



Elasticidade aplicada à Infraestrutura de Transportes

MAJ MONIZ DE ARAGÃO

PROBLEMAS PLANOS EM COORDENADAS CARTESIANAS:

Estado Plano de Deformação (EPD);
Estado Plano de Tensão (EPT);
Condições de Contorno.

Referência bibliográfica:

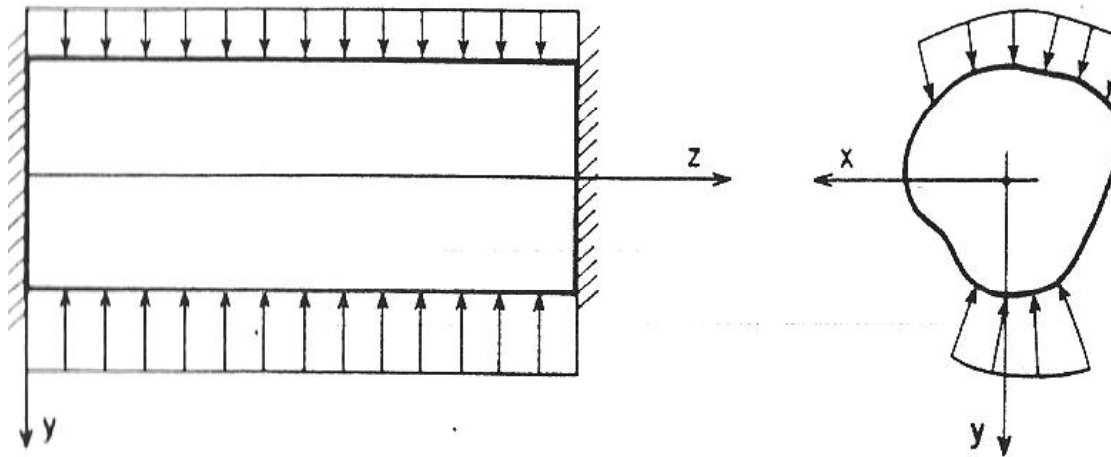
- *Introdução à Teoria da Elasticidade*, Villaça, S. F., Taborda Garcia, L. F., COPPE/UFRJ, 4ª Ed., 2000.

Problemas Planos em Coordenadas Cartesianas

- Hipótese que os estados de tensão e de deformação independem de uma coordenada (z)
- O fenômeno elástico ocorre igualmente em todos os planos paralelos a xy .

ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD):

$$\begin{cases} \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$



Carregamentos auto-equilibrados de direção paralela ao **plano xy** e **independentes de z**

ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)

$$\begin{cases} \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

Correspondentes
componentes de
tensão:

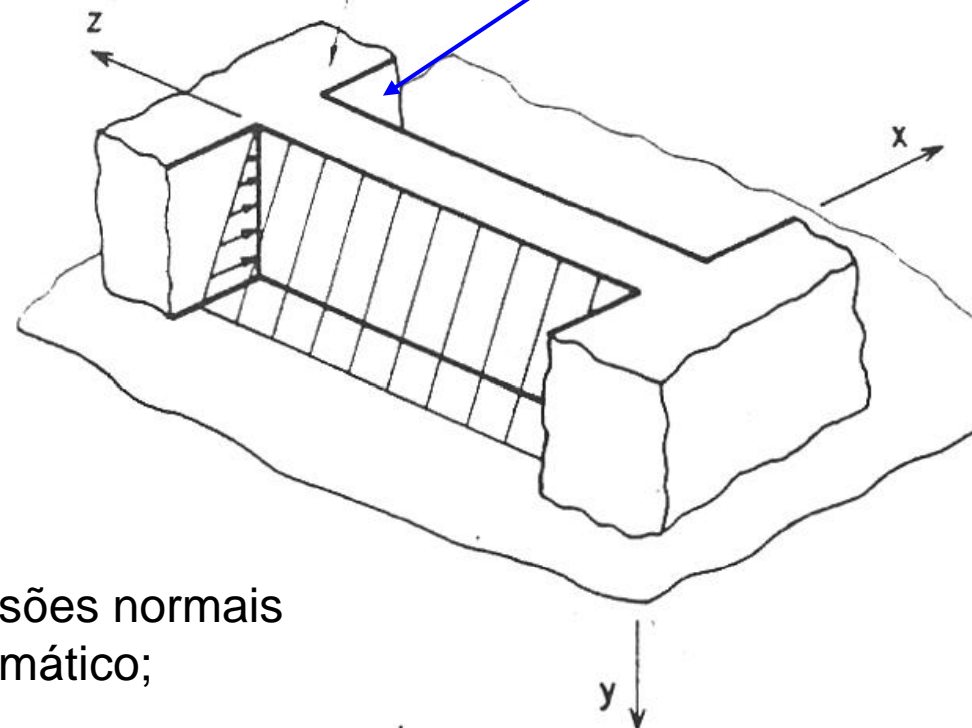
$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$$

