SEÇÃO DE ENSINO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO

Pós-graduação em Engenharia de Transportes

Elasticidade aplicada à Infraestrutura de Transportes

MAJ MONIZ DE ARAGÃO

PROBLEMAS PLANOS EM COORDENADAS CARTESIANAS:

Equação de Lévy; Função de Tensões; Soluções Polinomiais.

Referência bibliográfica:

- *Introdução à Teoria da Elasticidade*, Villaça, S. F., Taborda Garcia, L. F., COPPE/UFRJ, 4ª Ed., 2000.

Equação de Lévy

A solução do problema do EPT e EPD em termos de tensões consiste na determinação de três incógnitas $\left(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\right)$ que devem satisfazer:

- Equações de equilíbrio
- Equação de compatibilidade de deformações
- Condições de contorno

Isolando a componente cisalhante τ_{xy} a partir das equações de equilíbrio, substituindo-a na equação de compatibilidade de deformações, e admitindo-se ainda as forças de massa como constantes em *x* e *y*, obtém-se a denominada ***Equação de Lévy***, válida tanto para o ***EPT*** quanto para o ***EPD***:

$$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0$$

(substitui a eq. de compatibilidade)

FUNÇÃO DE TENSÕES

A solução do problema plano em termos de tensões consiste, portanto, na integração das equações de equilíbrio juntamente com a equação de Lévy, (devendo ainda ser satisfeitas as condições de contorno).

1º caso: forças de massa nulas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2 \left(\sigma_x + \sigma_y \right) = 0$$

Problema regido por sistema de equações homogêneas...

FUNÇÃO DE TENSÕES
1º caso: forças de massa nulas

Utilizando-se uma função auxiliar ϕ (x,y) relacionada às componentes de tensão por:

$$\phi(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Função de tensões de Airy

Satisfaz-se:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Logo, o uso da função de tensões de Airy assegura o atendimento ao equilíbrio, e reduz o problema a uma única equação diferencial envolvendo uma única incógnita.

FUNÇÃO DE TENSÕES

1º caso: forças de massa nulas

Quanto à equação de Lévy: $\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0$

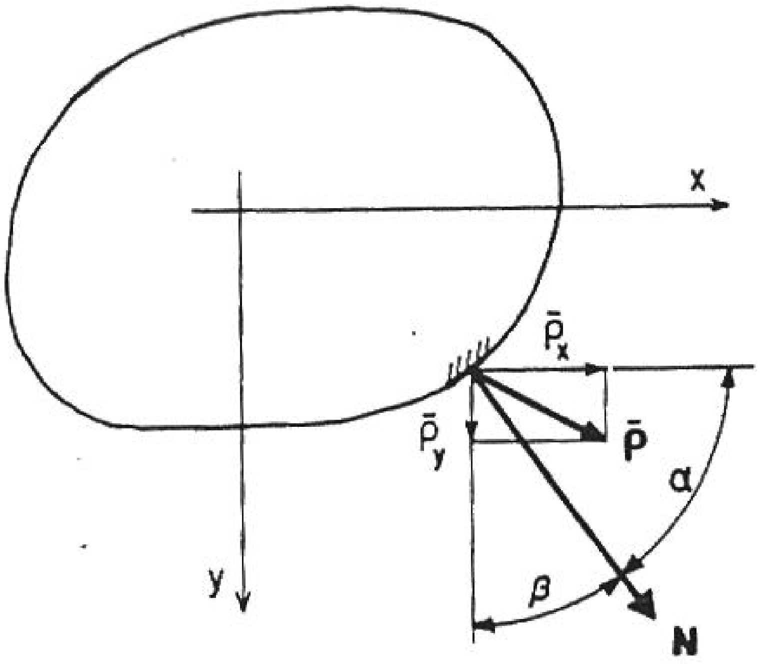
$$\phi(x, y) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \Rightarrow \nabla^2\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \phi = 0$$

(equação biarmônica)

