Método dos Elementos Finitos

Introdução

Prof: Moniz de Aragão

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Definições

Procedimento geral de discretização de problemas da mecânica do contínuo colocado por expressões definidas matematicamente.

(Zienkiewicz, 1967/2013)

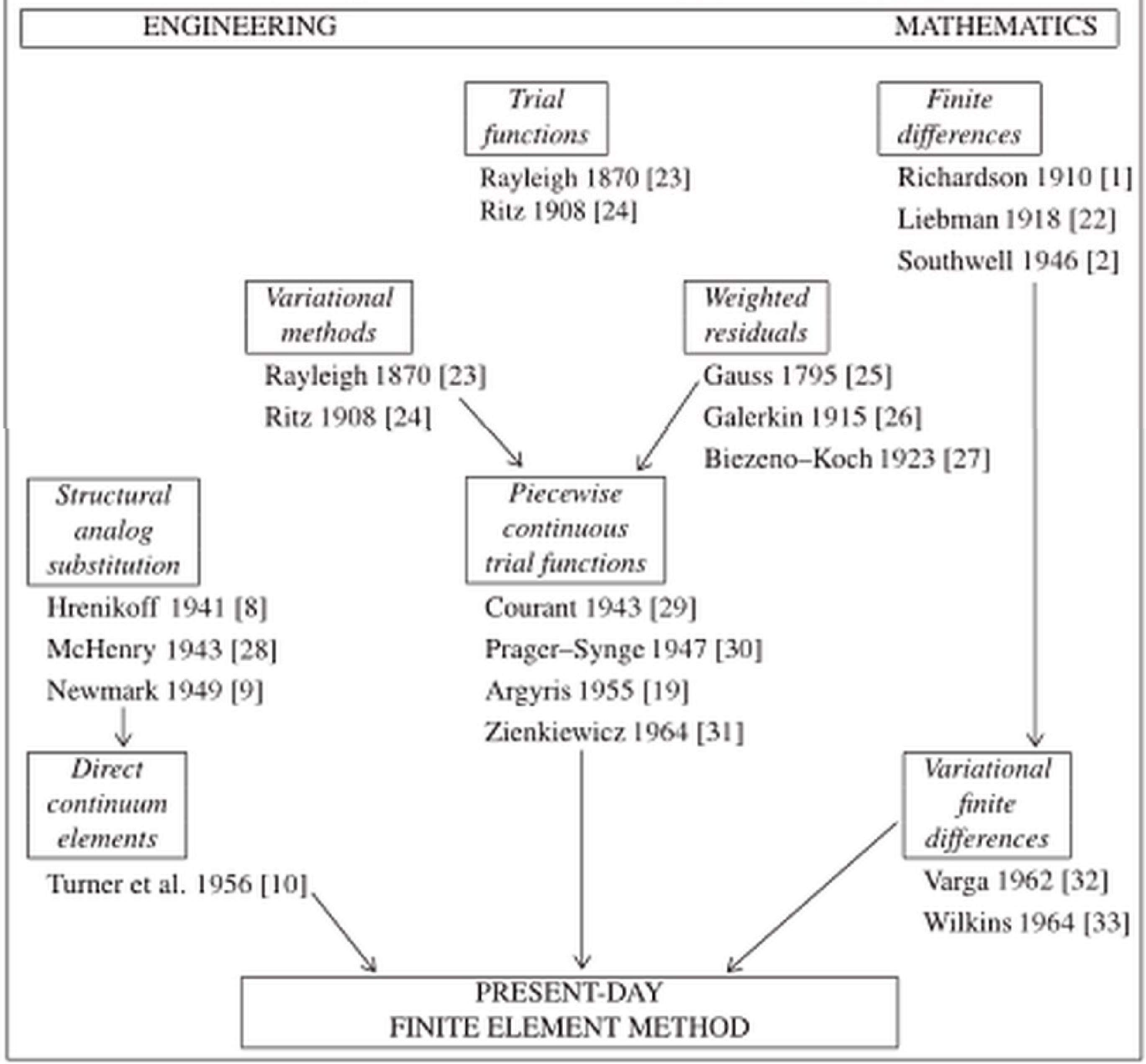
Permite a análise do comportamento de qualquer sistema físico regido por equações diferenciais ou integrais, como da mecânica dos sólidos deformáveis, da condução do calor e de massa, e do eletromagnetismo, por exemplo.

(Soriano, 2009)

Conjunto de técnicas numéricas de aproximação que permite que o problema da integração das equações diferenciais seja substituído por um sistema de equações algébricas.

