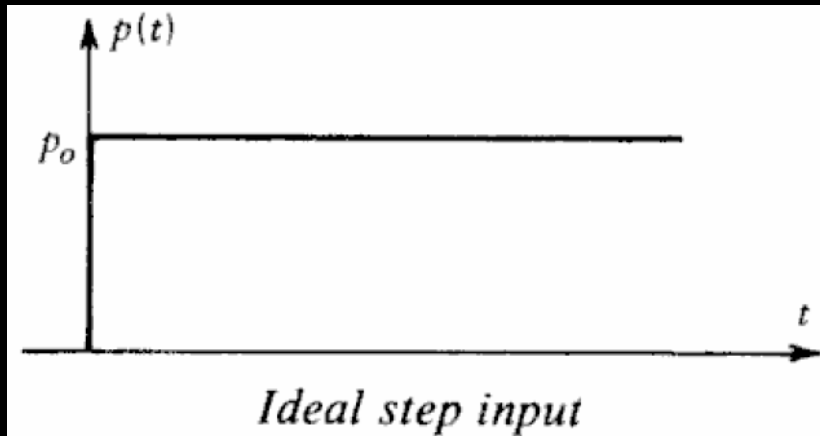


Dinâmica das Estruturas

Resposta a um carregamento súbito



$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = p_0$$

Solução particular: a resposta consiste da deflexão estática

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k}$$

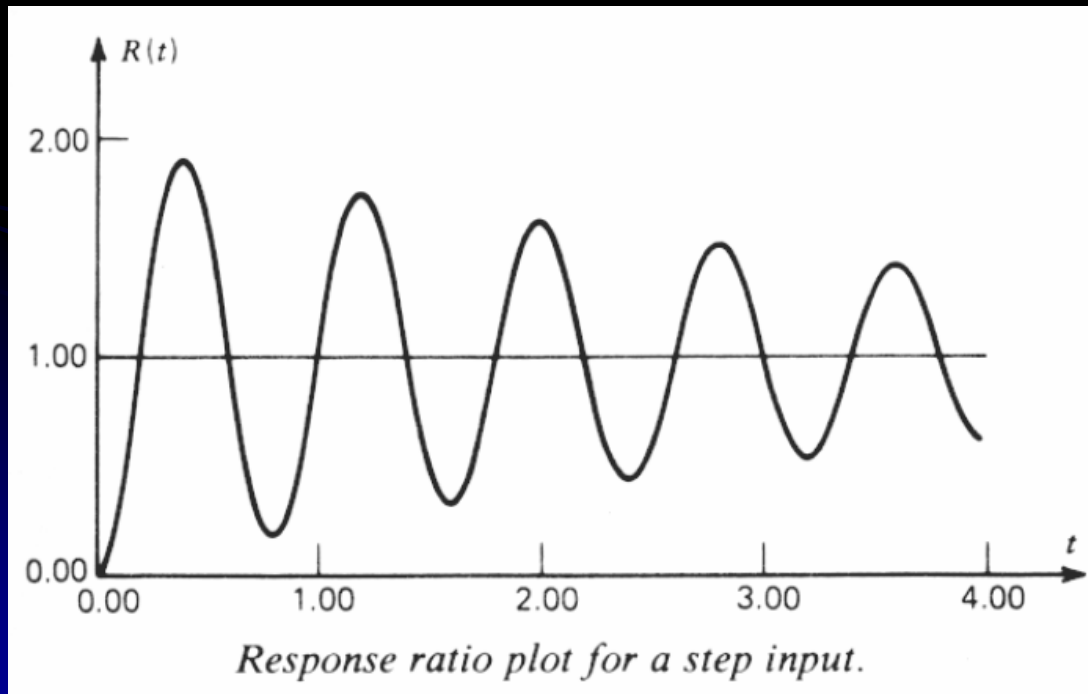
Solução homogênea: vibração livre amortecida

$$x_h(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\xi \omega t}$$

Resposta **AMORTECIDA** a um carregamento súbito:

Solução geral para $x(0) = \dot{x}(0) = 0$:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \frac{p_0}{k} \left[1 - \left(\cos \omega_D t + \frac{\xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t \right) e^{-\xi \omega t} \right]$$