FUNÇÃO DE TENSÕES
1º caso: forças de massa nulas

As condições de contorno escritas em termos de ϕ tornam-se:



$$\bar{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\rho}_x = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m \\ \bar{\rho}_y = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \ell - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} m = \bar{\rho}_x \\ -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \ell + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} m = \bar{\rho}_y \end{cases}$$

FUNÇÃO DE TENSÕES

1º caso: forças de massa nulas

A resolução do problema plano com forças de massa nulas consiste na determinação da função ϕ atendendo à biarmônica e às condições de contorno:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \phi = 0$$

$$\phi(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\ell - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} m = \overline{p}_x \\ -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\ell + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} m = \overline{p}_y \end{cases}$$

FUNÇÃO DE TENSÕES

2º caso: forças de massa $B_x = 0$ e $B_y = \mu g$

Equilíbrio:

Nova função de tensões:

$$\phi(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu g y \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\mu g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \ell - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} m = \bar{p}_x \\ -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \ell + \left(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu g y \right) m = \bar{p}_y \end{cases}$$

Eq. de Lévy cai na mesma biarmônica:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \Rightarrow \nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

FUNÇÃO DE TENSÕES: resumo

Equação biarmônica: $$\nabla^4\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0$$

1º caso:
forças de massa nulas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\ell - \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}m = \overline{\rho}_x \\ -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\ell + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}m = \overline{\rho}_y \end{cases}$$

2º caso:

forças de massa $B_x = 0$ e $B_y = \mu\, g$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\ell - \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}m = \overline{\rho}_x \\ -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\ell + \left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \mu g y\right)m = \overline{\rho}_y \end{cases}$$

SOLUÇÕES POLINOMIAIS

Equação biarmônica: $$\nabla^4\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0$$

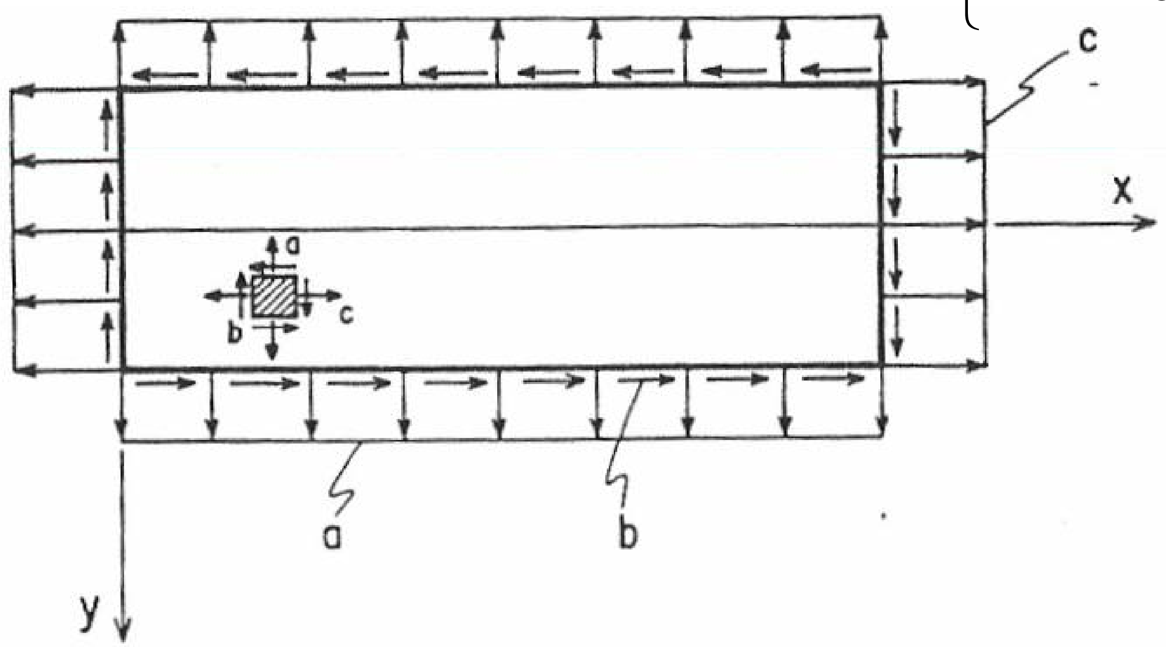
QUALQUER POLINÔMIO DO 3º GRAU REPRESENTA UMA SOLUÇÃO DA BIARMÔNICA

FUNÇÃO DE TENSÕES ASSOCIADA A UM ESTADO TENSIONAL POSSÍVEL NO EPT OU EPD

SOLUÇÕES POLINOMIAIS

Exemplo: polinômio homogêneo do 2º grau

$$\phi(x,y)=\frac{a}{2}x^2-bxy+\frac{c}{2}y^2 \quad\Rightarrow\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\\ \sigma_y=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\\ \tau_{xy}=-\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_x=c\\ \sigma_y=a\\ \tau_{xy}=b\end{cases}$$



Em *x=0* $\Rightarrow\begin{cases}\bar{\rho}_x=-c\\ \bar{\rho}_y=-b\end{cases}$

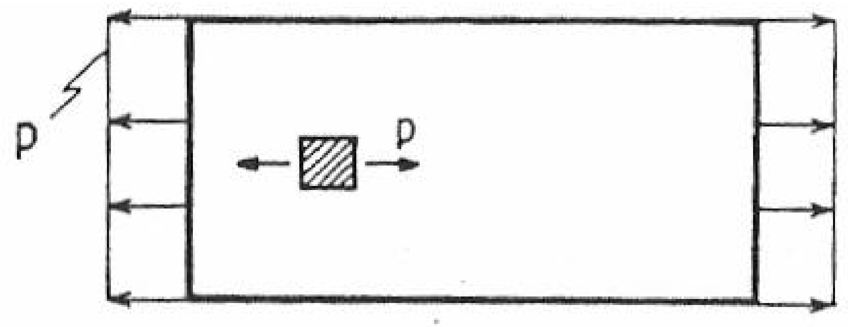
Em *x=L* $\Rightarrow\begin{cases}\bar{\rho}_x=c\\ \bar{\rho}_y=b\end{cases}$

Em *y=-h/2* $\Rightarrow\begin{cases}\bar{\rho}_x=-b\\ \bar{\rho}_y=-a\end{cases}$

Em *y=+h/2* $\Rightarrow\begin{cases}\bar{\rho}_x=b\\ \bar{\rho}_y=a\end{cases}$

SOLUÇÕES POLINOMIAIS:
polinômio homogêneo do 2º grau: casos particulares

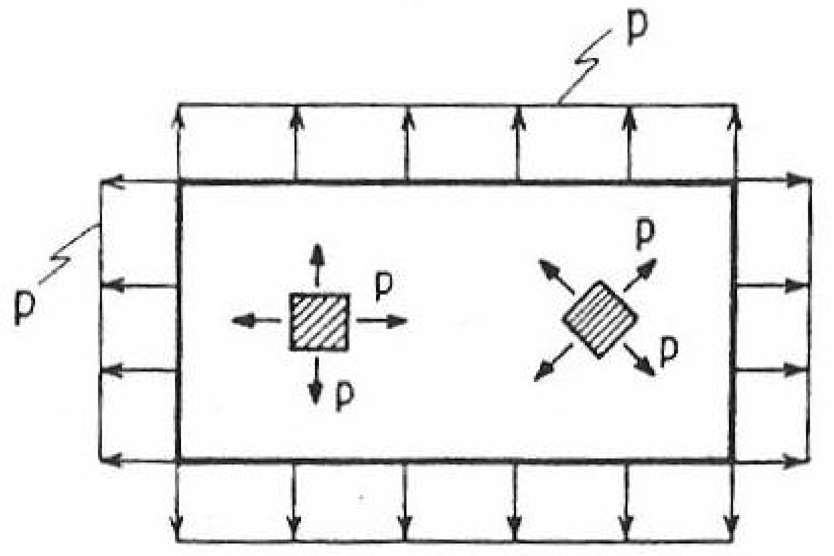
1) Tração simples: $a = b = 0$; $c = p$ ou $c = -p$



Estado uniaxial de tensões.

