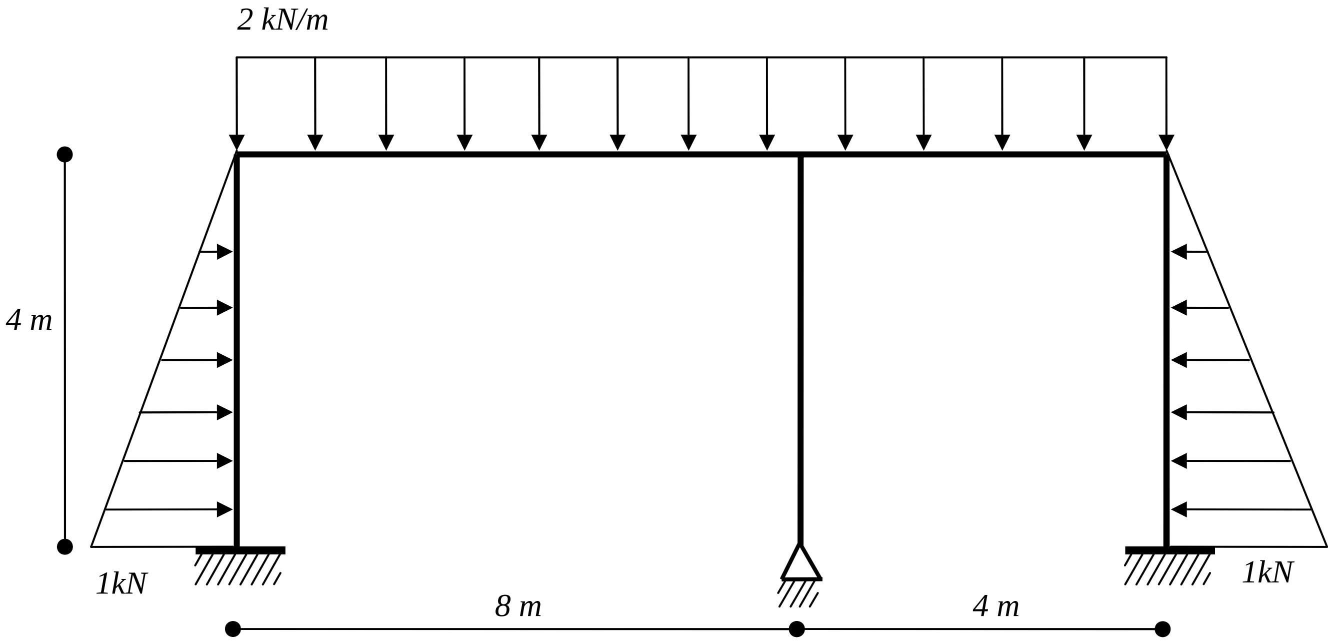
1 - Uma modelagem de uma estrutura de subsolo de um pavimento é apresentada a seguir. Utilizando o método da rigidez, o processo da rigidez direta e a discretização sugerida, pede-se o DMF para as seguintes condições de carregamento:



$$EJ_{PILAR} = EJ_{VIGA} = 8 \cdot 10^4 \, kNm^2$$

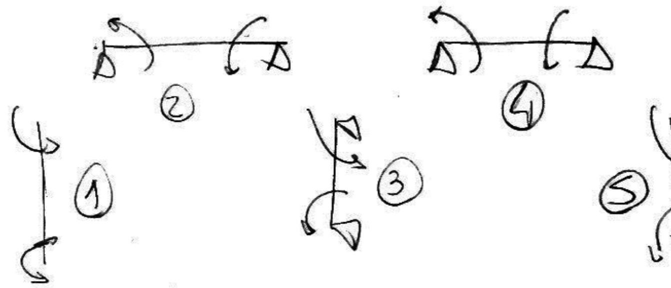
$$[k_e] = \frac{2EJ}{\ell}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

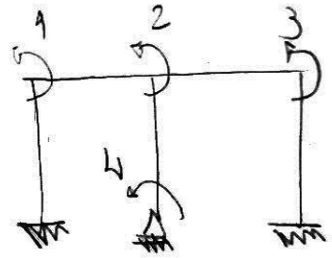
a) O carregamento estático apresentado;

b) Para a seguinte solicitação térmica:

- Temperatura na face externa (superior da viga): 30ºC
- Temperatura na face interna (inferior da viga): 10ºC
- Temperatura no dia da execução da viga: 20ºC
- Desconsidere variações térmicas nos pilares;
- Altura da viga = 80 cm;
- Coef. dilatação linear: 10^{-5}/ºC

SOLUÇÃO **a) CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO**





1) MATRIZ DE RIGIDEZ

$$[K] = \begin{bmatrix} k+\frac{k}{2} & \frac{k}{4} & 0 & 0 \\ \frac{k}{4} & \frac{k}{2}+k+k & \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \\ 0 & \frac{k}{2} & k+k & 0 \\ 0 & \frac{k}{2} & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$[k_e] = \frac{EJ}{l}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & k \end{bmatrix}$$

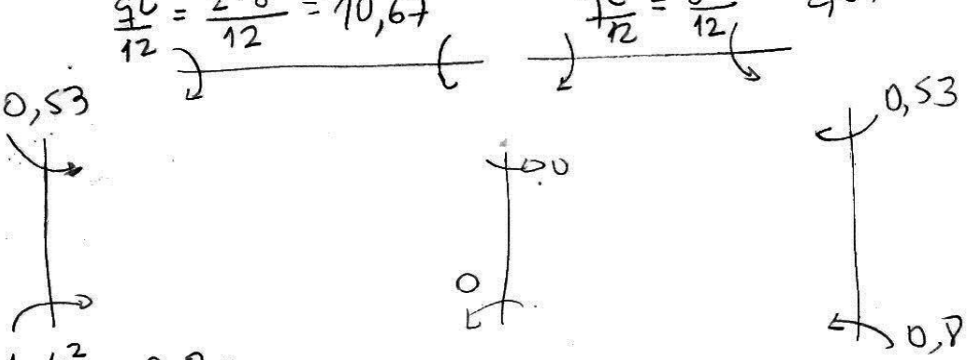
$$= \underbrace{\frac{k}{4}}_{\underbrace{\frac{\cancel{4}EJ}{L\cancel{4}}}_{=2\cdot 10^4}} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2) CNE:

$$\frac{qL^2}{12} = \frac{2\cdot 8^2}{12} = 10,67 \qquad \frac{qL^2}{12} = \frac{2\cdot 4^2}{12}\ \ 2,67$$

$$\frac{qL^2}{30} = 0,53$$

$$\frac{qL^2}{20} = \frac{1\cdot 4^2}{20} = 0,80$$



$$\{R\} = \begin{Bmatrix} 0,53-10,67 \\ 10,67-2,67 \\ 2,67-0,53 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10,14 \\ 8,0 \\ 2,14 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3) EQUILÍBRIO:

$$\{r\} = [K]^{-1}\{R\} = \begin{Bmatrix} -1,873 \\ 1,099 \\ -0,007 \\ -0,549 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{2 \times 10^4} \text{ rad}$$

4) ESFORÇOS

$$\{S\}_{e1} = \begin{Bmatrix} +0,80 \\ -0,53 \end{Bmatrix} + \frac{\cancel{8 \cdot 10^4}}{\cancel{4}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{\cancel{2 \cdot 10^4}} \begin{Bmatrix} 0,0 \\ -1,873 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2,95 \\ -8,02 \end{Bmatrix} \text{ mkN}$$

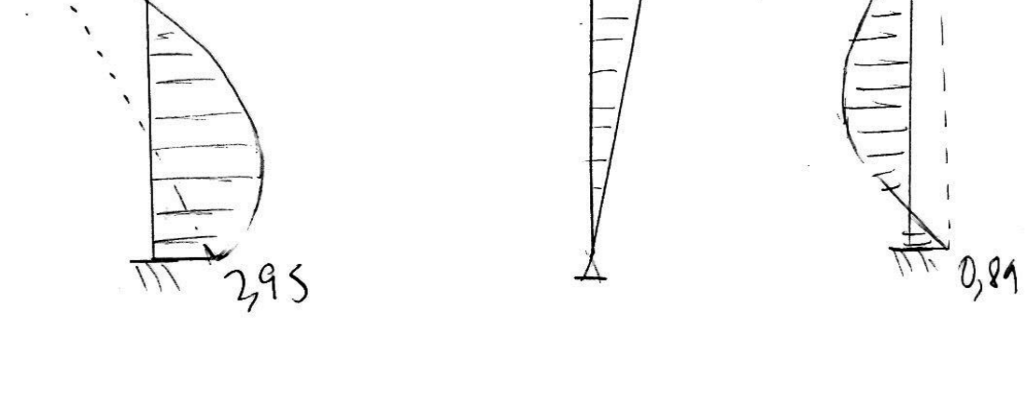
$$\{S_{e2}\} = \begin{Bmatrix} +10,67 \\ -10,67 \end{Bmatrix} + \frac{\cancel{8 \cdot 10^4}}{\cancel{8}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot \cancel{10^4}} \begin{Bmatrix} -1,873 \\ 1,099 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8,02 \\ -10,35 \end{Bmatrix} \text{ mkN}$$

$$\{S_{e3}\} = \begin{Bmatrix} 2,67 \\ -2,67 \end{Bmatrix} + \frac{\cancel{8 \cdot 10^4}}{4} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{\cancel{2 \cdot 10^4}} \cdot \begin{Bmatrix} 1,099 \\ -0,007 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7,05 \\ -0,50 \end{Bmatrix} \text{ mkN}$$

$$\{S_{e5}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\cancel{8 \cdot 10^4}}{\cancel{4}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{\cancel{2 \cdot 10^4}} \cdot \begin{Bmatrix} 1,099 \\ -0,549 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,30 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ mkN}$$

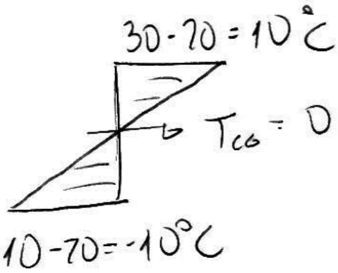
$$\{S_{e4}\} = \begin{Bmatrix} -0,80 \\ +0,53 \end{Bmatrix} + \frac{\cancel{8 \cdot 10^4}}{\cancel{4}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{\cancel{2 \cdot 10^4}} \cdot \begin{Bmatrix} 0,0 \\ -0,007 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,81 \\ 0,50 \end{Bmatrix} \text{ mkN}$$

5) DMF:



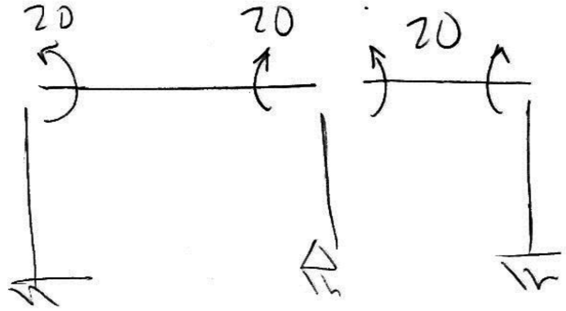
b) TEMPERATURA

1) CNE:



$T_{cg} = 0 \Rightarrow M = \dfrac{\alpha E I (\Delta T)}{h}$

$= \dfrac{\cancel{10^{-5}} \cdot \cancel{8 \cdot 10^{4}} \cdot \cancel{20}}{\cancel{0,8}} = 20$



0,2

2) EQUILÍBRIO

$$\Rightarrow \{R\} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{r\} = [K]^{-1}\{R\} = \begin{Bmatrix} 3,30 \\ 0,20 \\ -2,55 \\ -0,10 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{2 \cdot 10^4} \text{ ra}$$

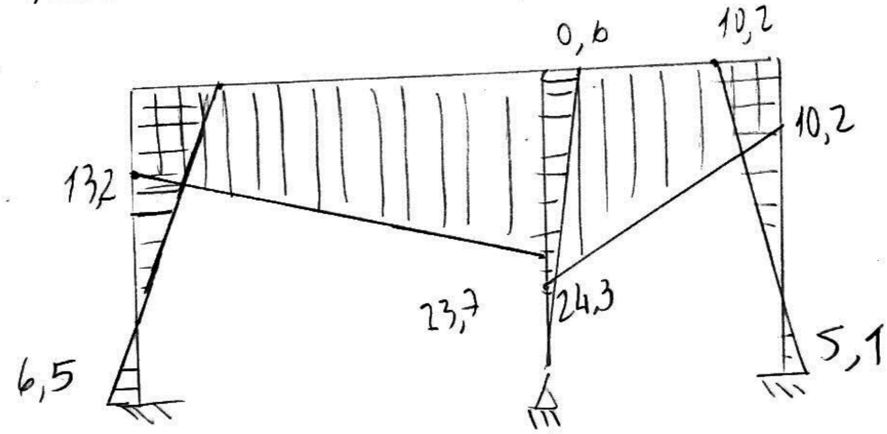
3) ESFORÇOS:

$$\{S_{e2}\} = \begin{Bmatrix} -20 \\ +20 \end{Bmatrix} + \frac{8 \cdot \cancel{10^4}}{8} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot \cancel{10^4}} \begin{Bmatrix} 3,3 \\ 0,2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13,2 \\ 23,7 \end{Bmatrix}$$

