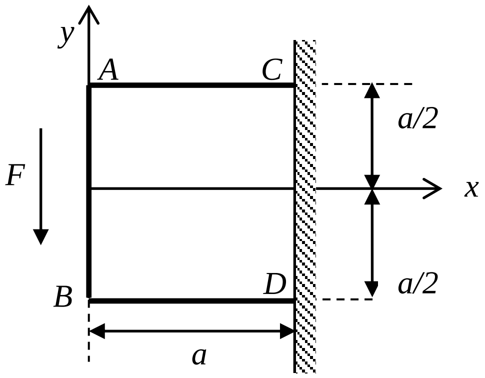
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA	PROVA: 2ª DISCIPLINA: TEORIA DA ELASTICIDADE ANO: 1º CURSO: PG ENGENHARIA DE TRANSPORTES REALIZAÇÃO: 15/05/2014 CONSULTA: ( ) LIVRE ( ) RESTRITA (X) PROIBIDA

2ª Questão (5,0 pontos)

Seja o modelo de consolo curto apresentado na figura a seguir. Admitindo-se para a função de tensões o polinômio ϕ proposto, pede-se:

$$\phi = C_1 xy^3 + C_2 xy$$



$$\text{onde em } x = 0: \left| \int_{-a/2}^{a/2} \tau_{xy} dy \right| = F$$

a) (2,5) Determine os coeficientes da função de tensões e as expressões das tensões no plano *xy*;

b) (1,5) Determine e represente esquematicamente a distribuição das forças normais e tangenciais na seção BC;

c) (1,0) Verifique se as reações existentes no engaste (considerando espessura unitária) coincidem com as equações do equilíbrio estático:

$$R_x = 0;\ R_y = F;\ M_z = F \cdot a$$

Formulário:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_x = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m \\ \rho_y = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m \end{cases} \qquad \nabla^4 \phi = 0$$

Solução:

a) Obtenção das tensões

Substituindo na eq. bi-harmônica, tem-se: $\nabla^4\phi = 0 \Rightarrow \phi$ atende à compatibilidade das deformações.

As tensões são:
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 6C_1 xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -3C_1 y^2 - C_2 \end{cases}$$

Bordo $y = \pm a/2$ e x qualquer:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \tau_{xy} = -\frac{3}{4}C_1 a^2 - C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{4}C_1 a^2$$

Bordo $x = 0$ e y qualquer:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \tau_{xy} dy = F \Rightarrow \int_{-a/2}^{a/2} \left(-3C_1 y^2 + \frac{3}{4}C_1 a^2 \right) dy = F$$

$$\Rightarrow \left[-C_1 y^3 + \frac{3}{4}C_1 a^2 y \right]_{-a/2}^{a/2} = F$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{8}C_1 a^3 + \frac{3}{8}C_1 a^3 \right] - \left[\frac{1}{8}C_1 a^3 - \frac{3}{8}C_1 a^3 \right] = F$$

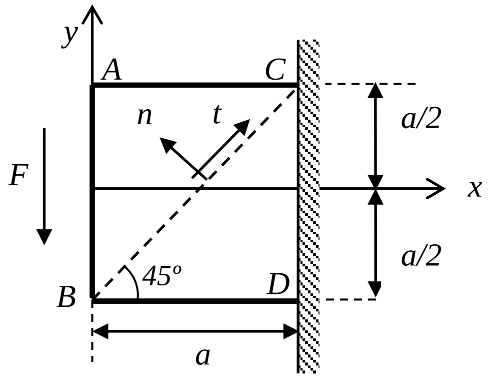
$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \right] C_1 a^3 = F$$

$$\Rightarrow C_1 a^3 = F \Rightarrow C_1 = 2\frac{F}{a^3}$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{3}{2}\frac{F}{a}$$

$$\Rightarrow \phi = 2\frac{F}{a^3} xy^3 - \frac{3F}{2a} xy \qquad \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{12F}{a^3} xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{6F}{a^3} y^2 + \dfrac{3F}{2a} \end{cases}$$

b) Determinação e desenho dos esforços em BC



$$\text{Bordo BC} \Rightarrow \begin{cases} \ell = cos(135^o) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ m = cos(45^o) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{12F}{a^3}xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{6F}{a^3}y^2 + \dfrac{3F}{2a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_x = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m \\ \rho_y = \tau_{xy}\ell + \sigma_y m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_x = -\dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3}xy - \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3}y^2 + \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a} \\ \rho_y = \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3}y^2 - \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_n = -\rho_x \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \rho_y \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \rho_t = \rho_x \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \rho_y \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3}xy + \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3}y^2 - \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a} + \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3}y^2 - \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a}\right] \\ \rho_t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[-\dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3}xy - \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3}y^2 + \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a} + \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3}y^2 - \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3}xy + \dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3}y^2 - \dfrac{3F\sqrt{2}}{2a}\right] \\ \rho_t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[-\dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3}xy\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \dfrac{6F}{a^3}xy + \dfrac{6F}{a^3}y^2 - \dfrac{3F}{2a} \\ \rho_t = -\dfrac{6F}{a^3}xy \end{cases}$$

Entretanto, no bordo BC temos: $y = x - a/2 \Rightarrow x = y + a/2$

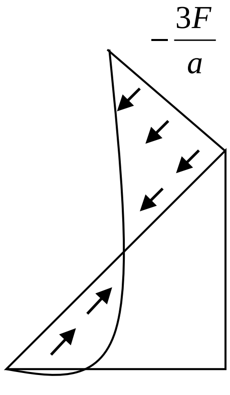
$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \dfrac{6F}{a^3}\left(y + a/2\right)y + \dfrac{6F}{a^3}y^2 - \dfrac{3F}{2a} \\ \rho_t = -\dfrac{6F}{a^3}\left(y + a/2\right)y \end{cases}$$

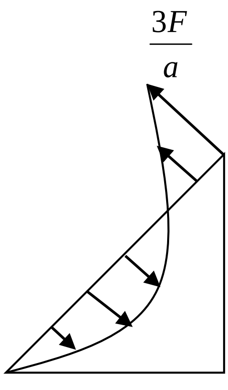
$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \dfrac{12F}{a^3}y^2 + \dfrac{3F}{a^2}y - \dfrac{3F}{2a} \\ \rho_t = -\dfrac{6F}{a^3}y^2 - \dfrac{3F}{a^2}y \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -a/2 \Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \dfrac{3F}{a} - \dfrac{3F}{2a} - \dfrac{3F}{2a} = 0 \\ \rho_t = -\dfrac{3F}{2a} + \dfrac{3F}{2a} = 0 \end{cases}$$

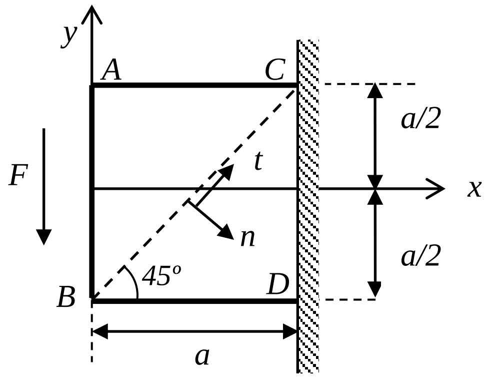
$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho_n = -\dfrac{3F}{2a} \\ \rho_t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = a/2 \Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \dfrac{3F}{a} + \dfrac{3F}{2a} - \dfrac{3F}{2a} = \dfrac{3F}{a} \\ \rho_t = -\dfrac{3F}{2a} - \dfrac{3F}{2a} = -\dfrac{3F}{a} \end{cases}$$





Outra solução (normal no sentido contrário, tangente no mesmo sentido):



Bordo BC $\Rightarrow \begin{cases} \ell = cos(45^o) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ m = cos(135^o) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{12F}{a^3} xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{6F}{a^3} y^2 + \dfrac{3F}{2a} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_x = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m \\ \rho_y = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_x = \dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3} xy + \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3} y^2 - \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a} \\ \rho_y = -\dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3} y^2 + \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \rho_x \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \rho_y \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \rho_t = \rho_x \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \rho_y \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3} xy + \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3} y^2 - \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a} + \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3} y^2 - \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a} \right] \\ \rho_t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3} xy + \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3} y^2 - \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a} - \dfrac{3F\sqrt{2}}{a^3} y^2 + \dfrac{3F\sqrt{2}}{4a} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3} xy + \dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3} y^2 - \dfrac{3F\sqrt{2}}{2a} \right] \\ \rho_t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\dfrac{6F\sqrt{2}}{a^3} xy \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_n = \dfrac{6F}{a^3} xy + \dfrac{6F}{a^3} y^2 - \dfrac{3F}{2a} \\ \rho_t = \dfrac{6F}{a^3} xy \end{cases}$$

c) **Verifique se as reações existentes no engaste (considerando espessura unitária) coincidem com as equações do equilíbrio estático:**

$$\text{No engaste } x = a: \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{12F}{a^2}y \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{6F}{a^3}y^2 + \dfrac{3F}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_x = \dfrac{12F}{a^2}y \\ \rho_y = -\dfrac{6F}{a^3}y^2 + \dfrac{3F}{2a} \end{cases}$$

$$M_{CD} = \int_{-a/2}^{a/2} y\rho_x dy$$

$$= \frac{12F}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy = \frac{12F}{a^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{12F}{a^2}\left[\frac{a^3}{24}+\frac{a^3}{24}\right] = Fa$$

$$R_x = \int_{-a/2}^{a/2} \rho_x dy$$

$$= \frac{12F}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2} y dy = \frac{12F}{a^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{12F}{a^2}\left[\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{8}\right] = 0$$

$$R_y = \int_{-a/2}^{a/2} \rho_y dy$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2}\left[-\frac{6F}{a^3}y^2 + \frac{3F}{2a}\right]dy = \left[-\frac{6F}{3a^3}y^3 + \frac{3F}{2a}y\right]_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= \left[-\frac{F}{4} + \frac{3F}{4} - \left(+\frac{F}{4} - \frac{3F}{4}\right)\right] = F$$