(Ex: tração de barras)

2) Estado de tensão homogêneo na chapa: $a = c = p$; $b = 0$



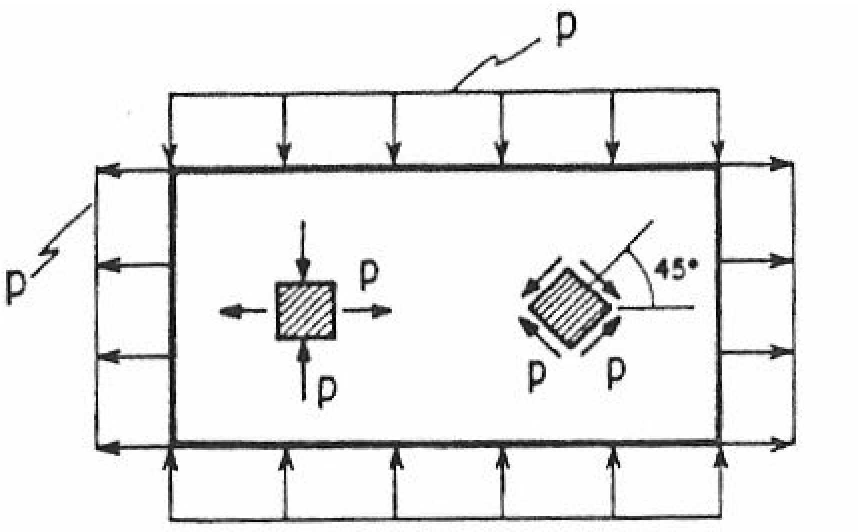
Em qualquer direção a tensão normal é p e a tensão cisalhante nula.

(Ex: superfície de reservatório esférico)

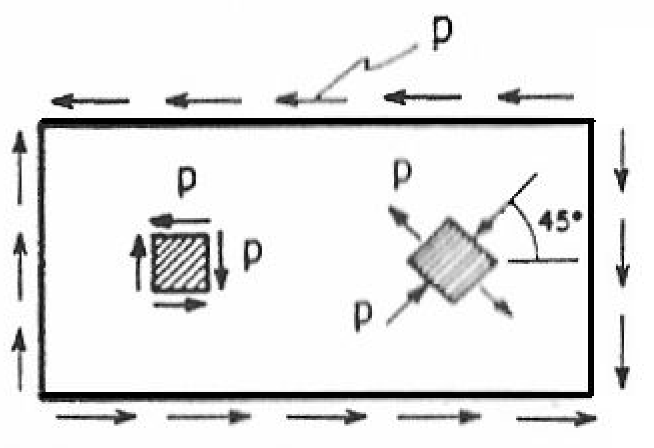
SOLUÇÕES POLINOMIAIS:
polinômio homogêneo do 2º grau: casos particulares

3) Cisalhamento Puro:

$a = -p; \;\; c = p; \;\; b = 0$



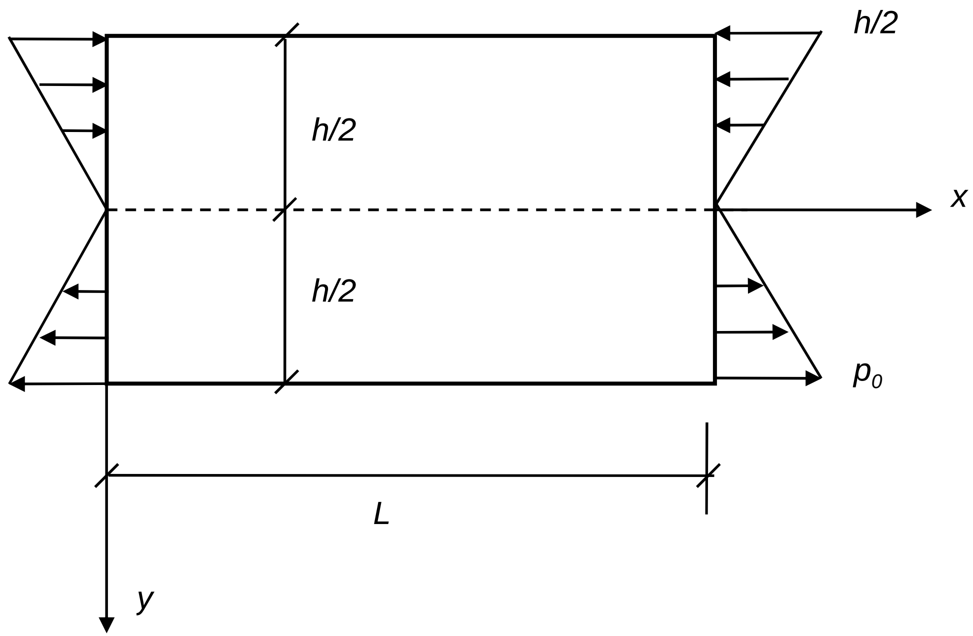
$b = p; \;\; a = c = 0$



SOLUÇÕES POLINOMIAIS: Exemplos

Problema de flexão pura de uma viga de seção retangular estreita:

Uma vez que as forças no contorno têm variação linear...



$$\phi(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

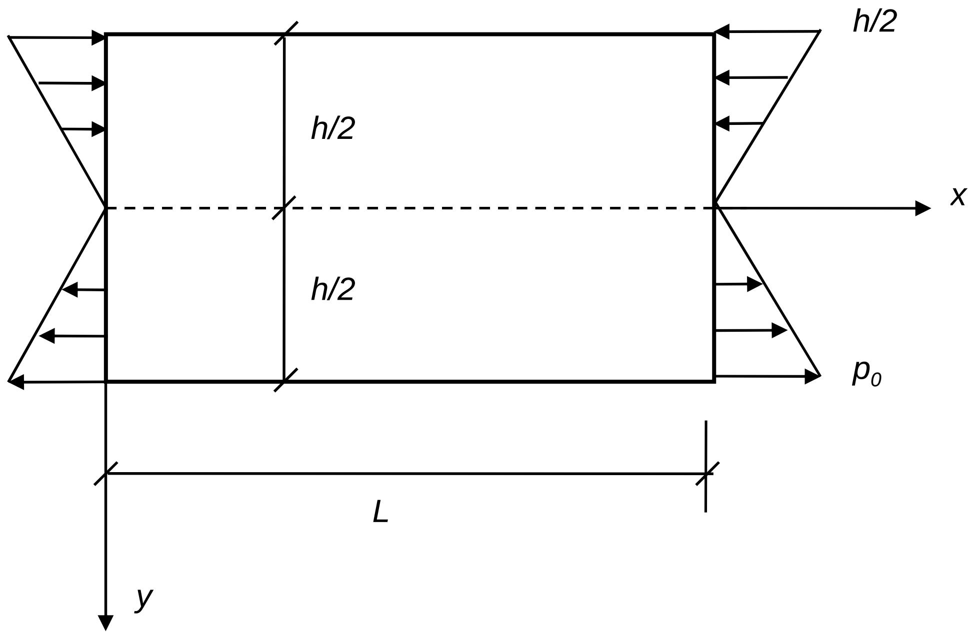
em princípio, uma função polinomial ϕ do 3º grau serve ao problema...

SOLUÇÕES POLINOMIAIS:

Problema de flexão pura de uma viga de seção retangular estreita

Admitindo então o polinômio homogêneo completo:

$$\phi(x,y)=\frac{a}{3\cdot 2}x^3+\frac{b}{2}x^2y+\frac{c}{2}xy^2+\frac{d}{3\cdot 2}y^3$$



tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_x=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=cx+dy \\ \sigma_y=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=ax+by \\ \tau_{xy}=-\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=-bx-cy \end{cases}$$

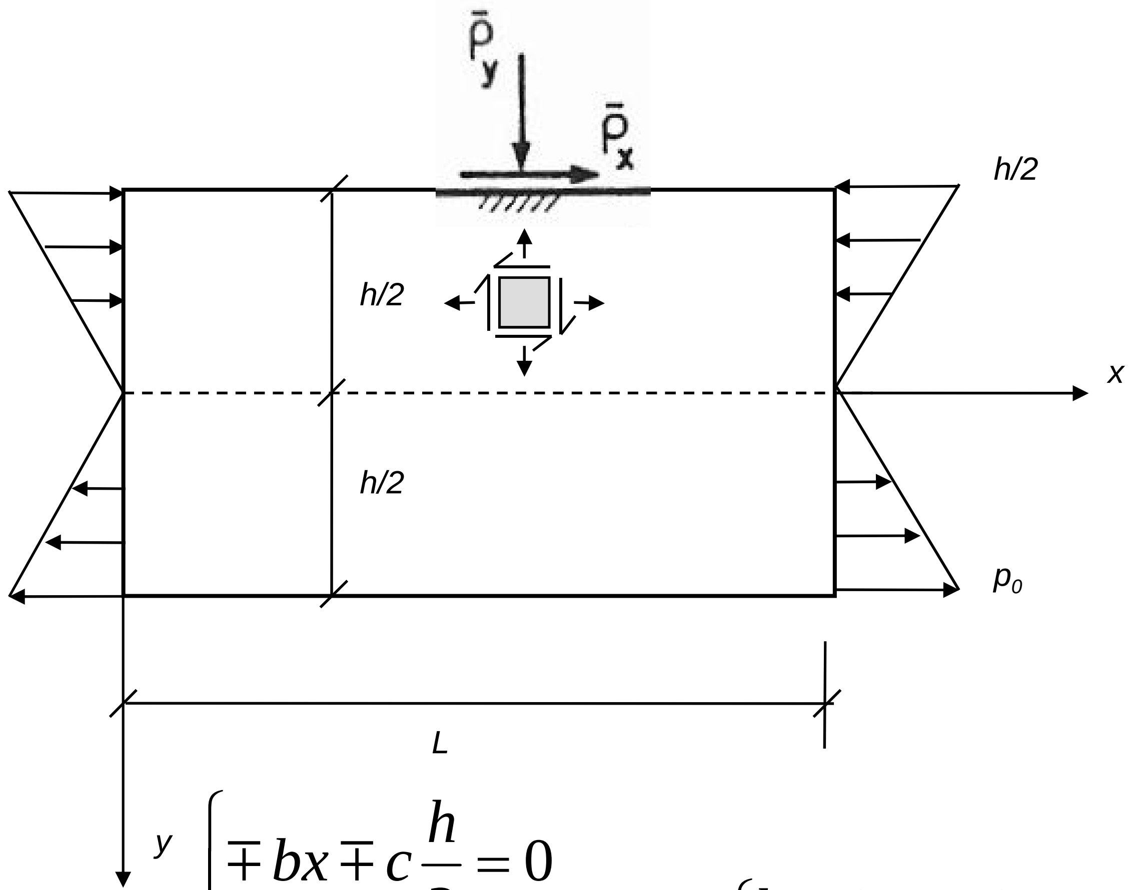
As quais constituirão a solução do problema se forem determinados valores constantes tais que sejam satisfeitas as condições de contorno.

SOLUÇÕES POLINOMIAIS:

Problema de flexão pura de uma viga de seção retangular estreita

Condições de Contorno:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = cx + dy \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = ax + by \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -bx - cy \end{cases}$$