funções de (x,y)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

bordos "lisos"

OMBREIRA



Cada lâmina entre seções adjacentes, que tenderia a se deformar na direção z pelo efeito de Poisson, tem essa deformação impedida pelas lâminas vizinhas.

Verifica-se assim a existência de tensões normais na direção longitudinal do sólido prismático;

ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

$$\nabla^t \boldsymbol{\tau} + \mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + B_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + B_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + B_z = 0 \end{cases}$$

$$\text{EPD} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \\ B_z = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y = 0 \end{cases}$$

ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \end{array} \right.$$

reduzem-se à somente uma:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)

LEI DE HOOKE GENERALIZADA

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_x \\ \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \end{array} \right.$$

Substituindo essas expressões na equação de compatibilidade de deformações do EPD, tem-se:

$$\Rightarrow (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

Obs: campos de tensões lineares sempre satisfarão a compatibilidade de deformações

ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)

EQUAÇÕES DO EPD:

GARANTIA DO EQUILÍBRIO E COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y = 0 \\ (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right.$$

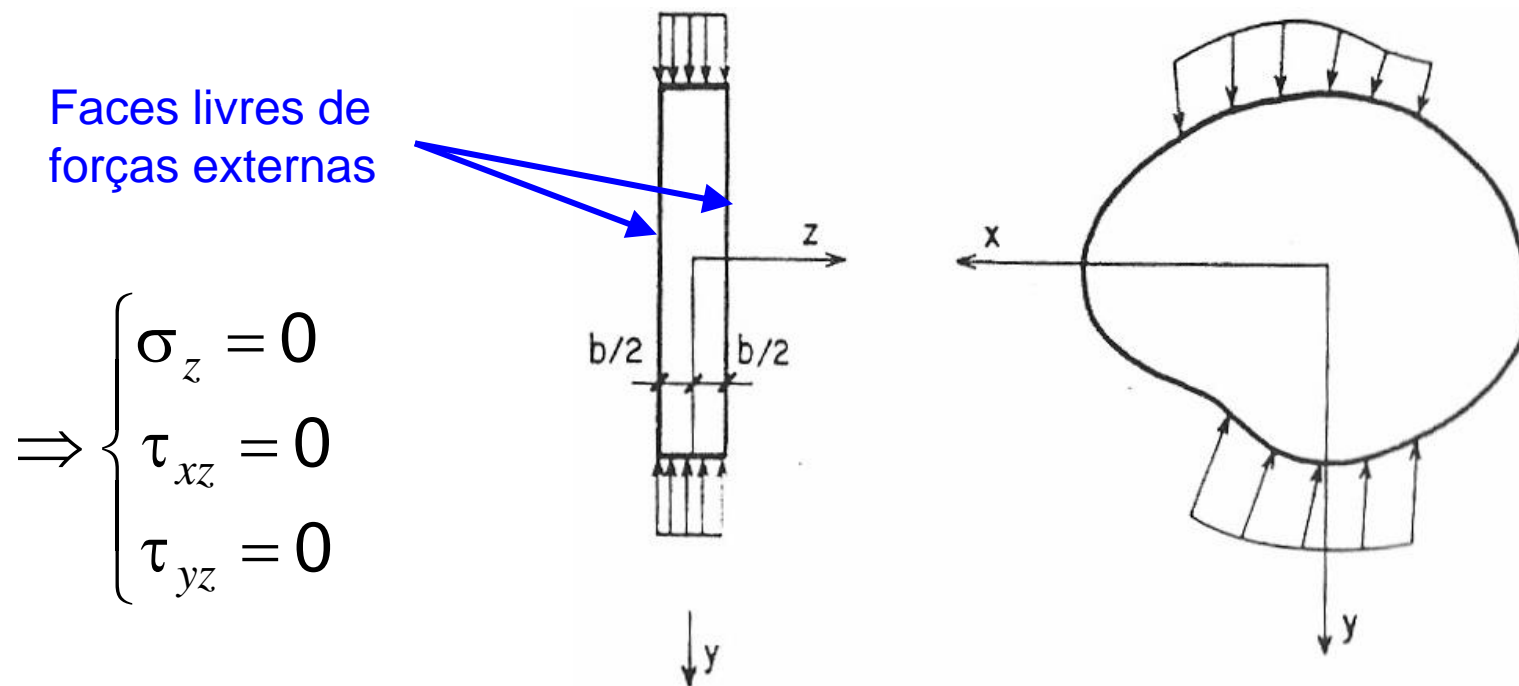
Assim, tem-se o problema de EPD regido por três equações diferenciais em termos das três componentes de tensão.

