INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
SEÇÃO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO

ANÁLISE DE ESTRUTURAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

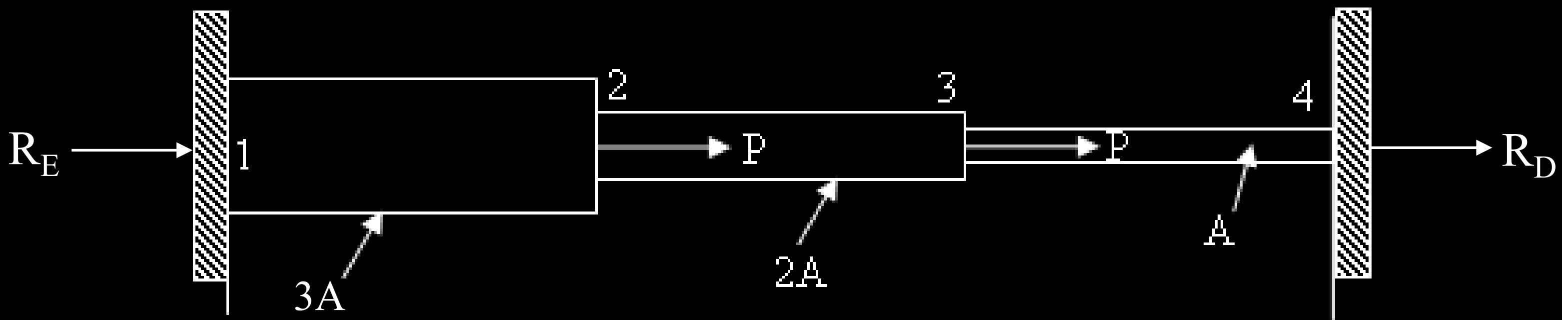
Marcelo Rodrigues LEÃO Silva

Cel Engenheiro Militar

EXERCÍCIO 01

SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Exemplo: Problema unidimensional, três barras de comprimento L



$$[K_G] = \int_V ([B]^T[D][B])dV = \int_{V1} ([B]^T[D][B])dV$$

$$+ \int_{V2} ([B]^T[D][B])dV + \int_{V3} ([B]^T[D][B])dV$$

SISTEMAS DE REFERÊNCIA

No sistema global da estrutura, $[K_G]$ é uma matriz 4 x 4

$$[K_1]=\frac{3EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\frac{3EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}3 & -3 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[K_2]=\frac{2EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\frac{2EA}{L}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[K3]=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

SISTEMAS DE REFERÊNCIA

No sistema global da estrutura, $[K_G]$ é uma matriz 4 x 4

$$[K_1]\left\{\bar{d}_1\right\}=\left\{\bar{F}_1\right\}\rightarrow\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}3 & -3 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_{1,1}\\ F_{2,1}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$[K_2]\left\{\bar{d}_2\right\}=\left\{\bar{F}_2\right\}\rightarrow\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ F_{1,2}\\ F_{2,2}\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$[K_3]\left\{\bar{d}_3\right\}=\left\{\bar{F}_3\right\}\rightarrow\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ F_{1,3}\\ F_{2,3}\end{Bmatrix}$$

SISTEMAS DE REFERÊNCIA

No sistema global da estrutura, $[K_G]$ é uma matriz 4 x 4

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3+2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,1} \\ \boxed{F_{2,1}+F_{1,2}} \\ \boxed{F_{2,2}+F_{1,3}} \\ F_{2,3} \end{Bmatrix}$$

SISTEMAS DE REFERÊNCIA

No sistema global da estrutura, $[K_G]$ é uma matriz 4 x 4

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_E \\ P \\ P \\ R_D \end{Bmatrix}$$

SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Aplicação das condições de contorno

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \cancel{u_1} \\ u_2 \\ u_3 \\ \cancel{u_4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cancel{R_E} \\ P \\ P \\ \cancel{R_D} \end{Bmatrix}$$

Cálculo dos deslocamentos

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{11(EA)}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} = \frac{L}{11(EA)}\begin{Bmatrix} 5P \\ 7P \end{Bmatrix}$$

SISTEMAS DE REFERÊNCIA

$$\left(\frac{EA}{L}\right)\left(\frac{L}{11EA}\right)\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 5P \\ 7P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{15P}{11} = R_E \\ P \\ P \\ -\dfrac{7P}{11} = R_D \end{Bmatrix}$$