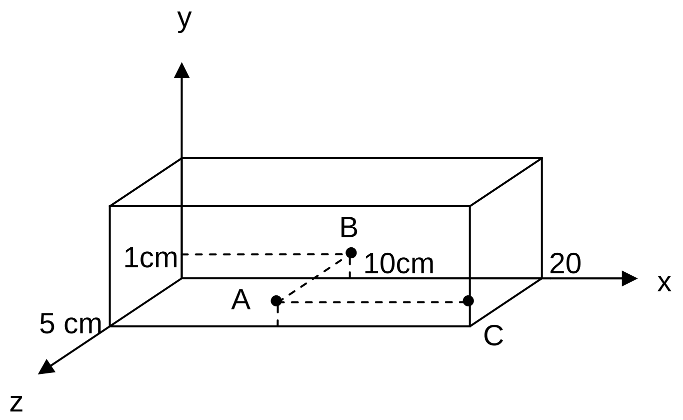
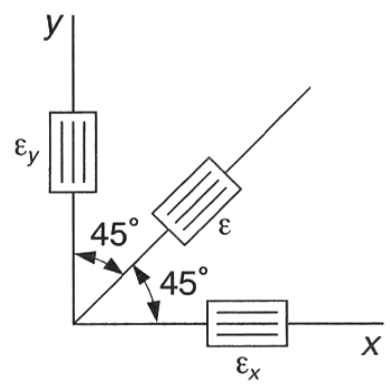
LISTA DE EXERCÍCIOS – TEORIA DA ELASTICIDADE – DEFORMAÇÕES

1) Para a peça prismática indeformada da figura abaixo foi admitido o campo de deformações apresentado:



$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} ay & by^2 & 0 \\ by^2 & cz & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}2ay \end{bmatrix} \quad , \; (x, y, z) \text{ em cm}$$

Para ajustar o modelo, ainda na configuração inicial indeformada foi colada uma roseta de *strain-gages* na superfície do sólido, junto ao ponto A (10, 1, 5). Na configuração deformada, foram lidos os valores das deformações tendo-se obtido: $\varepsilon_x = 2100\mu$, $\varepsilon_y = -100\mu$, $\varepsilon_{45} = 500\mu$.



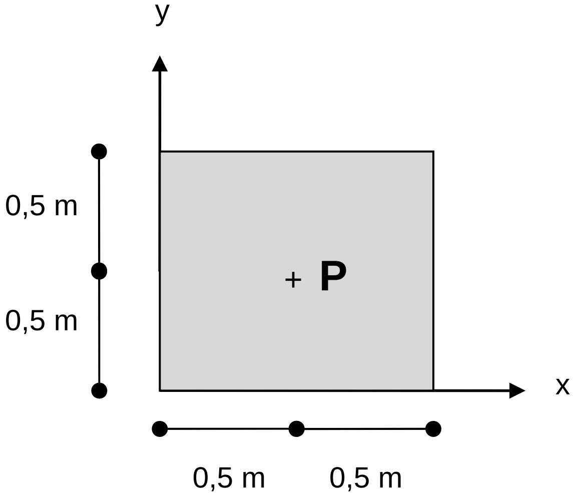
Pede-se:

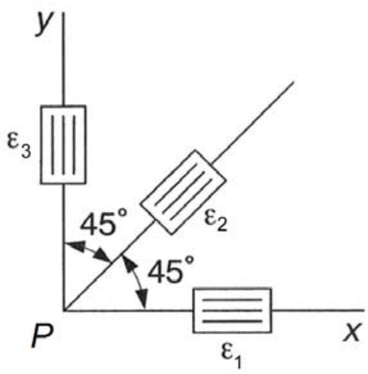
a) Determinar o campo de deformações em função de (*x, y, z*) em centímetros;
b) Calcular no ponto B, segundo o plano *z=0*, as deformações principais, a direção onde elas ocorrem e a máxima distorção;
c) Qual o comprimento final do segmento AC após ter sido imposto o campo de deformações.