Problemas Planos em Coordenadas Cartesianas

ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)

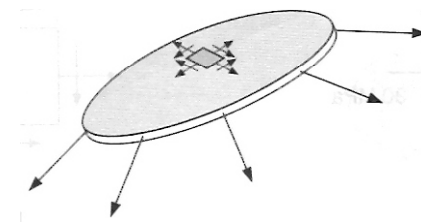
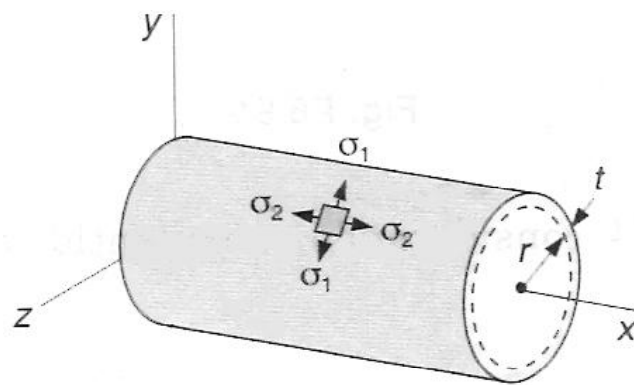
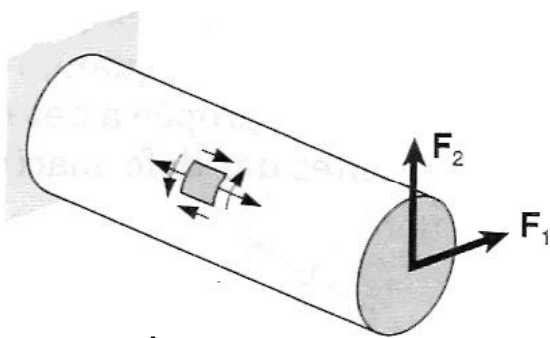
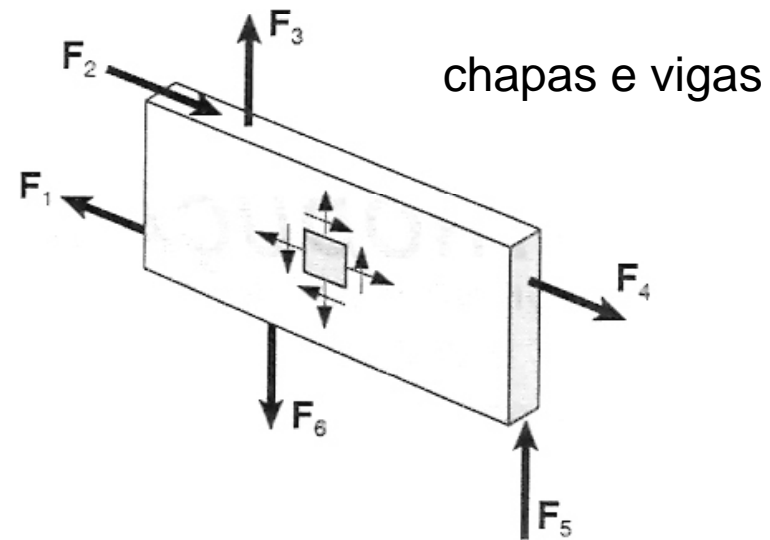
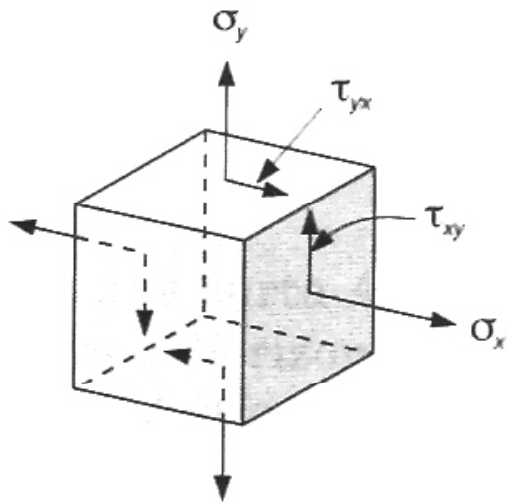
ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT):