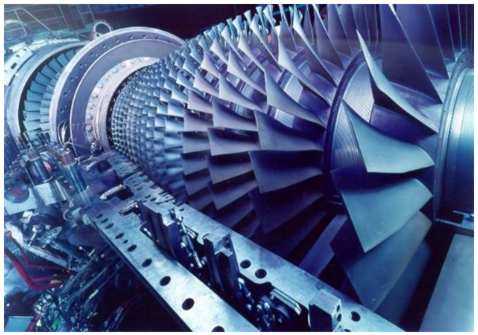
(Mello e Castanheira, 2010)

Table 1.1 History of Approximate Methods [1,2,8–10,19,22–33]



Ref: Zienkiewicz, 2013

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Diferença prática para o Método das Diferenças Finitas



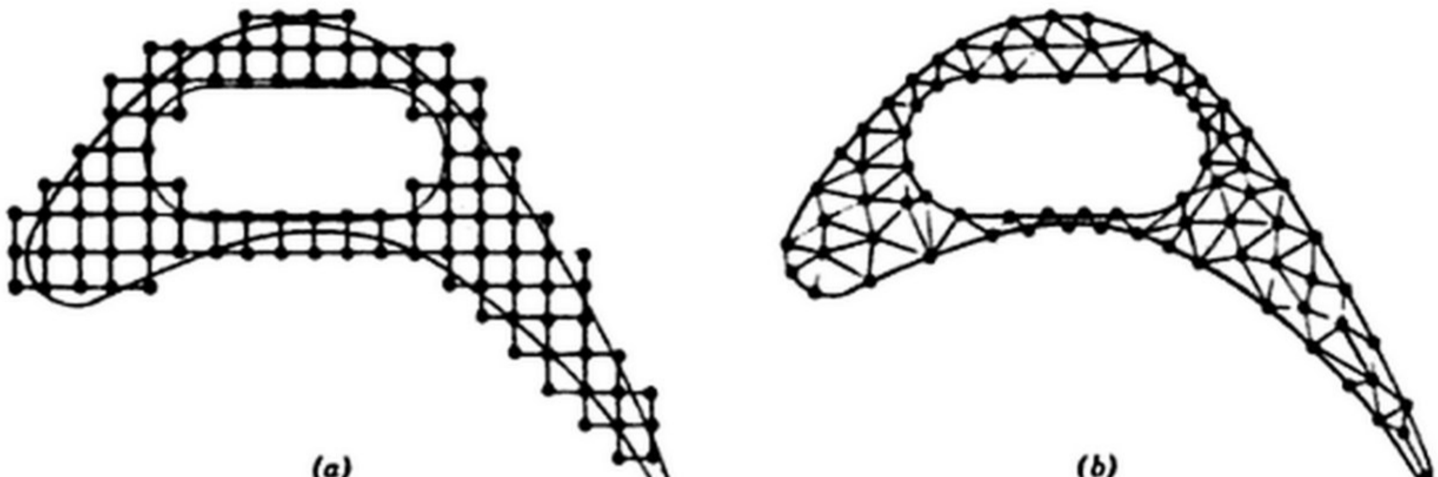


Figure 1.1 (*a*) Finite difference and (*b*) finite element discretizations of a turbine blade profile.

Ref.: Huebner *et al*, 2001

Introdução do Método dos Elementos Finitos

Funcional

É uma grandeza escalar, função de funções, que assume um valor particular dependente da função nele utilizada.

Pode ser escrita sob a forma de uma equação integral definida, contendo uma certa função genérica, como por exemplo:

$$\boldsymbol{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') \cdot dx$$

onde x é a variável independente, $y = y(x)$, e $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Dados x_1 e x_2, o valor de $\boldsymbol{I}$ depende da função $y(x)$ utilizada.

Introdução do Método dos Elementos Finitos

Funcionais (continuação)

- As funções devem ser contínuas pelo menos até a ordem (m-1), isto é, funções de classe C^{m-1} , para que existam as derivadas até a ordem m e a integral da equação acima possa ser calculada.
- Além disto, estas funções devem atender às **condições geométricas de contorno**.
- Tais funções são ditas admissíveis e constituem o espaço do domínio do funcional.
- Diz-se que o funcional é um **operador** que mapeia as **funções** admissíveis no **espaço dos números reais**.
- O Cálculo Variacional estabelece que, entre todas as funções admissíveis, a que **estacionariza** o funcional (fornecendo um valor mínimo ou máximo) é a solução do problema regido por este funcional.

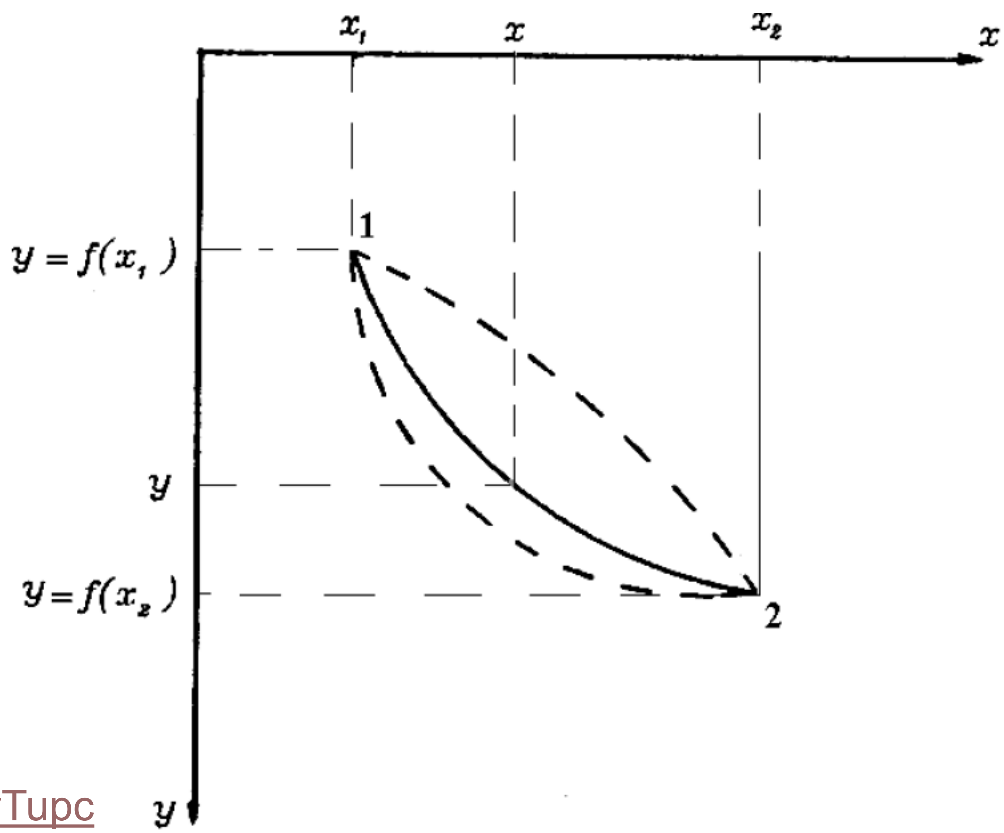
Introdução do Método dos Elementos Finitos

Funcionais (continuação)

O Problema da Braquistócrona (tempo mais curto)
Bernoulli, 1697

Uma partícula, partindo do repouso, cai do ponto 1 ao ponto 2, escorregando sem atrito sobre a curva 1-2.

Queremos determinar qual é a curva que corresponde ao mínimo tempo de queda:



https://www.youtube.com/watch?v=Bh6-zKwTupc

O Problema da Braquistócrona (continuação)

O funcional a ser extremizado é:

$$I = \int_{(1)}^{(2)} dt$$

Sendo a velocidade $v = ds/dt$, então $dt = ds/v$.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

O Problema da Braquistócrona (continuação)

A velocidade pode ser determinada pelo princípio da conservação de energia:

$$m \cdot g \cdot y_2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot (y_2 - y)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

Portanto, o tempo de queda é:

$$\boldsymbol{I} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

Tem-se a extremizar um funcional com uma variável independente (x) , uma função (y) e sua derivada primeira.

Variação de um Funcional

O operador variação δ

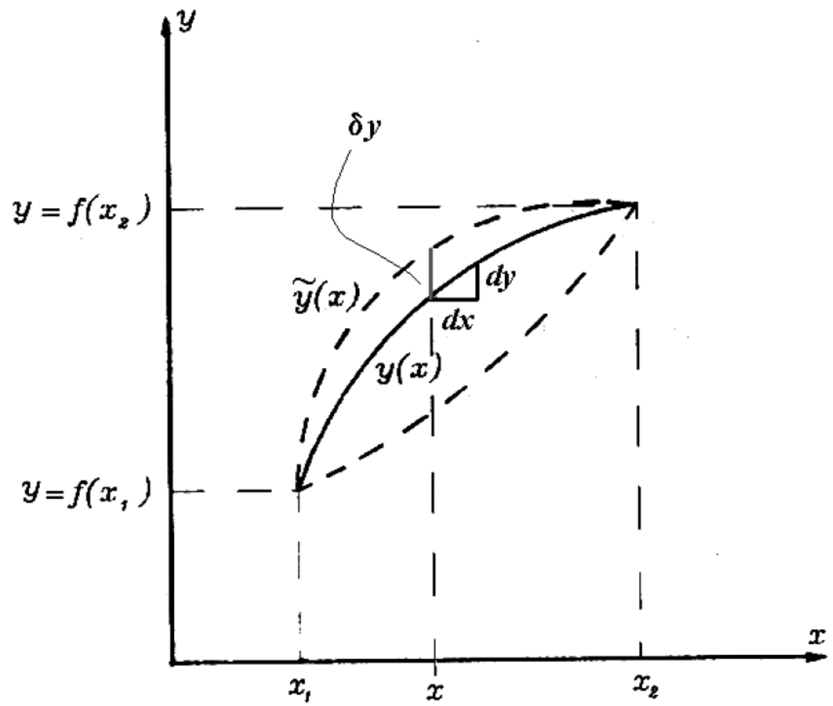
O valor assumido por um funcional I depende do caminho escolhido entre os pontos 1 e 2 (ou seja, da função escolhida).