2) A placa mostrada na figura sofre os seguintes deslocamentos:

$$u_x = 2y(x+1)mm \qquad u_y = 2y(x-1)mm$$

sendo u_x e u_y deslocamentos nas direções x e y , respectivamente.





Pedem-se:

a. Esquematizar a configuração deformada.
b. As componentes de deformação no plano xy.
c. As leituras indicadas nos extensômetros 1, 2 e 3 dispostos no ponto *P*;
d. As deformações principais no ponto *P* e a direção em que ocorrem.

Solução:

a. Esquematizar a configuração deformada.

Para o bordo definido pela equação y=1 tem-se:

$$u_x = 2y(x+1) = (2x+2)mm$$
$$u_y = 2y(x-1) = (2x-2)mm$$

Nos pontos (0,1) e (1,1) tem-se:

$u_x = 2mm$ e $u_y = -2mm$
$u_x = 4mm$ e $u_y = 0$

Para o bordo definido pela equação y=0 tem-se:

$u_x = 2y(x+1) = 0$
$u_y = 2y(x-1) = 0$

Para o bordo definido pela equação x=0 tem-se:

$u_x = 2y$
$u_y = -2y$

Nos pontos (0,0) e (0,1) tem-se:

$u_x = 0$ e $u_y = 0$
$u_x = 2mm$ e $u_y = -2mm$

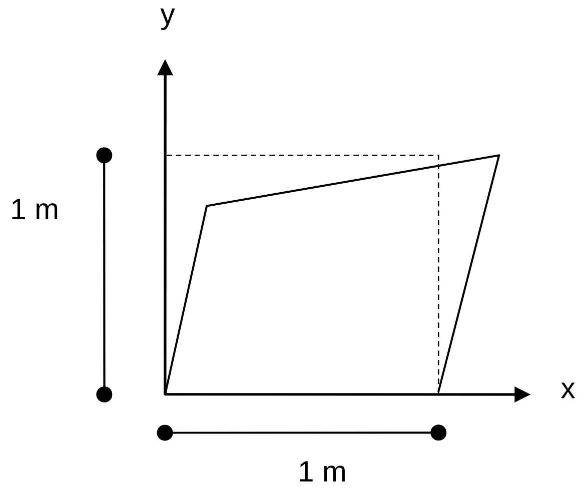
Para o bordo definido pela equação x=1 tem-se:

$u_x = 4y$
$u_y = 0$

Nos pontos (1,0) e (1,1) tem-se:

$u_x = 0$ e $u_y = 0$
$u_x = 4mm$ e $u_y = 0$

Logo, o esboço da configuração deformada fica:



b. As componentes de deformação no plano *xy*.

Para x e y em metros:

$$u_x = 2y(x+1)mm \qquad u_y = 2y(x-1)mm$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 2y \ \ mm/m$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = (2x-2) \ \ mm/m$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(2x+2+2y) = (x+y+1)10^{-3}\,rad$$

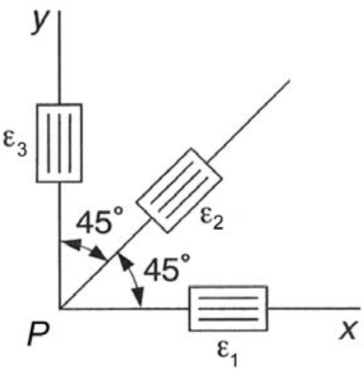
c. As leituras indicadas nos extensômetros 1, 2 e 3 dispostos no ponto *P*;

No ponto P(0,5;0,5):

No extensômetro Nr 1 tem-se $\varepsilon = \varepsilon_x = 1\,mm/m = 0{,}001\,m/m$

No extensômetro Nr 3 tem-se $\varepsilon = \varepsilon_y = -1\,mm/m = -0{,}001\,m/m$