Carregamentos auto-equilibrados de direção paralela ao plano xy
e distribuídos uniformemente na direção z



Ex: chapa delgada de espessura uniforme

ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)



eixos

vasos de parede fina

reservatórios

ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)

$$\begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Correspondentes
componentes de
deformação:

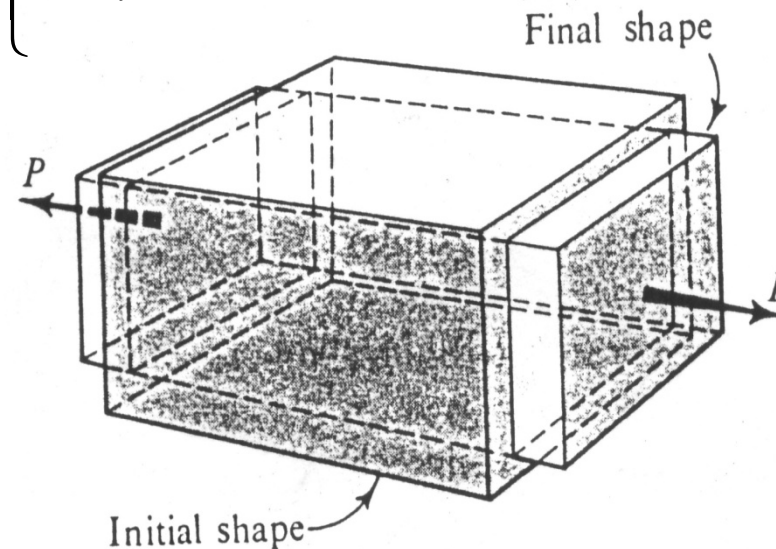
$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$$

funções de (x,y)

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

No EPT não há impedimento à deformação do sólido na direção z (faces livres), que ocorre pelo efeito de Poisson.

Verifica-se assim a existência de deformações na direção transversal (da espessura) do sólido;



ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

$$\nabla^t \boldsymbol{\tau} + \mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + B_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + B_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + B_z = 0 \end{cases}$$

$$\text{EPT} \begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \\ B_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y = 0 \end{cases}$$

(idênticas ao EPD)

ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} \end{array} \right. \Rightarrow 0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0$$

só se verificam
quando ε_z for
constante ou função
linear de x e/ou y

podem ser
desconsideradas para
chapas delgadas

ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)

LEI DE HOOKE GENERALIZADA

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \end{array} \right.$$

Substituindo essas expressões na equação de compatibilidade de deformações do EPT, tem-se:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