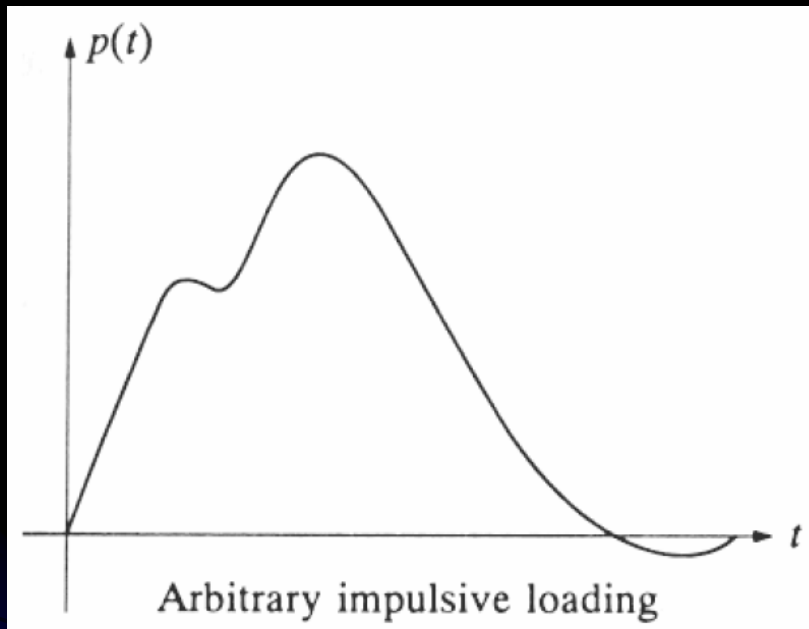


Resposta
NÃO-AMORTECIDA:

$$x(t) = \frac{p_0}{k} [1 - \cos \omega_D t]$$

Dinâmica das Estruturas

Resposta a um carregamento impulsivo



- Resposta máxima atingida muito **rapidamente**;
- As forças de **amortecimento** não absorvem energia significativa do sistema;
- Considera-se este tipo de resposta como **não-amortecida**;

Para carregamentos de curta duração, por exemplo, com tempo de aplicação do carregamento (t_1) inferior a **$\frac{1}{4}$ do período fundamental** da estrutura, o deslocamento máximo depende principalmente da magnitude total do impulso aplicado, não sendo muito influenciado pela forma como o impulso é aplicado.

$$m \cdot \Delta \dot{x} = \int_0^{t_1} [p(t) - k \cdot x(t)] dt$$

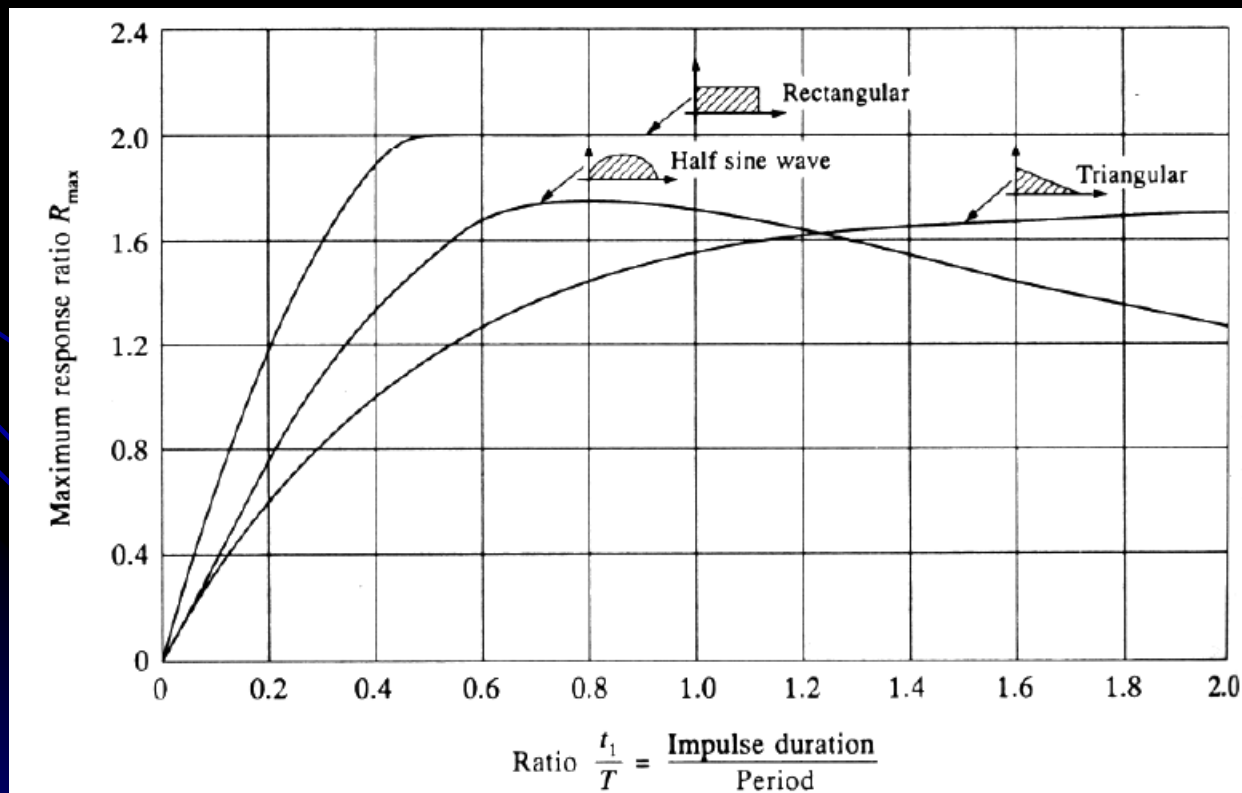
$$m \cdot \Delta \dot{x} = \int_0^{t_1} p(t) dt + \int_0^{t_1} [-k \cdot x(t)] dt$$

$$(t_1 \rightarrow 0) \Rightarrow m \cdot \Delta \dot{x} \approx \int_0^{t_1} p(t) dt$$

Resposta a um carregamento impulsivo

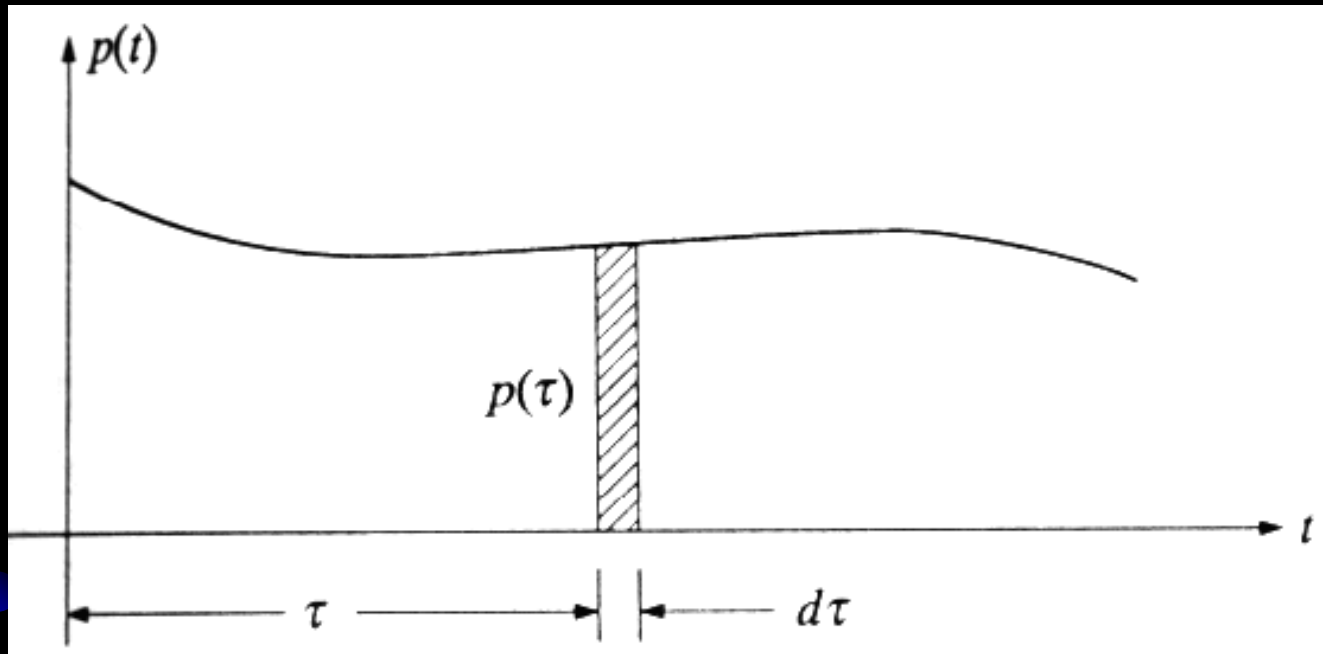
A resposta após o término da carga corresponde à vibração livre:

$$x(\bar{t}) \approx \frac{1}{m \cdot \omega} \left(\int_0^{t_1} p(t) dt \right) \text{sen } \omega \bar{t}$$



Dinâmica das Estruturas

Resposta a um carregamento dinâmico qualquer:
Integral de Duhamel



- Baseia-se na mesma aproximação dada para impulsos de curta duração
- Carregamento arbitrário $p(t)$
- Seja $p(\tau)$ carregamento atuando no tempo $t = \tau$, durante o intervalo $d\tau$
- Corresponde a um impulso de intensidade $p(\tau) \cdot d\tau$