No extensômetro Nr2 tem-se:



$$\Rightarrow \varepsilon_s = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy}\ell m + \gamma_{xz}\ell n + \gamma_{yz} mn$$

$$\Rightarrow \ell = \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos 45^o \\ \cos 45^o \\ \cos 90^o \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_s = \frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \gamma_{xy}\frac{1}{2}$$

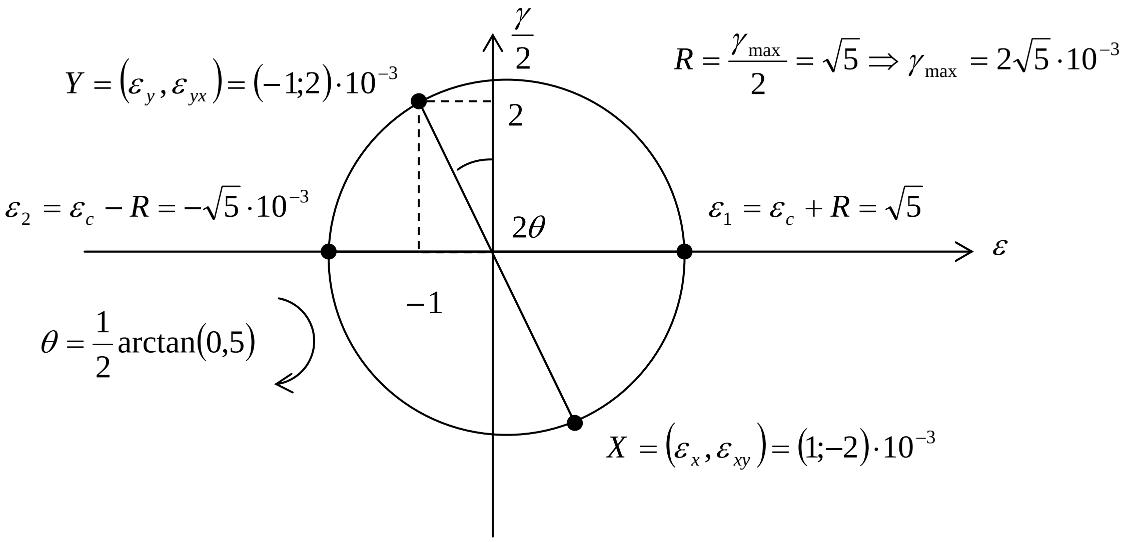
$$\Rightarrow \varepsilon_s = y + x - 1 + x + y + 1 = 2x + 2y$$

No ponto P(0,5;0,5), no extensômetro Nr2 tem-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_s = 2x + 2y = 2mm/m$$

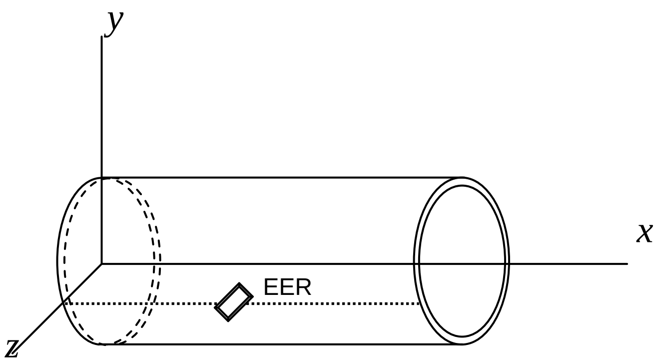
d. As deformações principais no ponto *P* e a direção em que ocorrem;

A distorção máxima no ponto *P* e a direção em que ocorre.



LISTA DE EXERCÍCIOS – TEORIA DA ELASTICIDADE – DEFORMAÇÕES

3) Um cilindro de paredes delgadas e diâmetro externo de 200mm é solicitado por um momento torçor, apresentando o seguinte campo de deslocamentos:



$$u = 0$$

$$v = -cxz$$

$$w = cxy$$

sendo u, v, w os deslocamentos nas direções x, y e z , respectivamente.