Obs: campos de tensões lineares sempre
satisfarão a compatibilidade de deformações

ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)

EQUAÇÕES DO EPT:

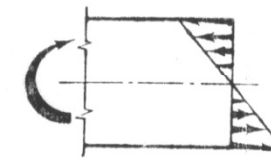
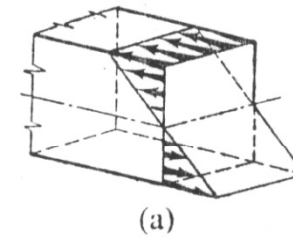
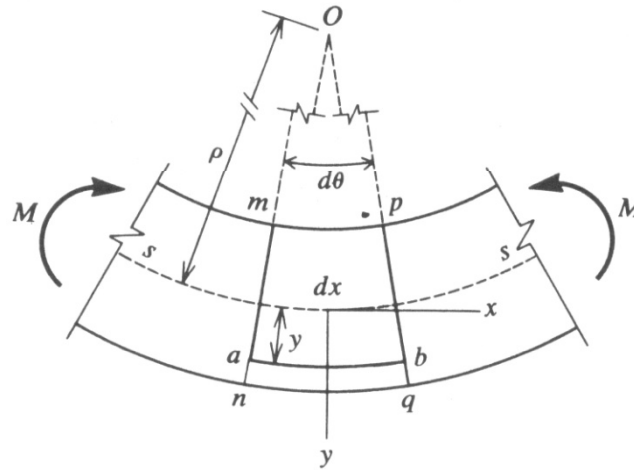
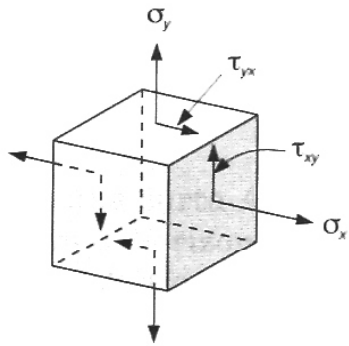
GARANTIA DO EQUILÍBRIO E COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right.$$

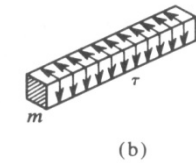
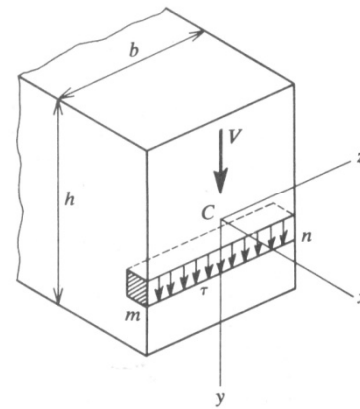
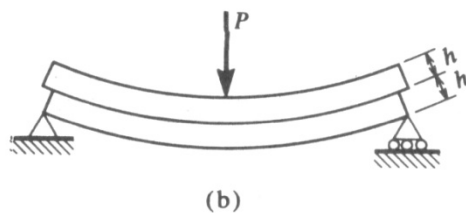
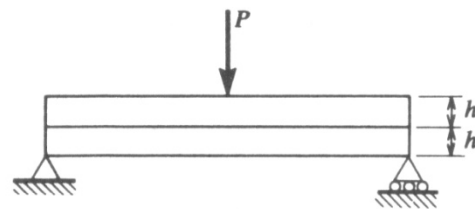
Assim, tem-se o problema de EPT regido por três equações diferenciais em termos das três componentes de tensão (sendo as duas primeiras iguais ao EPD).