Admitamos a existência de um caminho que extremiza I com relação aos outros caminhos vizinhos:

$y(x) \rightarrow$ caminho extremizante

$\tilde{y}(x) \rightarrow$ caminhos variados

$$\tilde{y}(x) - y(x) = \delta y$$



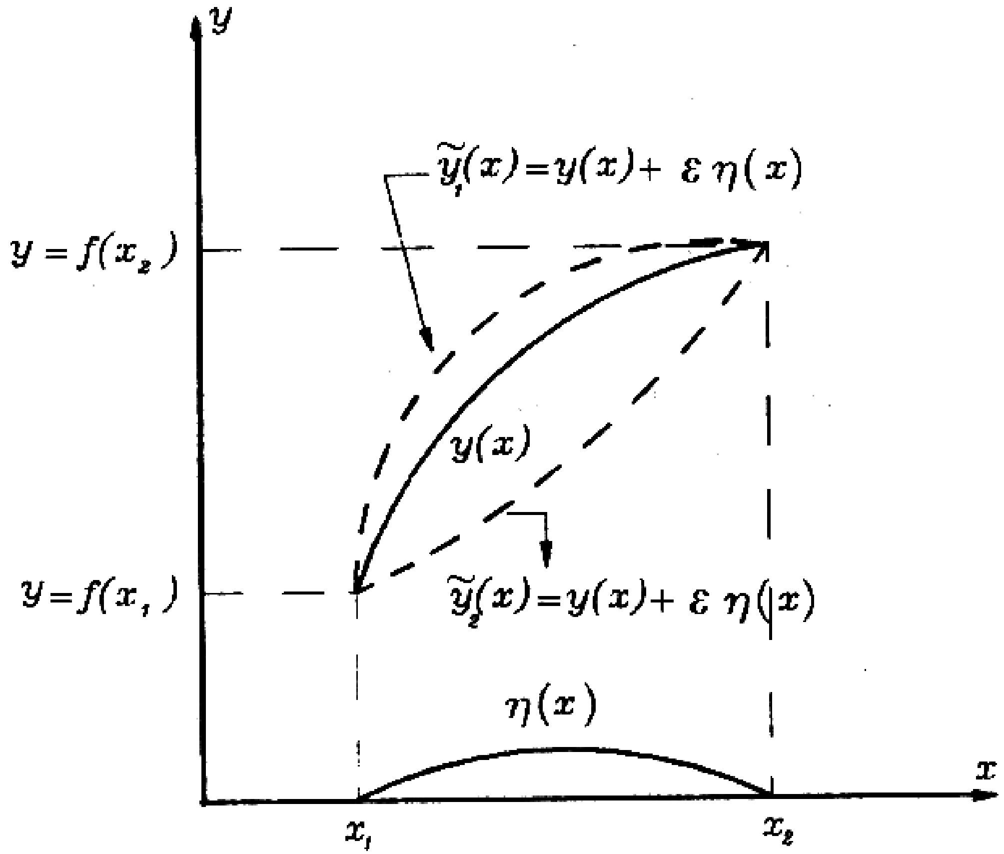
Variação de um Funcional

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon \cdot \eta(x)$$

função derivável arbitrariamente escolhida

$$\delta y = \tilde{y} - y = \varepsilon \cdot \eta$$

$$\delta y' = \tilde{y}' - y' = \varepsilon \cdot \eta'$$



$\eta(x_1) = 0$ $\eta(x_2) = 0$

Então o caminho variado coincide com o extremizante em x_1 e x_2

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Variação de um Funcional

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y') \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') \cdot dx + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right] \cdot dx}_{\delta^{(1)} I} + \int_{x_1}^{x_2} O(\delta^2) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \tilde{I} = I + \delta^{(T)} I$$

onde $\delta^{(1)} I =$ 1ª variação de I

$\delta^{(T)} I =$ variação total de I $\Rightarrow \delta^{(T)} I = \tilde{I} - I$

$$\Rightarrow \delta^{(1)} I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \cdot \delta y \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Equação de Euler-Lagrange

Método de Rayleigh-Ritz:

$$y(x) \cong \tilde{y}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \phi_i(x)$$

onde: $\phi_i(x)$ são funções linearmente independentes denominadas de <u>funções de forma</u>;

a_i são denominados de parâmetros de deslocamentos, ou coeficientes de Ritz.

O funcional se converte então em uma função dos coeficientes a_i ⇨ $\boldsymbol{I}[\tilde{y}_n(x)] = \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

⇨ é mais fácil escolher funções admissíveis que conduzem a bons resultados, do que estacionarizar o funcional e resolver analiticamente as equações diferenciais correspondentes.

$$\delta \boldsymbol{I}[\tilde{y}_n(x)] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \boldsymbol{I}}{\partial a_i} \delta a_i \right) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0 \, , \, i = 1 \ldots n$$

Método de Galerkin:

Utiliza diretamente a equação diferencial que descreve matematicamente o problema a ser analisado, não requerendo a existência de um funcional:

$$\boldsymbol{L}\, y = f$$

onde ***L*** é um operador (diferencial) e a função ***y*** satisfaz certas condições de contorno.

Ao fazer uso de funções aproximadoras, a solução encontrada apresenta resíduos em relação à solução exata:

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \phi_i$$

$$\Rightarrow \quad \in = \boldsymbol{L}\,\tilde{y} - f$$

condição de <u>ortogonalidade</u> entre as funções:

$$\Rightarrow \quad \int_V \left(\boldsymbol{L}\,\tilde{y} - f\right) \cdot \phi_i \cdot dV = 0$$

Resolvendo-se cada uma das equações descritas, obtém-se um sistema de *n* equações, com *n* incógnitas.

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Método de Galerkin - Exemplo

Determinar $u(x)$ tal que:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u(x) = 0$$ com as condições de contorno: $$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

Funções **aproximadoras**:

$$\tilde{u}_1(x) = x + \sum_{k=1}^{n} a_i sen(k\pi x)$$

$$\tilde{u}_1(x) = x + a_1 sen(\pi x) + a_2 sen(2\pi x)$$ (para n = 2)

satisfeitas as **condições de contorno**: $$\begin{cases} \tilde{u}_1(0) = 0 \\ \tilde{u}_1(1) = 1 \end{cases}$$

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Método de Galerkin - Exemplo

Cálculo do **resíduo**:

$$R = \frac{d^2 u_1}{dx^2} - u(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left[x + a_1 sen(\pi x) + a_2 sen(2\pi x)\right] - x - a_1 sen(\pi x) - a_2 sen(2\pi x)$$

$$\Rightarrow R = -a_1 \pi^2 sen(\pi x) - 4a_2 \pi^2 sen(2\pi x) - x - a_1 sen(\pi x) - a_2 sen(2\pi x)$$

Equação dos **resíduos ponderados** no método de Galerkin:

$$\int_0^1 R(x)\, N_k(x)\, dx = 0 \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 R(x)\,\mathrm{sen}(\pi x)\, dx = 0 & \Rightarrow -2 + a_1\pi^3 + a_1\pi = 0 \\ & \Rightarrow a_1 = 0{,}058568 \\ \displaystyle\int_0^1 R(x)\,\mathrm{sen}(2\pi x)\, dx = 0 & \Rightarrow -2 + a_1\pi^3 + a_1\pi = 0 \\ & \Rightarrow a_2 = 0{,}007864 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{u}_1(x) = x + 0{,}058568 \cdot sen(\pi x) + 0{,}007864 \cdot sen(2\pi x)}$$

Introdução do Método dos Elementos Finitos
Método de Galerkin - Exemplo

Outras funções **aproximadoras**: $N_k = x^k(1-x)$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u}_2(x) = x + a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$$

Também satisfeitas as **condições de contorno**: $\begin{cases} \tilde{u}_2(0) = 0 \\ \tilde{u}_2(1) = 1 \end{cases}$

$$\int_0^1 R(x)\,N_k(x)\,dx = 0 \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 R(x)\,x(1-x)\,dx = 0 & \Rightarrow a_1 = -\dfrac{69}{473} \\ \displaystyle\int_0^1 R(x)\,x^2(1-x)\,dx = 0 & \Rightarrow a_2 = -\dfrac{7}{43} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{u}_2(x) = x - \frac{69}{473}x(1-x) - \frac{7}{43}x^2(1-x)}$$

O Método dos Elementos Finitos (MEF), assim como o método de Galerkin, resolve por aproximação problemas regidos por equações diferenciais ou integrais.

São utilizadas aproximações do tipo: $\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x) u_j$

onde $\boldsymbol{N}_j$ são **funções aproximadoras** e $\boldsymbol{u}_j$ são coeficientes constantes.

Como $\hat{u}(x)$ é por definição uma **solução aproximada**, a equação não é exatamente satisfeita, gerando um **resíduo** $R(x)$ no domínio.

Ref.: Ribeiro, F. L. B. , 2013, Introdução ao Método dos Elementos Finitos, Notas de Aula, Programa de Engenharia Civil - COPPE/UFRJ

Introdução do Método dos Elementos Finitos

Exemplo: PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL

Como $\hat{u}(x)$ é por definição uma **solução aproximada**, a equação não é exatamente satisfeita, gerando um **resíduo** $R(x)$ no domínio:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + f(x) = R(x) \quad em \;\; [0,1]$$

A idéia central do MEF é **ponderar este resíduo** no domínio usando as funções de ponderação $\hat{w}(x)$:

$$\int_0^1 R\,\hat{w}\,dx = 0 \qquad\qquad \hat{w}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x)\,w_i$$

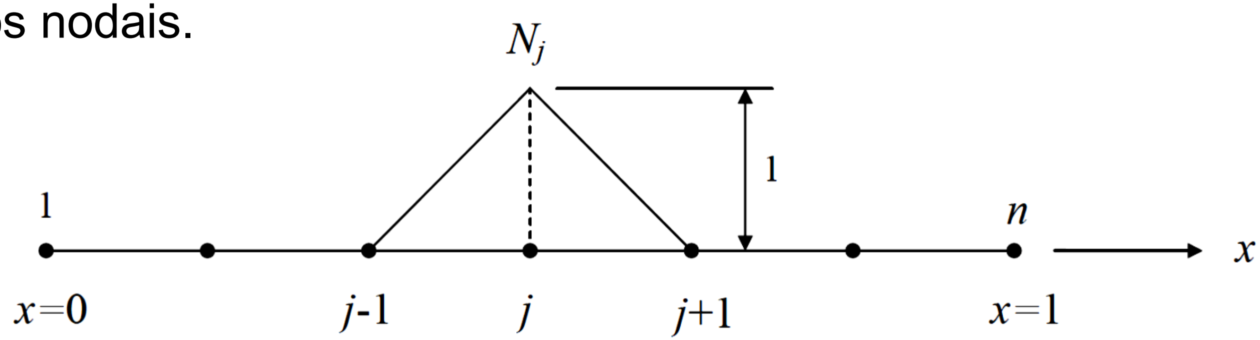
onde N_j são as mesmas **funções de forma** de $\hat{u}(x)$ e w_j são coeficientes constantes.

Ref.: Ribeiro, F. L. B., 2013, Introdução ao Método dos Elementos Finitos, Notas de Aula, Programa de Engenharia Civil - COPPE/UFRJ

Introdução do Método dos Elementos Finitos

Exemplo: PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL

O **domínio é discretizado** (em elementos), resultando em uma malha com ***n*** pontos nodais.



Uma aproximação característica do MEF tem a **forma**:

$$N_j(x) = \begin{cases} 1, \; x = x_j \\ 0, \; x = x_i \,, i \neq j \end{cases} \qquad N_j(x) = \begin{cases} -\dfrac{x - x_j}{(x_{j+1} - x_j)} + 1 \,, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ \\ \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \,, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \end{cases}$$

onde N_j é a **função de interpolação** global do nó j e u_j representa os valores nodais da aproximação.

Ref.: Ribeiro, F. L. B. , 2013, Introdução ao Método dos Elementos Finitos, Notas de Aula, Programa de Engenharia Civil - COPPE/UFRJ

Introdução do Método dos Elementos Finitos

Exemplo: PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL

Dados $f(x)$ e g, determinar $u(x)$ tal que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0 \quad \text{em} \quad [0,1]$$

$$\begin{cases} u(1) = 0 & \text{(condição de contorno essencial)} \\ \dfrac{du}{dx}(0) = g & \text{(condição de contorno natural)} \end{cases}$$

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + f(x) = R(x)$$

$$\int_0^1 R\,\hat{w}\,dx = 0$$

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + f \right) \hat{w}\,dx = \int_0^1 \frac{d^2\hat{u}}{dx^2}\,\hat{w}\,dx + \int_0^1 f\,\hat{w}\,dx =$$

$$= \frac{d\hat{u}}{dx}(1)\,\hat{w}(1) - \frac{d\hat{u}}{dx}(0)\,\hat{w}(0) - \int_0^1 \frac{d\hat{u}}{dx}\,\frac{d\hat{w}}{dx}\,dx + \int_0^1 f\,\hat{w}\,dx = 0$$