Para ajustar o modelo, ainda na configuração inicial indeformada foi colado um extensômetro (EER) na superfície do cilindro, fazendo 45º com a direção x. Na configuração deformada, fez-se a leitura do EER tendo-se obtido $\varepsilon_{45} = -500\mu$.

Pedem-se:

a. O valor da constante c;

b. O Tensor de deformações em função de x, y e z;

c. Mostre que a distorção γ_{st} é constante em qualquer parte do cilindro, onde s e t são respectivamente a direção axial e a direção tangente à circunferência externa do cilindro (no plano da seção transversal);

d. Sabendo-se que o cilindro possui 1 metro de comprimento, qual o ângulo de torção observado entre as seções transversais das extremidades.

Dado:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} \ell m + \gamma_{xz} \ell n + \gamma_{yz} mn$$
$$\gamma_{st} = 2\varepsilon_x \ell_s \ell_t + 2\varepsilon_y m_s m_t + 2\varepsilon_z n_s n_t + \gamma_{xy}(\ell_s m_t + m_s \ell_t) + \gamma_{xz}(\ell_s n_t + n_s \ell_t) + \gamma_{yz}(m_s n_t + n_s m_t)$$

Solução:

a. O valor da constante c;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ ; \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ ; \ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{cz}{2} \Rightarrow \gamma_{xy} = -cz$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{cy}{2} \Rightarrow \gamma_{xy} = cy$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow \gamma_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_{xyz} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{cz}{2} & \frac{cy}{2} \\ -\frac{cz}{2} & 0 & 0 \\ \frac{cy}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy}\ell m + \gamma_{xz}\ell n + \gamma_{yz} mn$$

onde $\ell = \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}; m = \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}; n = \cos 90^{\circ} = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_{45} = 0 + 0 + 0 + \gamma_{xy}\ell m + 0 + 0 \ \Rightarrow \varepsilon_{45} = -cz \cdot \frac{1}{2} = -500\mu$

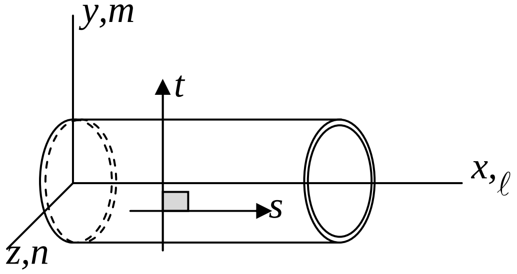
para $z = 100mm \Rightarrow c = 10\mu / mm$

Solução (cont.):

b. O Tensor de deformações em função de x, y e z:

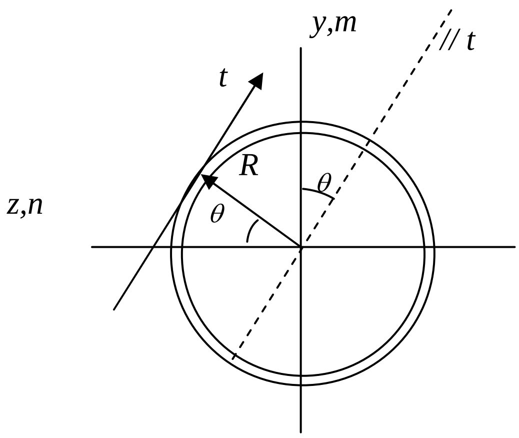
$$\varepsilon_{xyz} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} 5\mu / mm$$

c. Mostre que a distorção γ_{st} é constante em qualquer parte do cilindro, onde s e t são respectivamente a direção axial e a direção tangente à circunferência externa do cilindro (no plano da seção transversal);



$$\ell_s = \cos 0^\circ = 1$$
$$\ell_t = \cos 90^\circ = 0$$
$$m_s = \cos 90^\circ = 0$$
$$n_s = \cos 90^\circ = 0$$

Observando-se a seção transversal, tem-se:

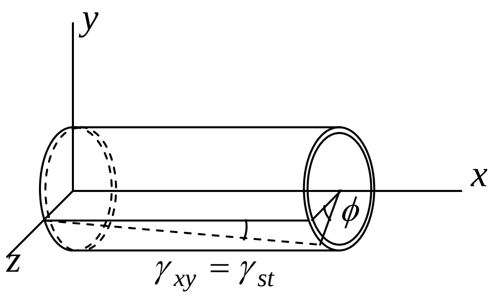


$$\Rightarrow \gamma_{st} = \gamma_{xy} m_t + \gamma_{xz} n_t$$

$$\Rightarrow \gamma_{st} = 10\mu\left(-z m_t + y n_t\right)$$
$$= 10\mu\left(-R\cos\theta\cos(mt) + R\,\mathrm{sen}\,\theta\cos(nt)\right)$$
$$= 10\mu\left(-R\cos\theta(\cos\theta) + R\,\mathrm{sen}\,\theta(-\mathrm{sen}\,\theta)\right)$$
$$= -10R\mu\left(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta\right)$$
$$= -10R\mu$$
$$= -1000\mu$$

Solução (cont.):

d. Sabendo-se que o cilindro possui 1 metro de comprimento, qual o ângulo de torção observado entre as seções transversais das extremidades.



Para pequenos deslocamentos tem-se:

$$\phi = \frac{\Delta s}{R} \text{ e } \gamma_{xy} = \gamma_{st} = \frac{\Delta s}{L}$$

$$\Rightarrow \Delta s = L\gamma_{st}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\Delta s}{R} = \frac{L\gamma_{st}}{R} = \frac{1000}{100}(-1000\mu) = -10^{-2}\,rad$$

LISTA DE EXERCÍCIOS – TEORIA DA ELASTICIDADE – DEFORMAÇÕES

4) Se $T_{ij} = -T_{ji}$ e $S_{ij} = S_{ji}$, mostre que $T_{kl}S_{kl} = 0$.

Solução:

Para o caso $j = i$, tem-se $T_{ii} = -T_{ii}$. Portanto, novamente tem-se $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$. Logo, aplicando a convenção do somatório para os índices k e l vem que

$$\begin{aligned} T_{kl}S_{kl} &= T_{11}S_{11} + T_{12}S_{12} + T_{13}S_{13} + T_{21}S_{21} + T_{22}S_{22} + T_{23}S_{23} + T_{31}S_{31} + T_{32}S_{32} + T_{33}S_{33} \\ &= (0)S_{11} + T_{12}S_{12} + T_{13}S_{13} - T_{12}S_{12} + (0)S_{22} + T_{23}S_{23} - T_{13}S_{13} - T_{23}S_{23} + (0)S_{33} \\ &= 0. \end{aligned}$$

5) Desenvolva a lei de transformação das deformações em notação indicial apresentada a seguir, transformando-a na respectiva equação em coordenadas cartesianas.

$$\varepsilon_s = \ell_{si}\ell_{sj}\varepsilon_{ij}$$

Solução:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x\ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy}\ell m + \gamma_{xz}\ell n + \gamma_{yz}mn$$

4) Verifique se os estados de deformação dados a seguir satisfazem às equações de compatibilidade das deformações:

a) $$\varepsilon = \begin{bmatrix} x^2 & y^2+z^2 & xz \\ y^2+z^2 & 0 & x \\ xz & x & z^2 \end{bmatrix}_{xyz}$$

b) $$\varepsilon = \begin{bmatrix} ax+b & z & 0 \\ z & 0 & ax \\ 0 & ax & z \end{bmatrix}_{xyz}$$

Solução:

a. Não satisfaz.

b. Como todas as componentes são funções lineares das variáveis independentes *x, y, z*, e as equações de compatibilidade consistem em derivadas de segunda ordem, verifica-se que as condições de compatibilidade são atendidas.

5) Determine o tensor de deformações para a barra de seção circular submetida à Torção apresentando o seguinte campo de deslocamentos:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = -cxz \\ w = cxy \end{cases}$$

Solução:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-cz}{2} & \dfrac{cy}{2} \\ \dfrac{-cz}{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{cy}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{xyz}$$