TENSÕES EM VIGAS

$$\sigma_x = \frac{My}{I}$$



$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib}$$

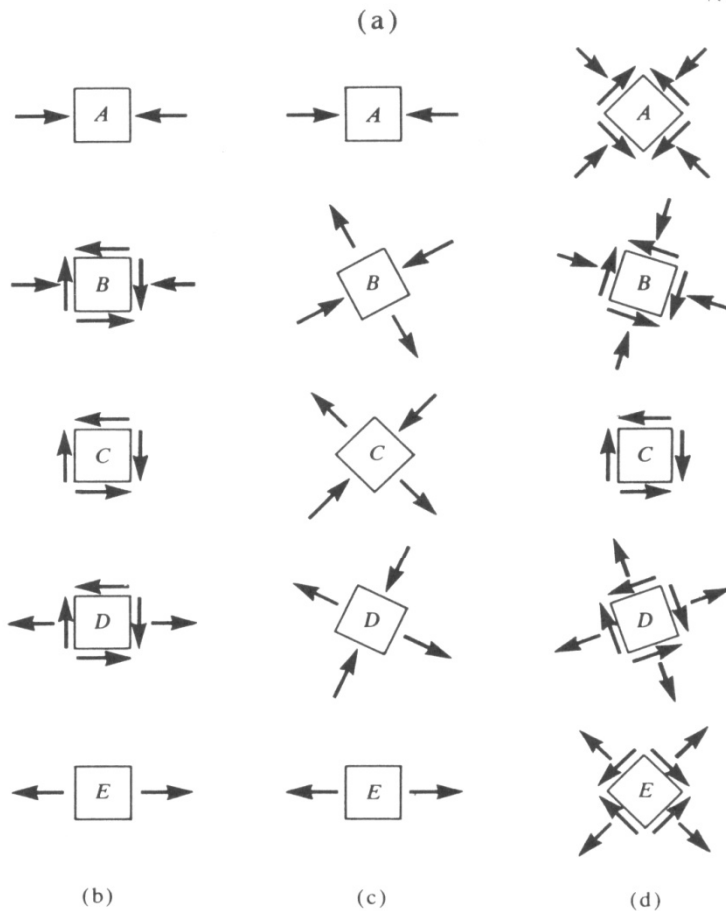
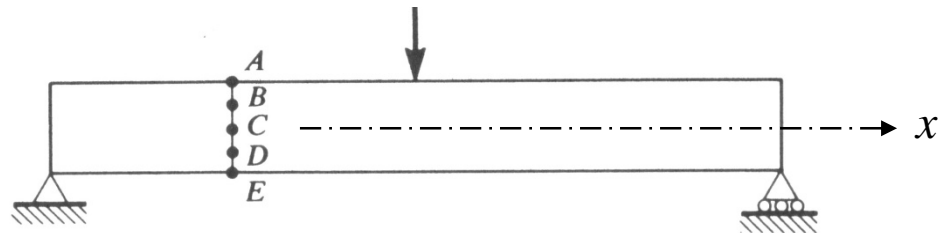


(a)

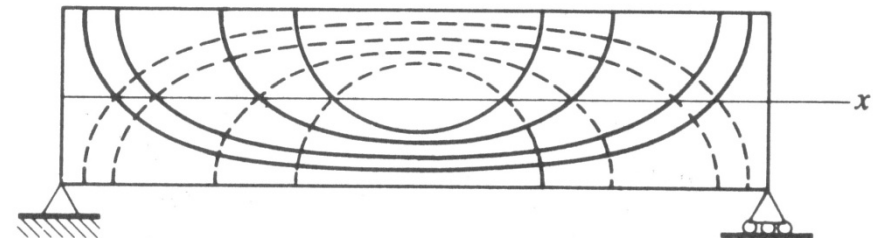
(b)

(c)

