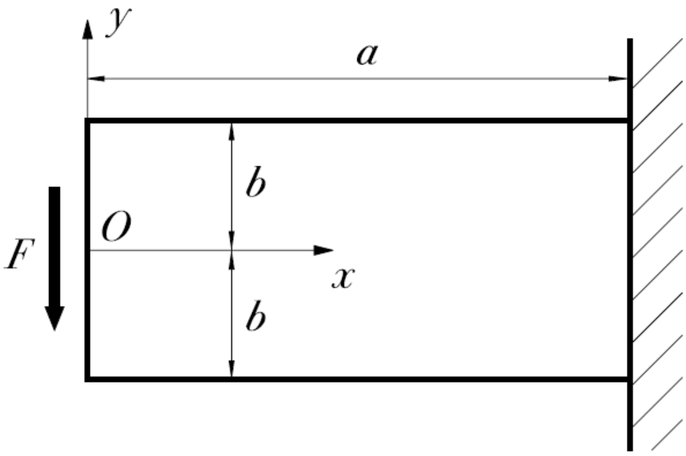
A viga de seção transversal retangular da figura abaixo está engastada na extremidade $x=a$ e sujeita a uma força transversal F na sua extremidade livre ($x=0$). Sabendo-se que a Resistência dos Materiais indica que o momento fletor neste problema varia linearmente com x, e σ_x varia também proporcionalmente a y, determine:



Em x=0: $\int_{-b}^{b} \tau_{xy} dy = F$

a) Uma função de tensões polinomial que satisfaça às condições de contorno, ao equilíbrio e à compatibilidade de deformações;

b) Determine as expressões das tensões na viga;

c) Verifique se as resultantes das tensões no engaste coincidem com as reações do equilíbrio estático: $R_x = 0; R_y = F; M_z = Fa$.

Solução:

a) Obtenção da função de tensões:

$$\text{Condições de contorno} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = C_1 xy \\ \sigma_x = 0,\ x = 0 \\ \sigma_y = 0,\ y = \pm b \\ \tau_{xy} = 0,\ y = \pm b \\ \int_{-b}^{b} \tau_{xy} dy = F \end{cases}$$

Testando ϕ_1:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Rightarrow \phi_1 = \dfrac{C_1}{6} xy^3 \\ \Rightarrow \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = 0 \\ \Rightarrow \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} = -\dfrac{C_1}{2} y^2 \neq 0,\ y = \pm b \end{cases}$$

Testando ϕ_2:

$$\Rightarrow \phi_2 = \frac{C_1}{6}xy^3 - \frac{C_1}{2}b^2xy \;\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial y^2} = C_1 xy \quad ok! \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2} = 0 \quad ok! \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x\partial y} = -\dfrac{C_1}{2}y^2 + \dfrac{C_1}{2}b^2 \quad ok! \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-b}^{b}\tau_{xy}dy = F \Rightarrow \int_{-b}^{b}\tau_{xy}dx = \left[-\frac{C_1}{6}y^3 + \frac{C_1}{2}yb^2\right]_{-b}^{b} = \left[-\frac{C_1}{6}b^3 + \frac{C_1}{2}b^3 - \left(\frac{C_1}{6}b^3 - \frac{C_1}{2}b^3\right)\right] = \frac{2C_1}{3}b^3 = F$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}\frac{F}{b^3}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{F}{4b^3}xy^3 - \frac{3F}{4b}xy$$

$$\nabla^4\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0 \qquad ok!$$

b) Tensões:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \dfrac{3F}{2b^3}xy \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \dfrac{3F}{4b^3}\left(-y^2 + b^2\right) \end{cases}$$

c) Reações em $x=a$:

$$\Rightarrow \begin{cases} R_x = \displaystyle\int_{-b}^{b}\rho_x dy = \int_{-b}^{b}\sigma_x dy = \left[\frac{3}{4}\frac{Fa}{b^3}y^2\right]_{b}^{-b} = 0 \qquad \text{ok!} \\ R_y = \displaystyle\int_{-b}^{b}\rho_y dy = \int_{-b}^{b}\tau_{xy} dy = \frac{3F}{4b^3}\left[-\frac{y^3}{3} + b^2 y\right]_{b}^{-b} = \frac{3F}{4b^3}\left[\frac{4b^3}{3}\right] = F \qquad \text{ok!} \\ M_z = \displaystyle\int_{-b}^{b}\rho_x y dy = \int_{-b}^{b}\sigma_x y dy = \frac{3F}{2b^3}\int_{-b}^{b}(xy)y dy = \frac{3F}{2b^3}\left[\frac{xy^3}{3}\right]_{b}^{-b} = \frac{3Fx}{2b^3}\left[\frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{3}\right] = Fa \qquad \text{ok!} \end{cases}$$

Ou seja: