Método dos Elementos Finitos

Formulação pela Teoria da Elasticidade
Elementos de Barra

Prof Moniz de Aragão

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Formulação pela Teoria da Elasticidade

Campo dos deslocamentos:

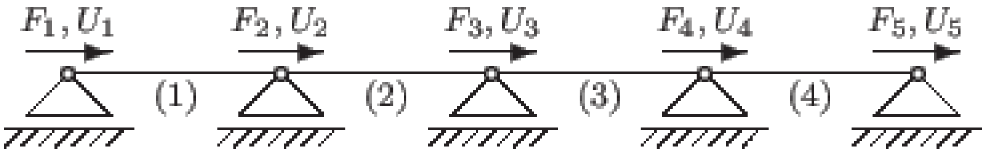
$$u(x,y) = u_1 \cdot N_1(x,y) + u_2 \cdot N_2(x,y) + \ldots$$

$$v(x,y) = v_1 \cdot N_1(x,y) + v_2 \cdot N_2(x,y) + \ldots$$

deslocamentos nodais

funções de interpolação

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = [N]\{\overline{u}\}$$



Deformações no plano:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underbrace{[L][N]}_{[B]}\{\overline{u}\}$$

operador diferencial aplicado
às funções de interpolação

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Formulação pela Teoria da Elasticidade

Tensões no plano:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\overline{u}\}$$

matriz constitutiva do material

Estado plano de tensões (EPT):

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Estado plano de deformações (EPD):

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Formulação pela Teoria da Elasticidade

Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$W_{\text{int}} = \int_{\Omega} (\delta\boldsymbol{\varepsilon})^t \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega$$

$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ = campo de deformações virtuais

forças de volume

forças distribuídas no contorno

$$W_{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \delta\mathbf{u} \, d\Gamma$$

$\delta\mathbf{u}$ = campo de deslocamentos virtuais

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Formulação pela Teoria da Elasticidade

Considerando como trabalho externo apenas o das forças nodais, tem-se:

$$W_{virtual} = W_{int} - W_{ext} = 0$$

$$\Rightarrow \int_V \delta\{\varepsilon\}^t \cdot \{\sigma\} dV - \delta\{\overline{u}\}^t \cdot \{\overline{F}\} = 0$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\overline{u}\}$$

$$\delta\{\varepsilon\} = [B] \cdot \delta\{\overline{u}\}$$

$$\Rightarrow \int_V \delta\{\overline{u}\}^t \cdot [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{\overline{u}\} dV - \delta\{\overline{u}\}^t \cdot \{\overline{F}\} = 0$$

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Formulação pela Teoria da Elasticidade

$$\Rightarrow \delta\{\bar{u}\}^t \left(\int_V \cdot [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{\bar{u}\}\, dV - \{\bar{F}\} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\int_V \cdot [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{\bar{u}\}\, dV - \{\bar{F}\} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\int_V \cdot [B]^t \cdot [D] \cdot [B]\, dV}}_{[K]} \{\bar{u}\} = \{\bar{F}\}$$

$$[K]$$

Matriz de Rigidez

$$\boxed{[K]\{\bar{u}\} = \{\bar{F}\}}$$

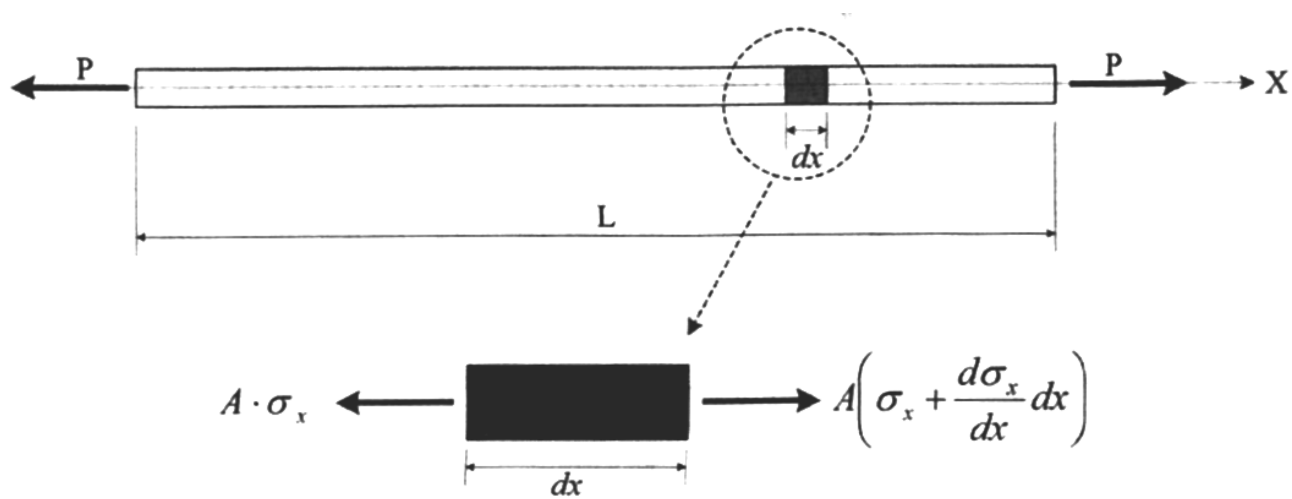
Deslocamento

Força

Formulação pela Teoria da Elasticidade
Elementos de Barra

Ref: Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas, 2011, Vaz, L. E., Ed Campus Elsevier, 1ª Ed., Rio de Janeiro.

Elemento de barra uniaxial:



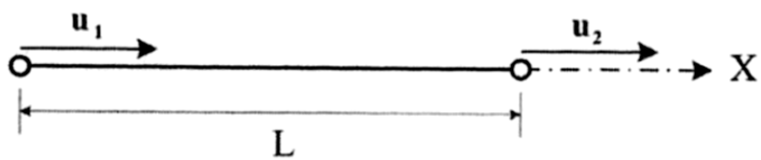
$$\Rightarrow \left(\sigma_x(x) + \frac{d\sigma_x(x)}{dx} dx \right) A - \sigma_x(x) A = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x(x)}{dx} A = 0 \qquad \Rightarrow EA \frac{d\varepsilon_x(x)}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow EA \frac{d^2 u_x(x)}{dx} = 0 \qquad \begin{cases} \sigma_x(x) A\big|_{x=0} = -P \\ \sigma_x(x) A\big|_{x=L} = P \end{cases}$$

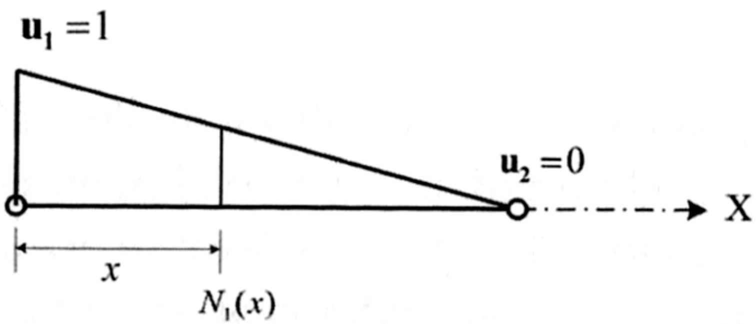
Formulação pela Teoria da Elasticidade
Elementos de barra

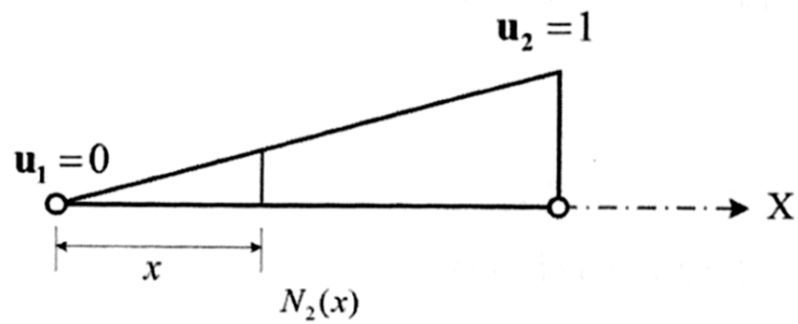
Elemento de barra uniaxial: $u(x) = u_1 \cdot N_1(x) + u_2 \cdot N_2(x)$

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$$



$$N_2(x) = \frac{x}{L}$$





$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\} = \left\{\frac{du}{dx}\right\} \Rightarrow [L] = \left[\frac{d}{dx}\right]$$

$$[B] = [L][N] = \frac{1}{L}\left[\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{L}\right)\right] = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$$

Elemento de barra uniaxial:

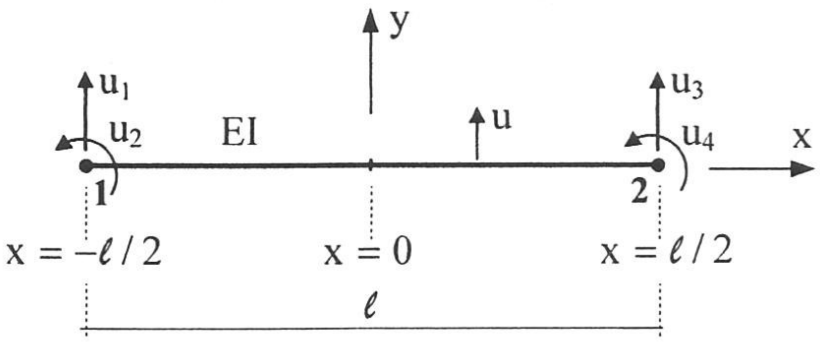
$$[K]=\int_V \left([B]^T[D][B]\right)dV=\frac{1}{L^2}\int_L \left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}[E]\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\right)A\,dx$$

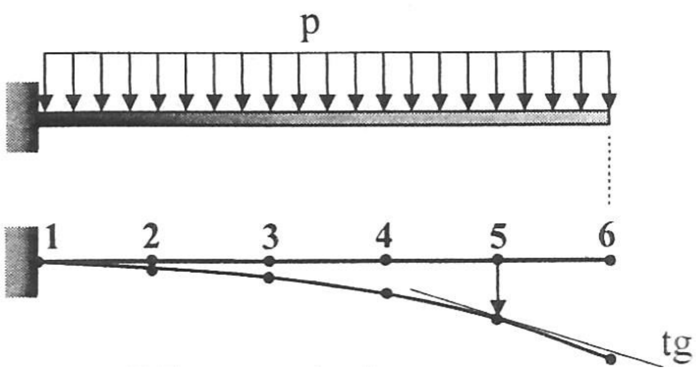
$$=\frac{EA}{L^2}\int_L \left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\right)dx=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{[K]=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}}$$

Formulação pela Teoria da Elasticidade
Elementos de barra

Elemento de Viga:





Elemento cúbico: $u = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$

$$\Rightarrow u = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{x=-\ell/2} \\ u_{,x|x=-\ell/2} \\ u_{x=\ell/2} \\ u_{,x|x=\ell/2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\ell/2 & \ell^2/4 & -\ell^3/8 \\ 0 & 1 & -\ell & 3\ell^2/4 \\ 1 & \ell/2 & \ell^2/4 & \ell^3/8 \\ 0 & 1 & \ell & 3\ell^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

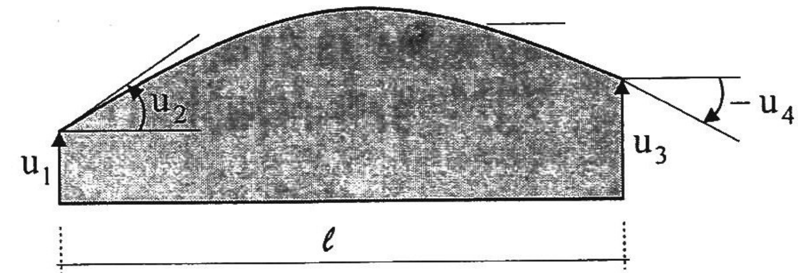
Formulação pela Teoria da Elasticidade

Elementos de barra

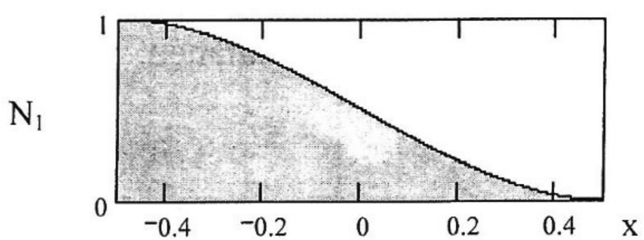
Elemento de Viga:

$$\mathrm{u} = \mathrm{N}_1\mathrm{u}_1 + \mathrm{N}_2\mathrm{u}_2 + \mathrm{N}_3\mathrm{u}_3 + \mathrm{N}_4\mathrm{u}_4$$

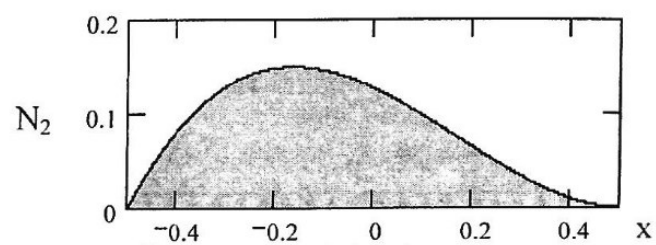
$$\Rightarrow u = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\ell/2 & \ell^2/4 & -\ell^3/8 \\ 0 & 1 & -\ell & 3\ell^2/4 \\ 1 & \ell/2 & \ell^2/4 & \ell^3/8 \\ 0 & 1 & \ell & 3\ell^2/4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$



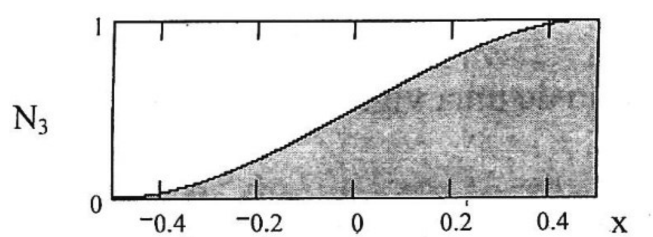
$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$



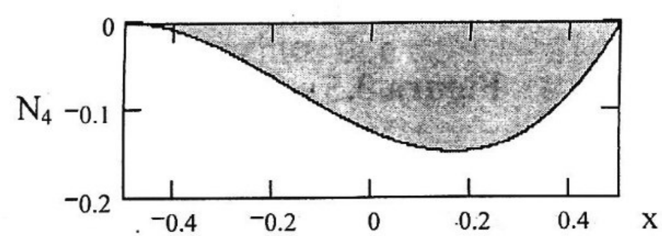
$$N_2 = x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$



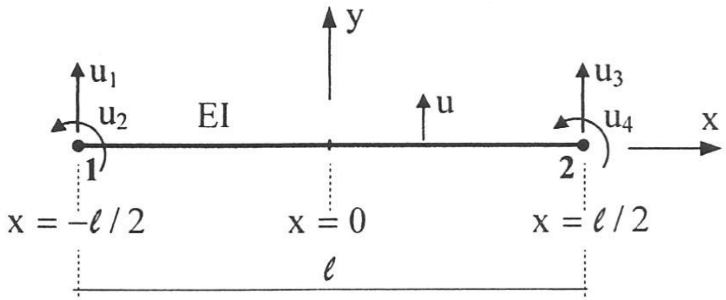
$$N_3 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

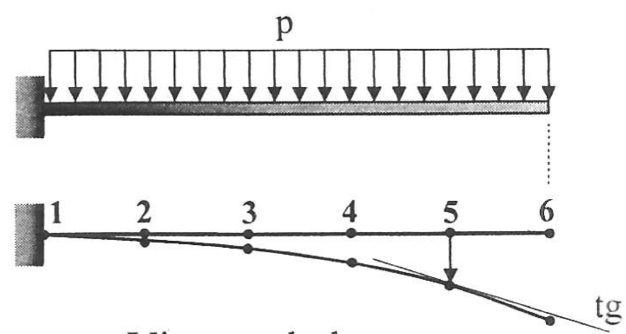


$$N_4 = -\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

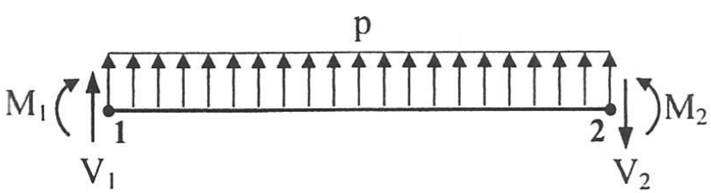


Elemento de Viga:

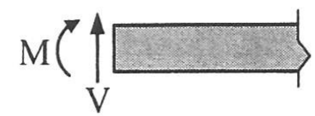




Viga em balanço.



Elemento finito.



Convenção dos esforços seccionais.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\} = -y\frac{d^2 v}{dx^2} \Rightarrow [L] = \left[-y\frac{d^2}{dx^2}\right],$$

Formulação pela Teoria da Elasticidade
Elementos de barra

Elemento de Viga:

$$[B]=[L][N]=-y\begin{bmatrix}\dfrac{d^2N_1}{dx^2} & \dfrac{d^2N_2}{dx^2} & \dfrac{d^2N_3}{dx^2} & \dfrac{d^2N_4}{dx^2}\end{bmatrix}$$

$$-y\begin{bmatrix}-\dfrac{6}{L^2}+\dfrac{12x}{L^2} & -\dfrac{4}{L}+\dfrac{6x}{L^2} & \dfrac{6}{L^2}-\dfrac{12x}{L^3} & -\dfrac{2}{L}+\dfrac{6x}{L^2}\end{bmatrix}$$

$$[K]=\int_V\left([B]^T[D][B]\right)dV$$

$$=E\int_L\left\{\left(\int_A y^2dA\right)[B]^t[B]\right\}dx$$

$$=EJ\int_L\left\{[B]^t[B]\right\}dx$$

$$\Rightarrow [K]=\frac{EJ}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & 2L^2 & -6l & 4l^2\end{bmatrix}$$