Resposta a um carregamento dinâmico qualquer: Integral de Duhamel

- O carregamento no tempo pode ser considerado como uma sucessão de pequenos impulsos, cada um produzindo sua própria parcela de resposta.

$$x(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} \int_0^t p(\tau) \cdot \text{sen } \omega(t - \tau) \cdot d\tau$$

- Sendo o regime elástico e linear, a resposta final pode ser obtida pela soma de todas as respostas diferenciais (método da superposição), obtendo-se a expressão da Integral de Duhamel:
- Geralmente faz-se uso de métodos numéricos para a resolução desta integral:

$$x(t) = A(t) \cdot \text{sen } \omega_D t - B(t) \cdot \cos \omega_D t$$

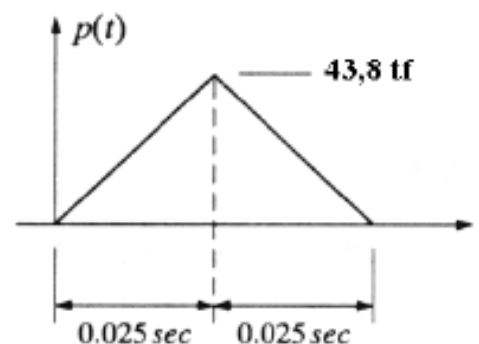
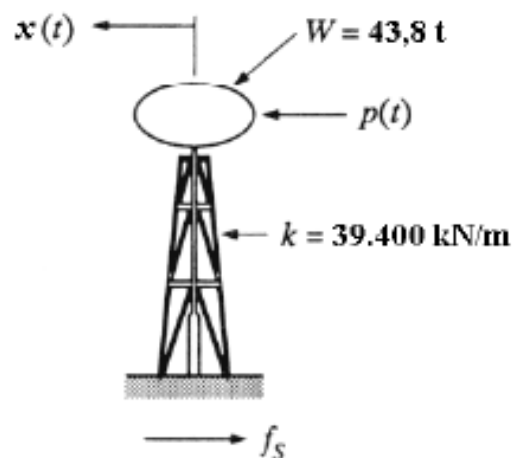
$$A(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D \cdot e^{\xi \omega t}} \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \tau} \cos \omega_D \tau d\tau$$

$$B(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D \cdot e^{\xi \omega t}} \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \tau} \text{sen } \omega_D \tau d\tau \quad t \geq 0, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad \xi = 0$$

Resposta a um carregamento dinâmico qualquer: Integral de Duhamel

EXEMPLO:

Obter a força elástica resultante (no tempo) em uma caixa d'água elevada, pesando 43,8 toneladas, com rigidez igual a 39.400 kN/m, submetida à uma explosão com intensidade igual ao seu peso, com tempo total de duração de 0,05 segundos, apresentando um diagrama de intensidade triangular:



Loading history

Water tower subjected to blast load.

Resposta a um carregamento dinâmico qualquer: Integral de Duhamel

SOLUÇÃO:

Solução numérica, realizada no aplicativo MathCad®:

$$k := 39400 \quad m := 43.8$$

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega = 29.99$$

$$p(t) := \begin{cases} \left(\frac{430}{0.025} \cdot t \right) & \text{if } t < 0.025 \\ \left(860 - \frac{430}{0.025} \cdot t \right) & \text{if } 0.025 \leq t \leq 0.05 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\xi := 0.0$$

$$\omega_d := \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad \omega_d = 29.99$$

$$A(t) := \frac{1}{m \cdot \omega_d \cdot e^{\xi \omega \cdot t}} \cdot \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_d \cdot \tau) \, d\tau$$

$$B(t) := \frac{1}{m \cdot \omega_d \cdot e^{\xi \omega \cdot t}} \cdot \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \cdot \tau} \cdot \sin(\omega_d \cdot \tau) \, d\tau$$

$$x(t) := A(t) \cdot \sin(\omega_d \cdot t) - B(t) \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

$$\xi := 0.05$$

$$\omega_d := \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad \omega_d = 29.95$$

$$A(t) := \frac{1}{m \cdot \omega_d \cdot e^{\xi \omega \cdot t}} \cdot \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_d \cdot \tau) \, d\tau$$

$$B(t) := \frac{1}{m \cdot \omega_d \cdot e^{\xi \omega \cdot t}} \cdot \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \cdot \tau} \cdot \sin(\omega_d \cdot \tau) \, d\tau$$

$$x_d(t) := A(t) \cdot \sin(\omega_d \cdot t) - B(t) \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

