SEÇÃO DE ENSINO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO

Método dos Elementos Finitos

Elementos Finitos Unidimensionais

Prof: Moniz de Aragão

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

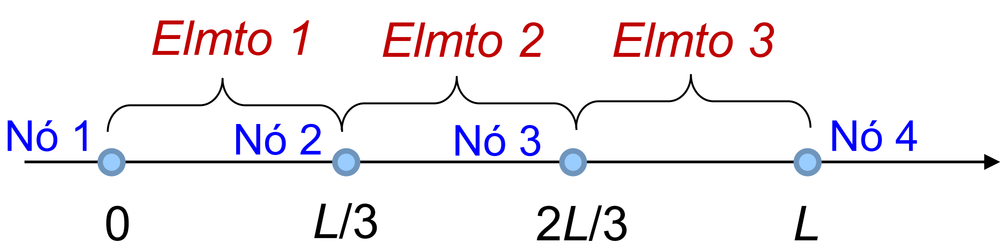
Determinar $U(x)$ tal que:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - U(x) = 0$$ para $0 < x < L$

com as condições de contorno: $$\begin{cases} U(0) = 0 \\ \dfrac{dU(1)}{dx} = 1 \end{cases}$$

Solução:

1) Discretização do domínio:

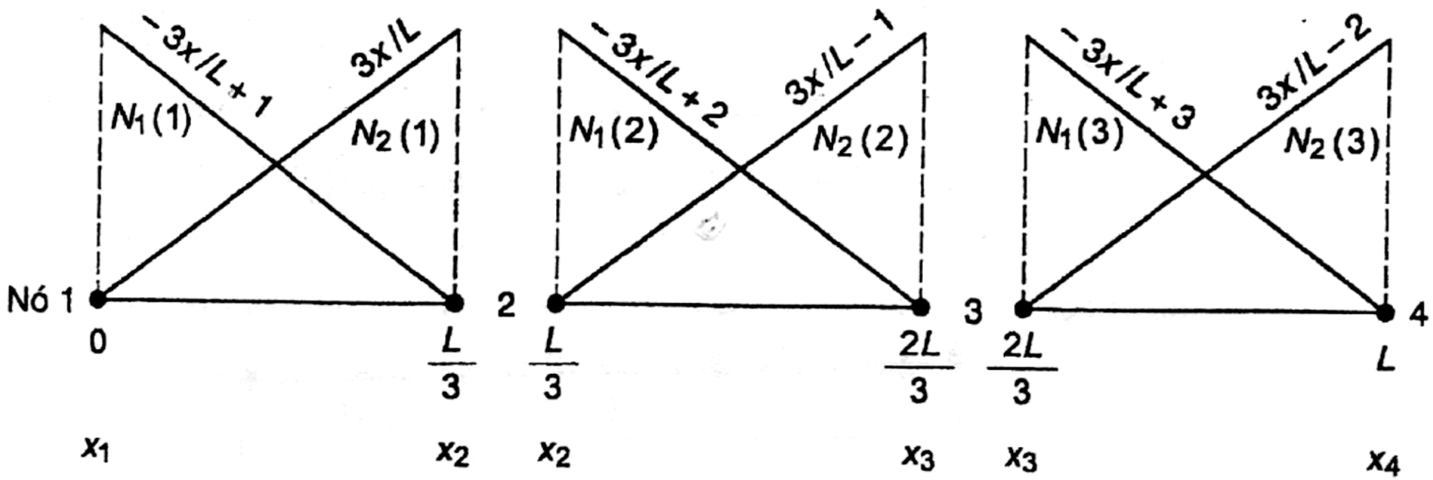


		Numeração dos nós		
		1	2	Local
Elemento	(1)	1	2	Global
	(2)	2	3	
	(3)	3	4	

conectividade / incidência

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

2) Determinação das **funções de forma**:



$$N_1^{(1)} = \frac{-3x}{L} + 1 \qquad N_1^{(2)} = \frac{-3x}{L} + 2 \qquad N_1^{(3)} = \frac{-3x}{L} + 3$$

$$N_2^{(1)} = \frac{3x}{L} \qquad N_2^{(2)} = \frac{3x}{L} - 1 \qquad N_2^{(3)} = \frac{3x}{L} - 2$$

Ref.: Elementos Finitos: Formulação Residual de Galerkin, 2010, Mello, F. M., Castanheira, P., Ed. Sílabo, 1ª Ed., Lisboa.