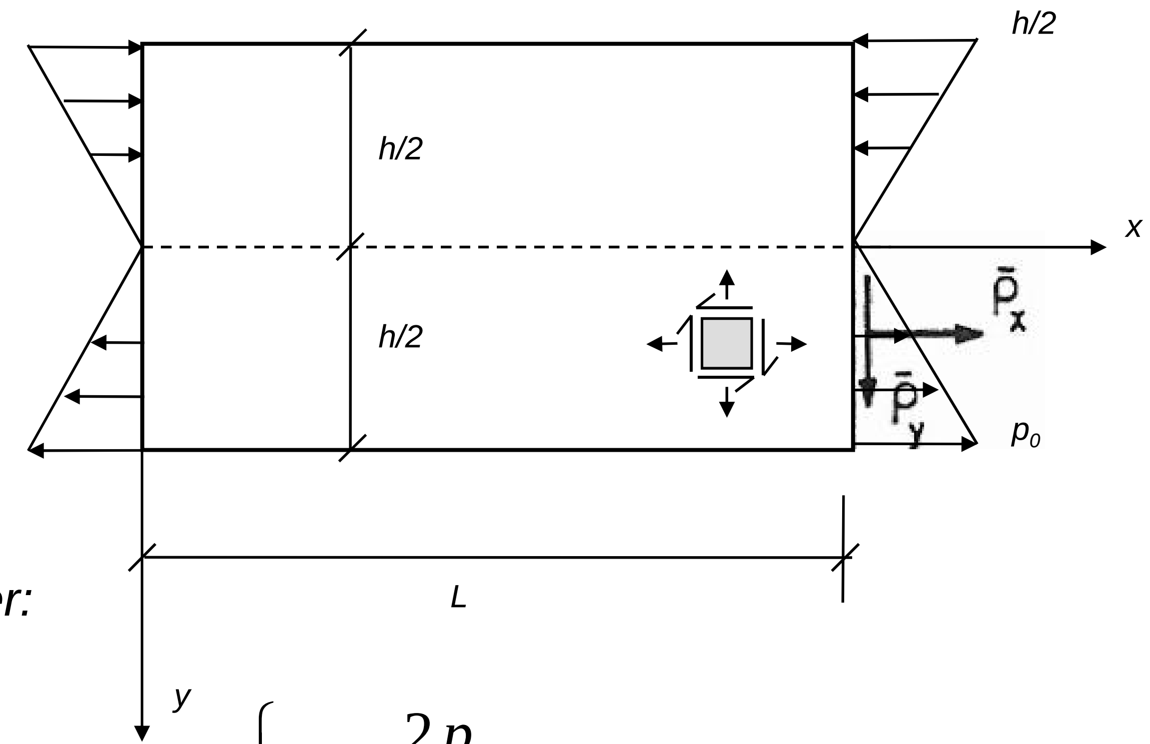
Bordos *y=± h/2 e x qualquer:*

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\rho}_x = \mp \tau_{yx} = 0 \\ \bar{\rho}_y = \mp \sigma_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mp bx \mp c\dfrac{h}{2} = 0 \\ \pm ax \pm b\dfrac{h}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0; c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

SOLUÇÕES POLINOMIAIS:
Problema de flexão pura de uma viga de seção retangular estreita

Condições de Contorno:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = cx + dy \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = ax + by \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -bx - cy \end{cases}$$



Bordos *x=0 e x=L, y qualquer:*

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\rho}_x = \sigma_x = \mp \dfrac{2p_0}{h} y \\ \bar{\rho}_y = \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} dy = \dfrac{2p_0}{h} y \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow d = \dfrac{2p_0}{h}$$

SOLUÇÕES POLINOMIAIS:
Problema de flexão pura de uma viga de seção retangular estreita

Portanto, ficam atendidas todas as condições no contorno pela função:

$$\phi(x,y) = \frac{a}{3\cdot 2}x^3 + \frac{b}{2}x^2 y + \frac{c}{2}xy^2 + \frac{d}{3\cdot 2}y^3 \quad \Rightarrow \phi(x,y) = \frac{p_0}{3h}y^3$$

Com as componentes de tensão:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \dfrac{2p_0}{h}\mathrm{y} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

Traduzindo, de forma exata, a solução do presente problema plano.

SOLUÇÕES POLINOMIAIS:

Problema de flexão pura de uma viga de seção retangular estreita

Sabendo-se que o momento fletor constitui o momento resultante da distribuição das forças nas extremidades da viga, tem-se:

$$M = \iint \bar{\rho}_x y dA = \iint \frac{2p_0}{h} y^2 dA = \frac{2p_0}{h} \iint y^2 dA = \frac{2p_0 I}{h}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{M}{I} \mathrm{y}$$

Confirmando o resultado da Resistência dos materiais, obtido com base na hipótese das seções planas e que neste caso se revela exata.