SEÇÃO DE ENSINO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO

Pós-graduação em Engenharia de Transportes

Deformações na Notação Indicial

MAJ MONIZ DE ARAGÃO

- Campo de deslocamentos; Componentes de deformação; Relações deformação-deslocamento; Deformação linear específica numa direção qualquer; Deformações Principais.

Referências bibliográficas:

- *Elasticidade Não Linear*, Taborda Garcia, L. F., Ed. Letra Capital, 2007.
- *Theory of Elasticity*, Timoshenko, S. P., Goodier, J.N., McGraw-Hill Classic Textbook Reissue Series, 3rd Ed., 1970.

Notação Indicial (*Indicial Notation*)

Notação indicial é uma forma compacta de escrever sistemas de equações.

Ela pode ser usada em substituição da forma escrita por extenso ou representação matricial.

A matriz é mais valiosa para representar o armazenamento de valores no sistema, mas para escrever equações em uma forma compacta, e especialmente para tensores de ordem superior, a notação indicial é mais eficiente.

Deformações: notação indicial

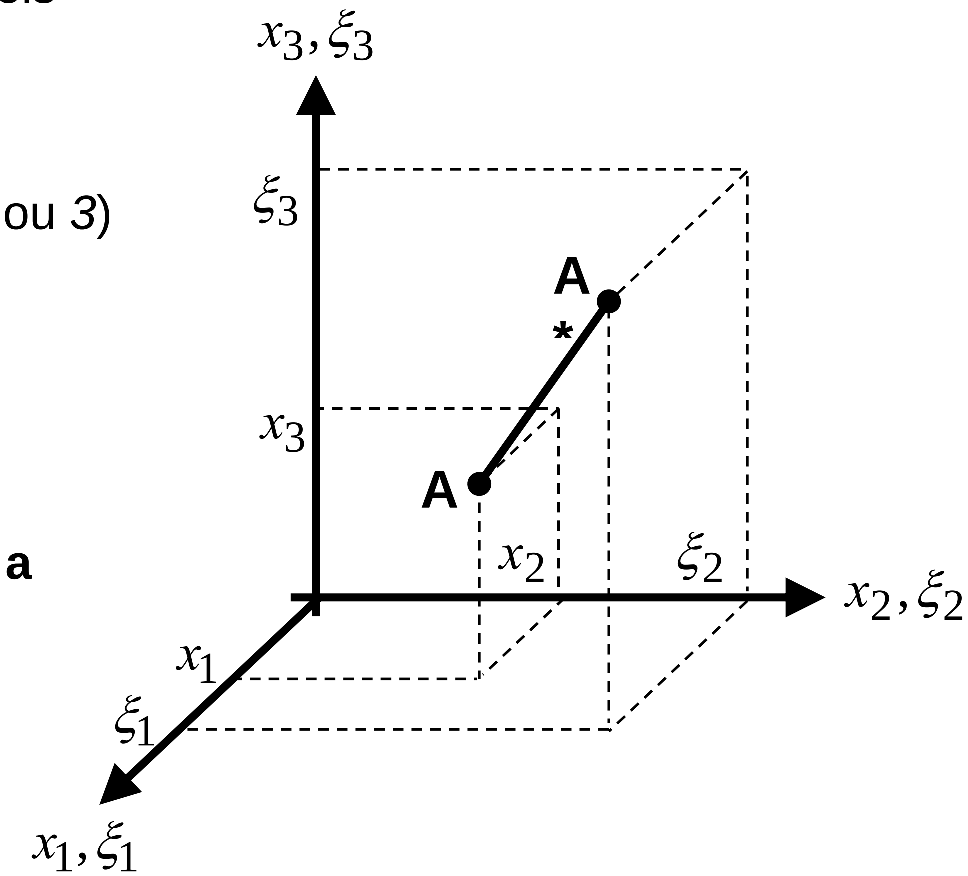
Na notação indicial, no lugar das variáveis

x, y e z usa-se:

$$\mathbf{x} = x_i = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases}$$

(subentende-se i=*1, 2* ou *3*)

"tensor de 1ª ordem"



Desta forma, a posição dos pontos **após a deformação** pode ser definida como:

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3)$$

ou inversamente por:

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

ξ_i = Coordenadas **Eulerianas**

x_i = Coordenadas **Lagrangianas**

Regras da notação indicial

1. Quando um índice aparece uma única vez em um termo (monômio), é chamado de índice livre (*unique/free index*) e assume sucessivamente os valores *1, 2* e *3.* O número de índices livres indica a ordem do tensor:

$$c \cdot a_i \quad = \quad b_i; \qquad b_1 = c \cdot a_1; \; b_2 = c \cdot a_2; \; b_3 = c \cdot a_3;$$

$$c \cdot \mathbf{a} \quad = \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = A_{ij} \qquad i = 1 \ldots 3; \; j = 1 \ldots 3$$

Regras da notação indicial

2. Quando um índice aparece duas vezes em um termo (monômio), é denominado de índice mudo (*repeated/dummy index*) e corresponde à soma implícita de três termos (regra de soma de Einstein):

$$a_i b_i \quad = \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad = \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c$$

3. O mesmo índice pode não aparecer mais que duas vezes em qualquer termo (monômio) dado dentro de uma equação.

Exemplos de notação indicial

$$B_i = A_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}v_j = A_{i1}v_1 + A_{i2}v_2 + A_{i3}v_3$$

$$B_i = A_{ij}v_j = \begin{bmatrix} A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3 \\ A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3 \\ A_{31}v_1 + A_{32}v_2 + A_{33}v_3 \end{bmatrix}$$

Tensor de 1ª ordem

Exemplos de notação indicial

$$D_{ik} = A_{ij}B_{jk} \qquad i = 1 \ldots 2;\; j = 1 \ldots 3;\; k = 1 \ldots 2$$

$$D_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31}$$
$$D_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32}$$
$$D_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31}$$
$$D_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

Tensor de 2ª ordem

Deformações: notação indicial

Como as coordenadas Eulerianas ξ_i podem ser escritas em função de x_1, x_2, x_3, suas diferenciais totais são:

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3) \qquad \Rightarrow d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3} dx_3$$

Na notação indicial tem-se:

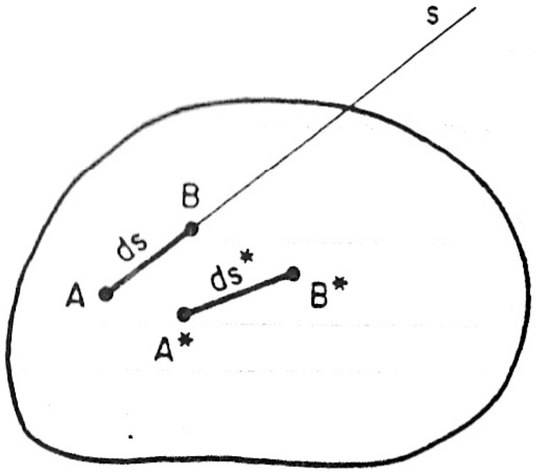
$$\Rightarrow d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} dx_j$$

Analogamente, fazendo-se: $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, obtém-se:

$$\Rightarrow dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j$$

Deformações: notação indicial

O comprimento ***ds*** do segmento ***AB*** fica então:



$$ds^2 = dx_1^{\;2} + dx_2^{\;2} + dx_3^{\;2} = dx_i dx_i$$

Na configuração deformada, temos analogamente:

$$ds^{*2} = d\xi_1^{\;2} + d\xi_2^{\;2} + d\xi_3^{\;2} = d\xi_i d\xi_i$$

$$\boxed{\text{mas } \; d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} dx_j} \qquad \Rightarrow ds^{*2} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} dx_j dx_k$$

notação indicial: delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$A_i = \delta_{ij} A_j$$

$$A_{ik} = \delta_{ij} A_{jk}$$

$$\delta_{ii} = 3$$

$$\delta_{ij}\delta_{ji} = 3$$

$$\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{im}\delta_{mj}\delta_{jn} = \delta_{im}\delta_{mn} = \delta_{in}$$

Deformações: notação indicial

Quantificando-se a variação de comprimento do segmento através da diferença entre os quadrados dos segmentos, após e antes da deformação, evita-se a medição dos deslocamentos de corpo rígido, obtendo-se:

$$ds^{*2} - ds^2 = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} dx_j dx_k - \underbrace{\underbrace{dx_i}_{\delta_{ij} dx_j} \underbrace{dx_i}_{\delta_{ik} dx_k}}_{\delta_{jk} dx_j dx_k}$$

$$\Rightarrow ds^{*2} - ds^2 = \underbrace{\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \delta_{jk} \right)}_{2\varepsilon_{ij}} dx_j dx_k$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \delta_{jk} \right)$$

