Problemas Planos em Coordenadas Cartesianas – Lista de Exercícios

1 - Admitindo para função de tensões o polinômio $\phi = ax^2 + bx^4 + cy^4$, determinar as forças de contorno na chapa retangular (com forças de massa nulas) cujos bordos são x=0, x=l , e y= ± $h/2$.

Solução:

Substituindo na eq. bi-harmônica, tem-se:

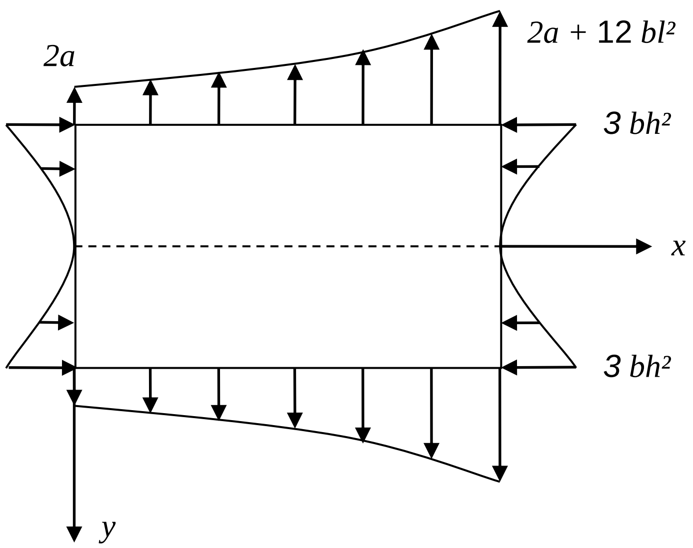
$$\nabla^4\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^4\phi = 24b + 24c = 0 \Rightarrow c = -b$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -12by^2 \\ \sigma_y = 2a + 12bx^2 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

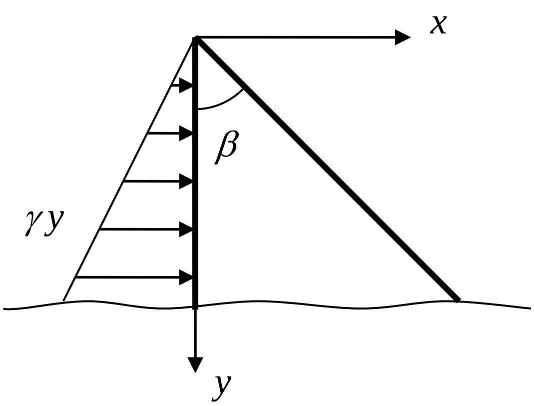
Bordos x=0 e x=l : $\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -12by^2 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$

Bordos y=± $h/2$: $\Rightarrow \begin{cases} \sigma_y = 2a + 12bx^2 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$



2 - Determinar as tensões na chapa para o carregamento da figura, usando a função de tensões:

$$\phi = \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2 y + \frac{c}{2}xy^2 + \frac{d}{6}y^3$$



Solução:

Substituindo na eq. bi-harmônica, tem-se:

$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \Rightarrow \phi$ atende à bi-harmônica.

As tensões são: $\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = cx + dy \\ \sigma_y = ax + by \\ \tau_{xy} = -bx - cy \end{cases}$

Bordos $x = 0$ e y qualquer $\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -\gamma y \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -\gamma \\ c = 0 \end{cases}$

Bordos $x = y \tan\beta$ e $y \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{\rho}_x = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m = 0 \\ \bar{\rho}_y = \tau_{xy}\ell + \sigma_y m = 0 \end{cases}$ (descarregado) onde $\vec{N} \Rightarrow \begin{cases} \ell = \cos\beta \\ m = -\operatorname{sen}\beta \\ n = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-\gamma y)\cos\beta + (-bx)(-\operatorname{sen}\beta) = 0 \\ (-bx)\cos\beta + (ax + by)(-\operatorname{sen}\beta) = 0 \end{cases}$$

Substituindo $x = y \tan\beta$, tem-se:

$$\Rightarrow \begin{cases} -\gamma y \cos\beta + by\tan\beta \operatorname{sen}\beta = 0 \\ -by\tan\beta\cos\beta - (ay\tan\beta + by)\operatorname{sen}\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\gamma y \cos\beta + by\tan\beta \operatorname{sen}\beta = 0 \\ -by - (ay\tan\beta + by) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\gamma\cot\beta + b\tan\beta = 0 \\ -2b - a\tan\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \gamma\cot^2\beta \\ a = -2\gamma\cot^3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -\gamma y \\ \sigma_y = -2\gamma\cot^3\beta\, x + \gamma\cot^2\beta\, y \\ \tau_{xy} = -\gamma\cot^2\beta\, x \end{cases}$$