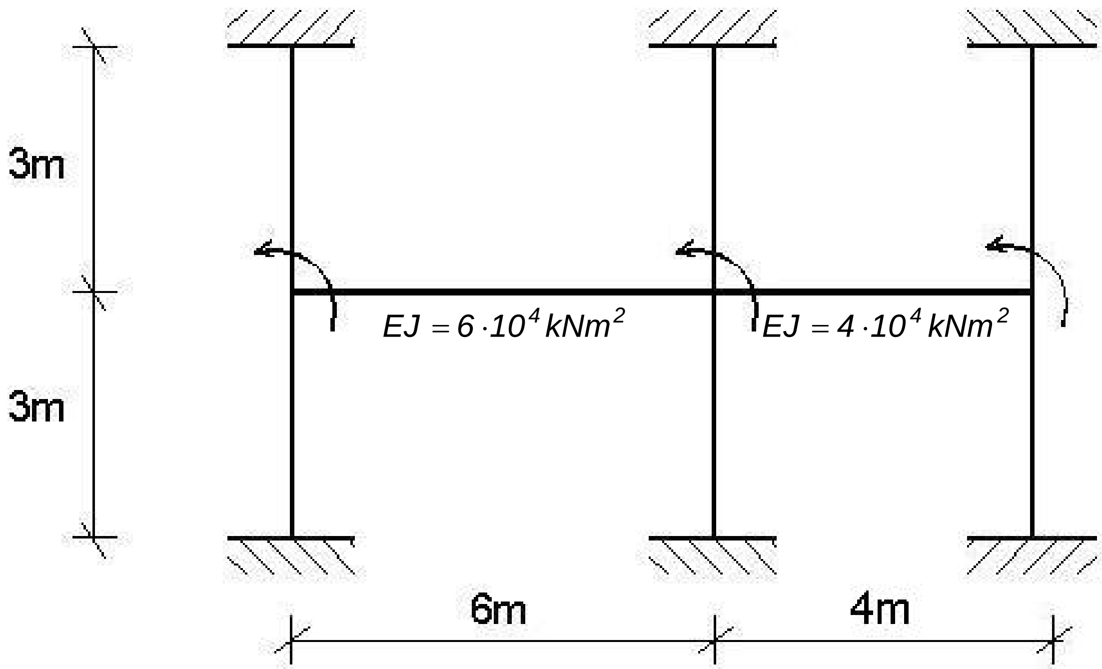
$$\{S_{e4}\} = \begin{Bmatrix} -20 \\ +20 \end{Bmatrix} + \frac{\cancel{8 \cdot 10^4}}{\cancel{4}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{\cancel{2 \cdot 10^4}} \begin{Bmatrix} 0,2 \\ -2,55 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -24,3 \\ 10,2 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{e3}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\cancel{8 \cdot 10^4}}{\cancel{4}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{\cancel{2 \cdot 10^4}} \begin{Bmatrix} 0,20 \\ -0,10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,6 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ ok!}$$

4) DMF:



2 - Seja um pavimento de um edifício cuja modelagem estrutural idealizada apresenta-se na figura abaixo:



$$EJ_{PILAR} = 3 \cdot 10^4 \, kNm^2$$

Utilizando-se o <u>processo da rigidez direta</u>, pede-se o diagrama de momentos fletores (DMF) da estrutura, para um carregamento uniformemente distribuído resultante de *12kN/m* sobre a viga contínua do pavimento.

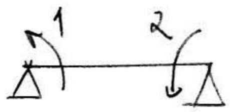
Dado: matrizes de rigidez de elementos submetidos à flexão simples:

$$[k_e] = \frac{2EJ}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

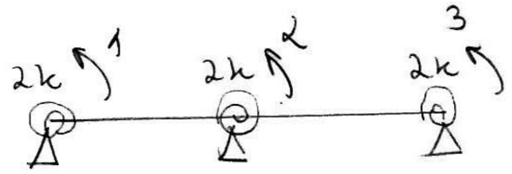
SOLUÇÃO

1) MATRIZ DE RIGIDEZ:

$$[K_{Pilar}] = [K_{viga\ I}] = [K_{viga\ II}] = 2\cdot 10^4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



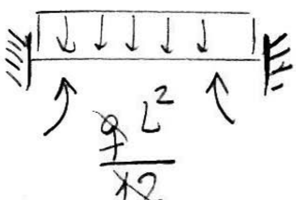
MODELO SIMPLIFICADO!



$$K = 2\cdot 10^4 \cdot [2]$$

$$[K_G] = 2\cdot 10^4 \begin{bmatrix} 2+2+2 & 1 & \\ 1 & 2+2+2+2 & 1 \\ 0 & 1 & 2+2+2 \end{bmatrix} = 2\cdot 10^4 \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

2) REAÇÕES DE FIXAÇÃO E CNE:



$$\{S_0\}_{viga1} = \begin{Bmatrix} 36 \\ -36 \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} -36 \\ 20 \\ 16 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_0\}_{viga2} = \begin{Bmatrix} 16 \\ -16 \end{Bmatrix}$$

3) EQUILÍBRIO:

$$\{U\} = [K_G]^{-1} \cdot \{F\} = \frac{1}{2\cdot 10^4} \cdot \frac{1}{276} \begin{bmatrix} 47 & -6 & 1 \\ -6 & 36 & -6 \\ 1 & -6 & 47 \end{bmatrix} \cdot 4 \begin{Bmatrix} -9 \\ 5 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,25 \\ 1,52 \\ 1,08 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