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

3) Aplicação da **equação dos resíduos ponderados**:

$$\int_0^1 \left(\frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d\hat{w}}{dx} - \underset{\hat{u}}{\underset{\downarrow}{f}}\,\hat{w} \right) dx = \frac{d\hat{u}}{dx}(1)\hat{w}(1) - \frac{d\hat{u}}{dx}(0)\hat{w}(0)$$

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x)\, u_j \qquad \hat{w}(x) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x)\, w_j \qquad \hat{w}(0) = u(0) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\int_0^1 \left(\frac{dN_j}{dx}\frac{dN_i}{dx} - N_j N_i \right) dx \right] u_j = N_i(1) \qquad (i = 1,2)$$

Ref.: Elementos Finitos: Formulação Residual de Galerkin, 2010, Mello, F. M., Castanheira, P., Ed. Sílabo, 1ª Ed., Lisboa.

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

3) Aplicação da **equação dos resíduos ponderados** (cont.):

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\int_0^1\left(\frac{dN_j}{dx}\frac{dN_i}{dx}-N_jN_i\right)dx\right]u_j=N_i(1)\qquad (i=1,2)$$

$$\int_{x_i}^{x_j}\begin{bmatrix}\left(\frac{dN_i}{dx}\right)^2-N_i^2 & \left(\frac{dN_i}{dx}\right)\left(\frac{dN_j}{dx}\right)-N_i\,N_j\\ \left(\frac{dN_i}{dx}\right)\left(\frac{dN_j}{dx}\right)-N_i\,N_j & \left(\frac{dN_j}{dx}\right)^2-N_j^2\end{bmatrix}dx\begin{Bmatrix}U_i\\ U_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}N_i\\ N_j\end{Bmatrix}_{x=L}$$

Ref.: Elementos Finitos: Formulação Residual de Galerkin, 2010, Mello, F. M., Castanheira, P., Ed. Sílabo, 1ª Ed., Lisboa.

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

3) Aplicação da **equação dos resíduos ponderados** (cont.):

Para o elemento 1 tem-se $i = 1$, $j = 1$ e

$$\mathbf{K}^1 = \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{dN_1^{(1)}}{dx}\right)^2 - \left(N_1^{(1)}\right)^2 & \dfrac{dN_1^{(1)}}{dx}\dfrac{dN_2^{(1)}}{dx} - N_1^{(1)} N_2^{(1)} \\ \dfrac{dN_1^{(1)}}{dx}\dfrac{dN_2^{(1)}}{dx} - N_1^{(1)} N_2^{(1)} & \left(\dfrac{dN_2^{(1)}}{dx}\right)^2 - \left(N_2^{(1)}\right)^2 \end{bmatrix} dx$$

$$\mathbf{K}^1 = \int_0^{\frac{L}{3}} \begin{bmatrix} \dfrac{9}{L^2} - \left(-\dfrac{3x}{L} + 1\right)^2 & \left(-\dfrac{3}{L}\right)\left(\dfrac{3}{L}\right) - \left(-\dfrac{3x}{L} + 1\right)\left(\dfrac{3x}{L}\right) \\ \left(-\dfrac{3}{L}\right)\left(\dfrac{3}{L}\right) - \left(-\dfrac{3x}{L} + 1\right)\left(\dfrac{3x}{L}\right) & \dfrac{9}{L^2} - \left(\dfrac{3x}{L}\right)^2 \end{bmatrix} dx$$

Ref.: Elementos Finitos: Formulação Residual de Galerkin, 2010, Mello, F. M., Castanheira, P., Ed. Sílabo, 1ª Ed., Lisboa.

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

3) Aplicação da **equação dos resíduos ponderados** (cont.):