Introdução do Método dos Elementos Finitos

Exemplo: PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL

$$\frac{d\hat{u}}{dx}(1)\,\hat{w}(1) - \frac{d\hat{u}}{dx}(0)\,\hat{w}(0) - \int_0^1 \frac{d\hat{u}}{dx}\,\frac{d\hat{w}}{dx}\,dx + \int_0^1 f\,\hat{w}\,dx = 0$$

$$\hat{w}(1) = u(1) = 0 \qquad \frac{du}{dx}(0) = g$$

$$\int_0^1 \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d\hat{w}}{dx}\,dx = \int_0^1 f\,\hat{w}\,dx - g\,\hat{w}(0)$$

"forma fraca da equação dos resíduos ponderados"

Tanto $\hat{u}$ quanto $\hat{w}$ devem apresentar continuidade C^0

Introdução do Método dos Elementos Finitos

Exemplo: PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL

$$\int_0^1 \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d\hat{w}}{dx}\,dx = \int_0^1 f\,\hat{w}\,dx - g\,\hat{w}(0)$$

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x)\,u_j \qquad \hat{w}(x) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x)\,w_j$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} N_j u_j\right)\frac{dN_i}{dx}\,dx = \sum_{i=1}^{n} w_i\left(\int_0^1 f\,N_i\,dx - g\,N_i(0)\right)$$

Introdução do Método dos Elementos Finitos

Exemplo: PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} N_j u_j\right)\frac{dN_i}{dx}\, dx = \sum_{i=1}^{n} w_i\left(\int_0^1 f N_i dx - g\, N_i(0)\right)$$

Como as constantes w_i são arbitrárias, fazendo $w_i = 1$ e $w_j = 0$, para $j \neq i$ e $i = 1, \ldots n$, obtém-se um sistema de $\boxed{n \text{ equações algébricas e } n \text{ incógnitas } u_j:}$

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} N_j u_j\right)\frac{dN_i}{dx}\, dx = \int_0^1 f N_i dx - g\, N_i(0) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \frac{dN_j}{dx}\frac{dN_i}{dx}\, dx\right) u_j = \int_0^1 f\, N_i\, dx - g\, N_i(0) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \frac{dN_j}{dx}\frac{dN_i}{dx}\,dx\right)u_j = \int_0^1 f\,N_i\,dx - g\,N_i(0) \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

O sistema acima pode ser escrito na forma $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\,u_j = F_i \qquad (i = 1,\ldots,n)$

onde K_{ij} e F_i são iguais a

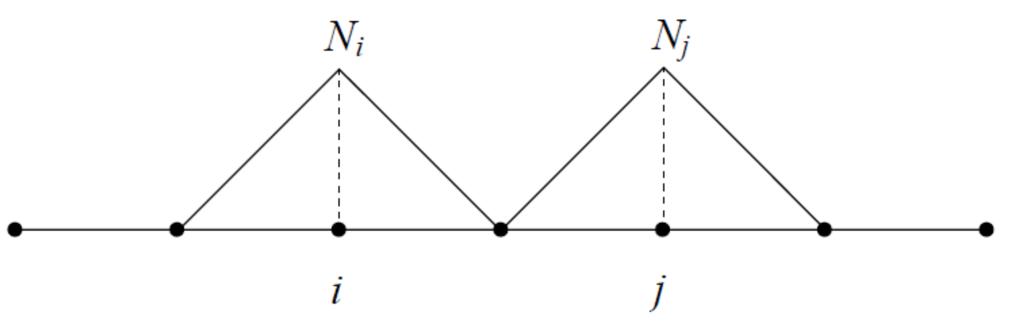
$$\begin{cases} K_{ij} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dN_j}{dx}\frac{dN_i}{dx}\,dx \\[2ex] F_i = \displaystyle\int_0^1 f\,N_i\,dx - g\,N_i(0) \end{cases}$$

Observações:

1) A matriz **K** é simétrica:

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx}\, dx = \int_0^1 \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx}\, dx = K_{ji}$$

2) A matriz **K** é esparsa (muitos de seus coeficientes são iguais a zero). De fato, os suportes das funções de interpolação N_i e N_j possuem interseção nula, se o nó *i* não está conectado ao nó *j*, resultando em coeficientes $K_{ij} = 0$:

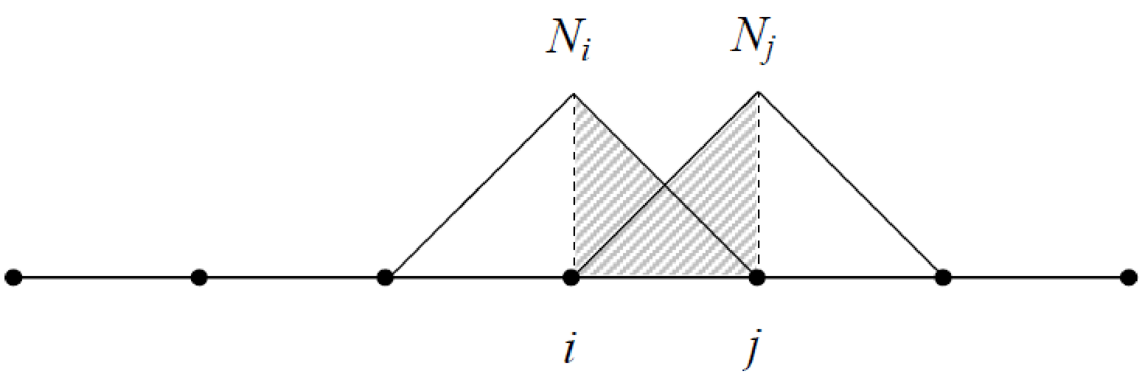


Introdução do Método dos Elementos Finitos

Observações (continuação)

3) Os coeficientes K_{ij} podem ser calculados efetuando-se a integral somente no elemento que conecta os nós i e j:

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}\,dx = \int_{x_i}^{x_j} \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}\,dx$$



Ref.: Ribeiro, F. L. B. , 2013, Introdução ao Método dos Elementos Finitos, Notas de Aula, Programa de Engenharia Civil - COPPE/UFRJ

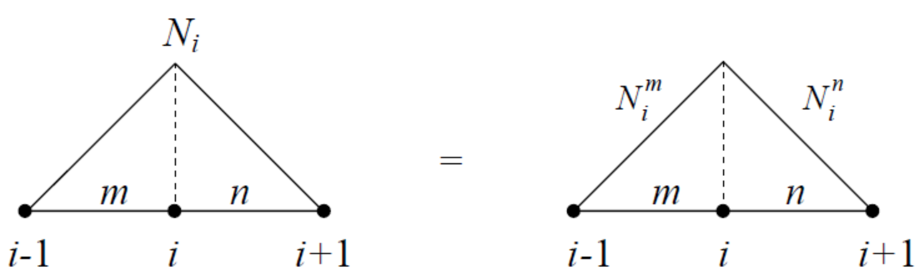
Introdução do Método dos Elementos Finitos
Observações (continuação)

4) Os coeficientes da diagonal principal são positivos e maiores que zero:

$$K_{ii} = \int_0^1 \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx > 0$$

5) Os coeficientes da diagonal K_{ii} podem ser calculados efetuando-se a integral somente nos elementos que contribuem para o nó i:

$$K_{ii} = \int_0^1 \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{dN_i^m}{dx} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{dN_i^n}{dx} \right)^2 dx$$



$$K_{ii} = K_{ii}^m + K_{ii}^n$$

Ref.: Ribeiro, F. L. B. , 2013, Introdução ao Método dos Elementos Finitos, Notas de Aula, Programa de Engenharia Civil - COPPE/UFRJ

Referências - Livros

- **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**, 2013, Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu J.Z..Butterworth Heinemann Ed., 7th Edition, London.
- **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**, 2001, Soriano, H. L., Ed. Ciência Moderna, 1ª Ed., Rio de Janeiro.
- **Elementos Finitos: Formulação Residual de Galerkin**, 2010, Mello, F. M., Castanheira, P., Ed. Sílabo, 1ª Ed., Lisboa.
- **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**, 2013, Fernando L. B. Ribeiro. Notas de Aula, Programa de Engenharia Civil - COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro.
- **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**, 2011, Vaz, L. E., Ed Campus Elsevier, 1ª Ed., Rio de Janeiro.
- **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**, 1999, Assan, A. E., Editora da Unicamp, 1ª Edição, Campinas.
- **The Finite Element Method for Engineers**, 2001, Huebner, K. H., Dewhirst, D. L., Smith, D. E., Byrom, T. G., Ed. Wiley, 4th Edition.

Referências - Links

Department of Aerospace Engineering Sciences - University of Colorado
Introduction to Finite Element Methods
http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/Home.html

Berkeley FEAPpv - A Finite Element Analysis Program (Personal Version)
http://www.ce.berkeley.edu/projects/feap/feappv/

Book views:

- https://books.google.com.br/books?id=7UL5Ls9hOF8C&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false
- https://books.google.com.br/books?id=f3MZE1BYq3AC&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false