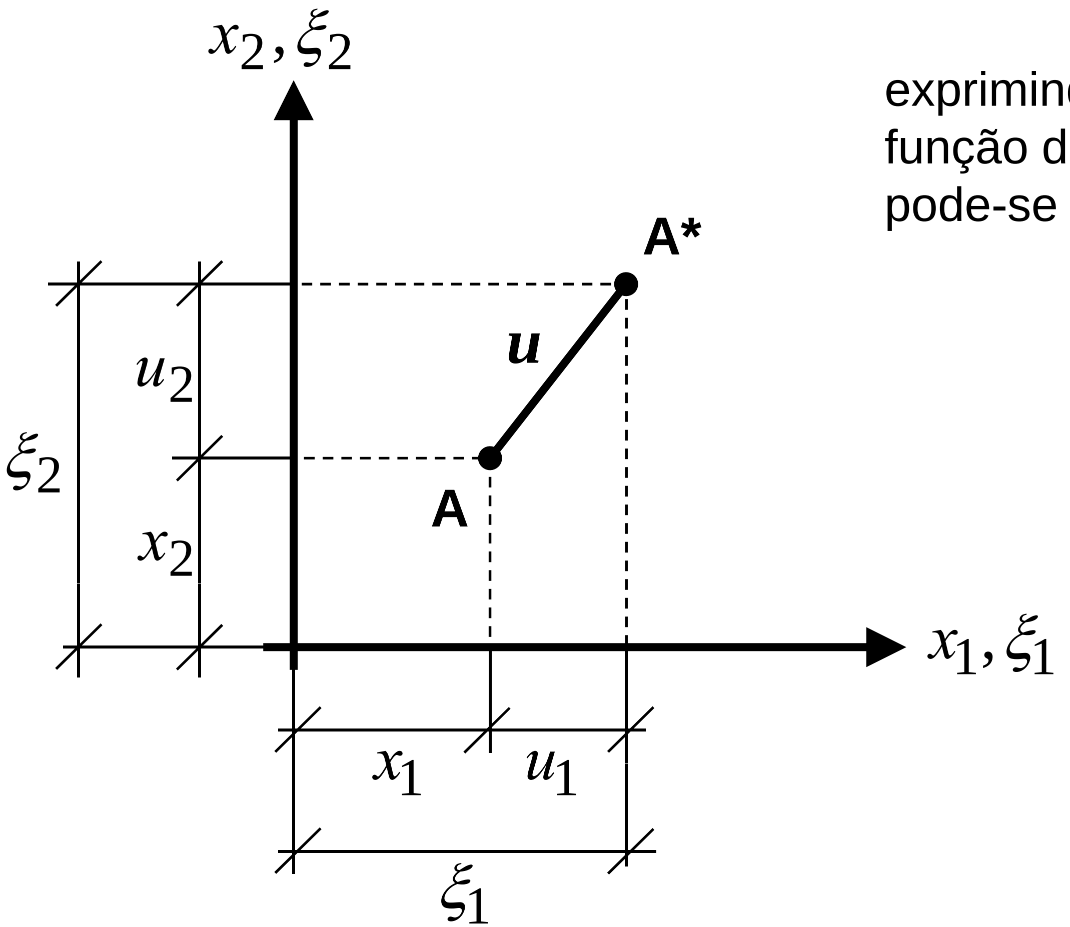
[Eq. 1]

é o **TENSOR DEFORMAÇÃO DE GREEN**, expresso em função das coordenadas Lagrangianas x_i

Como o Tensor de Green se relaciona com a definição de deformação linear específica ?

Denominando-se de $\boldsymbol{u_i}$ as componentes do deslocamento de um ponto A, tem-se a seguinte relação entre as coordenadas:

$$u_i = \xi_i - x_i$$



exprimindo também os deslocamentos em função das coordenadas Lagrangeanas, pode-se obter:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{\partial_{ij}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \partial_{ij} \qquad \text{[Eq. 2]}$$

Como o Tensor de Green se relaciona com a definição de deformação linear específica ?

Substituindo-se a Eq. 2 na Eq. 1, obtém-se a expressão do Tensor de Green em função dos deslocamentos:

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ki}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{kj}\right) - \delta_{ij}\right]$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\delta_{kj} + \delta_{ki}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{ki}\delta_{kj} - \delta_{ij}\right]$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)}$$

Pode-se perceber que o tensor geral de (grande) deformação contém um termo quadrático. Isto significa que todas as análises de grandes deformações são não-lineares.