4) ESFORÇOS:

$$\{S\} = \{S_0\} + [K_E] \cdot \{U_E^{l}\}$$

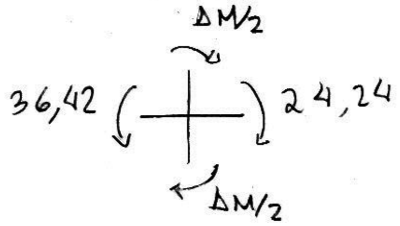
$$\Rightarrow \{S\}_{\text{viga I}} = \begin{Bmatrix} 36 \\ -36 \end{Bmatrix} + 2 \cdot \cancel{10^4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -3,25 \\ 1,52 \end{Bmatrix} \cdot \cancel{10^{-4}}$$

$$= \begin{Bmatrix} 36 \\ -36 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -9,96 \\ -0,42 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26,04 \\ -36,42 \end{Bmatrix} \text{ mkN}$$

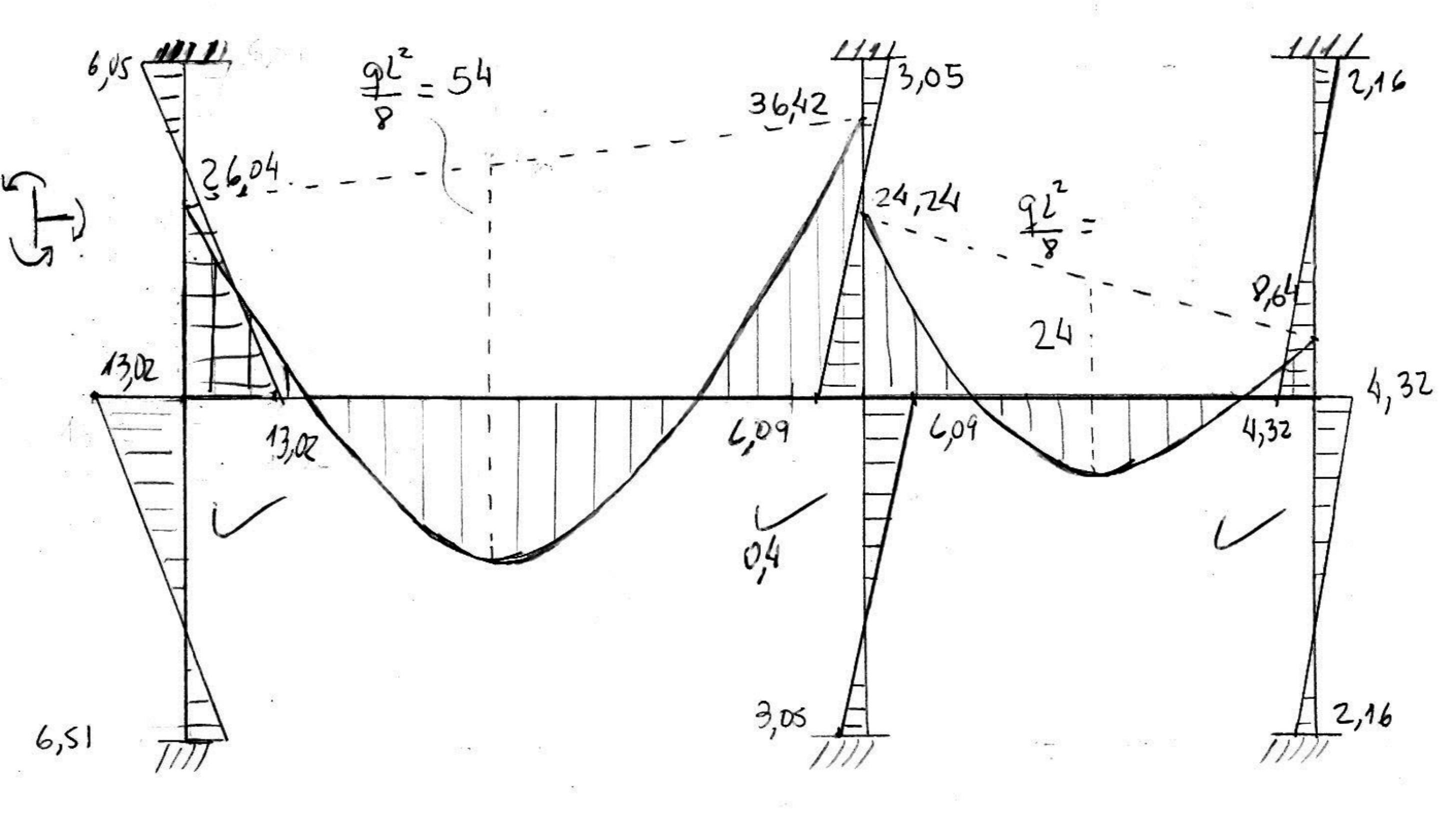
$$\Rightarrow \{S\}_{\text{viga II}} = \begin{Bmatrix} 16 \\ -16 \end{Bmatrix} + 2 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1,52 \\ 1,08 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 16 \\ -16 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 8,24 \\ 7,36 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24,24 \\ -8,64 \end{Bmatrix} \text{ mkN}$$

5) DMF:

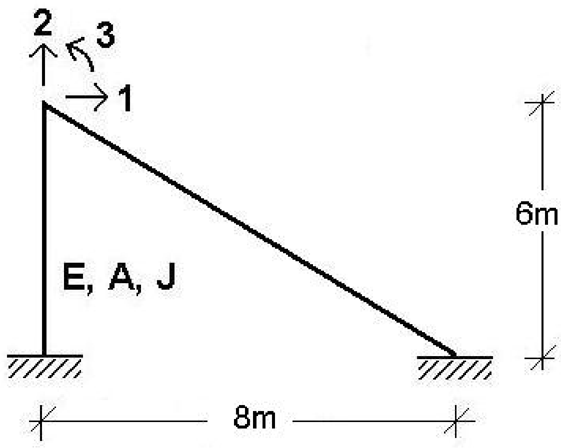


$\Rightarrow \Delta M = 12,18$



IME - SEÇÃO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO
EXERCÍCIOS DE ANÁLISE MATRICIAL DAS ESTRUTURAS
PROCESSO DA RIGIDEZ DIRETA - CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO
EFEITOS DE TEMPERATURA - APOIO ELÁSTICO – RECALQUE DE APOIO

3 - A arquibancada de um estádio foi modelada conforme o desenho esquemático abaixo.



$EJ = 6 \cdot 10^4\, kNm^2$

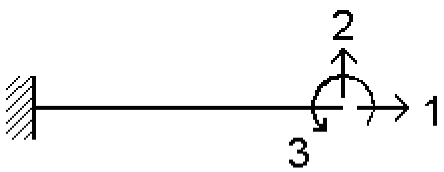
$EA = 12 \cdot 10^5\, kN$

$\alpha = 10^{-5}\; / \,^oC$

$h = 1m$ (altura da viga, e dimensão do pilar paralela ao plano do desenho)

Utilizando-se o processo da rigidez direta, pede-se o DMF da estrutura para o caso de insolação externa da viga inclinada do croqui apresentado no valor de +30ºC (em relação ao dia da construção), sem alteração de temperatura no pilar e nos ambientes internos (inferiores) da estrutura.

Dado: matriz de rigidez de elemento submetido à flexão composta:



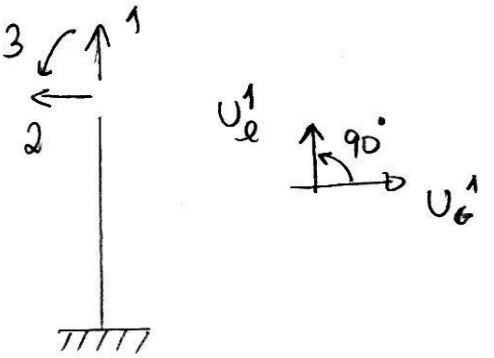
E, J, A, ℓ

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{\ell^3} & -\frac{6EJ}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

1) MATRIZ DE RIGIDEZ

Elemento I:



$$[k_{\text{elmto I}}] = \begin{bmatrix} \frac{120}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot 6}{6^3} & -\frac{6 \cdot 6}{6^2} \\ 0 & \frac{-6 \cdot 6}{6^2} & \frac{4 \cdot 6}{6} \end{bmatrix} \cdot 10^4 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

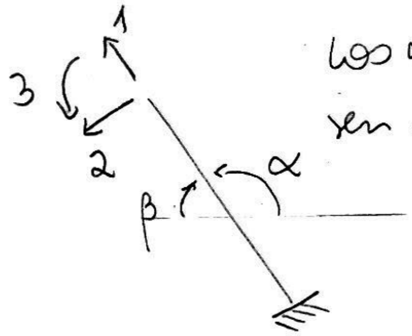
$$[R_\alpha]^{\text{elmto I}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^G_{\text{elmto I}}] = R^t \, k_e \, R = 10^4 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

1) MATRIZ DE RIGIDEZ - CONT.

0,2

Elemento II :



$$\cos\alpha = -\cos\beta = -\frac{4}{5} = -0,8$$

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\beta = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$[R] = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 & 0 \\ -0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

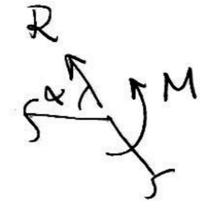
$$\left[K^{e}_{\text{elemento II}}\right] = 10^4 \begin{bmatrix} \frac{120}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\cdot 6}{10^3} & \frac{-6\cdot 6}{10^2} \\ 0 & \frac{-6\cdot 6}{10^2} & \frac{4\cdot 6}{10} \end{bmatrix} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0,072 & -0,36 \\ 0 & -0,36 & 2,4 \end{bmatrix}$$

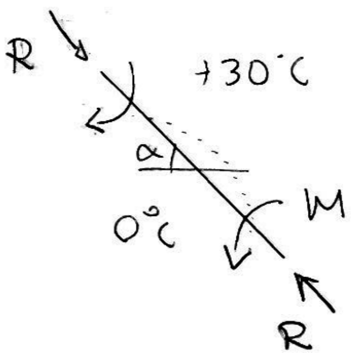
$$\left[K^{II}_{G}\right] = R^t \cdot K_E \cdot R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ① & ② & ③ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7,71 & -5,73 & 0,22 \\ -5,73 & 4,37 & 0,29 \\ 0,22 & 0,29 & 2,40 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array} 10^4$$

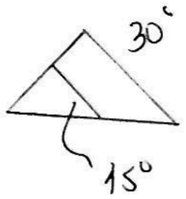
$$[K_G] = \begin{bmatrix} 8,04 & -5,73 & 1,22 \\ -5,73 & 24,37 & 0,29 \\ 1,22 & 0,29 & 6,40 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

2) REAÇÕES DE FIXAÇÃO E CNE:

CNE :







$$R = 12 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} \cdot 15 = 180$$

$$M = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 10^{-5}\, 30}{1} = 18$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -R\cos\alpha \\ R\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ +M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 180\cdot 0,8 \\ 180\cdot 0,6 \\ 18 \end{Bmatrix} = 180\cdot\begin{Bmatrix} -0,8 \\ 0,6 \\ +0,1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -144 \\ 108 \\ +18 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_0\}_{elto\ II} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ +M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 180 \\ 0 \\ 18 \end{Bmatrix}$$

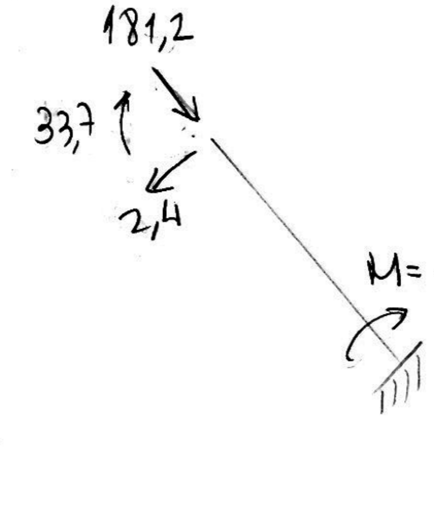
3) EQUILÍBRIO:

$$\{U\} = [K_G]^{-1}\{F\} = \begin{Bmatrix} -18,95 \\ -0,10 \\ 6,42 \end{Bmatrix}\cdot 10^{-4}$$

4) ESFORÇOS:

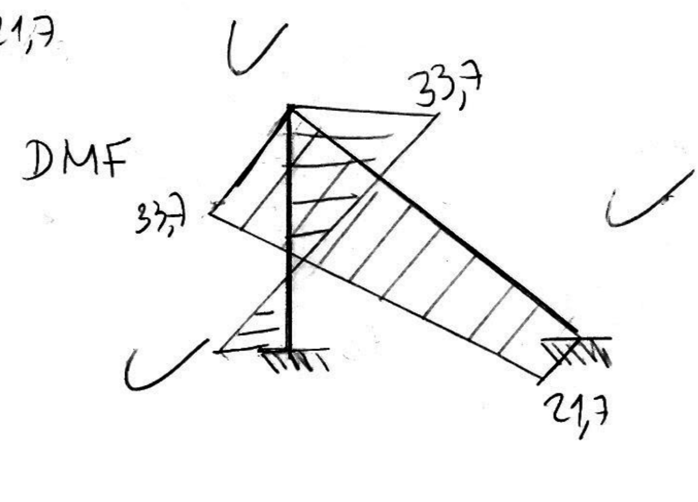
$$\{S\}_{elto\ II} = \begin{Bmatrix} -180 \\ 0 \\ -18 \end{Bmatrix} + [K_E]\cdot[R]\cdot\{U^G_{elto\ II}\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -180 \\ 0 \\ -18 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2,4 \\ 2,4 \\ -15,7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -181,2 \\ 2,4 \\ -33,7 \end{Bmatrix}$$



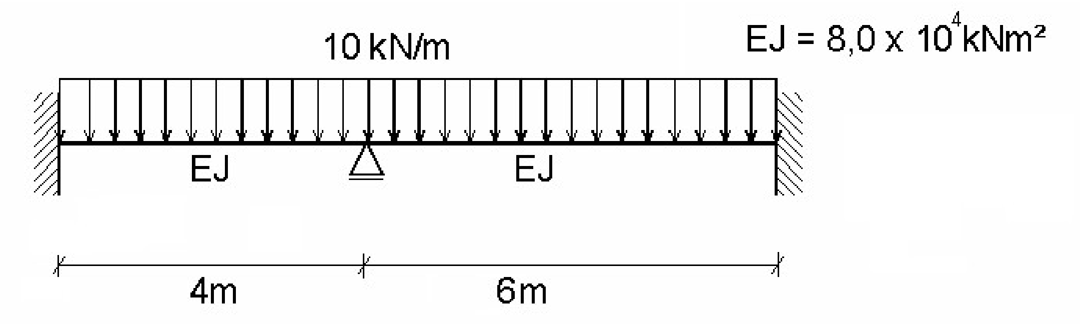
$$M = +33,7 - 2,4\cdot 5 = +21,7$$

5) DMF:



IME - SEÇÃO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO
EXERCÍCIOS DE ANÁLISE MATRICIAL DAS ESTRUTURAS
PROCESSO DA RIGIDEZ DIRETA - CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO
EFEITOS DE TEMPERATURA - APOIO ELÁSTICO – RECALQUE DE APOIO

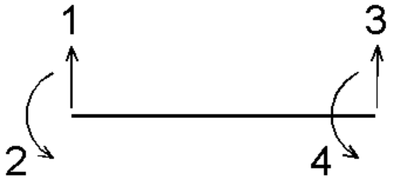
4 - Um tramo de viga contínua apoiado em três pilares foi modelado conforme a figura abaixo. Pede-se o diagrama de momentos fletores para os casos apresentados a seguir:



a) O carregamento indicado na figura;
b) O pilar central apresentando um recalque diferencial de 1cm;
c) Os pilares de extremidade como apoios elásticos à rotação, considerando um pé-direito de 2,80m acima e abaixo da viga, e pilares com rigidez à flexão no plano igual à metade da rigidez da viga.

Matrizes de rigidez de elementos submetidos à flexão:

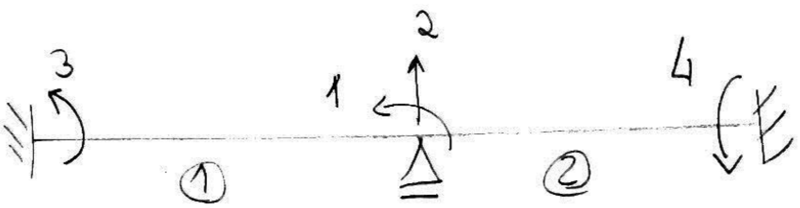
$$[k_e] = \frac{2EJ}{\ell}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



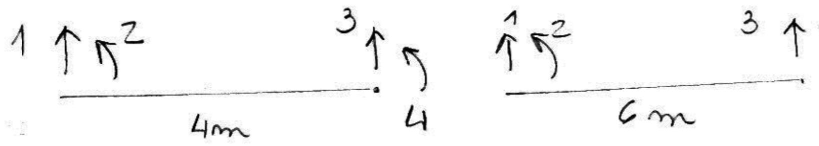
$$[k_e] = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

a) CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO



coord globais



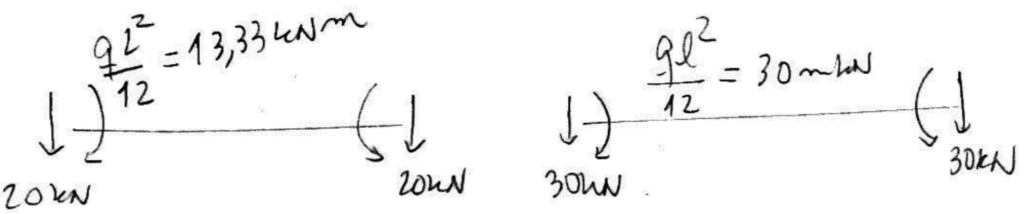
coord locais

$$k_{e1} = \frac{EJ}{4^3}\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 12 & 24 & -12 & 24 \\ 24 & 64 & -24 & 32 \\ -12 & -24 & 12 & -24 \\ 24 & 32 & -24 & 64 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \times \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \times & \quad 3 & \quad 2 & \quad 1 \end{matrix} & \end{array} \qquad k_{e2} = \frac{EJ}{6^3}\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 12 & 36 & -12 & 36 \\ 36 & 144 & -36 & 72 \\ -12 & -36 & 12 & -36 \\ 36 & 72 & -36 & 144 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ \times \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & \quad 1 & \quad \times & \quad 4 \end{matrix} & \end{array}$$

1) MATRIZ DE RIGIDEZ:

$$[k] = EJ\left(\frac{64}{4^3} + \frac{144}{6^3}\right) = 13{,}33 \times 10^4 \text{ kNm/rad}$$

2) CNE:



3) EQ:

$$\{F\} = +13{,}33 - 30{,}0 = -16{,}67 \text{ mkN}$$

$$\{u\} = [k]^{-1} \cdot \{F\} = -1{,}25 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