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{\ell} - \dfrac{\ell}{9} & -\dfrac{\ell}{18} - \dfrac{3}{\ell} \\[2ex] -\dfrac{\ell}{18} - \dfrac{3}{\ell} & \dfrac{3}{\ell} - \dfrac{\ell}{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3}{\ell} - \dfrac{\ell}{9} & -\dfrac{\ell}{18} - \dfrac{3}{\ell} \\[2ex] -\dfrac{\ell}{18} - \dfrac{3}{\ell} & \dfrac{3}{\ell} - \dfrac{\ell}{9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\[2ex] U_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\[2ex] 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3}{\ell} - \dfrac{\ell}{9} & -\dfrac{\ell}{18} - \dfrac{3}{\ell} \\[2ex] -\dfrac{\ell}{18} - \dfrac{3}{\ell} & \dfrac{3}{\ell} - \dfrac{\ell}{9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\[2ex] U_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\[2ex] 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3}{\ell} - \dfrac{\ell}{9} & -\dfrac{\ell}{18} - \dfrac{3}{\ell} \\[2ex] -\dfrac{\ell}{18} - \dfrac{3}{\ell} & \dfrac{3}{\ell} - \dfrac{\ell}{9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\[2ex] U_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\[2ex] 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{L}{9} + \dfrac{3}{L} & -\dfrac{L}{18} - \dfrac{3}{L} & \bullet & \bullet \\[2ex] -\dfrac{L}{18} - \dfrac{3}{L} & \begin{matrix} -\dfrac{L}{9} + \dfrac{3}{L} \\ -\dfrac{L}{9} + \dfrac{3}{L} \end{matrix} & -\dfrac{L}{18} - \dfrac{3}{L} & \bullet \\[4ex] \bullet & -\dfrac{L}{18} - \dfrac{3}{L} & \begin{matrix} -\dfrac{L}{9} + \dfrac{3}{L} \\ -\dfrac{L}{9} + \dfrac{3}{L} \end{matrix} & -\dfrac{L}{18} - \dfrac{3}{L} \\[4ex] \bullet & \bullet & -\dfrac{L}{18} - \dfrac{3}{L} & -\dfrac{L}{9} + \dfrac{3}{L} \end{bmatrix}$$

$k^{(1)}$ $k^{(2)}$ $k^{(3)}$

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

3) Aplicação da **equação dos resíduos ponderados** (cont.):

$$[K]\cdot\{U\}=\{p\}$$

$$\sum_{x=1}^{4}\int_{\Delta_e}\left(\frac{dN_i}{dx}\,\frac{dN_j}{dx}-N_i\;N_j\right)dx\;U_i\;=N_j\big|_{x=L}\qquad \text{com } j=1,2,3,4$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{e}\;=\int_{\Delta e}\left(\frac{dN_i}{dx}\,\frac{dN_j}{dx}-N_i\;N_j\right)dx\qquad 1\le i,\;\; j\le 4$$

$$\mathbf{U}_i^{e}\;=U_i\qquad i=1,2,3,4$$

$$\mathbf{p}_i^{e}\;=[N_i]_{x=L}\qquad i=1,2,3,4$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{L}{9}+\frac{3}{L} & -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} & -\frac{2L}{9}+\frac{6}{L} & -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} & -\frac{2L}{9}+\frac{6}{L} & -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} \\ 0 & 0 & \frac{L}{18}-\frac{3}{L} & -\frac{L}{9}+\frac{3}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

4) Aplicação das **condições de contorno**:

$$U(0) = 0$$

$$\Rightarrow U_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{-\frac{L}{9}+\frac{3}{L}} & \boxed{-\frac{L}{18}-\frac{3}{L}} & 0 & 0 \\ \boxed{-\frac{L}{18}-\frac{3}{L}} & -\frac{2L}{9}+\frac{6}{L} & -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} & -\frac{2L}{9}+\frac{6}{L} & -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} \\ 0 & 0 & \frac{L}{18}-\frac{3}{L} & -\frac{L}{9}+\frac{3}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2L}{9}+\frac{6}{L} & -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} & -\frac{2L}{9}+\frac{6}{L} & -\frac{L}{18}-\frac{3}{L} \\ 0 & 0 & \frac{L}{18}-\frac{3}{L} & -\frac{L}{9}+\frac{3}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

4) Solução do **sistema de equações lineares**:

Fazendo L=1...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,777777778 & -3,055555556 & 0 \\ 0 & -3,055555556 & 5,777777778 & -3,055555556 \\ 0 & 0 & -3,055555556 & 2,888888889 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 0,601444793$$

$$U_3 = 1,137277427$$

$$U_4 = 1,549043432$$

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

5) Obtenção das expressões de aproximação no domínio:

Para cada um dos três elementos podemos escrever a respectiva função de aproximação:

$$U^{(1)} = N_1^{(1)}\, U_1 + N_2^{(1)}\, U_2$$

$$U^{(2)} = N_1^{(2)}\, U_2 + N_2^{(2)}\, U_3$$

$$U^{(3)} = N_1^{(3)}\, U_3 + N_2^{(3)}\, U_4$$

$$U^{(1)} = \frac{3x}{L}(0{,}60145)$$

$$U^{(2)} = \left(-\frac{3x}{L} + 3\right)(0{,}60145) + \left(\frac{3x}{L} - 1\right)(1{,}13728)$$

$$U^{(3)} = \left(-\frac{3x}{L} + 3\right)(1{,}13728) + \left(\frac{3x}{L} - 2\right).(1{,}54904)$$

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Exemplo

Solução exata

X

Solução aproximada