Regras da notação indicial: convenção da derivada

4. Uma vírgula entre índices implica uma derivada relativamente à variável designada pelo(s) índice(s) depois da vírgula:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad u_{i,jm} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

Relações Deformação – Deslocamento

Simplificação para pequenas mudanças de configuração

Considerando a classe de problemas em que as derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas são muito pequenas em relação à unidade:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} << 1, \quad \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} << 1$$

os termos quadráticos na equação do tensor deformação se tornam de ordem inferior em relação aos lineares, podendo ser desprezados. Além disso, passa a ser irrelevante que as derivadas dos deslocamentos sejam calculadas para um certo ponto na sua posição inicial ou final, não sendo necessário portanto se distinguir entre coordenadas Lagrangeanas e Eulerianas nas expressões das componentes da deformação.

Tem-se assim:

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)}$$

Assim, supondo-se que a deformação é pequena, caem os termos quadráticos do tensor de Green e ele se iguala à definição de deformação específica linear

Relações Deformação – Deslocamento *Lineares*

Na notação algébrica usual: $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x, y, z$

$$u_1, u_2, u_3 \rightarrow u, v, w$$

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \ldots \rightarrow \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \ldots$$

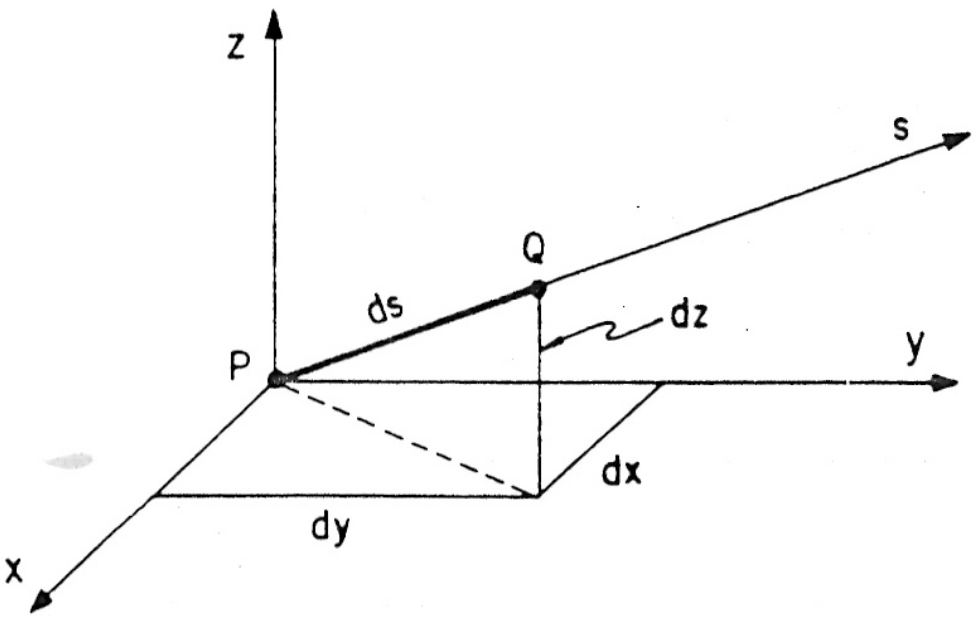
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_{xz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{yz} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ε_x é o alongamento relativo da projeção em x de um segmento elementar originalmente na direção x.

$\Longrightarrow$ ε_x é o alongamento relativo de um segmento elementar na direção x.

Deformação linear numa direção qualquer

Na figura abaixo, um segmento elementar PQ de comprimento ds e direção s é representado na sua configuração inicial.



co-senos diretores:

$$\begin{cases} \ell_1 = \dfrac{dx}{ds} = \cos(s,x) \\ \ell_2 = \dfrac{dy}{ds} = \cos(s,y) \\ \ell_3 = \dfrac{dz}{ds} = \cos(s,z) \end{cases}$$

Transformação dos Tensores

Pode-se mostrar pelas propriedades dos Tensores, que o Tensor de primeira ou segunda ordem pode ser colocado sob novas coordenadas ***x', y', z'*** como:

Lei de Transformação do Tensor de 1ª ordem: $$\boldsymbol{\rho}' = \mathbf{R}\,\boldsymbol{\rho}$$