4) ESFORÇOS:

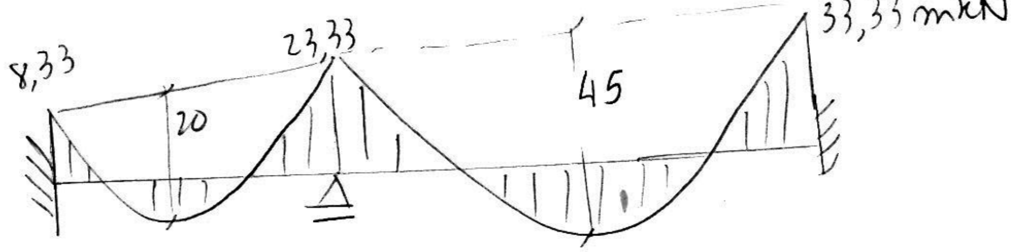
$$\{S_{e1}\} = \{S_0\} + [k_{e1}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1{,}25 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 20 \\ 13{,}33 \\ 20 \\ -13{,}33 \end{Bmatrix} - \underbrace{\frac{8 \cdot 10^{\cancel{4}} \cdot \cancel{10^{-4}}}{4^3}}_{0{,}15625} \cdot 1{,}25 \begin{Bmatrix} 24 \\ 32 \\ -24 \\ 64 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16{,}25 \\ 8{,}33 \\ 23{,}75 \\ -23{,}33 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{e2}\} = \{S_0\} + [K_{e2}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -1{,}25 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} =$$

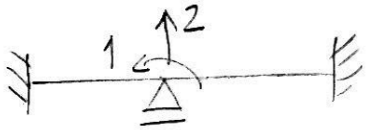
$$= \begin{Bmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ -30 \end{Bmatrix} - \underbrace{\frac{8 \times \cancel{10^{4}} \cdot \cancel{10^{-4}}}{6^3}}_{0{,}0463} \cdot 1{,}25 \begin{Bmatrix} 36 \\ 144 \\ -36 \\ 72 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28{,}33 \\ 23{,}33 \\ 31{,}67 \\ -33{,}33 \end{Bmatrix}$$

5) DMF:



b) RECALQUE

1) MATRIZ DE RIG:



$$[K] = EJ \begin{bmatrix} \frac{64}{4^3} + \frac{144}{6^3} & -\frac{24}{4^3} + \frac{36}{6^3} \\ -\frac{24}{4^3} + \frac{36}{6^3} & \frac{12}{4^3} + \frac{12}{6^3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [K] = EJ \begin{bmatrix} 1{,}667 & -0{,}208 \\ -0{,}208 & 0{,}243 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = [K]\{U\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ R \end{Bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} 1{,}667 & -0{,}208 \\ -0{,}208 & 0{,}243 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ -0{,}01 \end{Bmatrix}$$

2) EQUILÍBRIO

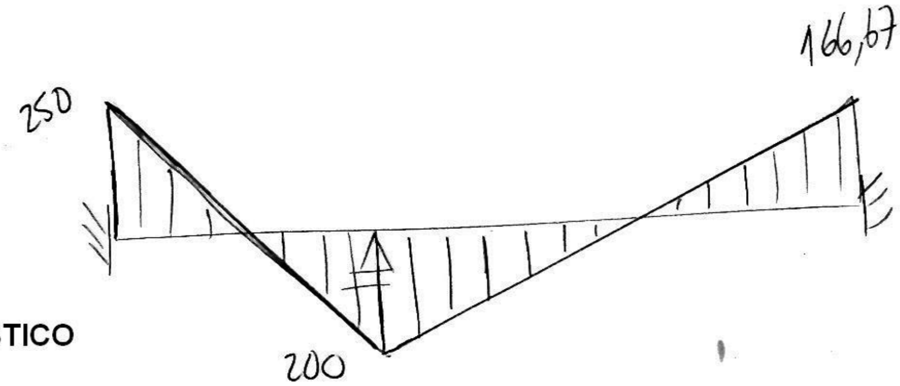
$$\Rightarrow r = -\frac{0{,}01 \cdot 0{,}208}{1{,}667} = -1{,}25 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

3) ESFORÇOS

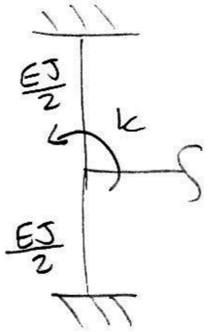
$$\{S_{e1}\} = [K_{e1}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}01 \\ -1{,}25 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{8 \times 10^4}{4^3}}_{1250} \begin{Bmatrix} +0{,}12 - 0{,}03 \\ +0{,}24 - 0{,}04 \\ -0{,}12 + 0{,}03 \\ +0{,}24 - 0{,}08 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 112{,}5 \\ 250 \\ -112{,}5 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{e_2}\} = [K_{e_2}] \cdot \begin{Bmatrix} -0,01 \\ -1,25\times10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{8\cdot10^4}{6^3}}_{370,37} \begin{Bmatrix} -0,12 - 0,045 \\ -0,36 - 0,18 \\ +0,12 + 0,045 \\ -0,36 - 0,09 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -61,11 \\ -200 \\ 61,11 \\ -166,67 \end{Bmatrix}$$

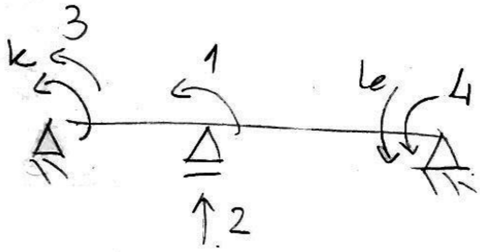
4) DMF:



c) APOIO ELÁSTICO



$$k = 2 \times \frac{(EJ/2)}{l} \times [4] = \frac{4EJ}{L} = 1,43\,EJ$$



$$[K] = EJ \begin{bmatrix} 1,667 & -0,208 & \frac{32}{4^3} & \frac{72}{6^3} \\ & 0,243 & -\frac{24}{4^3} & \frac{36}{6^3} \\ \text{sim} & & \frac{64}{4^3}+k & 0 \\ & & & \frac{144}{6^3}+k \end{bmatrix}$$

1) MATRIZ DE RIGIDEZ:

$$[K] = EJ \begin{bmatrix} 1,667 & -0,208 & 0,500 & 0,333 \\ -0,208 & 0,243 & -0,375 & 0,167 \\ 0,500 & -0,375 & 1,430 & 0 \\ 0,333 & 0,167 & 0 & 2,097 \end{bmatrix}$$

