INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

SEÇÃO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO

ANÁLISE DE ESTRUTURAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Marcelo Rodrigues LEÃO Silva

Cel Engenheiro Militar

AULA 03

TÓPICOS DESTA AULA

- ✓Estado plano de tensões;
- ✓Estado plano de deformações
- ✓Elementos retangulares;
- ✓Elementos triangulares;

ELASTICIDADE PLANA

- ✓ **Estado plano de tensões;**
- ✓ **Estado plano de deformações;**

Matriz de Rigidez

$$[K]=\int_V \left([B]^{\mathrm{T}}[D][B]\right)dV \qquad dV = t\,dA$$

ESTADO PLANO DE TENSÕES

✓ **Tensões no plano XY**

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}; \quad [D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

✓**Deformações em X, Y e Z**

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

A partir da Lei de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_Z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

✓ **Deformações no plano XY**

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} ; \quad \varepsilon_z = 0 \quad ;$$

A partir da Lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{\mathrm{z}} = \upsilon\left(\sigma_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{y}}\right)$$

✓**Tensões em X, Y e Z**

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; \ \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}; \quad [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

ELEMENTOS RETANGULARES

$$N_1 = \frac{(x_d - x)(y_s - y)}{(x_d - x_e)(y_s - y_i)}; N_2 = \frac{(x - x_e)(y_s - y)}{(x_d - x_e)(y_s - y_i)}$$

$$N_3 = \frac{(x - x_e)(y - y_i)}{(x_d - x_e)(y_s - y_i)}; N_4 = \frac{(x_d - x)(y - y_i)}{(x_d - x_e)(y_s - y_i)}$$

ELEMENTOS RETANGULARES

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

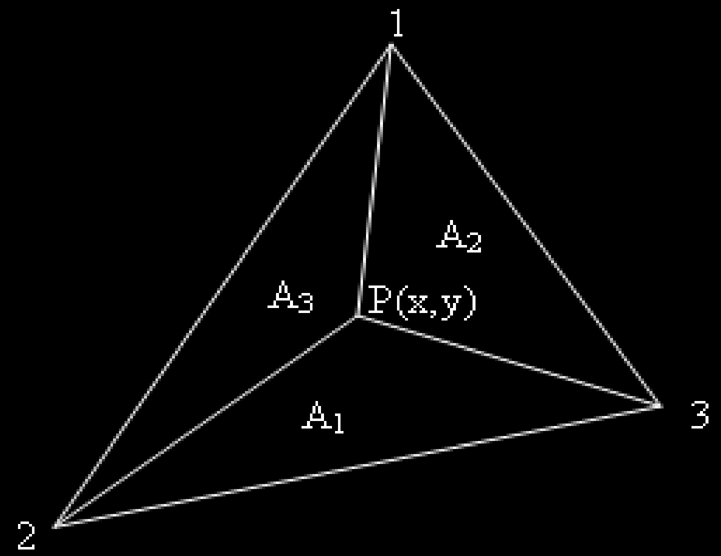
$$[B]=\frac{1}{(x_d-x_e)(y_s-y_i)}\begin{bmatrix} (y-y_s) & 0 & (y_s-y) & 0 & (y-y_i) & 0 & (y_i-y) & 0 \\ 0 & (x-x_d) & 0 & (x_e-x) & 0 & (x-x_e) & 0 & (x_d-x) \\ (x-x_d) & (y-y_s) & (x_e-x) & (y_s-y) & (x-x_e) & (y-y_i) & (x_d-x) & (y_i-y) \end{bmatrix}$$

ELEMENTOS RETANGULARES

Matriz de Rigidez

$$[K] = \int_V \left([B]^{\mathrm{T}}[D][B]\right) t\,dA$$ **(Matriz 8 x 8)**

ELEMENTOS TRIANGULARES



$$N_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} ; N_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} ; N_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_! & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

ELEMENTOS TRIANGULARES

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$[B]=\frac{1}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} (y_2-y_3) & 0 & (y_3-y_1) & 0 & (y_1-y_2) & 0 \\ 0 & (x_3-x_2) & 0 & (x_1-x_3) & 0 & (x_2-x_1) \\ (x_3-x_2) & (y_2-y_3) & (x_1-x_3) & (y_3-y_1) & (x_2-x_1) & (y_1-y_2) \end{bmatrix}$$

Deformações constantes !!!!

Tensões constantes!!!!

ELEMENTOS TRIANGULARES

Matriz de Rigidez

$$[K] = \int_V \left([B]^{T} [D][B] \right) t\,dA$$ **(Matriz 6 x 6)**

ELEMENTOS TRIANGULARES

- ✓ **Desvantagens: Deformação e tensão constantes**

- ✓ **Vantagem: Facilidade de geração de malhas (algoritmo de Delaunay)**

Dúvidas ?