Lei de Transformação do Tensor de 2ª ordem: $$\boldsymbol{\rho}' = \mathbf{R}\,\boldsymbol{\rho}\,\mathbf{R}^t$$

onde:

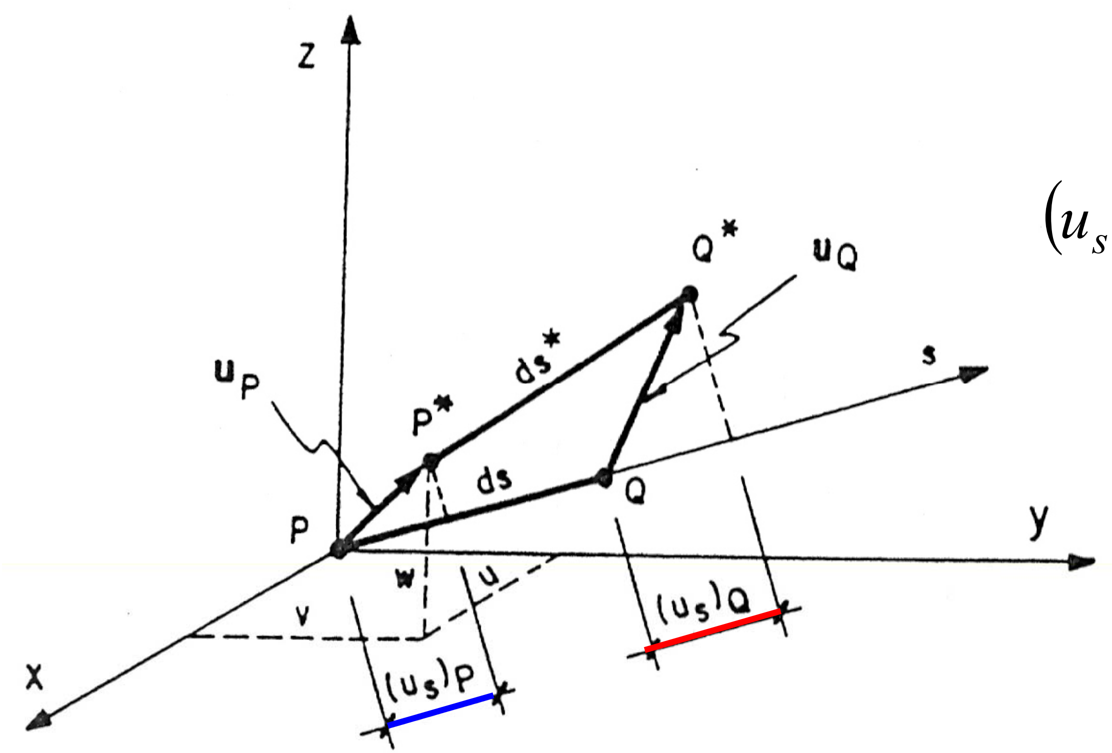
$$\mathbf{R} = \ell_{ij} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(x',y) & \cos(x',z) \\ \cos(y',x) & \cos(y',y) & \cos(y',z) \\ \cos(z',x) & \cos(z',y) & \cos(z',z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}\,\mathbf{R}^t = \ell_{\mathrm{ij}}\,\ell_{ji} = \delta_{ij} = \mathbf{I}$$

Deformação linear numa direção qualquer

Após a deformação o segmento passa para a posição P*Q* de comprimento ds*.

As projeções dos deslocamentos $\mathbf{u_p}$ e $\mathbf{u_q}$ sobre a direção s são dadas por:



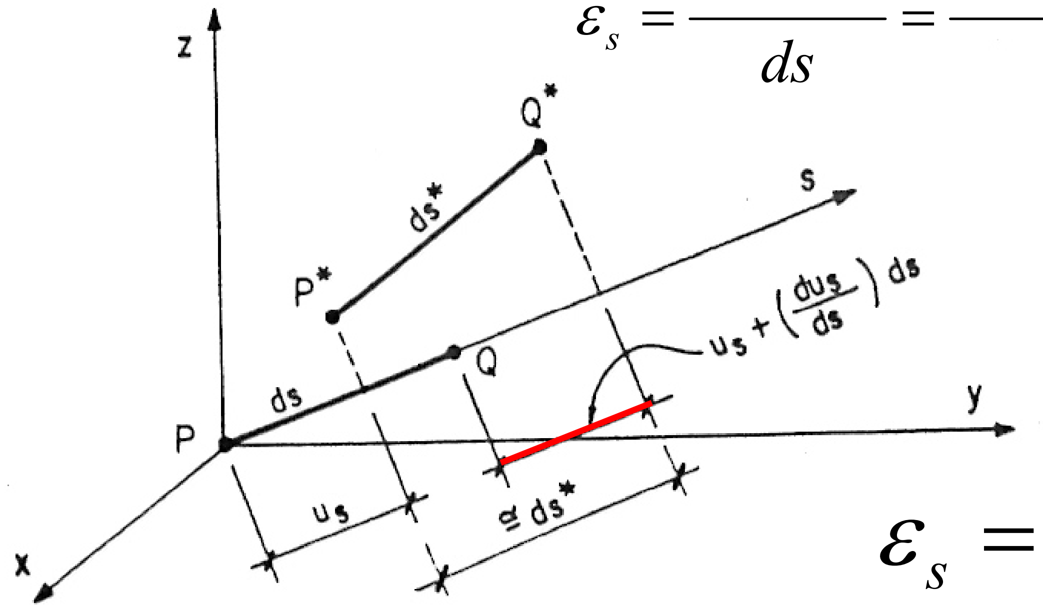
$$(u_s)_P = u_s \cdot \ell_s$$

$$(u_s)_Q = (u_s)_P + \left(\frac{du_s}{ds}\right) ds$$

Deformação linear numa direção qualquer

Considerando-se a hipótese de pequenas mudanças de configuração:

$$\varepsilon_s = \frac{ds^* - ds}{ds} = \frac{ds + u_s + \left(\frac{du_s}{ds}\right)ds - u_s - ds}{ds} = \frac{du_s}{ds}$$



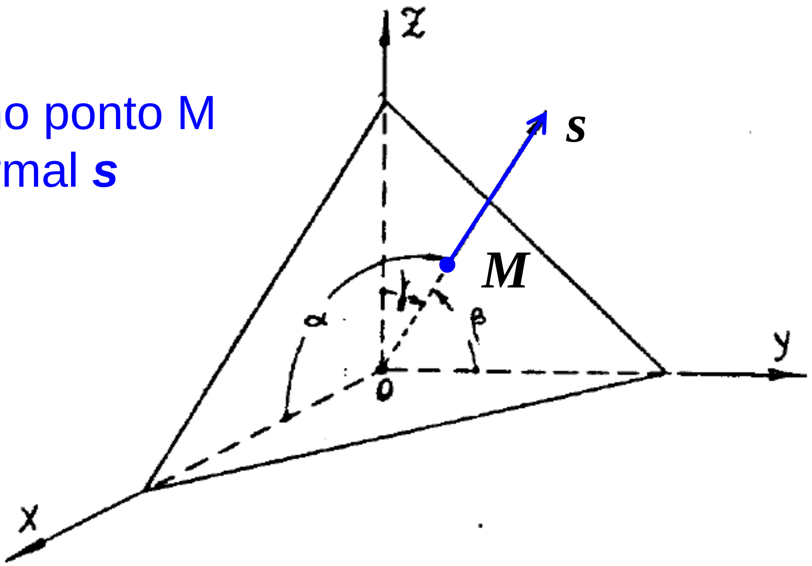
$$\varepsilon_s = u_{s,i}\ell_{si} = \ell_{si}\ell_{sj}\varepsilon_{ij}$$

Para deformações angulares: $$\varepsilon_{st} = \ell_{si}\ell_{tj}\varepsilon_{ij}$$

Deformação linear numa direção qualquer

$$\Rightarrow \{\varepsilon_s\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{sx} \\ \varepsilon_{sy} \\ \varepsilon_{sz} \end{Bmatrix}$$

⇒ vetor de deformações no ponto M associado ao plano de normal ***s***



⇓ Fórmula de *Cauchy*

$$\Rightarrow \{\varepsilon_s\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{sx} \\ \varepsilon_{sy} \\ \varepsilon_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{ij} \ell_j$$

Transformação dos Tensores

Lei de Transformação do Tensor de 2ª ordem:

$$\varepsilon'_{pq} = \ell_{pi}\ell_{qj}\varepsilon_{ij}$$

Equações de compatibilidade de deformações:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ki,lj} - \varepsilon_{lj,ki} = 0$$