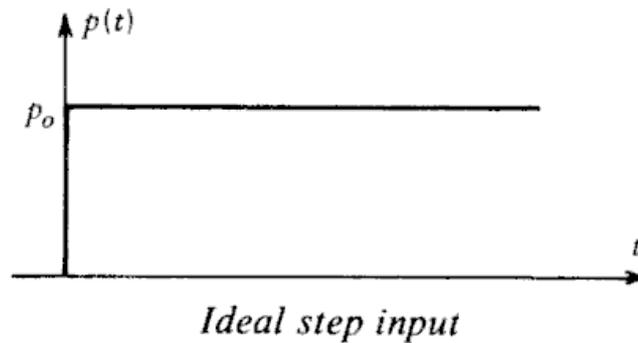


II.2.3 – Resposta a um carregamento súbito



- Equação do movimento:

Solução particular:

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{p_0}{k} \quad (\text{a resposta da estrutura consiste na deflexão estática})$$

Solução homogênea (vibração livre amortecida):

$$\Rightarrow x_h(t) = (A \cdot \cos \omega_D t + B \cdot \sen \omega_D t) \cdot e^{-\xi \omega t}$$

Solução geral:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{p_0}{k} + (A \cdot \cos \omega_D t + B \cdot \sen \omega_D t) \cdot e^{-\xi \omega t}$$

Considerando que o sistema parte do repouso:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

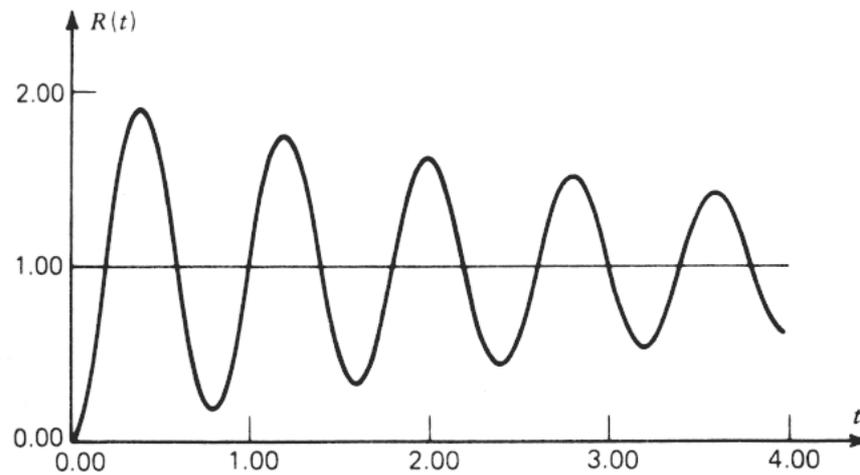
$$\Rightarrow x(t) = \frac{p_0}{k} \left\{ 1 - \left[\cos \omega_D t + \left(\frac{\xi \omega}{\omega_D} \right) \sen \omega_D t \right] e^{-\xi \omega t} \right\}$$

- Pelo fato do carregamento ser subitamente aplicado, há uma amplificação da resposta, e o sistema tende para a posição de equilíbrio estático após um número de ciclos de oscilação amortecida;
- A taxa de amortecimento determina a magnitude da amplificação e a taxa de decaimento em torno da posição de equilíbrio estático.

Considerando o sistema sem amortecimento:

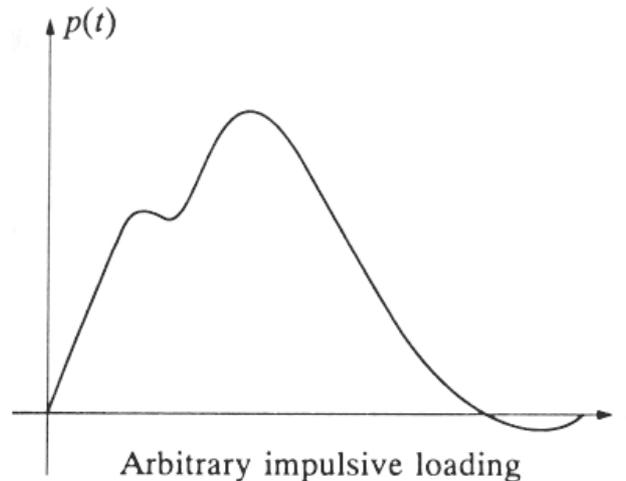
$$\Rightarrow x(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t)$$

- A partir da equação acima, pode-se perceber que o máximo deslocamento possível, para o caso de carregamento súbito, é duas vezes o deslocamento estático.



Response ratio plot for a step input.

II.2.4 – Resposta a um carregamento de impulso (impacto, explosão)



- Resposta máxima atingida muito rapidamente;
- As forças de amortecimento não absorvem energia significativa do sistema;
- Considera-se este tipo de resposta como não-amortecida;
- Para carregamentos de curta duração, por exemplo, com tempo de aplicação do carregamento (t_1) inferior a $\frac{1}{4}$ do período fundamental da estrutura, o deslocamento máximo depende principalmente da magnitude total do impulso aplicado, não sendo muito influenciado pela forma como o impulso é aplicado (triangular, meio-seno, retangular):

$$m \cdot \Delta \dot{x} = \int_0^{t_1} [p(t) - k \cdot x(t)] dt$$

$$m \cdot \Delta \dot{x} = \int_0^{t_1} p(t) dt + \int_0^{t_1} [-k \cdot x(t)] dt$$

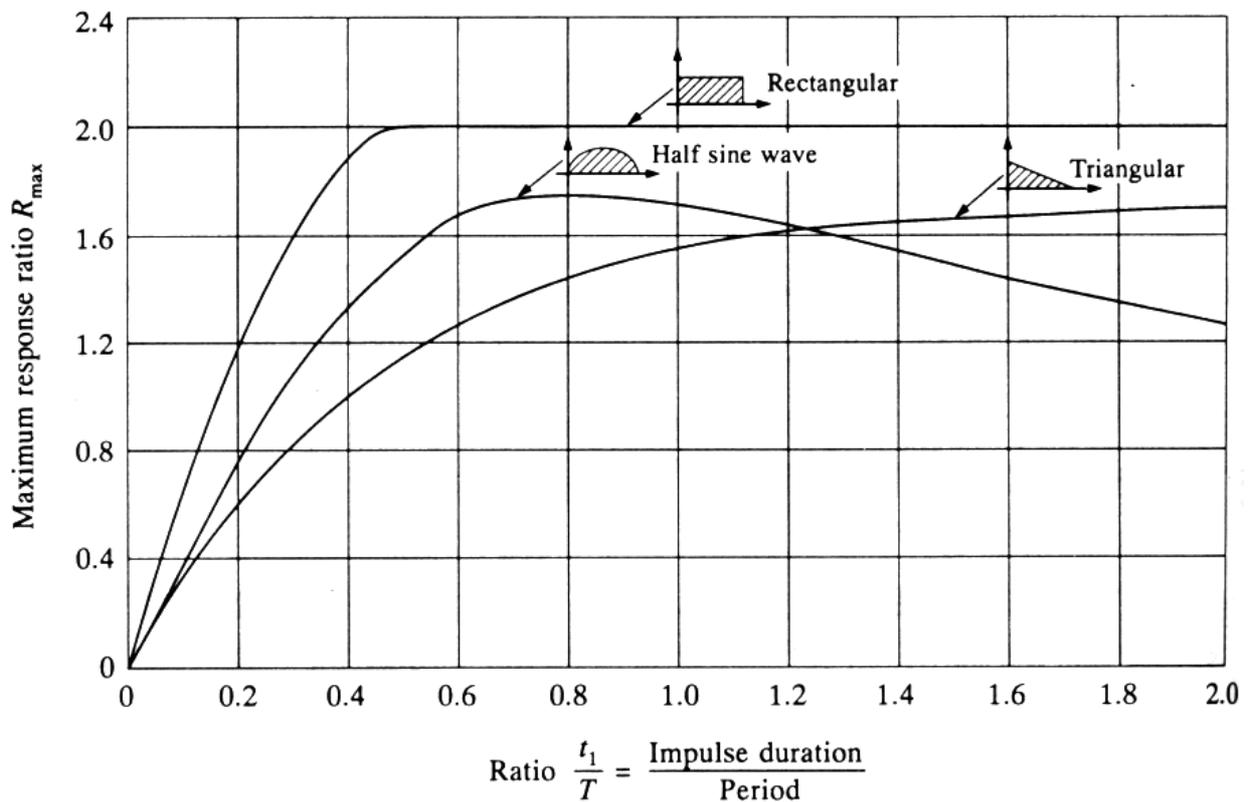
$$(t_1 \rightarrow 0) \Rightarrow m \cdot \Delta \dot{x} \approx \int_0^{t_1} p(t) dt$$

A resposta após o término da carga ($\bar{t} = t + t_1$) corresponde à vibração livre:

$$x(\bar{t}) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \text{sen } \omega \bar{t} + x(t_1) \text{cos } \omega \bar{t}$$

Mas: $\dot{x}(t_1) = \Delta \dot{x}$, e considerando que $x(t_1) \rightarrow 0$,

$$\Rightarrow x(\bar{t}) \approx \frac{1}{m \cdot \omega} \left(\int_0^{t_1} p(t) dt \right) \text{sen } \omega \bar{t}$$



Displacement-response spectra (shock spectra) for three types of impulse.

$$\Rightarrow I_{\text{retângulo}} = \int_0^{t_1} p(t) dt = p_0 \cdot t_1$$

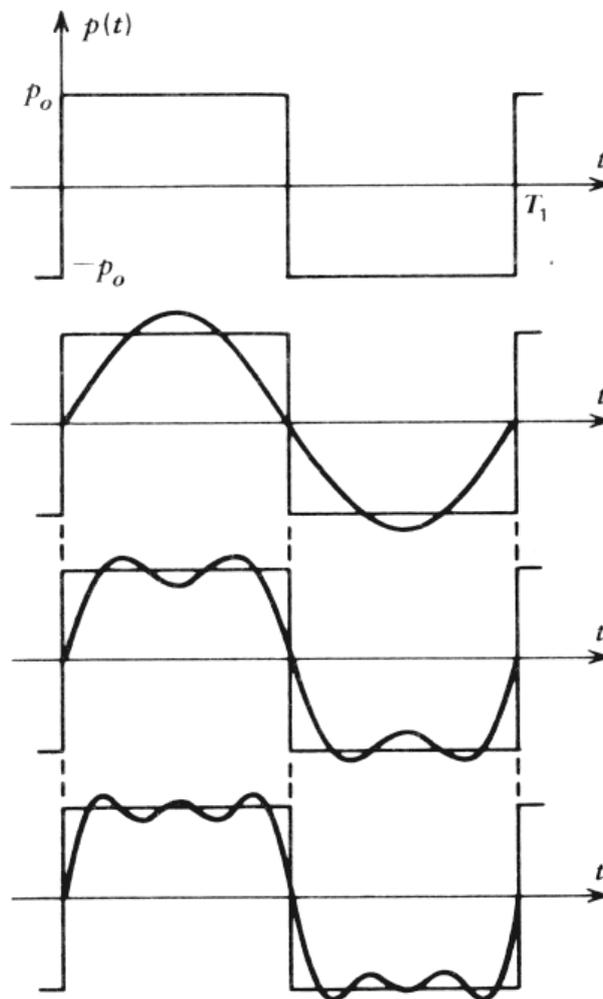
$$\Rightarrow I_{\text{meio-seno}} = \int_0^{t_1} p(t) dt = \int_0^{t_1} p_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t_1} t\right) dt = \frac{2}{\pi} p_0 \cdot t_1 = 0,64 \cdot p_0 \cdot t_1$$

$$\Rightarrow I_{\text{triângulo}} = \int_0^{t_1} p(t) dt = \frac{1}{2} p_0 \cdot t_1$$

- Logo, para $I_{\text{retângulo}} = 1,2 \Rightarrow I_{\text{meio-seno}} = 0,76$ e $I_{\text{triângulo}} = 0,6$, o que, analisado o gráfico, confirma que para carregamentos de curta duração ($t_1/T < 0,25$) o deslocamento máximo depende apenas da magnitude total do impulso aplicado, não importando sua forma (trecho retilíneo das curvas).