TENSÕES EM VIGAS



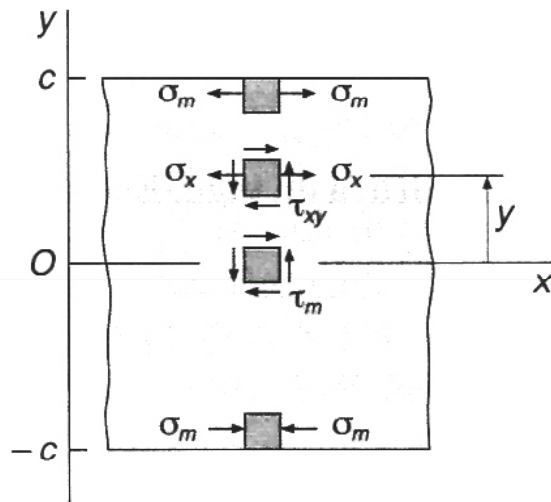
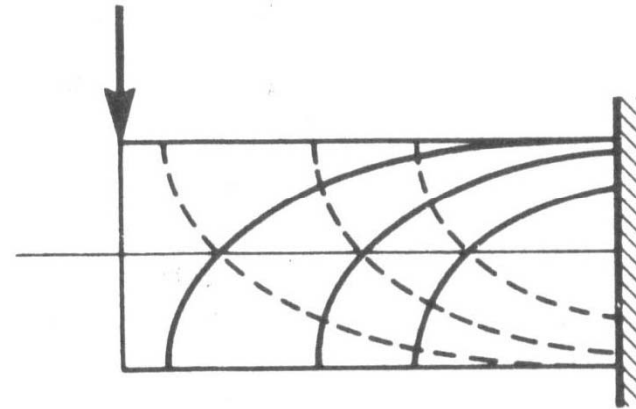
- (b) Tensões planas em x e y
- (c) Tensões Principais
- (d) Tensões de cisalhamento máximas



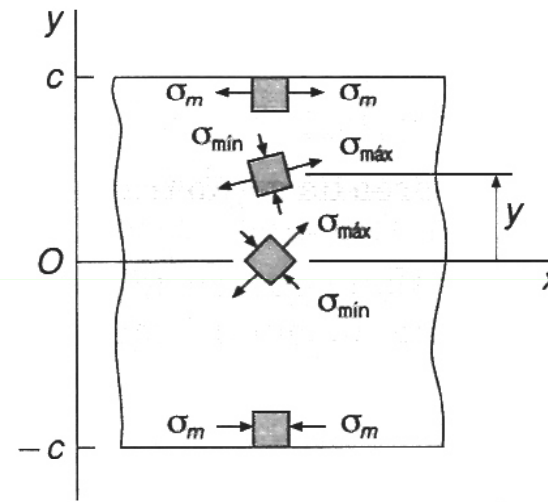
Na figura acima, as linhas cheias representam as trajetórias das tensões principais de tração, e as linhas pontilhadas para as tensões principais de compressão

TENSÕES EM VIGAS

Trajetórias das tensões principais de tração e compressão na viga engastada e livre.



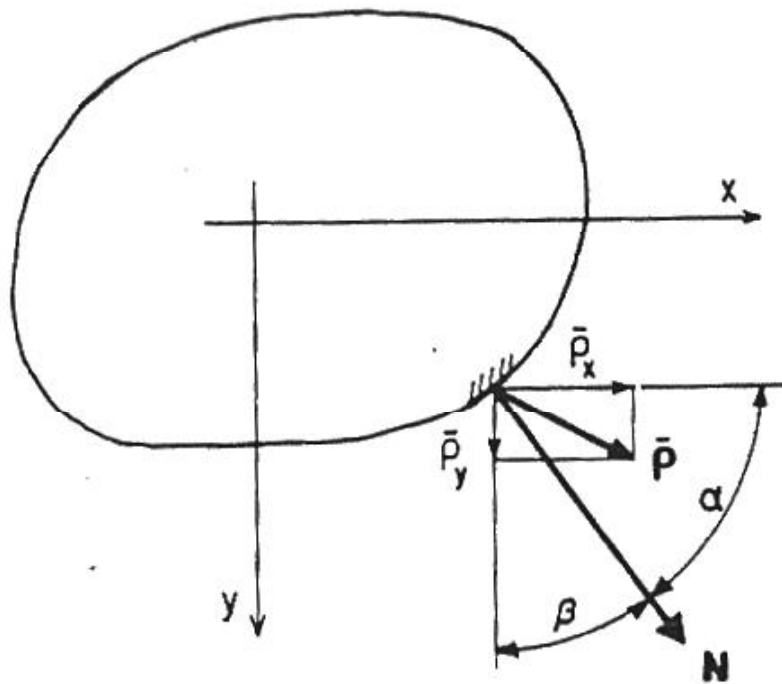
Tensões em x e y



Tensões principais

CONDIÇÕES DE CONTORNO

No problema plano, as condições de contorno de forças (forças prescritas) são expressas sempre nas faces de normal paralela ao plano xy:



$$\bar{\rho} = \tau \mathbf{N}$$

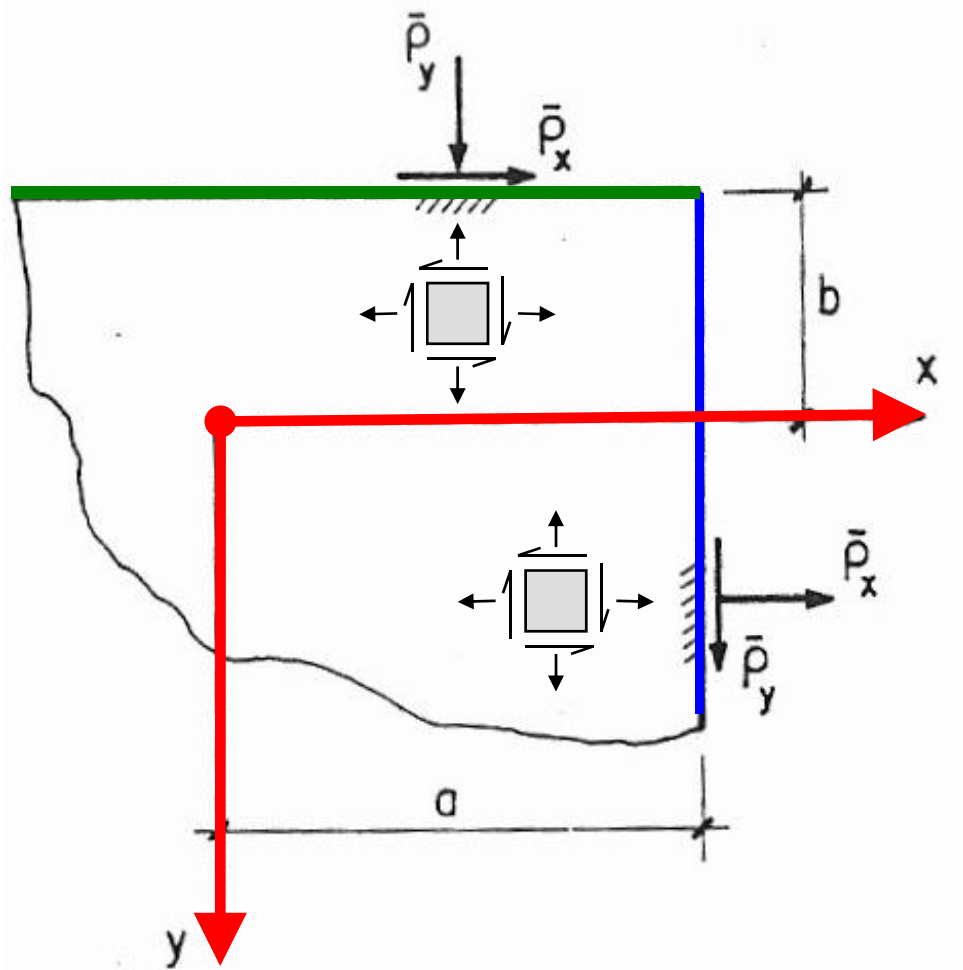
$$\begin{cases} l = \cos \alpha \\ m = \cos \beta \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\rho}_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ \bar{\rho}_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \end{cases}$$

\mathbf{N} – normal à superfície do sólido no ponto de análise

$\bar{\rho}$ – força prescrita no ponto de análise

CONDIÇÕES DE CONTORNO

Bordos retos e perpendiculares aos eixos:



bordo $x=a$:
$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 1 \\ m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\rho}_x = \sigma_x \\ \bar{\rho}_y = \tau_{xy} \end{cases}$$

bordo $y=-b$:
$$\begin{cases} \alpha = \pi/2 \\ \beta = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ m = -1 \\ n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\rho}_x = -\tau_{yx} \\ \bar{\rho}_y = -\sigma_y \end{cases}$$