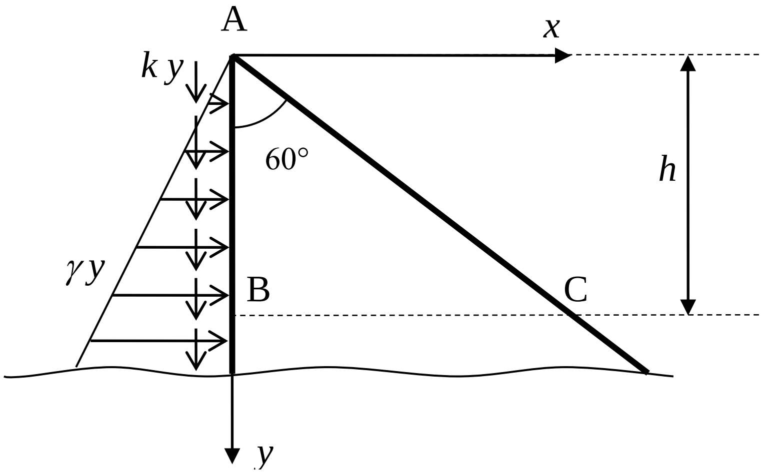
Exercício

Seja a estrutura plana da figura abaixo, admitindo-se para função de tensões um polinômio homogêneo do 3º grau:

$$\phi = \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2y + \frac{c}{2}xy^2 + \frac{d}{6}y^3$$



$k = 10\ kN/m^2/m$

$\gamma = 15\sqrt{3}\ kN/m^2/m$

$h = 8\,m$

a) (3,0) Determine os coeficientes da função de tensões e as expressões das tensões no plano *xy*;

b) (1,5) Determine e represente esquematicamente a distribuição das forças normais e tangenciais no plano *y*=*h* (seção BC);

c) (0,5) Calcule o momento das forças e esforços existentes sobre a estrutura ABC em relação a B:
$M_B = \int_{AB} (h-y)\rho_x dy + \int_{BC} x\rho_y dx$

Formulário:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_x = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m \\ \rho_y = \tau_{xy}\ell + \sigma_y m \end{cases} \qquad \nabla^4\phi = 0$$

Solução:

a) Obtenção das tensões

Substituindo na eq. bi-harmônica, tem-se: $\nabla^4\phi = 0 \Rightarrow \phi$ atende à compatibilidade das deformações.

As tensões são: $$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = cx + dy \\ \sigma_y = ax + by \\ \tau_{xy} = -bx - cy \end{cases}$$

Bordo $x = 0$ e y qualquer $\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -\gamma y \\ \tau_{xy} = -ky \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -\gamma \\ c = k \end{cases}$

Bordo $x = y \cdot tan\,60^\circ = y\sqrt{3}$ e $y \geq 0$ (descarregado) onde $\vec{N} \Rightarrow \begin{cases} \ell = cos\,60^\circ = 1/2 \\ m = -sen\,60^\circ = -\sqrt{3}/2 \\ n = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_x = \sigma_x\ell + \tau_{xy}m = 0 \\ \rho_y = \tau_{xy}\ell + \sigma_y m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \sqrt{3}\cdot\tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xy} - \sqrt{3}\cdot\sigma_y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = cx + dy \\ \sigma_y = ax + by \\ \tau_{xy} = -bx - cy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \left(k\sqrt{3} - \gamma\right)y \\ \sigma_y = \left(a\sqrt{3} + b\right)y \\ \tau_{xy} = \left(-b\sqrt{3} - k\right)y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(k\sqrt{3} - \gamma\right) - \sqrt{3}\cdot\left(-b\sqrt{3} - k\right) = 0 \\ \left(-b\sqrt{3} - k\right) - \sqrt{3}\left(a\sqrt{3} + b\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\gamma + 3b + 2k\sqrt{3} = 0 \\ -k - 3a - 2b\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{\gamma - 2k\sqrt{3}}{3} \\ a = k - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\gamma \end{cases}$$

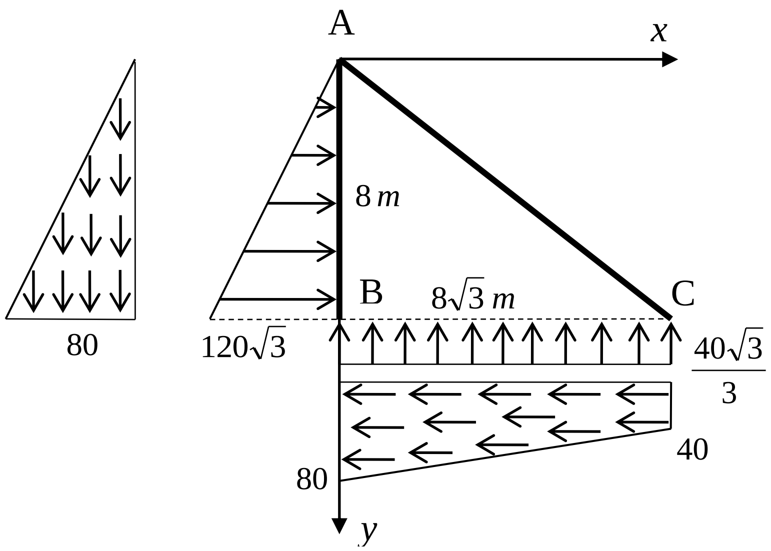
$$\Rightarrow \begin{cases} a = k - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\gamma \\ b = \dfrac{\gamma - 2k\sqrt{3}}{3} \\ c = k \\ d = -\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{5\sqrt{3}}{3} \\ c = 10 \\ d = -15\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = cx + dy \\ \sigma_y = ax + by \\ \tau_{xy} = -bx - cy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 10x - 15\sqrt{3}y \\ \sigma_y = -\dfrac{5\sqrt{3}}{3}y \\ \tau_{xy} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}x - 10y \end{cases}$$

b) Determinação e desenho dos esforços em BC

Bordo $y = h \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho_x = \tau_{xy} \\ \rho_y = \sigma_y \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho_x = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}x - 10h \\ \rho_y = -\dfrac{5\sqrt{3}}{3}h \end{cases}$

Mas $h = 8\ m \Rightarrow \begin{cases} \rho_x = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}x - 80 \\ \rho_y = -\dfrac{40\sqrt{3}}{3} \end{cases}$



c) Momento das forças e esforços existentes sobre a estrutura ABC em relação a B:

$$M_B = \int_{AB} (h-y)\rho_x dy + \int_{BC} x\rho_y dx$$

$$= 15\sqrt{3}\int_0^8 y(8-y)dy - 40\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{8\sqrt{3}} x dx$$

$$= 15\sqrt{3}\left[4y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^8 + 40\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{8\sqrt{3}}$$

$$= 15\sqrt{3}\left[256 - \frac{512}{3}\right] + 40\frac{\sqrt{3}}{3}[96]$$

$$= 1280\sqrt{3} - 1280\sqrt{3} = 0$$