2) EQUILÍBRIO

$$\{F\} = [K]\{U\}$$

$$\{U\} = [K]^{-1}\{F\} =$$

$$= \frac{1}{EJ} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}662 & -0{,}136 & -0{,}105 \\ -0{,}136 & 0{,}440 & 0{,}022 \\ -0{,}105 & 0{,}022 & 0{,}494 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -16{,}67 \\ -13{,}33 \\ 30 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EJ} \begin{Bmatrix} -12{,}368 \\ -2{,}941 \\ 16{,}270 \end{Bmatrix}$$

3) ESFORÇOS:

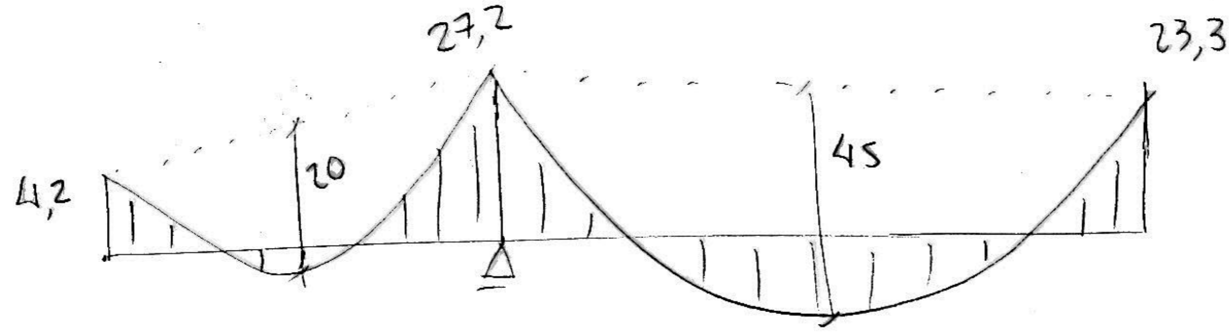
$$\{S_{e1}\} = \{S_0\} + [K_{e1}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -2{,}941 \\ 0 \\ -12{,}368 \end{Bmatrix} \frac{1}{EJ} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 20 \\ 13{,}33 \\ 20 \\ -13{,}33 \end{Bmatrix} + \frac{1}{4^3} \begin{Bmatrix} -70{,}58 - 296{,}83 \\ -188{,}22 - 395{,}78 \\ +70{,}58 + 296{,}83 \\ -94{,}11 - 791{,}55 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14{,}3 \\ 4{,}2 \\ 25{,}7 \\ -27{,}2 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{e2}\} = \{S_0\} + [K_{e2}] \begin{Bmatrix} 0 \\ -12{,}368 \\ 0 \\ 16{,}270 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} =$$

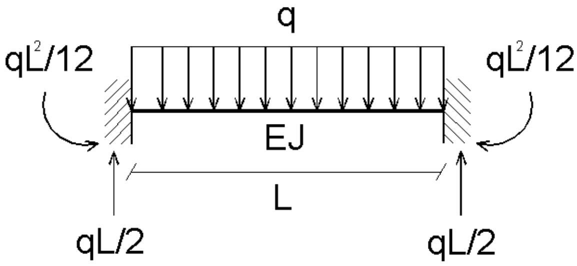
$$= \begin{Bmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ -30 \end{Bmatrix} + \frac{1}{6^3} \begin{Bmatrix} -445{,}25 + 585{,}72 \\ -1781{,}00 + 1171{,}44 \\ +445{,}25 - 585{,}72 \\ -890{,}50 + 2342{,}88 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25{,}2 \\ 27{,}2 \\ 29{,}3 \\ -23{,}3 \end{Bmatrix}$$

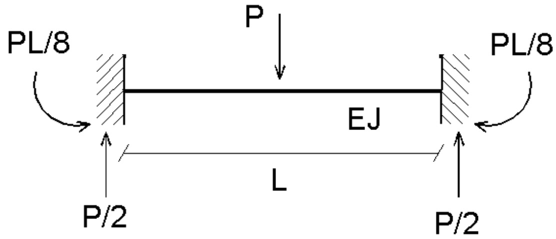
4) DMF:

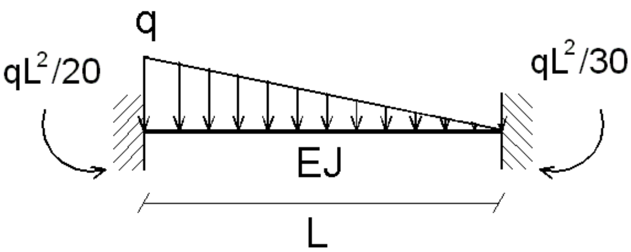


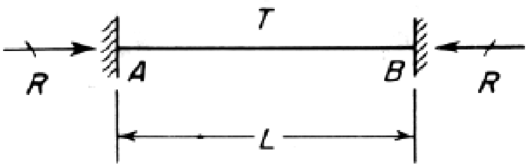
FORMULÁRIO

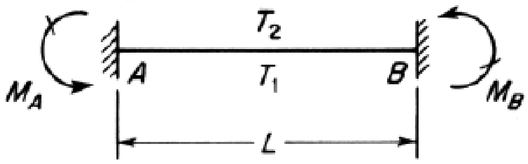
1) Reações de fixação:







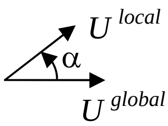




$$R = EA\alpha T$$

$$M_A = -M_B = \frac{\alpha EI(T_1 - T_2)}{d}$$

2) Formulação básica do método da rigidez:



$$[R_E] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{U_E^\ell\} = [R_E] \cdot \{U_E^G\}$$

$$[K_E^G] = [R_E]^T \cdot [K_E] \cdot [R_E]$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{10} \\ K_{01} & K_{00} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_R \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ F \end{Bmatrix}$$

$$[K_{01}] \cdot \{U_R\} + [K] \cdot \{U\} = \{F\}$$

$$\{U\} = [K_{00}]^{-1} (\{F\} - [K_{01}] \cdot \{U_R\})$$

$$\{S_E\} = \{S_0\} + [K_E] \cdot \{U_E^\ell\}$$

$$= \{S_0\} + [K_E] \cdot [R_E] \cdot \{U_E^G\}$$