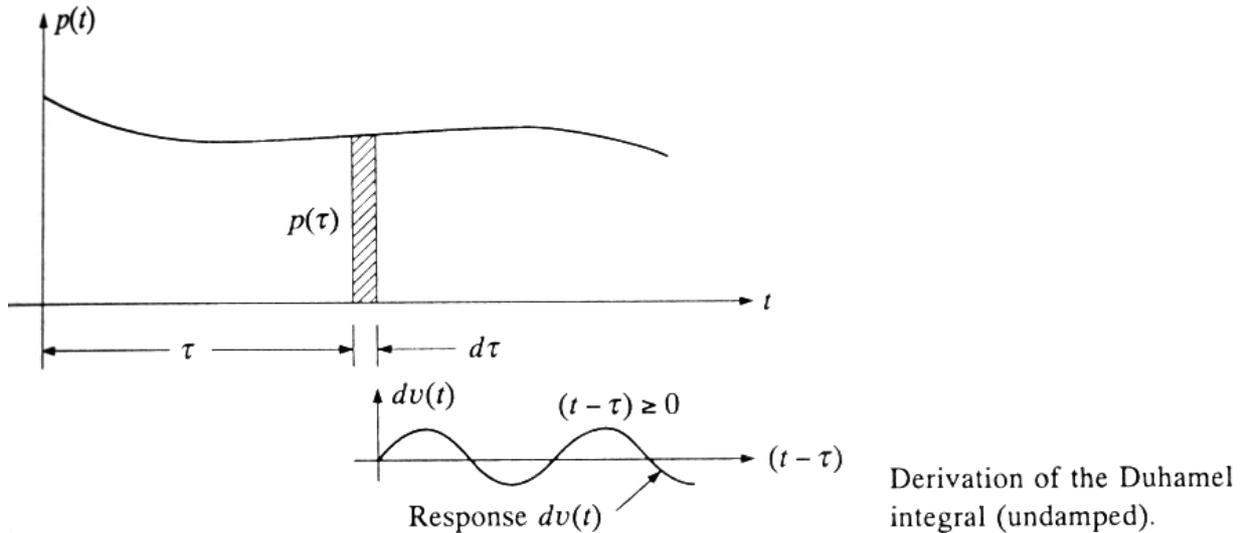
II.2.5 – Resposta a um carregamento dinâmico qualquer: Integral de Duhamel

- Carregamento periódico:
 1. Modelagem segundo série de Fourier;
 2. Combinação linear de carregamentos harmônicos;
 3. Análise do carregamento em frequências;
 4. Domínio da frequência: não pertence ao escopo deste curso.



Contribuição dos até 3 primeiros termos da série de Fourier para a representação do carregamento de onda retangular (“square wave”)

- Carregamento dinâmico genérico:



- Baseia-se na mesma aproximação dada para impulsos de curta duração;
- Carregamento arbitrário $p(t)$
- Seja $p(\tau)$ carregamento atuando no tempo $t = \tau$, durante o intervalo $d\tau$
- Corresponde a um impulso de intensidade $p(\tau) \cdot d\tau$:

$$\Rightarrow x(t - \tau) \approx \frac{1}{m \cdot \omega} [p(\tau) d\tau] \text{sen } \omega(t - \tau) \quad t \geq \tau$$

- Para $d\tau \rightarrow 0$ (a equação passa a ser exata):

$$\Rightarrow \delta x(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} [p(\tau) d\tau] \text{sen } \omega(t - \tau) \quad t \geq \tau$$

- Onde $\delta x(t)$ representa a resposta incremental no tempo a diferentes impulsos ao longo de um período $t \geq \tau$
- O carregamento no tempo pode ser considerado como uma sucessão de pequenos impulsos, cada um produzindo sua própria parcela de resposta.
- Sendo o regime elástico e linear, a resposta final pode ser obtida pela soma de todas as respostas diferenciais (método da superposição), obtendo-se a expressão da Integral de Duhamel:

$$x(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} \int_0^t p(\tau) \cdot \text{sen } \omega(t - \tau) \cdot d\tau \quad t \geq 0, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad \xi = 0$$

- Geralmente faz-se uso de métodos numéricos para a resolução desta integral;
- Pode-se entendê-la também como uma integral de convolução:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

- A partir de $\text{sen } \omega(t - \tau) = \text{sen } \omega t \cdot \cos \omega \tau - \cos \omega t \cdot \text{sen } \omega \tau$, temos, para fins de implementação numérica:

$$x(t) = \bar{A}(t) \cdot \text{sen } \omega t - \bar{B}(t) \cdot \cos \omega t$$

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} \int_0^t p(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} \int_0^t p(\tau) \text{sen } \omega \tau d\tau \quad t \geq 0, x(0) = \dot{x}(0) = 0, \xi = 0$$

- Para o caso de vibrações amortecidas:

$$x(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} \int_0^t p(\tau) \cdot \text{sen } \omega_D(t - \tau) \cdot e^{-\xi \omega(t - \tau)} \cdot d\tau \quad t \geq 0, x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

ou ainda:

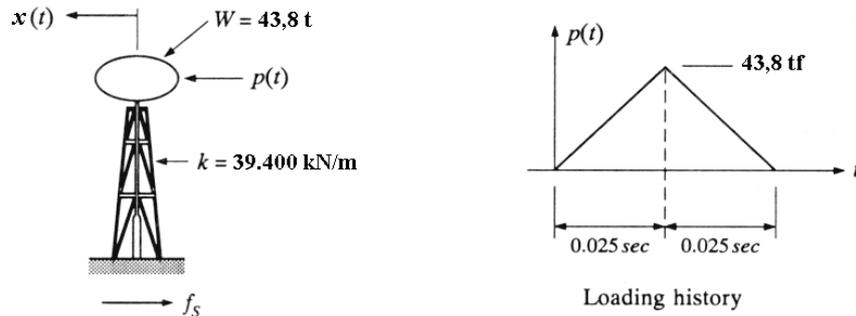
$$x(t) = A(t) \cdot \text{sen } \omega_D t - B(t) \cdot \cos \omega_D t$$

$$A(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D \cdot e^{\xi \omega t}} \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \tau} \cos \omega_D \tau d\tau$$

$$B(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D \cdot e^{\xi \omega t}} \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \tau} \text{sen } \omega_D \tau d\tau \quad t \geq 0, x(0) = \dot{x}(0) = 0, \xi = 0$$

- Exemplo:

Obter a força elástica resultante (no tempo) em uma caixa d'água elevada, pesando 43,8 toneladas, com rigidez igual a 39.400 kN/m, submetida à uma explosão com intensidade igual ao seu peso, com tempo total de duração de 0,05 segundos, apresentando um diagrama de intensidade triangular:



Water tower subjected to blast load.

Solução numérica, realizada no aplicativo MathCad®:

$$k := 39400 \quad m := 43.8$$

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega = 29.99$$

$$p(t) := \begin{cases} \left(\frac{430}{0.025} \cdot t \right) & \text{if } t < 0.025 \\ \left(860 - \frac{430}{0.025} \cdot t \right) & \text{if } 0.025 \leq t \leq 0.05 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\xi := 0.0$$

$$\omega d := \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad \omega d = 29.99$$

$$A(t) := \frac{1}{m \cdot \omega d \cdot e^{\xi \omega t}} \cdot \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \tau} \cdot \cos(\omega d \tau) d\tau$$

$$B(t) := \frac{1}{m \cdot \omega d \cdot e^{\xi \omega t}} \cdot \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \tau} \cdot \sin(\omega d \tau) d\tau$$

$$x(t) := A(t) \cdot \sin(\omega d t) - B(t) \cdot \cos(\omega d t)$$

$$\xi := 0.05$$

$$\omega d := \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad \omega d = 29.95$$

$$A(t) := \frac{1}{m \cdot \omega d \cdot e^{\xi \omega t}} \cdot \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \tau} \cdot \cos(\omega d \tau) d\tau$$

$$B(t) := \frac{1}{m \cdot \omega d \cdot e^{\xi \omega t}} \cdot \int_0^t p(\tau) \cdot e^{\xi \omega \tau} \cdot \sin(\omega d \tau) d\tau$$

$$x_d(t) := A(t) \cdot \sin(\omega d t) - B(t) \cdot \cos(\omega d t)$$

